UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA VENEZUELA

Mecánica Racional 20

Escuela Básica de INGENIERIA

PLAN DE EVALUACIÓN DE LA ASIGNATURA MECÁNICA RACIONAL 20 EN EL MINISEMESTRE B-2013 DE LA SECCIÓN 03

TEMA	CONTENIDO	EVALUACIÓN			
1	Cinemática de Partículas	Primer Parcial			
2	Cinética de partículas	Segundo Parcial			
3	Método de Trabajo y Energía	Tercer Parcial			
4	Cinemática de Cuerpos Rígidos	Cuarto Parcial			

OBSERVACIONES.

- **Diferido (2horas). Contenido temas 1, 2 y 3.**
- El **cuarto parcial no podrá ser diferido**.
- Todas las evaluaciones se realizaran en el salón y horario asignado para la sección 03 de MR20.
- La ponderación de las evaluaciones no será cambiada bajo ninguna circunstancia.
- La materia será reprobada con el 25% de inasistencia.

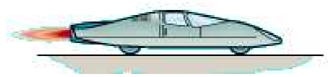
Prof. Ing. Nayive Jaramillo Santana

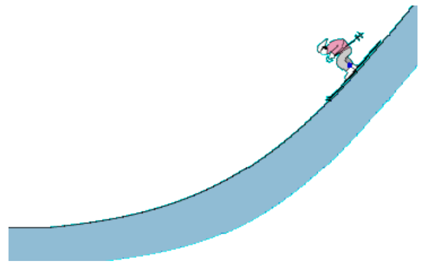
BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA .

- Ramón Puello. *Lecciones Elementales de Dinámica*. Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes.
- Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston. *Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinámica.* McGrawHill.
- R.C. Hibbeler. Mecánica Vectorial para ingenieros. Dinámica. Decima Edición. Pearson, Prentice Hall.
- J.L. Merian. Mecánica para Ingenieros. Dinámica.
- Singer L. Ferdinand. Mecánica para ingenieros. Dinámica.
- Apuntes de la asignatura.

¿Partícula?

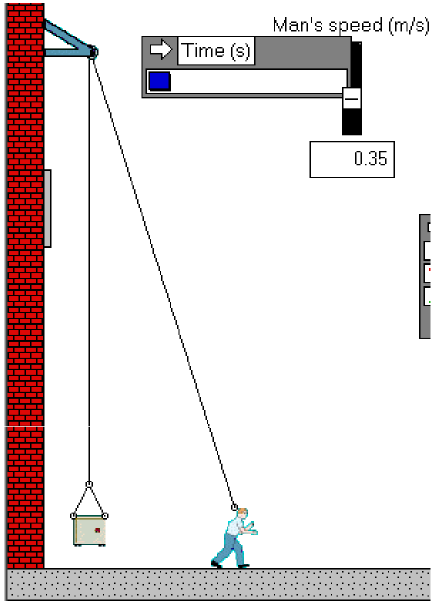
- En física, un **cuerpo dotado de masa, y del que se hace abstracción del tamaño y de la forma, pudiéndose considerar como un Punto (geometría).**
- En ingeniería ambiental, un sólido o líquido suspendido en el aire formando un aerosol.
- En lingüística, una partícula gramatical.
- En gráficos por ordenador, un elemento de un sistema de partículas (simulación).
- Uso común: una cantidad muy pequeña o insignificante.

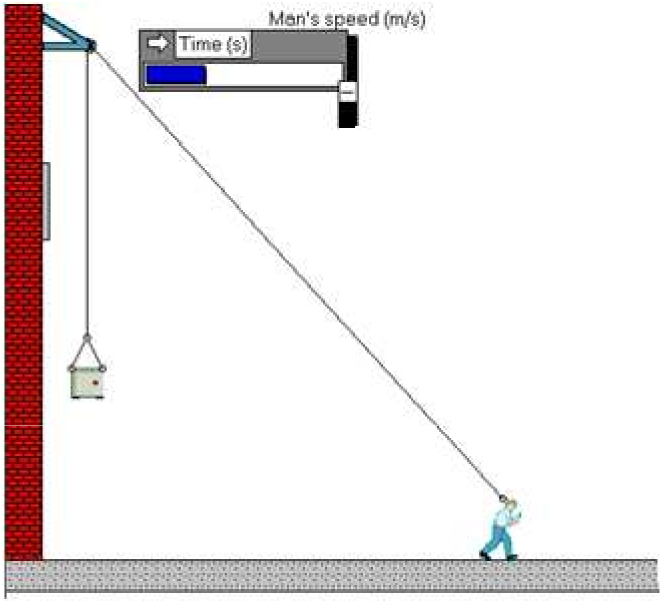


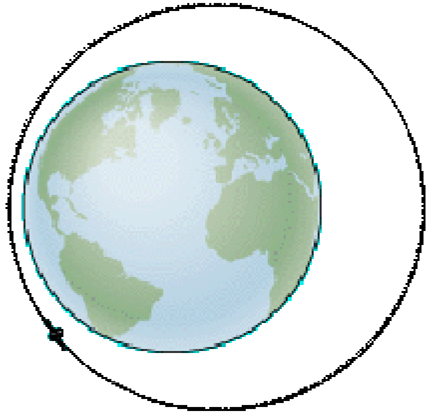


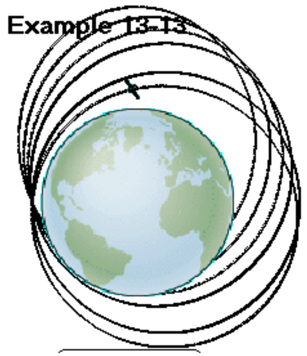
Ing. Nayive Jaramillo Santana

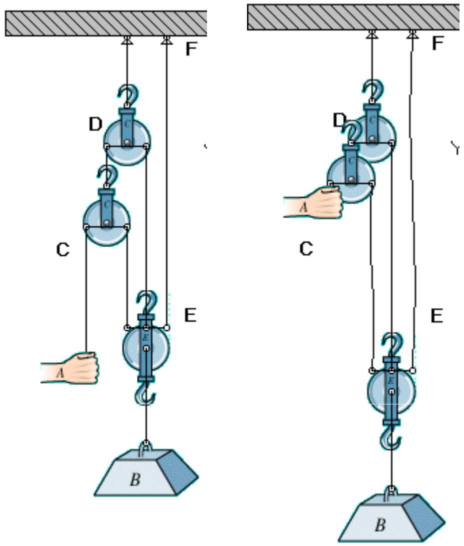
Ing. José Gregorio Gutiérrez

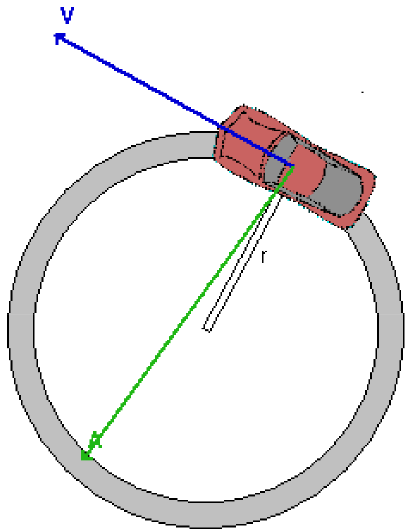

Man's speed (m/s)
Time (s)
0.35

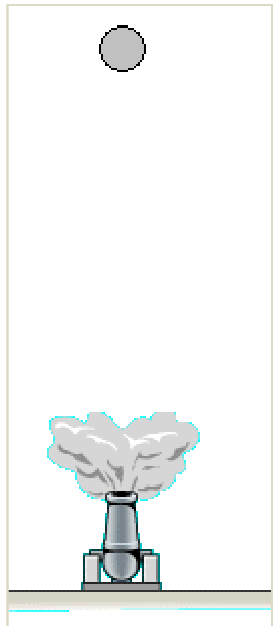

Man's speed (m/s)
Time (s)




Example 13-13







Consideraremos Partícula a un cuerpo dotado de masa, y del que se hace abstracción del tamaño y de la forma, pudiéndose considerar como un Punto y así lograr estudiar su movimiento. En un primer caso, obviando las fuerzas que generan el movimiento (geometría del movimiento); mientras que en un segundo caso se considerarán las fuerzas que influyen o generan el movimiento de la partícula a analizar.

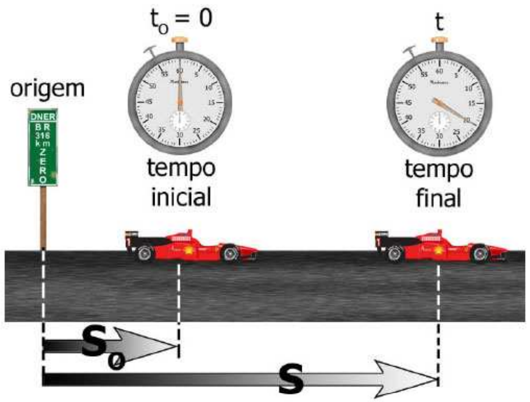
Cinemática de partículas.

Es el estudio de la geometría del movimiento. Se usa para relacionar el **desplazamiento**, la **posición**, la **velocidad**, la **aceleración** y el **tiempo**, sin hacer referencia a la causa del movimiento.

Cinética de partículas.

Es el estudio de la relación que existe entre las fuerzas que actúan sobre un "cuerpo", la masa del cuerpo y el movimiento de éste.

Movimiento Rectilíneo.



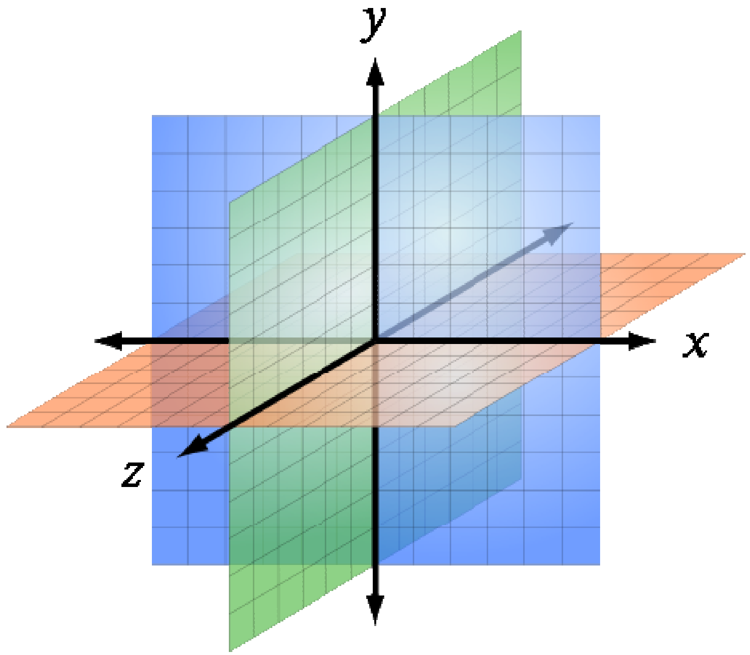
Es cuando la trayectoria que describe la partícula es una línea recta.

Movimiento Curvilíneo.

Es cuando la trayectoria que describe la partícula es una línea no recta.

¿Qué necesitamos para representar un movimiento?

1) Nivel de referencia



1.a) Sistema de coordenadas

– Rectangulares

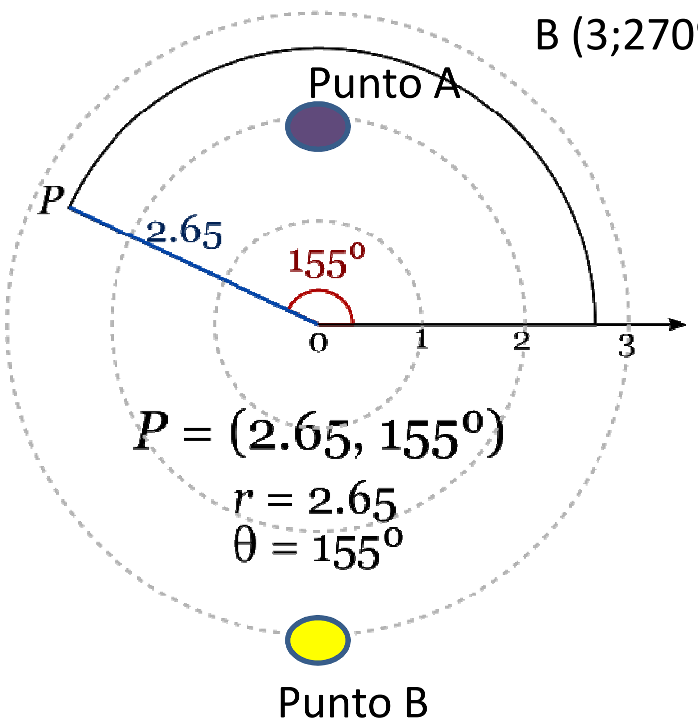
- dos dimensiones→ (x, y) ; (y, z); (x, z)
- tres dimensiones → x, y, z

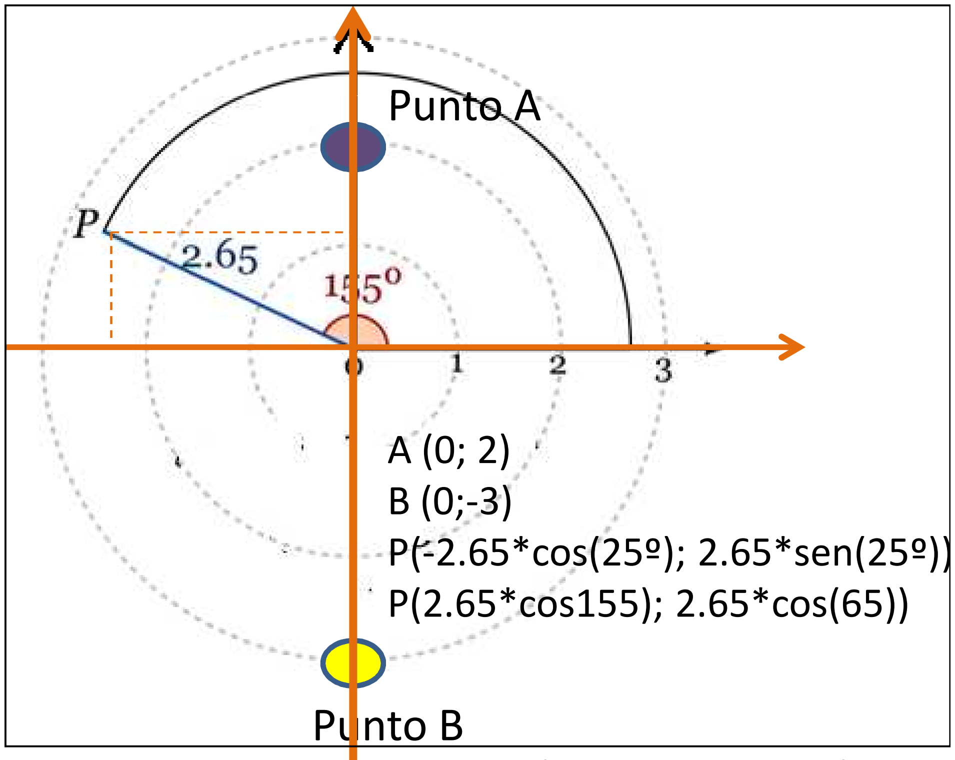
Ing. Nayive Jaramillo Santana *Ing. José Gregorio Gutiérrez*

¿Qué necesitamos para representar un movimiento?

1.b) Coordenadas polares (r; θ)

A (2; 90º)
B (3;270º)

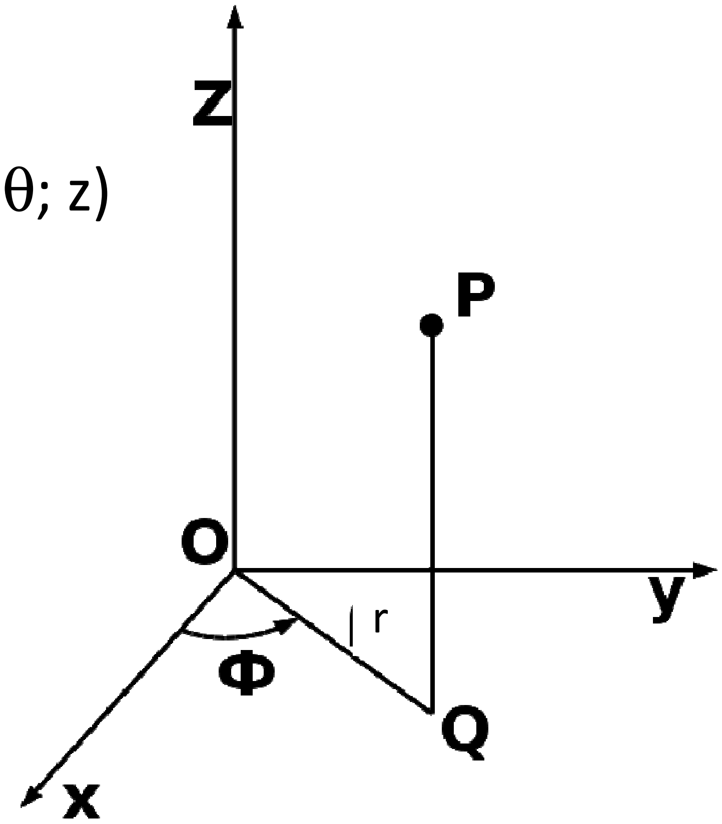




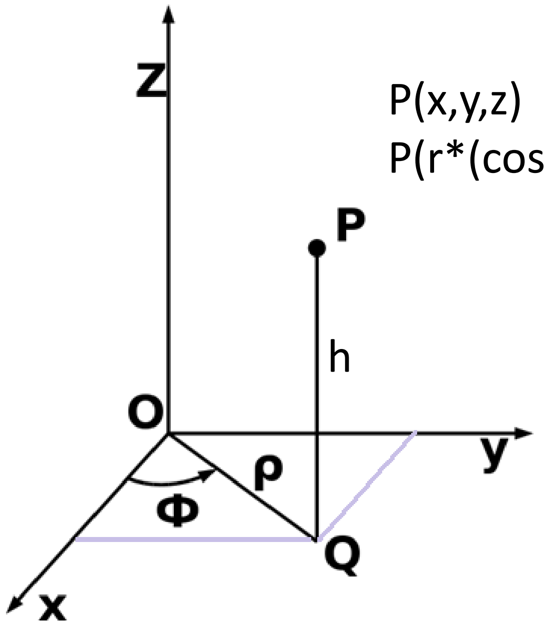
¿Qué necesitamos para representar un movimiento?

1.c) Coordenadas Cilíndricas

Radial, transversal, axial → (r; θ; z)



P(x,y,z)
P(r*(cos(θ); r*sen(θ); h)

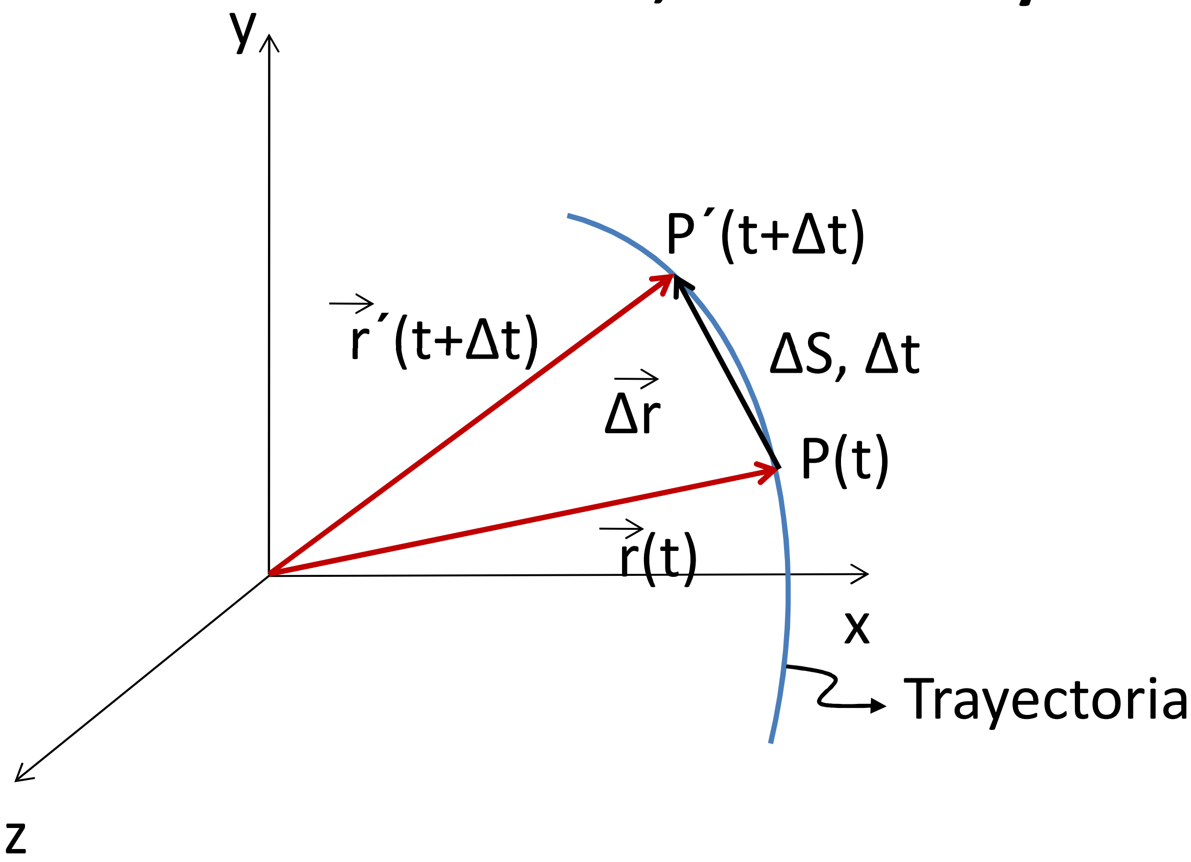


¿Qué necesitamos para representar un movimiento?

2) Relación entre los vectores que definen un movimiento:

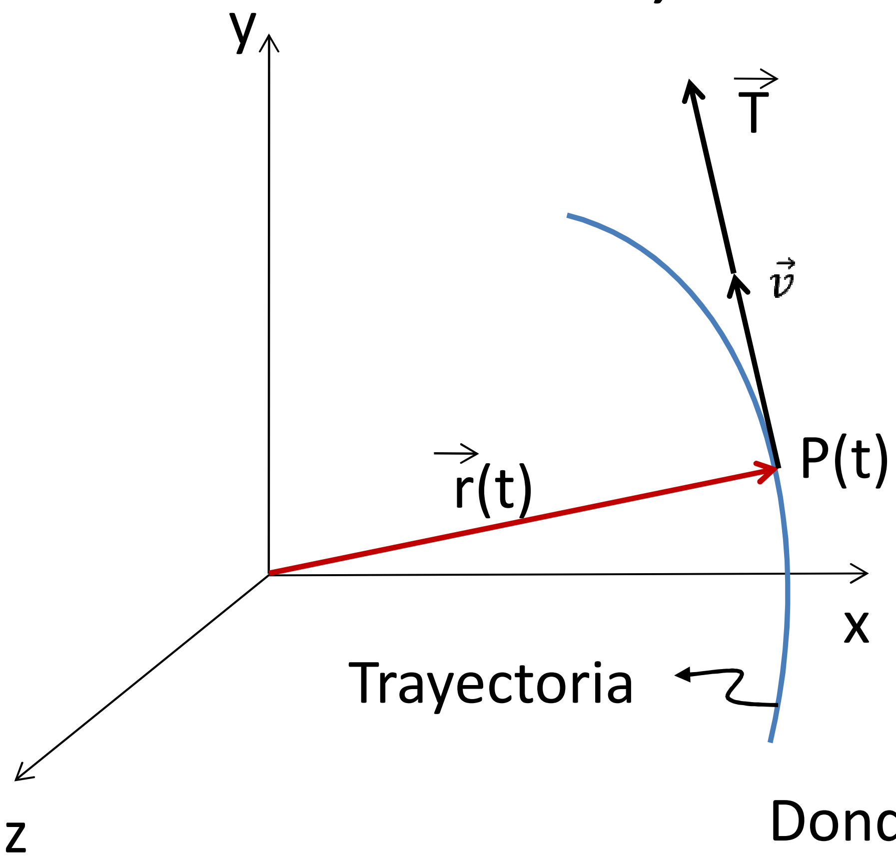
- Posición.
- Velocidad.
- Aceleración

Vectores de Posición, Velocidad y Aceleración.



$$\vec{v}_{media} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Vectores de Posición, Velocidad y Aceleración.



El vector velocidad instantánea es:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

También lo podemos escribir como:

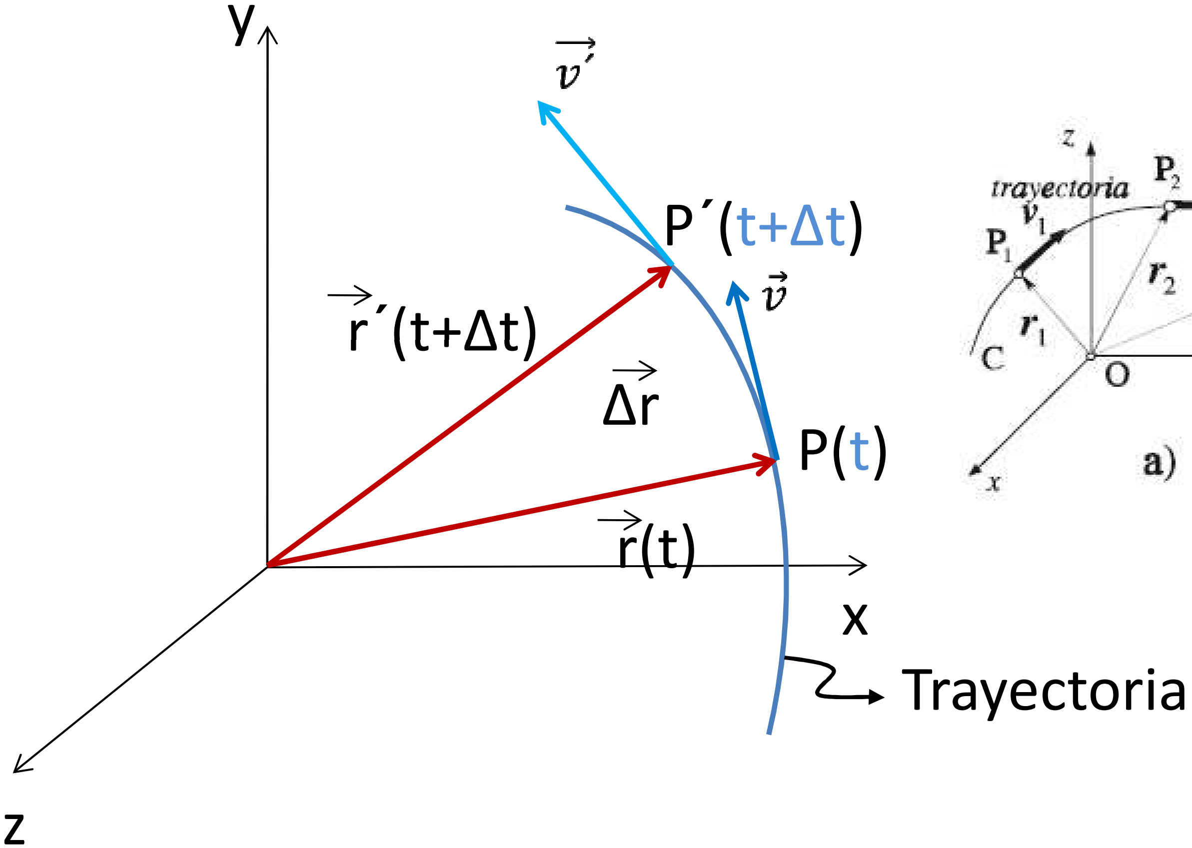
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{T}.v$$

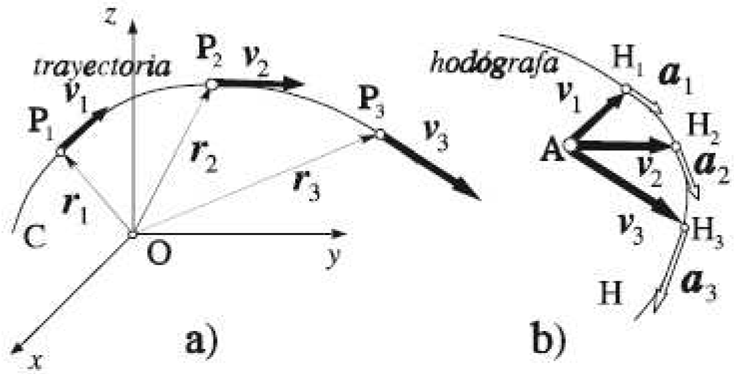
$$\vec{v} = v.\vec{T}$$

Donde: $\vec{T}$ = Vector unitario tangencial

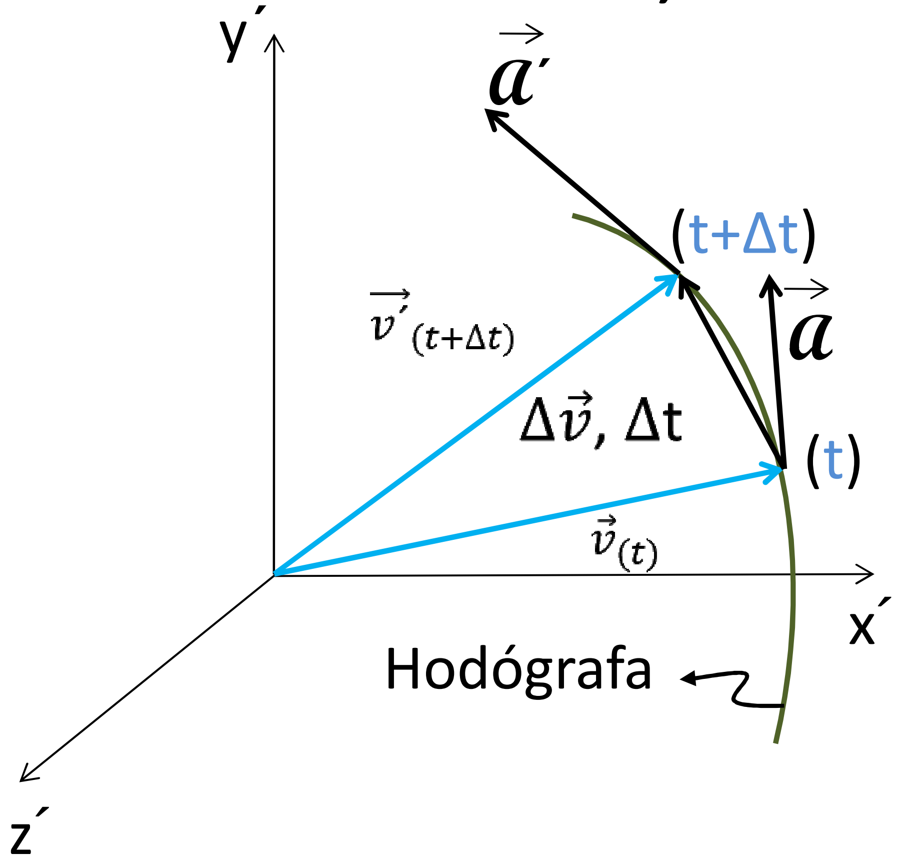
v = Rapidez o magnitud del vector $\vec{v}$

Vectores de Posición, Velocidad y Aceleración.





Vectores de Posición, Velocidad y Aceleración.

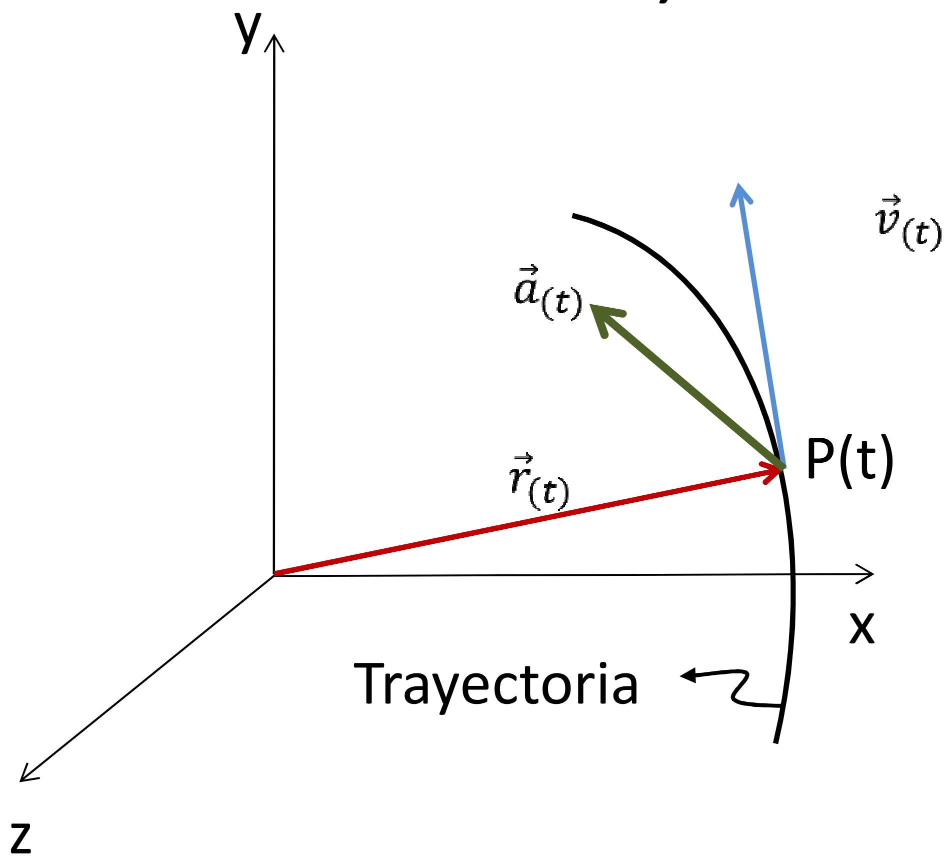


$$\vec{a}_{media} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

El vector aceleración instantánea es:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$$

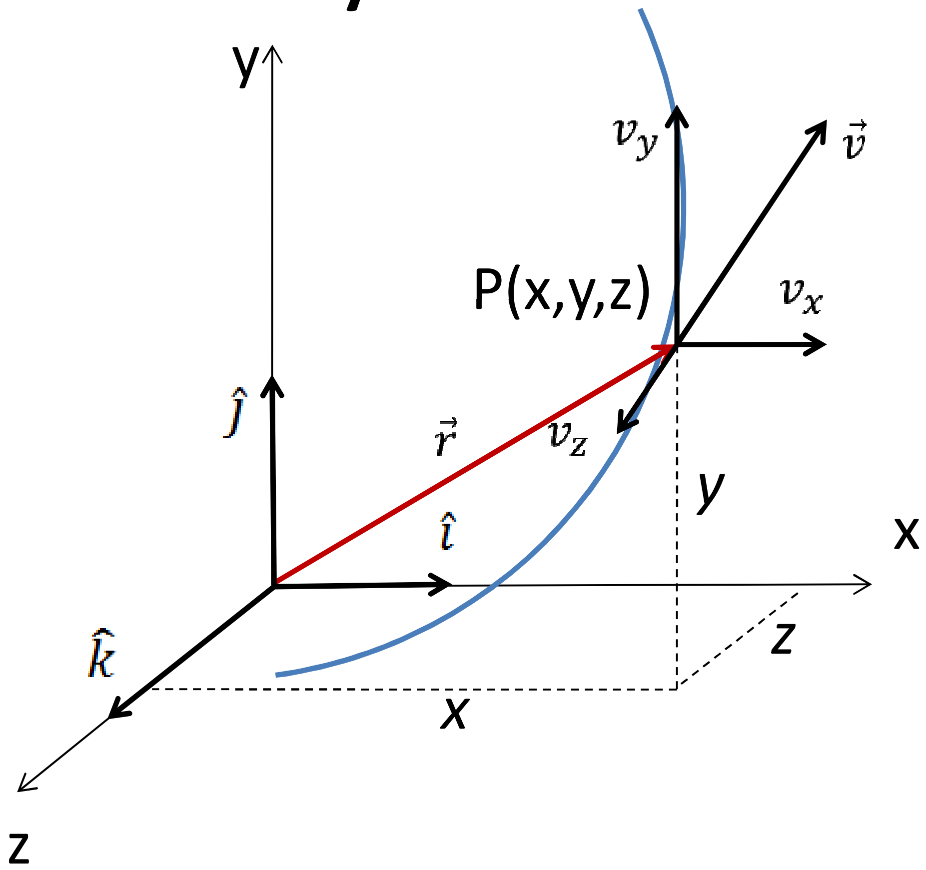
Vectores de Posición, Velocidad y Aceleración.



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Componentes rectangulares de los vectores posición, velocidad y aceleración.



El vector posición es:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

Por lo que el vector velocidad puede escribirse como:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

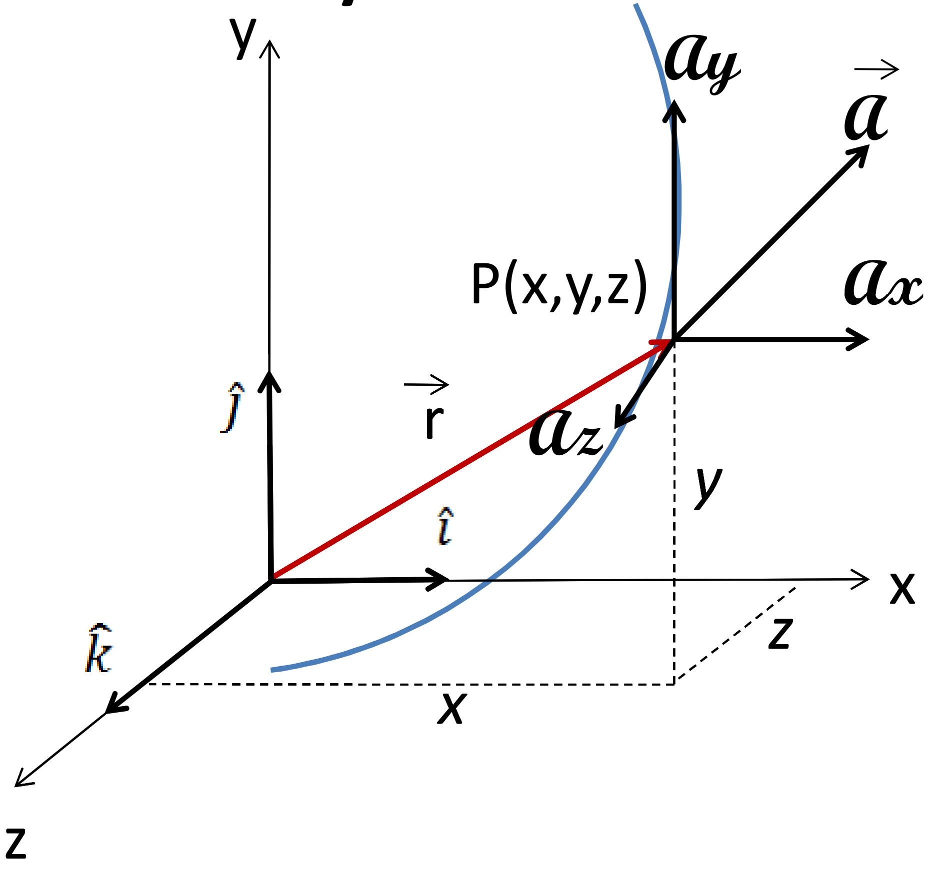
$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$

Ing. José Gregorio Gutiérrez

Componentes rectangulares de los vectores posición, velocidad y aceleración.



Por lo tanto, la rapidez o magnitud de la velocidad es:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$

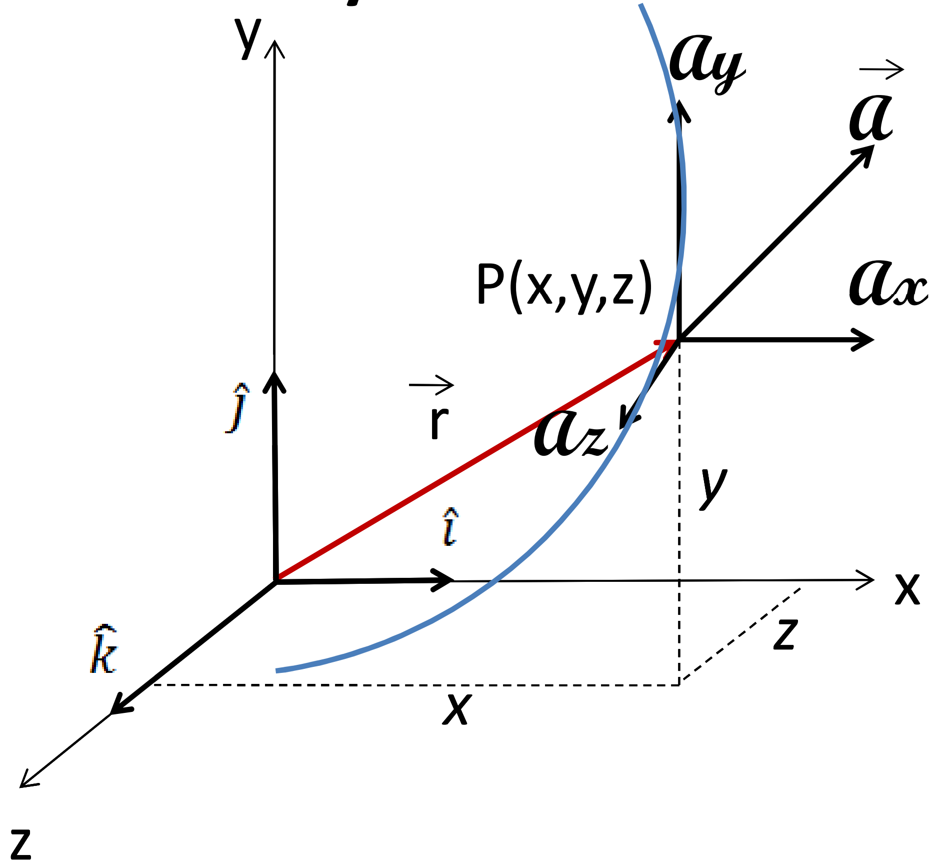
El vector aceleración viene dado por:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \dot{v}_x\hat{\imath} + \dot{v}_y\hat{\jmath} + \dot{v}_z\hat{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$$

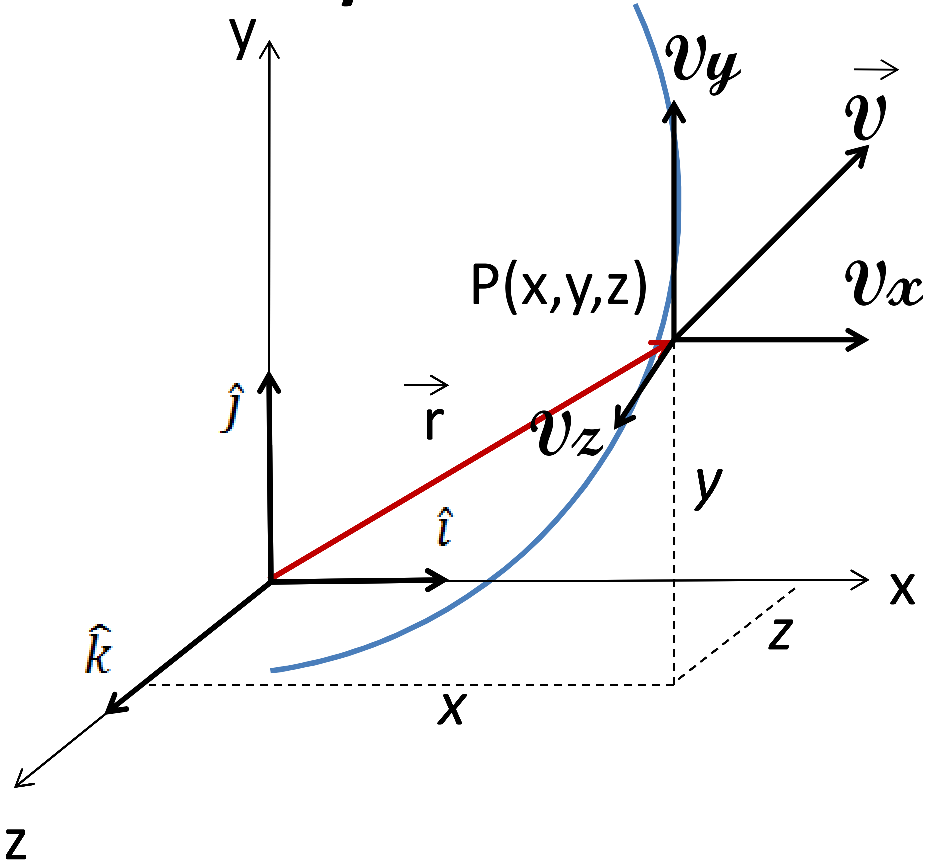
Componentes rectangulares de los vectores posición, velocidad y aceleración.



Por lo tanto la magnitud de la aceleración es:

$$a = \sqrt{\dot{v_x}^2 + \dot{v_y}^2 + \dot{v_z}^2}$$

Componentes rectangulares de los vectores posición, velocidad y aceleración.



La **rapidez** o magnitud de la velocidad es:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$

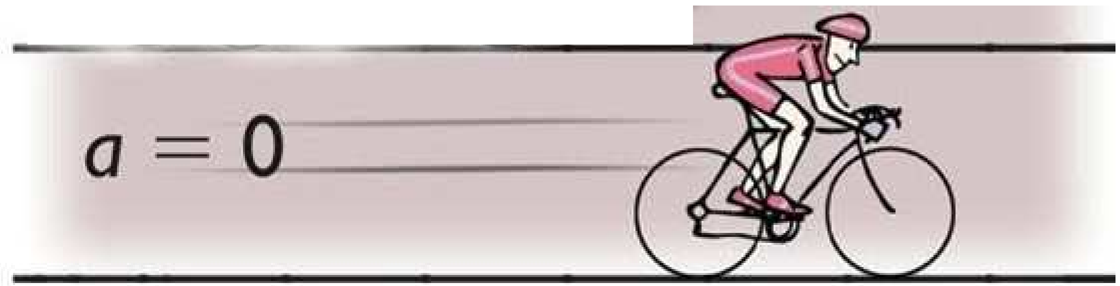
$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{ds^2}{dt^2}} \qquad \boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U)

Es un tipo de movimiento en línea recta que a menudo se encuentra en las aplicaciones prácticas. En este movimiento la velocidad (v) de la partícula es constante, y por lo tanto, la aceleración (a) es cero.



Movimiento Rectilíneo Uniforme (M.R.U)

$$v = ctte \longrightarrow a = 0$$

Entonces:

$$\frac{dx}{dt} = v = ctte \longrightarrow dx = v.dt$$

Integrando

$$\int_{x_o}^{x} dx = \int_{t_o}^{t} v.dt \longrightarrow x\Big|_{x_o}^{x} = v.t\Big|_{t_o}^{t} \longrightarrow x - x_o = v.(t - t_o)$$

Para

$$t_o = 0 \longrightarrow \boxed{x = x_o + v.t}$$

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (M.R.U.A)

Es otro tipo común de movimiento. En éste, la aceleración (a) de la partícula es constante.

$$a = ctte$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dv}{dt} = a = ctte \longrightarrow dv = a.dt$$

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (M.R.U.A)

Integrando,

$$\int_{v_o}^{v} dv = \int_{t_o}^{t} a.\,dt \longrightarrow v\Big|_{v_o}^{v} = a.\,t\Big|_{t_o}^{t} \longrightarrow v - v_0 = a.\,(t - t_o)$$

Para

$$t_o = 0 \longrightarrow \boxed{v = v_o + a.\,t}$$

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (M.R.U.A)

Además,

$$\frac{dx}{dt} = v$$

como

$$v = v_o + a.t$$

Igualando tenemos que,

$$\frac{dx}{dt} = v_o + a.t \longrightarrow dx = (v_o + a.t).dt$$

Integrando,

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} (v_o + a.t).dt \longrightarrow x\Big|_{x_0}^{x} = \left(v_o.t + a.\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{t_0}^{t}$$

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (M.R.U.A)

Evaluando y considerando $t_o = 0$ tenemos que,

$$x - x_o = v_o.t + a.\frac{t^2}{2} \longrightarrow \boxed{x = x_o + v_o.t + a.\frac{t^2}{2}}$$

Por otra parte sabemos que,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v \longrightarrow a = v\frac{dv}{dx} \longrightarrow a.dx = v.dv$$

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (M.R.U.A)

Integrando

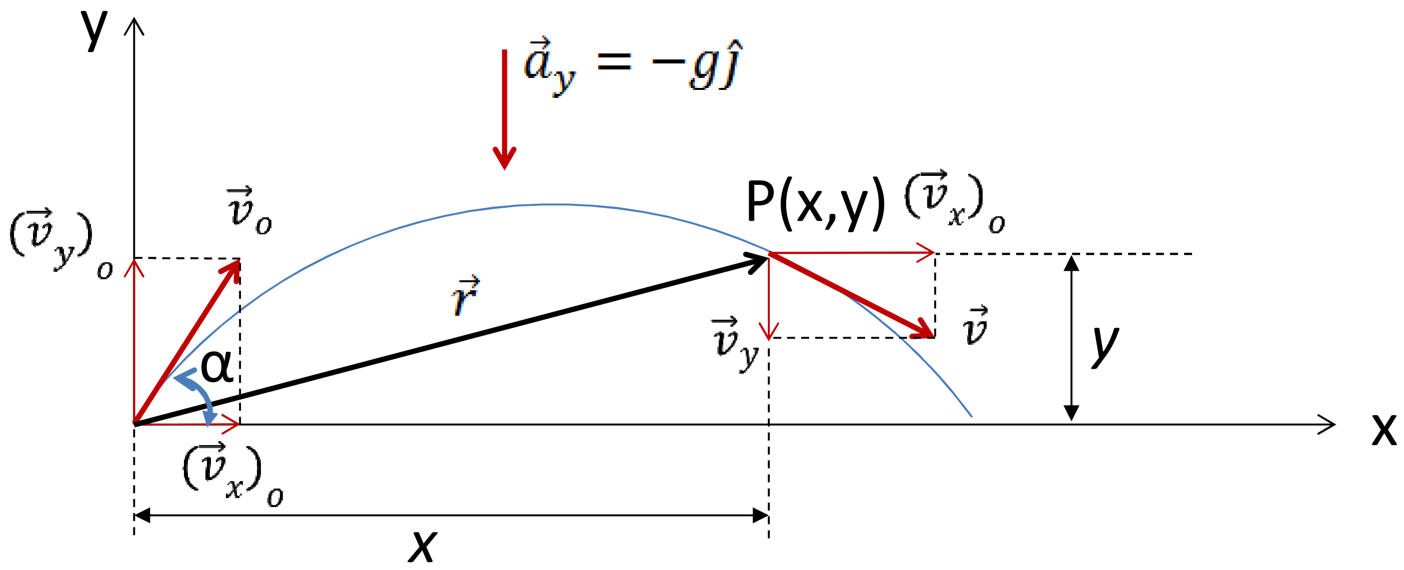
$$\int_{x_0}^{x} a.\,dx = \int_{v_0}^{v} v.\,dv \longrightarrow a.\,x \Big|_{x_0}^{x} = \frac{v^2}{2}\Big|_{v_0}^{v} \longrightarrow a.\,(x - x_o) = \frac{v^2}{2} - \frac{{v_o}^2}{2}$$

Finalmente,

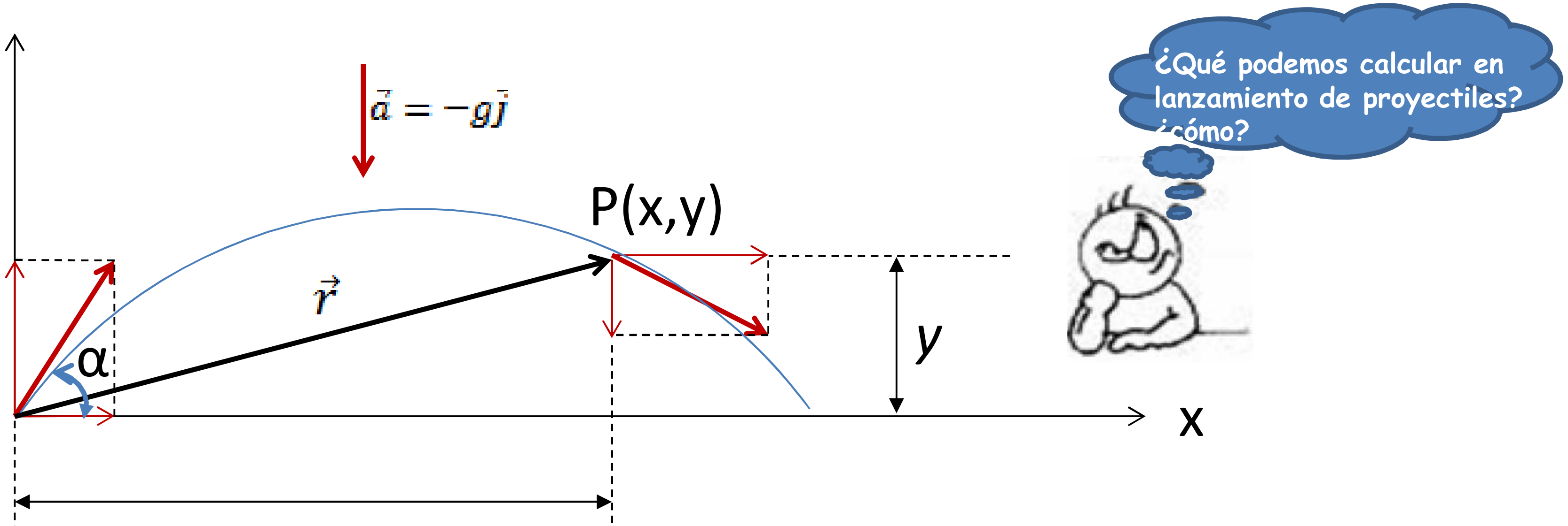
$$v^2 = {v_o}^2 + 2a(x - x_o)$$

Movimiento de un proyectil.

Al dispararse un proyectil y considerar que se mueve en un plano vertical, se tiene que z = 0, y como consecuencia, el movimiento de la partícula puede ser descrito en dos componentes: Horizontal y Vertical.



Mecánica Racional 20
TEMA 1: Introducción a la Dinámica.



Dado que en este movimiento la partícula se mueve con una aceleración $\vec{a} = -g\vec{j}$
Para cualquier instante de tiempo (t) se podrá definir las componentes en las direcciones x, y de los vectores:

- Posición (X, Y)
- Velocidad (Vx, Vy)

Movimiento de un proyectil.

a) Componente Horizontal: $a_x = 0$

$$\boxed{x = (v_o)_x . t}$$

Por lo tanto el movimiento de la partícula en la dirección horizontal es uniforme

b) Componente Vertical: $\vec{a}_y = -g\hat{\jmath}$

$$\boxed{v_y = (v_y)_o - g.t}$$

$$\boxed{y = y_o + (v_y)_o . t - \frac{1}{2} . g . t^2}$$

$$\boxed{{v_y}^2 = (v_y)_o{}^2 - 2. g. (y - y_o)}$$

Movimiento de un proyectil.

b) Componente Vertical:

Para $y_o = 0$ tenemos que:

$$y = (v_y)_o . t - \frac{1}{2} . g . t^2$$

$$v_y{}^2 = (v_y)_o{}^2 - 2 . g . y$$

El movimiento de la partícula en la componente vertical es uniformemente acelerado.

Las ecuaciones para x,y describen el movimiento del proyectil en un instante cualquiera.

Movimiento de un proyectil.

Ahora bien, si despejamos *t* de la ecuación de la componente horizontal, tenemos que:

$$t = \frac{x}{(v_o)_x}$$

Sustituyendo *t* en:

$$y = y_o + (v_y)_o . t - \frac{1}{2} . g . t^2$$

Tenemos que:

$$y = y_o + (v_y)_o . \frac{x}{(v_o)_x} - \frac{1}{2} . g . \left(\frac{x}{(v_o)_x} \right)^2$$

Movimiento de un proyectil.

Además:

$$(v_o)_x = v_o . \cos\alpha$$
$$(v_o)_y = v_o . \sin\alpha$$

Por lo tanto:

$$y = y_o + v_o . \sin\alpha . \frac{x}{v_o . \cos\alpha} - \frac{1}{2} . g . \left(\frac{x}{v_o . \cos\alpha} \right)^2$$

Finalmente:

$$\boxed{y = y_o + x . \tan\alpha - \frac{1}{2} . g . \left(\frac{x}{v_o . \cos\alpha} \right)^2}$$

Movimiento de un proyectil.

Análisis de las Ecuaciones:

a) Altura Máxima (y_{max}): $v_y = 0$

Por lo tanto la ecuación $v_y{}^2 = (v_y)_o{}^2 - 2.g.(y - y_o)$ queda expresada como:

$$0 = (v_y)_o{}^2 - 2.g.(y_{max} - y_o)$$

$$y_{max} = \frac{(v_y)_o{}^2}{2.g} + y_o$$

Tomando $y_o = 0$, tenemos que: $\boxed{y_{max} = \dfrac{(v_o.\sin\alpha)^2}{2.g}}$

Movimiento de un proyectil.

Análisis de las Ecuaciones:

b) Alcance (R): $y = 0$

Por lo tanto la ecuación $y = y_o + x.\tan\alpha - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_o.\cos\alpha}\right)^2$ queda expresada como:

$$0 = y_o + R.\tan\alpha - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{R}{v_o.\cos\alpha}\right)^2$$

Tomando $y_o = 0$, tenemos que: $R = \frac{2.\tan\alpha.(V_o.\cos\alpha)^2}{g}$

Movimiento de un proyectil.

Análisis de las Ecuaciones:

b) Alcance (R): $y = 0$

Por trigonometría:

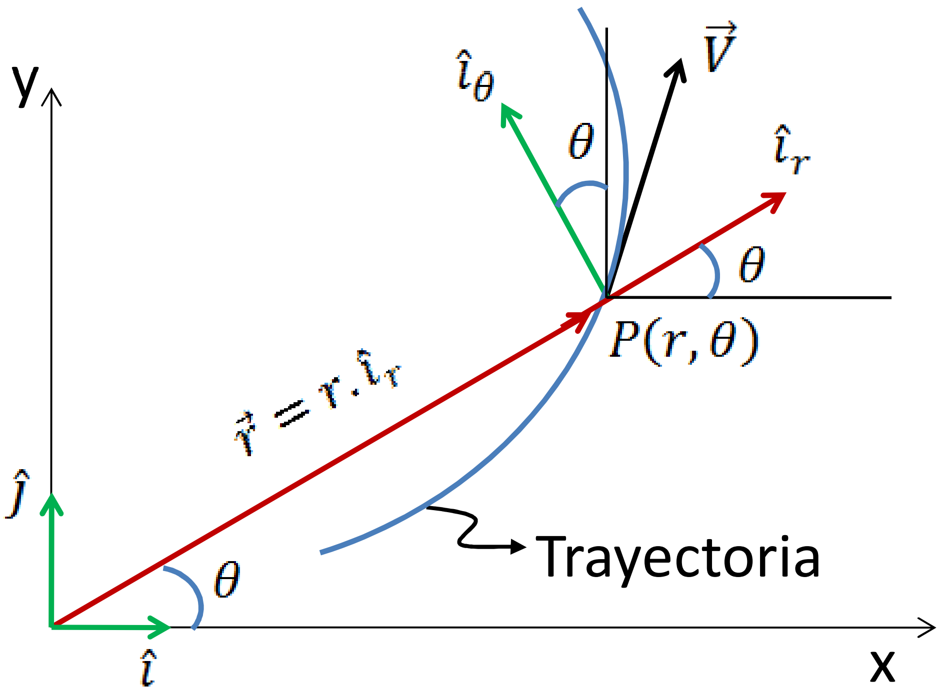
$$R = \frac{2.\sin\alpha\,.\,v_o{}^2.\,(\cos\alpha)^2}{g.\cos\alpha} \longrightarrow R = \frac{2.\,v_o{}^2.\sin\alpha\cos\alpha}{g}$$

$$\boxed{R = \frac{v_o{}^2.\sin 2\alpha}{g}}$$

Como R = f(α), entonces será máximo cuando α = 45 grados

Componente Radial y Transversal de la Velocidad y Aceleración.

En ciertos problemas de movimiento plano, la posición de la partícula *P* se define mediante sus coordenadas polares *r* y θ.



$\hat{\imath}_r$: Vector unitario radial

$\hat{\imath}_\theta$: Vector unitario transversal

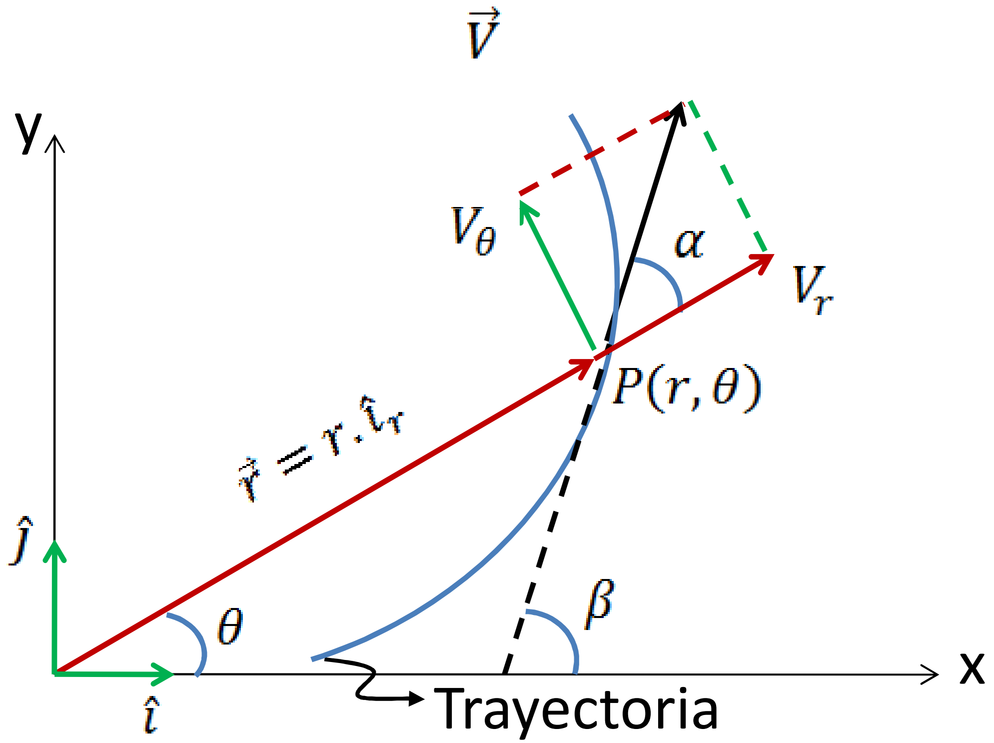
$$\hat{\imath}_r = [\cos\theta\,;\sin\theta]$$

$$\hat{\imath}_\theta = [-\sin\theta\,;\cos\theta]$$

$$\frac{d\hat{\imath}_r}{d\theta} = [-\sin\theta\,;\cos\theta] = \hat{\imath}_\theta$$

$$\frac{d\hat{\imath}_\theta}{d\theta} = [-\cos\theta\,;-\sin\theta] = -\hat{\imath}_r$$

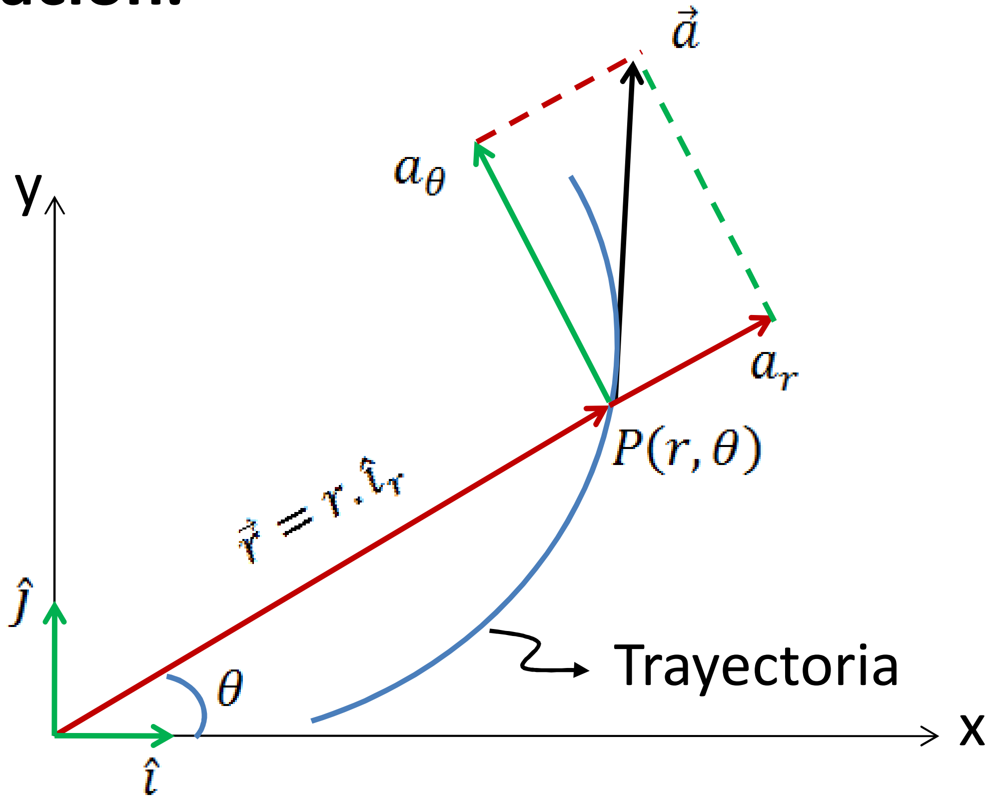
Componente Radial y Transversal de la Velocidad y Aceleración.



$$\beta = \alpha + \theta$$

$$\tan\alpha = \frac{V_\theta}{V_r}$$

Componente Radial y Transversal de la Velocidad y Aceleración.



Componente Radial y Transversal de la Velocidad y Aceleración.

El vector posición de *r* en coordenadas polares viene dado por:

$$\vec{r} = r.\hat{\imath}_r$$

Por lo tanto el vector velocidad viene dado por

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r.\hat{\imath}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}.\hat{\imath}_r + r.\frac{d\hat{\imath}_r}{dt}$$

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt}.\hat{\imath}_r + r.\frac{d\hat{\imath}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{r}.\hat{\imath}_r + r.\hat{\imath}_\theta.\dot{\theta}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{V} &= \dot{r}.\hat{\imath}_r + r.\dot{\theta}.\hat{\imath}_\theta \\ \vec{V} &= V_r.\hat{\imath}_r + V_\theta.\hat{\imath}_\theta\end{aligned}}$$

$$\boxed{V_r = \dot{r}}$$

$$\boxed{V_\theta = r.\dot{\theta}}$$

V_r Velocidad en la dirección radial

V_θ Velocidad en la dirección transversal

Componente Radial y Transversal de la Velocidad y Aceleración.

Para el vector aceleración tenemos que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Por lo tanto,

$$\vec{a} = \frac{d(\dot{r}.\hat{\imath}_r + r.\dot{\theta}.\hat{\imath}_\theta)}{dt} = \frac{d(\dot{r}.\hat{\imath}_r)}{dt} + \frac{d(r.\dot{\theta}.\hat{\imath}_\theta)}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\dot{r}}{dt}.\hat{\imath}_r + \dot{r}.\frac{d\hat{\imath}_r}{dt} + \frac{d(r.\dot{\theta})}{dt}.\hat{\imath}_\theta + r.\dot{\theta}.\frac{d\hat{\imath}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\dot{r}}{dt}.\hat{\imath}_r + \dot{r}.\frac{d\hat{\imath}_r}{dt} + (\frac{dr}{dt}.\dot{\theta} + r.\frac{d\dot{\theta}}{dt}).\hat{\imath}_\theta + r.\dot{\theta}.\frac{d\hat{\imath}_\theta}{dt}$$

Componente Radial y Transversal de la Velocidad y Aceleración.

$$\vec{a} = \ddot{r}.\hat{\imath}_r + \dot{r}.\frac{d\hat{\imath}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + (\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}).\hat{\imath}_\theta + r.\dot{\theta}.\frac{d\hat{\imath}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Pero, $$\frac{d\hat{\imath}_r}{d\theta} = [-\sin\theta\,; \cos\theta] = \hat{\imath}_\theta$$

$$\frac{d\hat{\imath}_\theta}{d\theta} = [-\cos\theta\,; -\sin\theta] = -\hat{\imath}_r$$

Luego,

$$\vec{a} = \ddot{r}.\hat{\imath}_r + \dot{r}.\frac{d\hat{\imath}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + (\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}).\hat{\imath}_\theta + r.\dot{\theta}.\frac{d\hat{\imath}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}.\hat{\imath}_r + \dot{r}.\hat{\imath}_\theta.\dot{\theta} + \left(\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}\right).\hat{\imath}_\theta + r.\dot{\theta}.(-\hat{\imath}_r).\dot{\theta}$$

Componente Radial y Transversal de la Velocidad y Aceleración.

Entonces,

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2).\hat{\imath}_r + (\dot{r}.\dot{\theta} + \dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}).\hat{\imath}_\theta$$

Finalmente,

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2).\hat{\imath}_r + (2.\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}).\hat{\imath}_\theta$$

$$\vec{a} = a_r.\hat{\imath}_r + a_\theta.\hat{\imath}_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r.\dot{\theta}^2$$

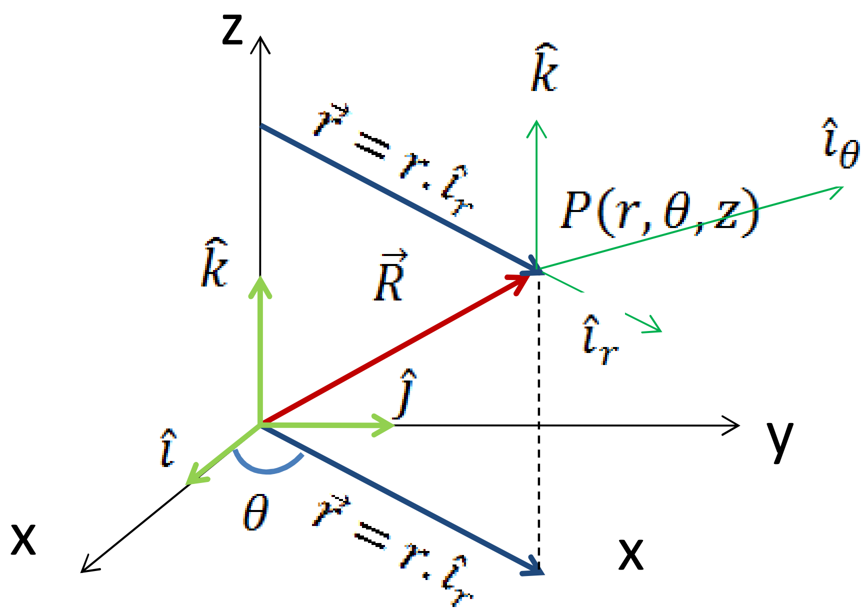
$$a_\theta = 2.\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}$$

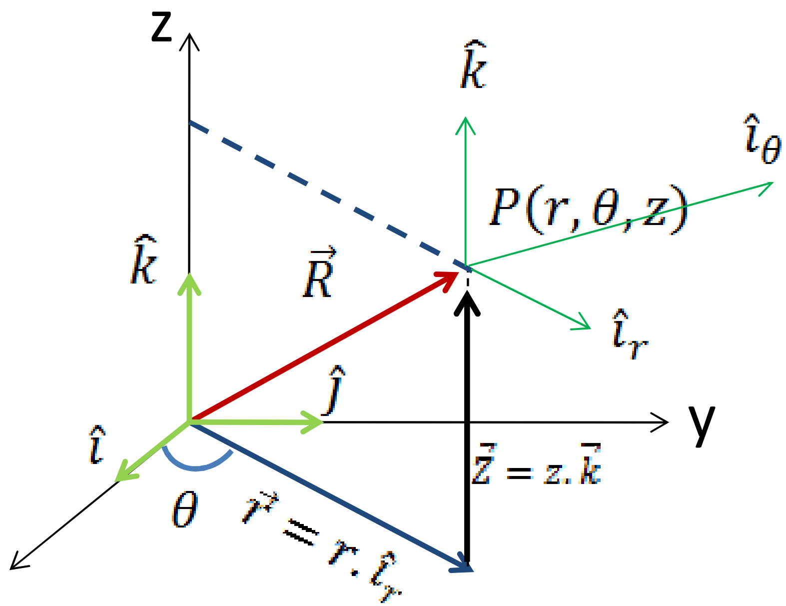
a_r : Aceleración en la dirección radial

a_θ : Aceleración en la dirección transversal

Coordenadas Cilíndricas

El movimiento de una partícula puede ser conveniente, en algunos casos, expresarse en coordenadas cilíndricas (r, θ, z). Para lo cual definiremos la posición de la partícula en cualquier instante dado como la suma de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{Z}$, es decir $\vec{R} = \vec{r} + \vec{Z}$





Coordenadas Cilíndricas

El vector posición de la partícula viene dado por:

$$\vec{R} = r.\hat{\imath}_r + z.\hat{k}$$

Por lo tanto la velocidad de la partícula viene dado por:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d(r.\hat{\imath}_r + z.\hat{k})}{dt} = \frac{d(r.\hat{\imath}_r)}{dt} + \frac{d(z.\hat{k})}{dt}$$

Finalmente:

$$\vec{V} = \dot{r}.\hat{\imath}_r + r.\dot{\theta}.\hat{\imath}_\theta + \frac{dz}{dt}.\hat{k} + z.\frac{d\hat{k}}{dt}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{V} &= \dot{r}.\hat{\imath}_r + r.\dot{\theta}.\hat{\imath}_\theta + \dot{z}.\hat{k}\\ \vec{V} &= V_r.\hat{\imath}_r + V_\theta.\hat{\imath}_\theta + V_z.\hat{k}\end{aligned}}$$

V_r Velocidad en la dirección radial

V_θ Velocidad en la dirección transversal

V_z Velocidad en la dirección axial

Coordenadas Cilíndricas

Y el vector aceleración viene dado por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\dot{r}.\hat{\imath}_r + r.\dot{\theta}.\hat{\imath}_\theta + \dot{z}.\hat{k})}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d(\dot{r}.\hat{\imath}_r)}{dt} + \frac{d(r.\dot{\theta}.\hat{\imath}_\theta)}{dt} + \frac{d(\dot{z}.\hat{k})}{dt}$$

Finalmente

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{a} = (\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2).\hat{\imath}_r + (2.\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}).\hat{\imath}_\theta + \ddot{z}.\hat{k} \\ \vec{a} = a_r.\hat{\imath}_r + a_\theta.\hat{\imath}_\theta + a_z.\hat{k}\end{gathered}}$$

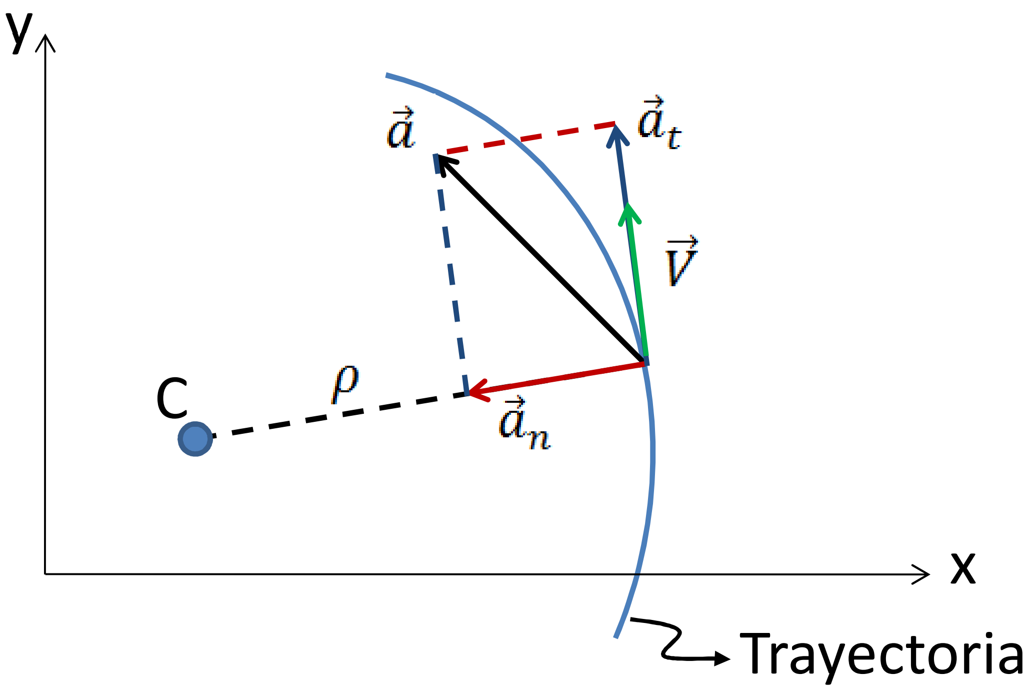
a_r Aceleración en la dirección radial

a_θ Aceleración en la dirección transversal

a_z Aceleración en la dirección axial

Componente Tangencial y Normal de la Aceleración.

En ocasiones resulta conveniente descomponer la aceleración en componentes dirigidas, respectivamente, a lo largo de la tangente y la normal de la trayectoria de la partícula.



Componente Tangencial y Normal de la Aceleración.

Partiendo de: $\vec{V} = V.\vec{T}$ $\qquad \vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$

$\vec{T}$: Vector Unitario en la dirección tangencial

Tenemos que:

$$\vec{a} = \frac{d(V.\vec{T})}{dt} = \frac{dV}{dt}.\vec{T} + V.\frac{d\vec{T}}{dt}$$

Pero,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = K.\vec{N} = \frac{1}{\rho}.\vec{N}$$

$\vec{N}$: Vector Unitario en la dirección normal

ρ: radio de curvatura de la trayectoria

Entonces,

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho}.\vec{N}.V = \frac{V}{\rho}.\vec{N}$$

Componente Tangencial y Normal de la Aceleración.

Por lo tanto

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{a} = \frac{dV}{dt}.\vec{T} + \frac{V^2}{\rho}.\vec{N} \\ \vec{a} = a_t.\vec{T} + a_n.\vec{N}\end{gathered}}$$

a_t es debida a la variación de la rapidez de la partícula respecto al tiempo. Puede ser positiva (aumenta el módulo del vector velocidad), negativa (disminuye el módulo del vector velocidad) o cero (no cambia el modulo del vector velocidad es decir la rapidez es constante).

a_n es debida a la variación de la dirección de su movimiento y con sentido hacia el centro de curvatura C de la trayectoria. Es siempre positiva.

Expresiones Vectoriales para el Radio de Curvatura.

a) En función del vector velocidad, vector aceleración.

$$\vec{V} \times \vec{a} = \vec{V} \times [a_t.\vec{T} + a_n.\vec{N}]$$

$$= \vec{V} \times \overrightarrow{a_t} + \vec{V} \times \overrightarrow{a_n} = \vec{V} \times \overrightarrow{a_n}$$

$$|\vec{V} \times \vec{a}| = |\vec{V} \times \overrightarrow{a_n}| = V.a_n = V.\frac{V^2}{\rho}$$

$$|\vec{V} \times \vec{a}| = \frac{V^3}{\rho}$$

$$\boxed{\rho = \frac{V^3}{|\vec{V} \times \vec{a}|}}$$

V define el modulo del vector
Velocidad o simplemente rapidez

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Ing. Nayive Jaramillo Santana *Ing. José Gregorio Gutiérrez*

Expresiones Vectoriales para el Radio de Curvatura.

b) En función de $\vec{r}$ y s.

Sabemos que $\vec{V} = V.\vec{T}$; $\frac{d\vec{T}}{ds} = K.\vec{N} = \frac{1}{\rho}\vec{N}$; $\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}$

Luego

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{T}}{ds} = K.\vec{N} = \frac{1}{\rho}\vec{N} \longrightarrow \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{\rho}\vec{N} \longrightarrow \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \left|\frac{1}{\rho}\vec{N}\right|$$

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{1}{\rho} \longrightarrow \boxed{\rho = \frac{1}{\frac{d^2r}{ds^2}}}$$

Expresiones Vectoriales para el Radio de Curvatura.

c) En función de *y´* y *y´´* *y´ =dy/dx*

$$\rho = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|}$$

d) En función de $\dot{x}\ \ddot{x}\ \dot{y}\ \ddot{y}$

$$\rho = \frac{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}{|\dot{x}.\ddot{y} - \dot{y}.\ddot{x}|}$$

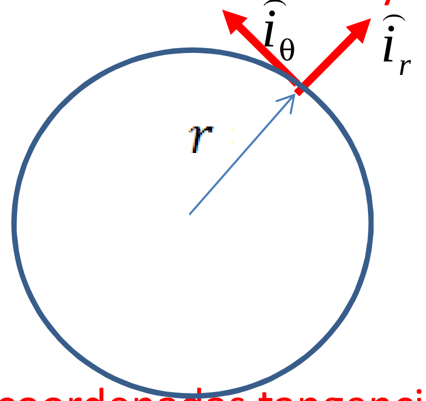
Expresiones Vectoriales para el Radio de Curvatura.

e) En función de r r´ y r´´

$$\boxed{\rho = \frac{[r^2 + (r')^2]^2}{(r^2 + 2.(r')^2 - r.r'')}}$$

Movimiento Circular.

En coordenadas radial y transversal



$$r = ctte$$

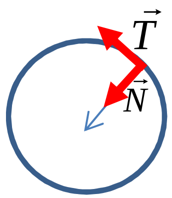
$$\dot{r} = \ddot{r} = 0 \longrightarrow \begin{array}{l} \vec{V} = r.\dot{\theta}.\hat{\imath}_\theta \\ \vec{a} = -r.\dot{\theta}^2.\hat{\imath}_r + r.\ddot{\theta}.\hat{\imath}_\theta \end{array}$$

En coordenadas tangencial y normal

Para el movimiento circular, haciendo la conversión a coordenadas tangencial y normal, se tiene:

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{V} = r.\dot{\theta}.\hat{\imath}_\theta = r.\omega \\ a_t = r.\alpha \\ a_n = -r.\omega^2 \end{array}}$$

$$\boxed{\vec{a} = r.\alpha.\vec{T} - r.\omega^2.\vec{N}}$$

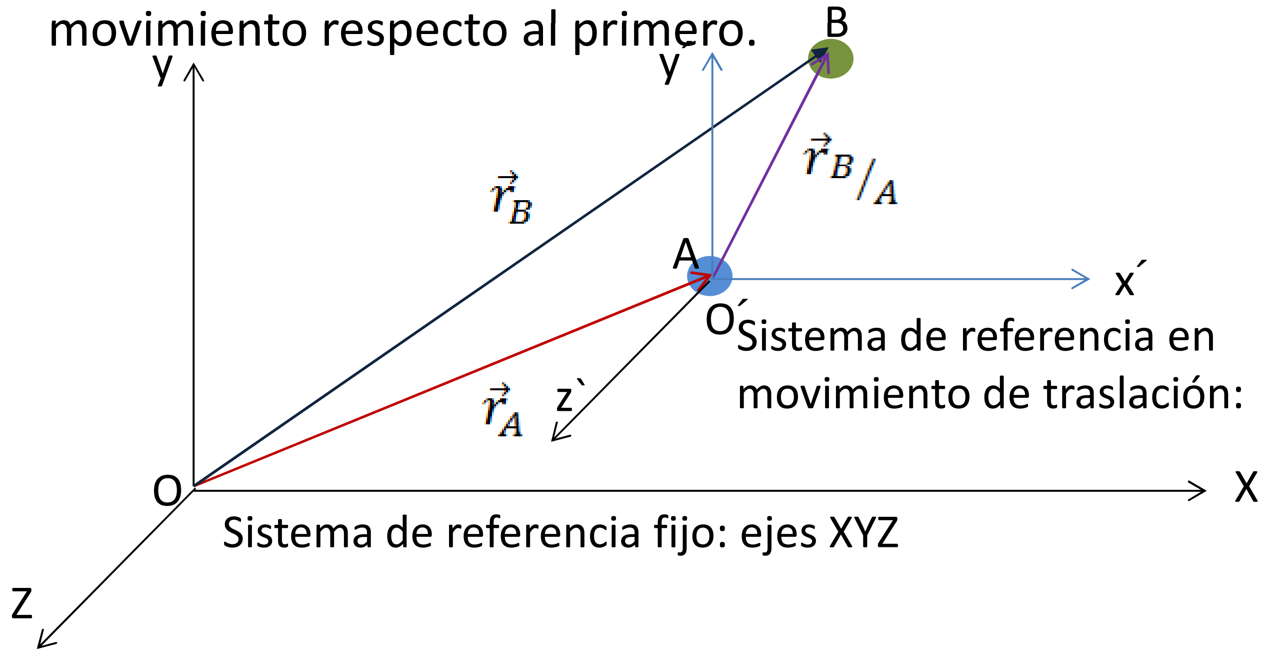


$$w = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\alpha = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta}$$

Movimiento Relativo a un sistema de referencia en movimiento de traslación.

Ha sido estudiado el movimiento de una partícula respecto a un eje de referencia fijo a Tierra y tomado arbitrariamente. Sin embargo, al utilizar otros sistemas de referencias que se trasladen, se considerará en movimiento respecto al primero.



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

Mecánica Racional 20
TEMA 1: Introducción a la Dinámica.

Ing. Nayive Jaramillo Santana *Ing. José Gregorio Gutiérrez*

Mecánica Racional 20
¿Qué se evalúa en el primer parcial?

En el Tema de Cinemática de partículas se evaluará el alcance logrado por los estudiantes en los siguientes objetivos:

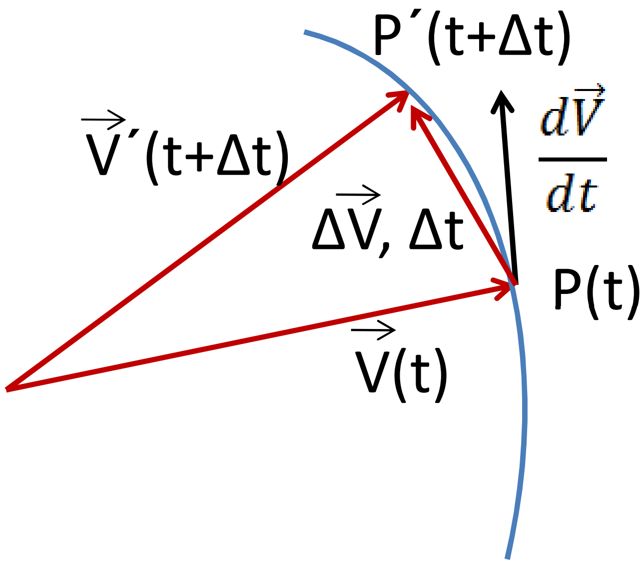
- Representar correctamente las componentes de la posición, la velocidad y la aceleración (estos conceptos se desarrollaron en clase).
- Seleccionar correctamente el sistema de coordenadas para el tipo de movimiento que se analice.
- Presentar un análisis del movimiento dependiente de dos o más partículas.
- Examinar los principios del movimiento relativo de dos partículas usando ejes en traslación.
- Estudiar el movimiento de una partícula a lo largo de su trayectoria.
- Representar gráficamente el movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta.
- La capacidad de aplicar los conceptos de posición, velocidad y aceleración en la solución de problemas.

Derivadas de Funciones Vectoriales.

Una función que transforme escalares en vectores se denomina función vectorial. Se denota como $\vec{V}$ que puede ser función del parámetro escalar tiempo (t) o del parámetro escalar longitud de arco (S).

Así tendremos $\vec{V}(t) \rightarrow \vec{V}(s)$, un vector variable que cambia en magnitud, dirección o ambos simultáneamente cuando el tiempo cambia.

Derivadas de Funciones Vectoriales.



$$\overrightarrow{\Delta V} = \vec{V}_{(t+\Delta t)} - \vec{V}_{(t)}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}_{(t+\Delta t)} - \vec{V}_{(t)}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}}$$

Este vector derivado es tangente a la indicatriz, siendo esta la curva alabeada que contiene los extremos de todos los vectores $\vec{V}$

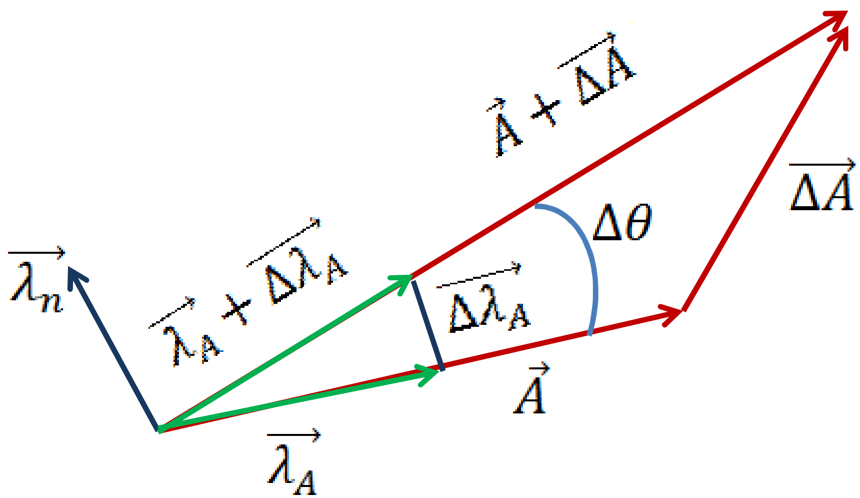
Propiedades.

a) Si $\vec{A}$ y $\vec{V}$ son funciones vectoriales y f una función escalar derivable, todas funciones de t, se tiene que:

1. $$\frac{d\left(f.\vec{A}\right)}{dt}=\frac{df}{dt}.\vec{A}+f.\frac{d\vec{A}}{dt}$$
2. $$\frac{d\left(\vec{A}+\vec{V}\right)}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{V}}{dt}$$
3. $$\frac{d\left(\vec{A}.\vec{V}\right)}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{V}+\vec{A}.\frac{d\vec{V}}{dt}$$
4. $$\frac{d\left(\vec{A}\times\vec{V}\right)}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{V}+\vec{A}\times\frac{d\vec{V}}{dt}$$

Propiedades.

b) Sea $\vec{A}$ un vector variable en magnitud y dirección, función de t, escrito como $\vec{A} = A.\overrightarrow{\lambda_A}$ donde A es la magnitud y $\overrightarrow{\lambda_A}$ es un vector unitario en la dirección de $\vec{A}$



$$\vec{A} = A.\overrightarrow{\lambda_A}$$

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d(A.\overrightarrow{\lambda_A})}{dt} = \frac{dA}{dt}.\overrightarrow{\lambda_A} + A.\frac{d\overrightarrow{\lambda_A}}{dt}$$

$$\boxed{\dot{\vec{A}} = \dot{A}.\overrightarrow{\lambda_A} + A.\dot{\overrightarrow{\lambda_A}}} \quad (1)$$

Propiedades.

Pero, $\dot{\overrightarrow{\lambda_A}} = \frac{d\overrightarrow{\lambda_A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\overrightarrow{\lambda_A} + \overrightarrow{\Delta\lambda_A}) - \overrightarrow{\lambda_A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta\lambda_A}}{\Delta t}$

Además, $\left|\overrightarrow{\Delta\lambda_A}\right| = \left|\overrightarrow{\lambda_A}\right|.\Delta\theta = \Delta\theta$

Y como $\overrightarrow{\lambda_A}$ es perpendicular a $\overrightarrow{\Delta\lambda_A}$ en el límite entonces,

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{\lambda_A}} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right].\overrightarrow{\lambda_n} = \dot{\theta}.\overrightarrow{\lambda_n}} \quad 2$$

En función de la velocidad angular instantánea del vector $\vec{A}$ se tiene que

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{\lambda_A}} = \overrightarrow{\omega_A} \times \overrightarrow{\lambda_A}} \quad 3$$

Propiedades.

Sustituyendo la ec.3 en la ec.1 tenemos que:

$$\dot{\vec{A}} = \dot{A}.\overrightarrow{\lambda_A} + A.\left(\overrightarrow{\omega_A} \times \overrightarrow{\lambda_A}\right) = \dot{A}.\overrightarrow{\lambda_A} + \overrightarrow{\omega_A} \times A.\overrightarrow{\lambda_A}$$

$$\boxed{\dot{\vec{A}} = \dot{A}.\overrightarrow{\lambda_A} + \overrightarrow{\omega_A} \times \vec{A}} \quad (4)$$

Cambio de Magnitud

Cambio de Dirección

Casos especiales.

a) Si el vector $\vec{A}$ tiene magnitud constante, la ec. 4 se expresa:

$$\dot{\vec{A}} = \overrightarrow{\omega_A} \times \vec{A}$$

b) Si el vector $\vec{A}$ tiene dirección constante $\omega_A = 0$, la ec.4 se expresa como:

$$\dot{\vec{A}} = \dot{A}.\overrightarrow{\lambda_A}$$

nayive@ula.ve

nayive.jaramillo@gmail.com

- Se propone resolver los siguientes ejercicios

Libro	Ejercicios
Ramón Puello. *Lecciones Elementales de Dinámica*. Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes.	1.4, 1.7; 1.15; 1.37; 1.31; 1.30;1.46,
Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston. *Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinámica.* McGrawHill	11.17; 11.28; 11.15; 11.41; 11.65; 11.77;11.78; 11.93; 11.101; 11.125; 11.123; 11.122; 11.135; 11.167; 11.193
R.C. Hibbeler. Mecánica Vectorial para ingenieros. Dinámica. Decima Edición. Pearson, Prentice Hall.	

B2013

- Ejercicios del libro Ramón Puello. *Lecciones Elementales de Dinámica*. Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes.

  1.61;

- Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston. *Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinámica.* McGrawHill.

  11.167 ; 11.123 ; 11.55 ; de la sexta edicion

- R.C. Hibbeler. Mecánica Vectorial para ingenieros. Dinámica. Decima Edición. Pearson, Prentice Hall:

  12.89; 12.54 ;

- Guía que está en la fotocopiadora *recomendada por el Prof. Olivares.

  3.5.12 ; 3.2.10 ; 3.2.6

- Ejercicios del libro Ramón Puello. *Lecciones Elementales de Dinámica*. Facultad de Ingeniería. Universidad de Los Andes.

  1.37 ; 1.30 ; 1.60
- Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston. *Mecánica Vectorial para Ingenieros. Dinámica.* McGrawHill.
- **11.53 ;11.59**
- R.C. Hibbeler. Mecánica Vectorial para ingenieros. Dinámica. Decima Edición. Pearson, Prentice Hall:

  12.10 ; 12.7 ; 12.22 ; 12.59 ; 12.29 ; 12.94 ; 12.99
- Guía que está en la fotocopiadora *recomendada por el Prof. Olivares.

  3.2.2 ;