VOLUMEN DE SOLIDOS DE REVOLUCION

Un sólido de revolución se genera cuando una región plana que está por completo en un lado de una recta fija en su plano, se hace girar alrededor de dicha recta. A esta recta se le denomina "Eje" de giro del sólido de revolución.

Existen dos métodos para calcular el volumen de un sólido de revolución:

a) Método de los Discos

b) Método de los cascarones cilíndricos

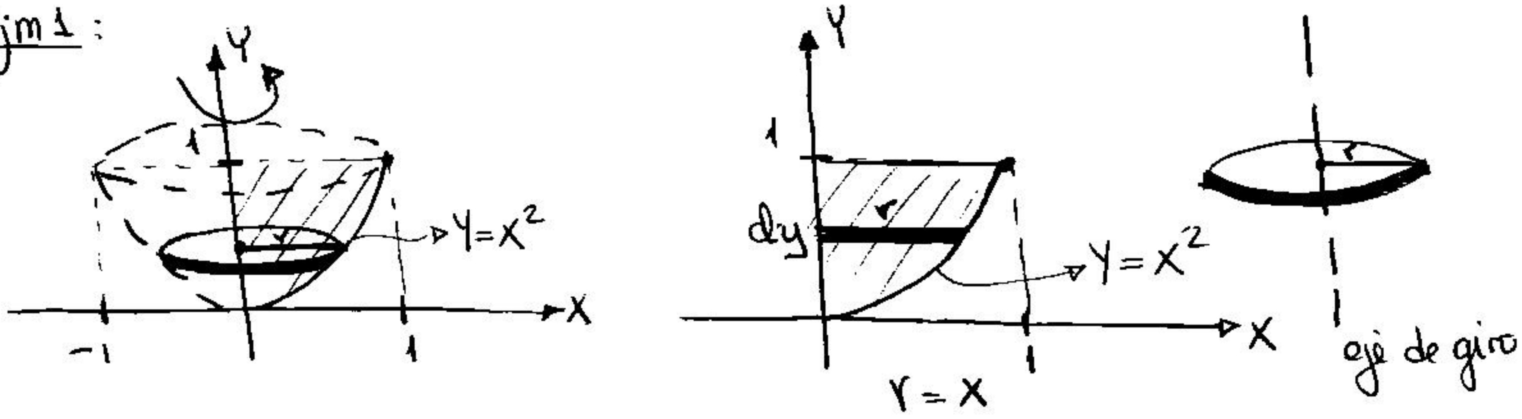
METODO DE LOS DISCOS:

Para aplicar este método, debemos estudiar si el sólido generado es macizo o hueco.

Comencemos el estudio para el caso en que el sólido generado, sea macizo.

Supongamos que el área limitada por $y = x^2$, el eje Y y la recta $Y = 1$, se hace girar alrededor del eje Y, como indica la figura

Ejm 1:



Para calcular el volumen del sólido de revolución, vamos a utilizar discos. El diferencial de volumen de cada disco viene dado por:

$$dV = (\text{Area de la base}) * \text{espesor}$$

$$dV = \pi . r^2 . dy$$

Si sumamos el volumen de todos los discos, se obtiene el volumen del sólido de revolución, el cual viene dado por la siguiente integral:

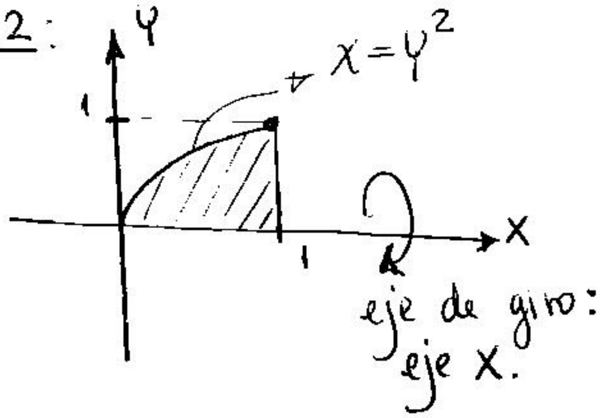
$$V = \int_0^1 \pi . r^2 dy = \int_0^1 \pi . (\sqrt{Y})^2 . dy = \pi \int_0^1 Y \, dy = \frac{\pi}{2} Y^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

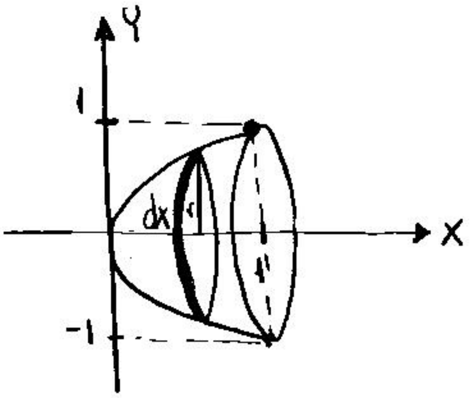
Al despejar "X" de la expresión $Y = X^2$; obtenemos que: $X = \sqrt{Y}$ y vemos en la figura que $r = X = \sqrt{Y}$

NOTA: Siempre el radio del disco, es perpendicular al eje de giro.

Consideremos nuevamente un sólido macizo, pero ahora el área está limitada por: $X = Y^2$, el eje X y la recta vertical $X = 1$, como indica la figura.

Ejm 2:





$$dV = \pi r^2 \cdot dX$$

$r = Y$ pero $Y = \sqrt{X}$. Por lo tanto, $r = \sqrt{X}$

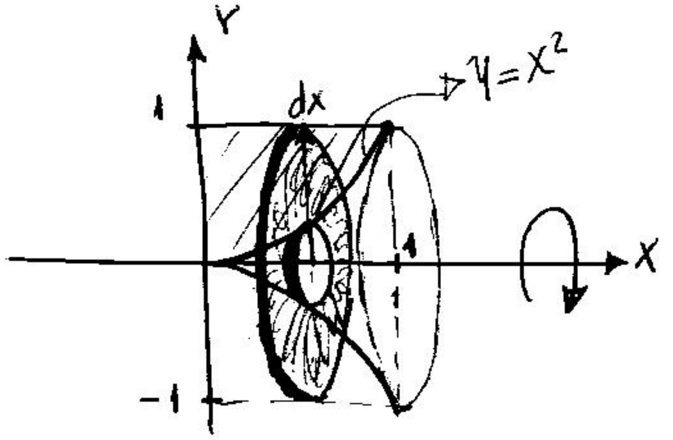
El volumen del sólido viene dado por:

$$V = \int_0^1 \pi \cdot r^2 dX = \int_0^1 \pi (\sqrt{X})^2 dX = \pi \int_0^1 X dX = \frac{\pi}{2} X^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Debemos expresar r en términos de X, que es la variable de integración; $r = \sqrt{X}$

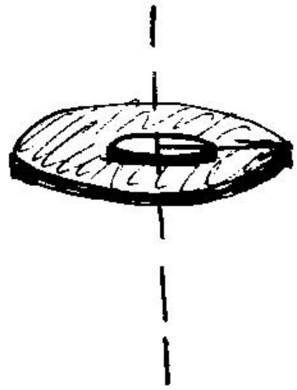
Ahora, haremos el estudio para el caso en que el sólido de revolución es hueco. Para ello, las mismas regiones descritas en los dos ejemplos anteriores, pero cambiaremos en cada caso el eje de giro.

Ejm 3: Consideremos la región del ejemplo 1, pero ahora la haremos girar alrededor del eje x, como se indica en la siguiente figura:



Como se puede observar en la figura, el sólido que se genera, es un sólido hueco.

Para el caso de los sólidos huecos, calculamos su volumen por medio de arandelas.



Sea r_1 el radio del disco interno y sea r_2 el radio del disco externo.

$$dV = \left[\pi r_2^2 - \pi r_1^2\right] \cdot \underbrace{dx}_{\text{espesor}}$$

$$dV = \pi (r_2^2 - r_1^2)\, dx$$

Finalmente, el volumen del sólido viene dado por la integral:

$$V = \int_0^1 \pi (r_2^2 - r_1^2)\, dx$$

donde r_2 y r_1 deben expresarse en términos de la variable x, que es la variable de integración.

Para este caso: $r_1 = Y = x^2 \longrightarrow r_1 = x^2$

[redacted] $\longrightarrow r_2 = 1$

Como r_1 y r_2 son distancias verticales, entonces para cada caso, se tiene que:

$r_1 = Y_S - Y_I = X^2 - 0 \longrightarrow r_1 = X^2$

$r_2 = Y_S - Y_I = 1 - 0 \longrightarrow r_2 = 1$

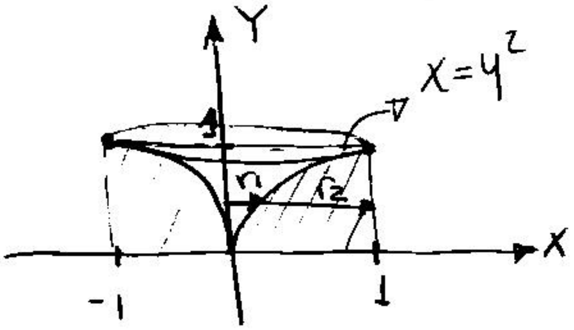
Y_S : Y superior
Y_I : Y inferior } Igual a lo visto y estudiado en "Cálculo de Areas Planas".

Finalmente:

$$V = \pi \int_0^1 [1 - (x^2)^2]\,dx = \pi \int_0^1 (1 - x^4)\,dx$$

$$V = \pi \left[x - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}\pi \qquad \boxed{V = \frac{4}{5}\pi}$$

Ejm 4: Consideremos la región del ejemplo 2, pero ahora la haremos girar alrededor del eje Y.



Sólido hueco: El espesor de cada arandela viene dado por dy y los radios vienen dados por:

$r_1 = X_D - X_I$
$r_2 = X_D - X_I$ } Por ser distancias horizontales, vienen dadas por X_D (X derecha) $- X_I$ (X izquierda).

En este caso:

$r_1 = X = y^2 \rightarrow r_1 = y^2$

$r_2 = 1 \rightarrow r_2 = 1$

$$V = \pi \int_0^1 [1 - (y^2)^2]\,dy = \pi \int_0^1 (1 - y^4)\,dy$$

$$V = \pi \left[y - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4}{5}\pi$$