ECUACIONES DE MAXWELL

Prof. Juan Carlos Muñoz

ECUACIONES DE MAXWELL

Los fenómenos eléctricos y magnéticos fueron analizados por James Clerk Maxwell en 1864 y comprobado experimentalmente varios años después. Las propiedades de los campos eléctricos y magnéticos pueden expresarse por medio de un conjunto de ecuaciones que se llaman Ecuaciones de Maxwell, dichas ecuaciones reúnen en una forma generalizada varias de la Leyes conocidas tales como la Ley de Faraday, la Ley de Ampere y la Ley de Gauss.

En el presente capítulo se estudian las cuatro Leyes de Maxwell en su forma diferencial e integral, para ello inicialmente se presenta un resumen de los principales términos y relaciones matemáticas aplicables a los campos vectoriales y escalares, posteriormente, a partir de las Leyes fundamentales se desarrollan las ecuaciones de Maxwell.

La importancia del estudio de dichas Leyes radica en su aplicabilidad generalizada, por ejemplo, las relaciones circuitales comúnmente conocidas pueden ser derivadas a partir de las Ecuaciones de Maxwell, lo que demuestra que tales relaciones circuitales no son más que casos particulares de las ecuaciones de campo y pueden deducirse de éstas.

Para estudiar las ecuaciones de Maxwell, es necesario conocer algunas definiciones básicas que se explican a continuación:

El Gradiente:

Si se tiene un campo escalar, se pueden definir las propiedades de un punto cualquiera de dicho campo solamente a través de las coordenadas del punto, de ésta forma se puede expresar la siguiente función escalar:

$$U(x, y, z) \qquad (1)$$

Si a cada punto del campo se le asigna un vector que tenga las dos siguientes propiedades:

-**Dirección y sentido**: el de más rápido crecimiento de U.
-**Módulo**: el del valor absoluto de la función escalar, para un recorrido l=1.

Al vector anteriormente descrito se llama vector gradiente, o simplemente gradiente. En la figura se muestra un campo escalar representado por sus líneas, el punto M_1 pertenece a una superficie en donde la función escalar vale U_1. Si se toma la dirección del máximo crecimiento de U desde U_1 hasta U_2, se obtiene un vector que es justamente el gradiente.

En la figura 1 se muestra el vector gradiente (en rojo) descompuesto según las tres direcciones de referencia, el valor de cada una de las componentes es la variación de la función según la dirección considerada.

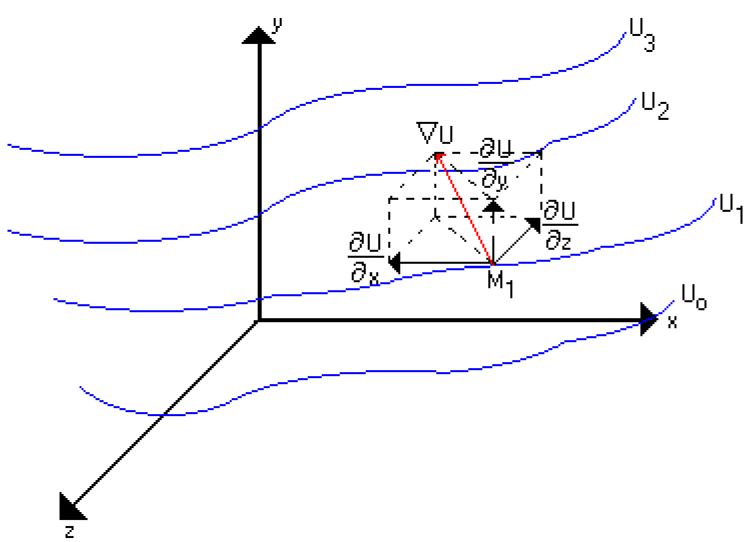

Fig. 1. Gradiente

El gradiente lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{a}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{a}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{a}_z \qquad (2)$$

Se puede determinar el gradiente de una función escalar según una cierta dirección dada por un vector $\overline{dl}$ que no necesariamente es la dirección de máximo crecimiento. El vector $\overline{dl}$ viene expresado de la siguiente manera:

$$\overline{dl} = dx \cdot \bar{a}_x + dy \cdot \bar{a}_y + dz \cdot \bar{a}_z \qquad (3)$$

La integral curvilínea del producto escalar del gradiente y del vector $\overline{dl}$ en un trayecto dado entre dos puntos p_1 y p_2 es:

$$\int_{p_1}^{p_2} \overline{\nabla U} \cdot \overline{dl} = \int_{p_1}^{p_2} dU = U_2 - U_1 \qquad (4)$$

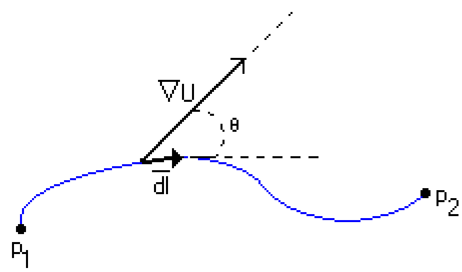

Fig. 2 Gradiente de una función escalar

La expresión anterior es de gran importancia, y nos indica que la integral curvilínea entre dos puntos depende únicamente del valor de la función en dichos puntos, independientemente del camino recorrido.

Si se integra el gradiente a través de una trayectoria cerrada, el resultado es igual a cero.

$$\oint_L \overline{\nabla U} \cdot \overline{dl} = 0 \qquad (5)$$

<u>Flujo de un vector</u>:

El concepto de flujo de un vector está directamente asociado con el de la superficie a la cual se refiere. Para efectos de estudio, las superficies se representan por medio de vectores.

Consideremos una superficie elemental **ds** que forma parte de otra mayor **S** , de la cual sale un vector unitario $\overline{n}$ normal a la misma tal y como se muestra en la figura:

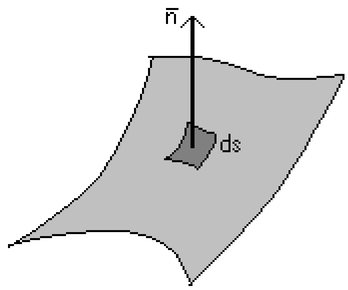

Fig.3 Superficie elemental

El vector $\overline{n}$ representa a la superficie **ds**, tiene módulo unitario y su sentido se escoge arbitrariamente. Una vez definido, debe conservarse para todos los demás elementos de la misma superficie.

El flujo del vector $\overline{A}$ a través de la superficie diferencial **ds** se define como el siguiente producto escalar:

$$d\phi = \overline{A} \cdot \overline{n}\, ds = A\, n \cos\theta \,\mathrm{ds} \qquad (6)$$

Reduciendo la expresión anterior:

$$d\phi = A \cos\theta \,\mathrm{ds} \qquad (7)$$

Si se desea calcular el flujo total emergente de una superficie S, que encierra un volumen V de acuerdo a la figura 5, debemos integrar de la siguiente manera:

$$\phi = \int_S \overline{A} \cdot \overline{n}\, ds = \int_S A \cos\theta \,\mathrm{ds} \qquad (8)$$

El flujo es una magnitud escalar.

<u>Divergencia:</u>

La divergencia representa una forma de caracterizar la forma en que un campo vectorial cambia de un punto a otro a través del espacio.

La divergencia de un campo vectorial A viene dada por la siguiente expresión:

$$div\,\overline{A} = \nabla.\overline{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint A \cdot ds}{\Delta v} \qquad (9)$$

El numerador de esta expresión es el flujo total emanado de la superficie cerrada **S** que envuelve al volumen **V.** El límite indica que la divergencia es el flujo de un volumen infinitamente pequeño, o sea, emergente de un punto. Por lo tanto, otra forma de expresión de la divergencia será:

$$\nabla.\overline{A} = \frac{d\phi}{dv} \qquad (10)$$

Cuando la divergencia de un campo vectorial es diferente de cero, se dice que la región contiene fuentes o sumideros; fuentes cuando la divergencia es positiva y sumideros cuando es negativa. En los campos eléctricos estáticos hay una correspondencia entre la divergencia positiva, las fuentes y la carga eléctrica positiva Q. El flujo eléctrico se origina por definición en una carga positiva. Así pues, una región que contiene cargas positivas contiene fuentes de flujo. Una correspondencia similar existe entre la divergencia negativa, los sumideros y la carga eléctrica negativa.

Cuando la divergencia del campo vectorial es cero, entonces se denomina campo solenoidal. En la figura 5 se muestra un ejemplo de un campo solenoidal las superficies S_1 y S_2 y las líneas de campo que delimitan una porción. A tal conjunto se le denomina tubo de líneas. Como el vector $\overline{A}$ es tangente a las líneas de campo la superficie lateral de ese sólido no emite líneas, y todo el flujo que entra por S_1 debe salir por S_2 . En consecuencia, en el tubo no se originan ni terminan líneas , y por tal razón se dice que allí:

$$\nabla\overline{A} = 0 \qquad (11)$$

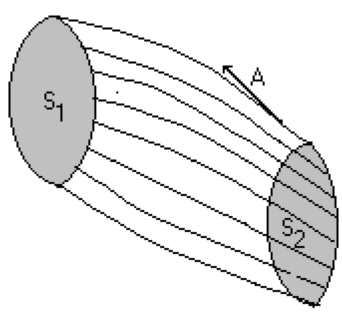

Fig. 4. Divergencia

En coordenadas cartesianas la divergencia nos queda de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \overline{A} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} \qquad (12)$$

<u>Teorema de la integral de Gauss</u>:

Este teorema, también llamado teorema de la divergencia expresa que el flujo de un vector extendido a la superficie cerrada **S** es igual a la divergencia del mismo vector extendida al volumen **V** que encierra la misma superficie S. Este teorema permite transformar una integral de volumen (integral triple) en una integral de superficie (integral doble). Su expresión es la siguiente:

$$\int_S \overline{A} \cdot \overline{ds} = \int_V \nabla \cdot \overline{A} dv \qquad (13)$$

<u>Rotacional</u>:

El rotacional de un campo vectorial A es otro campo vectorial. Para definir el rotacional es necesario exponer lo que se entiende por circulación de un vector. Consideremos una superficie elemental **ds** que posee una normal $\overline{n}$, supongamos además que nos encontramos en un campo vectorial al que en cada punto corresponde un vector $\overline{A}$ tal y como se muestra en la figura 6:

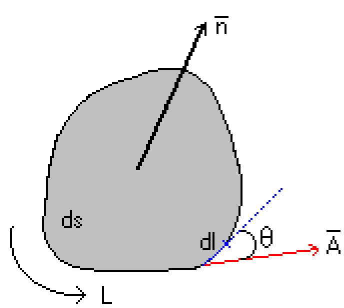

Fig. 5. Rotacional

La circulación del vector $\overline{A}$ a lo largo de L, se expresa por:

$$\oint_L \overline{A} \cdot \overline{dl} = \oint_L A \cos\theta \, dl \qquad (14)$$

La circulación se define entonces por la integral curvilínea extendida a un trayecto cerrado que bordea una superficie. Establecido esto, se puede decir que el rotacional es un vector que tiene como módulo el valor de la circulación por unidad de área y como dirección y sentido, los del vector $\overline{n}$ normal a la superficie alrededor de la cual se hace la circulación. La expresión que define el rotacional es la siguiente:

$$R_n = rot_n \overline{A} = \nabla \times \overline{A} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_L \overline{A} \cdot \overline{dl}}{\int_S ds} \qquad (15)$$

En coordenadas cartesianas se puede escribir el rotacional de la siguiente manera:

$$\nabla \times \overline{A} = \overline{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \overline{a}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \overline{a}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \qquad (16)$$

La expresión 16 es más fácil de recordar si se escribe en forma de determinante:

$$\nabla \times \overline{A} = \begin{vmatrix} \overline{a}_x & \overline{a}_y & \overline{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad (17)$$

Fórmula de Stokes:

La fórmula de Stokes es la expresión del teorema del rotor, que dice: Si en un campo de vectores $\overline{A}$ existe una superficie cuyo perímetro es una línea cerrada L, la circulación de A a lo largo del perímetro es igual al flujo del rotor de A a través de la superficie dada. La expresión de la fórmula de Stokes es la siguiente:

$$\oint_L \overline{A} \cdot \overline{dl} = \int_S \nabla \times \overline{A} \cdot \overline{ds} \qquad (18)$$

Dos propiedades del operador rotacional frecuentemente útiles son:

1) La divergencia de un rotacional es cero. Esto es,

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \overline{A} \right) = 0 \qquad (19)$$

2) El rotacional de un gradiente es cero. Esto es,

$$\nabla \times \left(\overline{\nabla U} \right) = 0 \qquad (20)$$

Ley de Gauss

La ley de Gauss establece que el flujo total que sale de una superficie cerrada es igual a la carga neta contenida dentro de la superficie. La expresión es la siguiente:

$$\int \overline{D} \cdot \overline{ds} = Q_{enc} \qquad (21)$$

Donde:

D: Densidad de flujo eléctrico. En coulomb/m^2
ds: diferencial de superficie.
Q_{enc}: Carga encerrada por la superficie.

La carga neta que está contenida en un volumen específico se puede obtener a partir de la siguiente expresión:

$$Q_{enc} = \int_v \rho \, dv \qquad (22)$$

Donde:

ρ: densidad volumétrica de carga. En C/m^3.
dv: diferencial de volumen.

La densidad de flujo eléctrico $\overline{D}$, es un campo vectorial que toma la dirección de las líneas de flujo. En la figura 6 se ilustra una distribución volumétrica de carga de densidad ρ rodeada por la superficie **S** . La densidad $\overline{D}$ puede variar en magnitud y en dirección en cada punto de **S.** En general $\overline{D}$ no estará a lo largo de la normal a S sino que formará un ángulo θ con la normal.

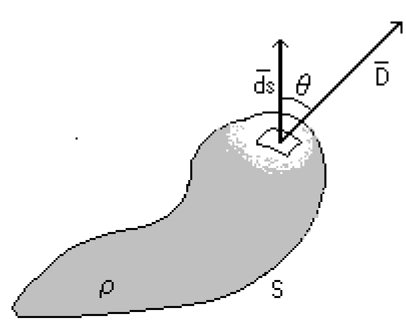

Fig. 6. Densidad de Flujo Electrico

La intensidad de campo eléctrico se relaciona con la densidad de flujo mediante la siguiente relación:

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} \qquad (23).$$

<u>Ecuación de divergencia de Maxwell:</u>

Dividiendo la ecuación 21 (Ley de Gauss) por un elemento diferencial de volumen, obtenemos:

$$\frac{\oint \overline{D} \cdot \overline{ds}}{\Delta v} = \frac{Q_{enc}}{\Delta v} \qquad (24).$$

En el límite,

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \overline{D} \cdot \overline{ds}}{\Delta v} = \nabla \cdot \overline{D} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{Q_{enc}}{\Delta v} = \rho \qquad (25)$$

De esta forma se obtiene la ecuación de divergencia de Maxwell en forma puntual que tiene por expresión:

$$\boxed{\nabla \cdot \overline{D} = \rho} \qquad (26)$$

En una región libre de cargas, $\rho = 0$, y

$$\boxed{\nabla \cdot \overline{D} = 0} \qquad (27)$$

Aplicando el teorema de la integral de Gauss (teorema de la Divergencia), la ecuación 26 nos queda en forma integral:

$$\boxed{\oint_S \overline{D} \cdot \overline{ds} = \int_v \rho \, dv} \qquad (28)$$

La ecuación 28 es la forma integral de la ecuación de divergencia de Maxwell.

Ecuación de Maxwell de la no-existencia de monopolo:

Los tubos de flujo de un campo eléctrico estático tienen su origen y su fin en cargas eléctricas. Por el contrario, los tubos de flujo magnético son continuos, es decir, carecen de fuentes y sumideros. Es ésta una diferencia fundamental entre el campo eléctrico estático y el campo magnético. Para expresar esta continuidad de los tubos de flujo, dícese que la densidad de flujo B es solenoidal. Por ser continuos los tubos de flujo, el flujo magnético que penetra a un volumen debe ser igual al que sale del mismo volumen. De esta forma se obtiene otra de las ecuaciones de Maxwell:

$$\boxed{\oint_S \overline{B} \cdot \overline{ds} = 0} \qquad (29)$$

La ecuación 29 puede considerarse como la expresión de la Ley de Gauss aplicada al campo magnético, de la ecuación 29 se puede obtener:

$$\boxed{\nabla \cdot \overline{B} = 0} \qquad (30)$$

Tanto la ecuación 29 como la ecuación 30 son expresiones de la naturaleza continua de la densidad de flujo magnético, siendo la ecuación 29 válida para un volumen finito y la ecuación 30 válida para un punto.

Ley de Ampere:

Consideremos que el origen de coordenadas en la figura 7 está situado en el interior de un medio conductor de gran extensión. Sea J (ampere/metro^2) la densidad de corriente en el medio, coincidente en dirección y sentido con el eje de las **y** positivas.

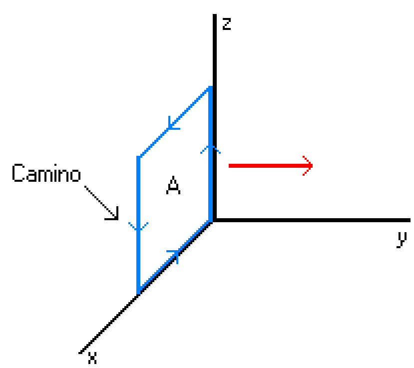

Fig. 7. Ley de Ampere

De acuerdo con la Ley de Ampere, la integral curvilínea de H a lo largo del camino rectangular que limita el área A es igual a la corriente rodeada por este camino. En este caso, la corriente I encerrada por el camino está dada por la integral de la componente normal de J sobre la superficie A, es decir:

$$\oint \overline{H} \cdot \overline{dl} = \int_A \int \overline{J} \cdot \overline{ds} = I \qquad (31)$$

<u>Ecuación de Maxwell a partir de la Ley de Ampere:</u>

La ecuación 31 sólo está restringida al caso en que sólo hay corrientes de conducción, sin embargo puede extenderse al caso general de la manera siguiente:

$$\oint \overline{H} \cdot \overline{dl} = \int_S \left(\overline{J}_{cond} + \overline{J}_{des} \right) \cdot \overline{ds} \qquad (32)$$

$$\oint \overline{H} \cdot \overline{dl} = \int_S \left(\sigma \overline{E} + \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \right) \cdot \overline{ds} \qquad (33)$$

Donde:

$\overline{J}_{cond}$: Densidad de corriente de conducción.
$\overline{J}_{des}$: Densidad de corriente de desplazamiento.
σ : Conductividad del medio.
ε : Permitividad del medio.

La corriente de conducción a través de una superficie S viene dada por la siguiente expresión:

$$\int_s \sigma \overline{E} \cdot \overline{ds} \qquad (34)$$

Mientras que la corriente de desplazamiento a través de la misma superficie es:

$$\int_s \varepsilon \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \cdot ds \qquad (35)$$

La ecuación 33 se puede escribir también de la forma:

$$\boxed{\oint \overline{H} \cdot \overline{dl} = \int_s \left(\overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \right) \cdot \overline{ds}} \qquad (36)$$

La ecuación 36 es la forma integral de la ecuación de Maxwell.

Aplicando el teorema de Stokes a la ecuación 36 se obtiene la expresión completa de la forma diferencial de la ecuación de Maxwell derivada de la Ley de Ampere:

$$\boxed{\nabla \times \overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}} \qquad (37)$$

Ley de Faraday:

La Ley de Faraday establece una relación cuantitativa entre la f.e.m. inducida en una espira cerrada y el campo magnético inductor. Según ésta ley, la f.e.m. total inducida en un circuito cerrado es igual a la velocidad de disminución del flujo magnético total concatenado por el circuito. La ecuación es la siguiente:

$$e = -\frac{d\phi_m}{dt} \qquad (38)$$

El flujo magnético tiene por expresión:

$$\phi_m = \int_s \overline{B} \cdot \overline{ds} \qquad (39)$$

Sustituyendo 39 en 38:

$$e = -\frac{d}{dt}\int_S \overline{B} \cdot \overline{ds} \qquad (40)$$

Cuando la espira o el circuito cerrado es estacionario o fijo, obtenemos:

$$e = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds \qquad (41)$$

El signo negativo indica que la f.e.m. y la corriente tienen sentido positivo con respecto al sentido del campo cuando el campo, y por lo tanto el flujo disminuye con el tiempo. En la figura 9 se muestra una espira de alambre sometido a la acción de un campo magnético cuya dirección y sentido está indicado, si el flujo decrece, la dirección de la corriente es la de la figura:

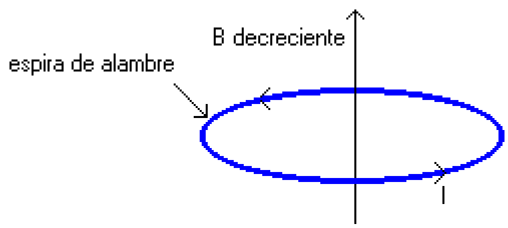

Fig. 8. Ley de Faraday.

Tensión inducida en un conductor en movimiento:

En el caso de un conductor en movimiento sometido a la acción de un campo magnético tal y como se muestra en la figura 10, la tensión inducida viene dada por la siguiente expresión:

$$e = \int \left(\bar{v} \times \bar{B}\right) \cdot \overline{dl} \qquad (42)$$

Donde:

e : f.e.m. inducida sobre la longitud l del alambre (volt).
$\overline{dl}$: elemento de longitud de alambre (metro).
$\bar{v}$: velocidad del alambre (metro/segundo).
$\bar{B}$: densidad de flujo del campo magnético (weber/metro^2)

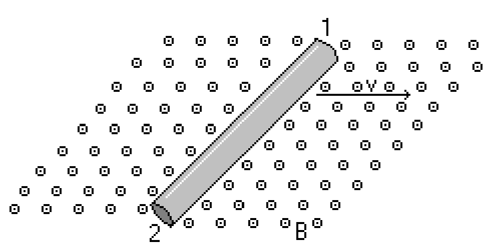

Fig. 9. Tensión inducida en un Conductor en Movimiento sujeto a un Campo

La ecuación 39 expresa la ley de la inducción mocional, que da la f.e.m. inducida en un conductor que se mueve con respecto al observador en un campo magnético estacionario.

Caso general de inducción:

Cuando ocurren simultáneamente los dos tipos de variación, es decir, cuando B varía en el tiempo y el circuito no es estacionario, la f.e.m. total inducida es igual a la suma de las ff.ee.mm dadas respectivamente por las ecuaciones 41 y 42:

$$e = \oint (v \times B) \cdot dl - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds \qquad (43)$$

Se pueden resumir 4 expresiones de inducción a saber:

$e = \oint (v \times B) \cdot dl - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$ **Caso general**

$e = \oint (v \times B) \cdot dl$ **Sólo movimiento (inducción mocional)**

$e = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$ **Sólo varía B (inducción en el transformador)**

$e = -\frac{d}{dt} \int_S B \cdot ds$ **Variación del flujo concatenado.**

<u>Ecuación de Maxwell derivada de la Ley de Faraday (Forma integral):</u>

A la ecuación:

$$e = \oint E \cdot dl = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds \qquad (44)$$

Se le conoce como la ecuación de Maxwell derivada de la ley de Faraday en su forma integral . De acuerdo a esta ecuación la integral curvilínea del campo eléctrico a lo largo de una espira o circuito estacionario es igual a la componente normal de la velocidad de disminución de la densidad de flujo **B** integrada sobre una superficie bordeada por el circuito. Ambas integrales son iguales a la f.e.m. total **e** inducida en el circuito.

<u>Ecuación de Maxwell derivada de la Ley de Faraday (Forma diferencial):</u>

Haciendo uso del teorema de Stokes, la ecuación 44 la podemos escribir de la forma siguiente:

$$\iint (\nabla \times E) \cdot ds = -\iint \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds \qquad (45)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (46)$$

La ecuación 46 es la ecuación de Maxwell en su forma diferencial, tal como se deriva de la Ley de Faraday, ésta ecuación indica que si B varía en el tiempo, en un punto P dado, el rotacional de E tiene, en ese mismo punto, un valor distinto de cero.

En la tabla número 1 se muestran las ecuaciones de Maxwell particularizadas para el espacio libre y para distintas formas de variación de los campos.

Tabla 1:
Ecuaciones de Maxwell en la forma integral

	De la Ley de Ampere	De la Ley de Faraday	De la Ley de Gauss	De la Ley de Gauss
Caso/Dimensiones	F.m.m.	F.e.m.	Flujo eléctrico	Flujo eléctrico
Unidades	Ampere	Volt	Coulomb	Weber
General	$F = \oint H \cdot dl = \int_S \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot ds = I_{total}$	$e = \oint E \cdot dl = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$	$\psi = \int_S D \cdot ds = \int_v \rho dv$	$\psi_m = \oint_S B \cdot ds = 0$
Espacio libre	$F = \oint H \cdot dl = \oint_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot ds = I_{des}$	$e = \oint E \cdot dl = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$	$\psi = \oint_S D \cdot ds = 0$	$\psi_m = \oint_S B \cdot ds = 0$
Variación Armónica	$F = \oint H \cdot dl = (\sigma + jw\varepsilon) \int_S E \cdot ds = I_{total}$	$e = \oint E \cdot dl = -j\omega\mu \int_S H \cdot ds$	$\psi = \oint_S D \cdot ds = \int_v \rho dv$	$\psi_m = \oint_S B \cdot ds = 0$
Estacionario	$F = \oint H \cdot dl = \int_S J \cdot ds = I_{cond}$	$e = \oint E \cdot dl = 0$	$\psi = \oint_S D \cdot ds = \int_v \rho dv$	$\psi_m = \oint_S B \cdot ds = 0$
Estático	$U = \oint H \cdot dl = 0$	$e = \oint E \cdot dl = 0$	$\psi = \oint_S D \cdot ds = \int_v \rho dv$	$\psi_m = \oint_S B \cdot ds = 0$

Tabla 2:
Ecuaciones de Maxwell en la forma diferencial

	De la Ley de Ampere	**De la Ley de Faraday**	**De la Ley de Gauss**	**De la Ley de Gauss**
$Caso/Dimensiones$	$\frac{Corriente\ eléctrica}{área}$	$\frac{Potencial\ eléctrico}{área}$	$\frac{Flujo\ eléctrico}{volúmen}$	$\frac{Flujo\ magnético}{\text{volúmen}}$
General	$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$	$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\nabla \cdot D = \rho$	$\nabla \cdot B = 0$
Espacio libre	$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$	$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\nabla \cdot D = 0$	$\nabla \cdot B = 0$
Variación armónica	$\nabla \times H = (\sigma + j\omega\varepsilon)E$	$\nabla \times E = -j\omega\mu H$	$\nabla \cdot D = \rho$	$\nabla \cdot B = 0$
Estacionario	$\nabla \times H = J$	$\nabla \times E = 0$	$\nabla \cdot D = \rho$	$\nabla \cdot B = 0$
Estático	$\nabla \times H = 0$	$\nabla \times E = 0$	$\nabla \cdot D = \rho$	$\nabla \cdot B = 0$

Junto con las ecuaciones de Maxwell hay otras relaciones de importancia para la resolución de los problemas electromagnéticos. Entre ellas tenemos:

$$J = \sigma E \quad (47) \quad \text{Ley de Ohm.}$$

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (48) \quad \text{Relación de continuidad.}$$

$$F = qE \quad (49)$$

$$dF = I\, dl \times B \quad (50)$$

De igual forma tenemos las ecuaciones de los potenciales:

En forma Puntual:

$$B = \nabla \times A$$

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot A = -\mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

En forma Integral

$$V = \int_V \frac{\rho}{4\pi\varepsilon R} dv$$

$$\overline{A} = \int_V \frac{\mu J}{4\pi R} dv$$