Mecánica Racional 20
TEMA 2: Cinética de Partículas. Leyes de Newton.

1. Introducción.
2. Leyes de Newton:
2.1 Primera Ley de Newton o Ley de Inercia.
2.2 Segunda Ley de Newton o Principio Fundamental de la Dinámica.
2.3 Tercera Ley de Newton o Principio de Acción o Reacción.
3. Sistemas de Unidades Básicas (longitud, masa, tiempo).
4. Ecuación de movimiento
4.1 Coordenadas rectangulares.
4.2 Coordenadas normal y tangencia.
4.3 Coordenadas radial y transversal.
4.4 Coordenadas cilíndricas.
5. Cantidad de Movimiento Lineal de una Partícula.
6. Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula.
6.1 Rapidez de Cambio de la Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula.
6.2 Movimiento bajo la Acción de una Fuerza Central.

Ing. Nayive Jaramillo Santana *Ing. José Gregorio Gutiérrez*

1. INTRODUCCIÓN.

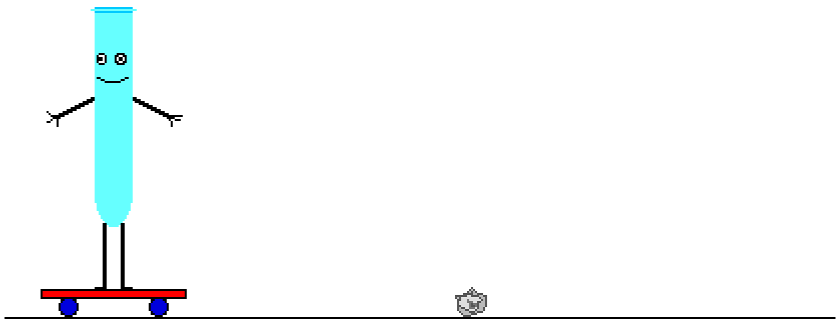
✓ La cinética estudia la relación entre el sistema resultante de fuerzas asociados con el movimiento de los cuerpos que no se encuentran en equilibrio.

✓ Los principios fundamentales de la cinética de partículas fueron establecidos por Sir Isaac Newton, originando las Leyes de Newton, que rigen el estudio de las fuerzas y el movimiento de los cuerpos.

Ing. Nayive Jaramillo Santana
Ing. José Gregorio Gutiérrez

2. LEYES DE NEWTON.

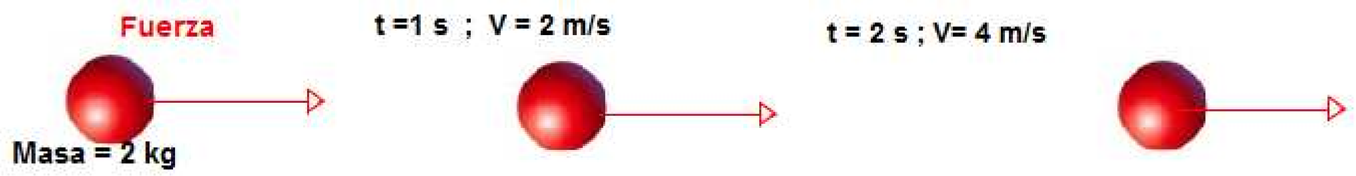
2.1 Primera Ley de Newton o Ley de Inercia: *"Todo cuerpo tiende a permanecer en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que haya fuerzas que lo obliguen a cambiar tal estado"*.



Ing. José Gregorio Gutiérrez

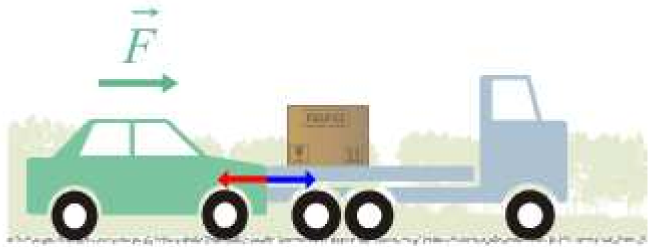
2. LEYES DE NEWTON.

2.2 Segunda Ley de Newton o Principio Fundamental de la Dinámica: *"Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de esta fuerza resultante".*



2. LEYES DE NEWTON.

2.3 Tercera Ley de Newton o Principio de Acción o Reacción: *"Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, el segundo ejerce siempre sobre el primero otra fuerza de la misma magnitud pero en sentido opuesto".*



2. 2 SEGUNDA LEY DE NEWTON.

✓ En su celebrado PRINCIPIA, estableció que la fuerza ejercida era directamente proporcional a la cantidad de movimiento, esto es:

$$\vec{F} = k.\left[\frac{d(m\vec{V})}{dt}\right]$$

$$k = 1$$

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$$

2.2 SEGUNDA LEY DE NEWTON.

Luego:

$$\vec{F} = \frac{d(m)}{dt}.\vec{V} + m.\frac{d(\vec{V})}{dt}$$

Considerando $\longrightarrow$ $m = constante$

$$\vec{F} = m.\frac{d(\vec{V})}{dt}$$

Finalmente $\boxed{\vec{F} = m.\vec{a}}$

Ing. Nayive Jaramillo Santana *Ing. José Gregorio Gutiérrez*

2.2 SEGUNDA LEY DE NEWTON.

OBSERVACIONES

- ✓ La ecuación $\vec{F} = m.\vec{a}$ es válida sólo para masa constante.
- ✓ La ecuación $\vec{F} = m.\vec{a}$ es válida aún cuando $\vec{F}$ varíe.
- ✓ Si la partícula está sometida a la acción de varias fuerzas tenemos que $\sum\vec{F} = m.\vec{a}$

3. SISTEMA DE UNIDADES.

Suelen utilizarse dos sistemas de unidades cinéticas consistentes :

- ✓Sistema Internacional de Unidades (unidades del SI).
- ✓Unidades de uso común en Estados Unidos.

3. SISTEMA DE UNIDADES.

✓**Sistema Internacional de Unidades** (unidades del SI).

En este sistema, las unidades básicas son las de: longitud, masa y tiempo. Las cuales se denominan, respectivamente, el *metro* (m), el *kilogramo* (kg) y el *segundo* (s).

La *fuerza es una unidad derivada*. Se denomina *newton* (N) y se define como la fuerza que produce una aceleración de 1m/s^2 a una masa de 1 kg.

$$1\mathrm{N} = (1\mathrm{kg})(1\mathrm{m/s^2}) = 1\mathrm{kg.m/s^2} \qquad g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$$

3. SISTEMA DE UNIDADES.

✓**Unidades de uso común en Estados Unidos.**

En este sistema, las unidades básicas para la longitud, la fuerza y el tiempo son: al *pie* (ft), la libra (lb) y el *segundo* (s).

La fuerza se expresa como:

$$1\text{lb} = (1\text{slug})(1\text{ft/s}^2)$$

$$g = 32.2\ \text{ft/s}^2$$

$$1\ \text{slug} = \frac{1\ \text{lb}}{1\ \text{ft/s}^2} = 1\ \text{lb.s}^2/\text{ft}$$

3. SISTEMA DE UNIDADES.

✓Conversión de unidades básicas

Longitud: $1\ \mathrm{ft} = 0.3048\ \mathrm{m}$

Fuerza: $1\ \mathrm{lb} = 4.448\ \mathrm{N}$

Masa: $1\ \mathrm{slug} = 1\ \mathrm{lb}.1\ \mathrm{lb}.\mathrm{s}^2/\mathrm{ft} = \ 14.59\ \mathrm{kg}$

4. ECUACIONES DE MOVIMIENTO.

Cuando son varias las fuerzas que actúan sobre una partícula de masa *m* , podemos decir que:

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

Sin embargo, para resolver los problemas que implican el movimiento de una partícula se encontrará más conveniente sustituir la ecuación anterior por ecuaciones equivalentes que incluyen cantidades escalaras en función del sistema de coordenadas apropiado.

4.1 COORDENADAS RECTANGULARES.

Partiendo de:

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

Luego:

$$\sum\left(F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}\right) = m.\left(a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}\right)$$

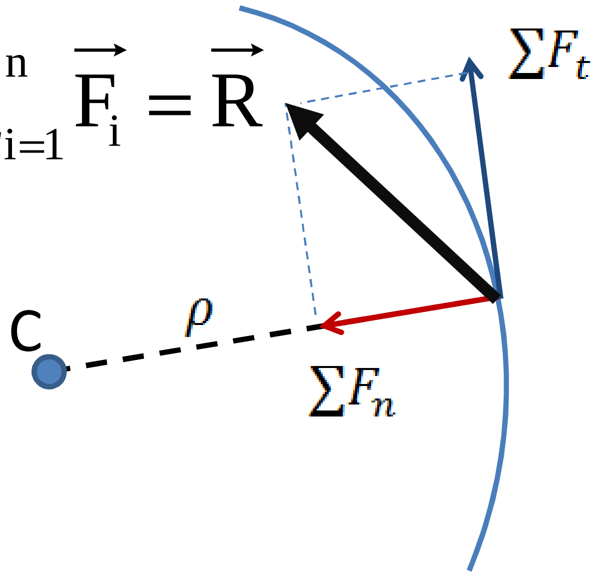
Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum F_x &= m.a_x \\ \sum F_y &= m.a_y \\ \sum F_z &= m.a_z \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \sum F_x &= m.\ddot{x} \\ \sum F_y &= m.\ddot{y} \\ \sum F_z &= m.\ddot{z} \end{aligned}}$$

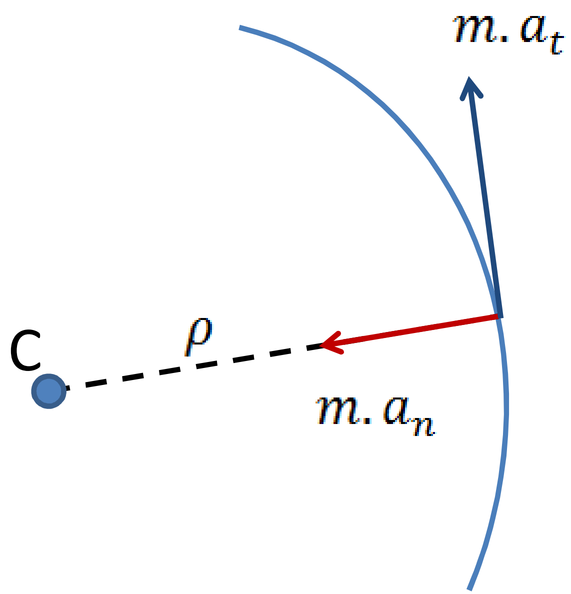
4.2 COORDENADAS NORMAL Y TANGENCIAL.

Para el movimiento curvilíneo en el plano, la ecuación de movimiento base puede expresarse en términos de sus coordenadas normal y tangencial .

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{R}$$



=



Ing. Nayive Jaramillo Santana *Ing. José Gregorio Gutiérrez*

4.2 COORDENADAS NORMAL Y TANGENCIAL.

Partiendo de: $\sum\left(F_t\vec{T} + F_n\vec{N}\right) = m.\left(a_t\vec{T} + a_n\vec{N}\right)$

$$\vec{T} = \vec{i_t} = \vec{e_t} = \vec{\lambda_t}$$

$$\vec{N} = \vec{i_n} = \vec{e_n} = \vec{\lambda_n}$$

Luego escalarmente:

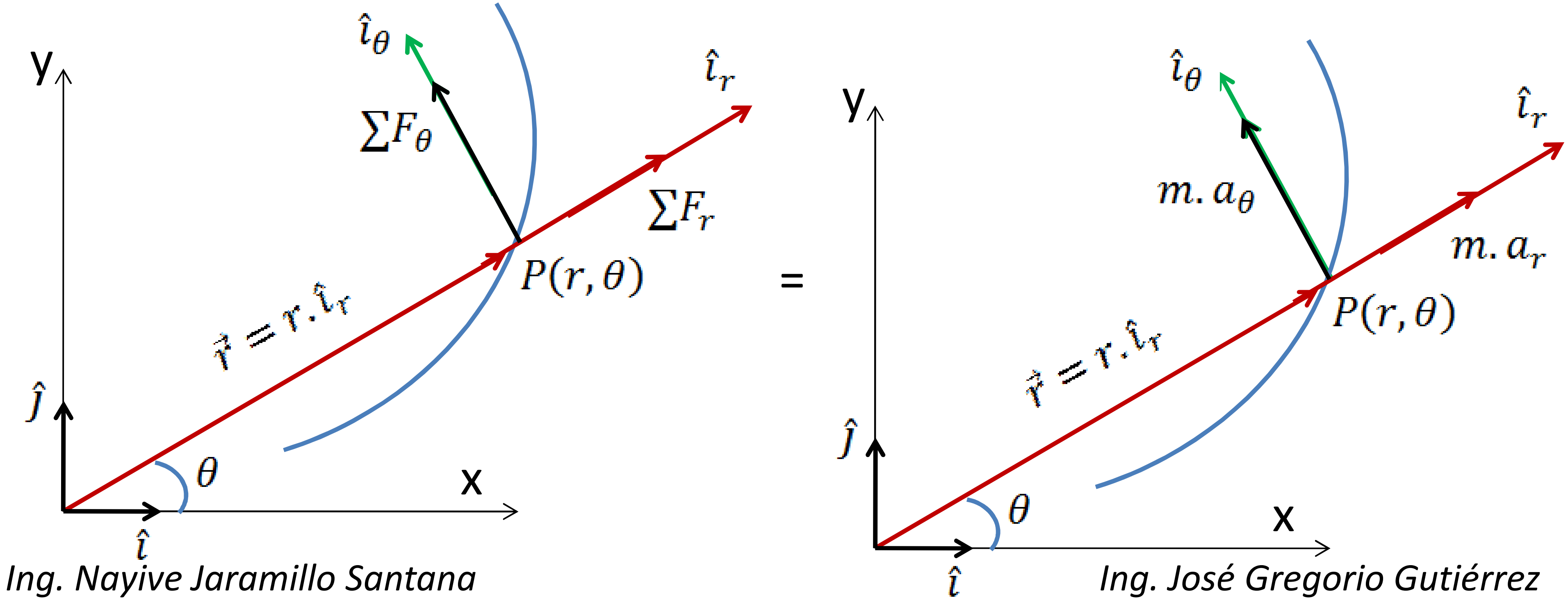
$$\boxed{\begin{aligned} \sum F_n &= m.a_n \\ \sum F_t &= m.a_t \end{aligned}}$$

Es decir:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum F_n &= m.\frac{v^2}{\rho} \\ \sum F_t &= m.\frac{dv}{dt} = m.v\frac{dv}{ds} \end{aligned}}$$

4.3 COORDENADAS RADIAL Y TRANSVERSAL.

Para el movimiento en el plano de la partícula P, sobre una trayectoria curvilínea, las ecuaciones de movimiento se pueden escribir en función de las coordenadas de *r* y θ



Ing. Nayive Jaramillo Santana *Ing. José Gregorio Gutiérrez*

4.3 COORDENADAS RADIAL Y TRANSVERSAL.

Partiendo de: $\sum(F_r.\hat{\imath}_r + F_\theta.\hat{\imath}_\theta) = m.(a_r.\hat{\imath}_r + a_\theta.\hat{\imath}_\theta)$

Luego escalarmente:

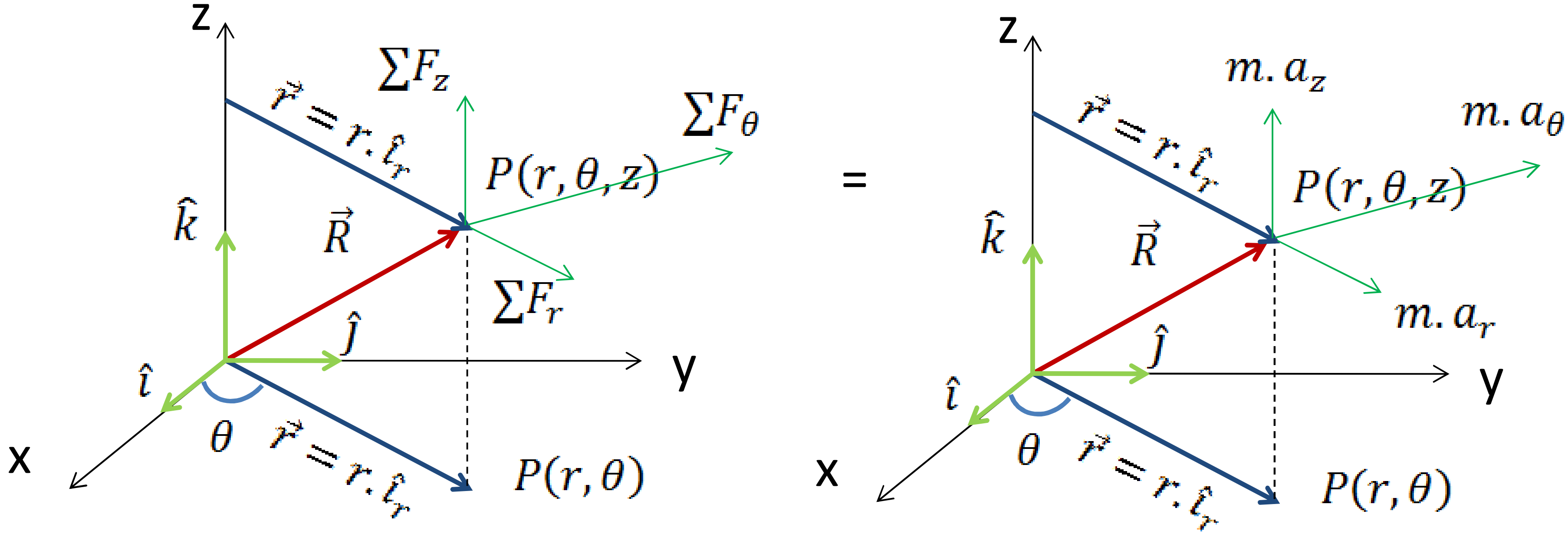
$$\boxed{\begin{aligned} \sum F_r &= m.a_r \\ \sum F_\theta &= m.a_\theta \end{aligned}}$$

Es decir:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum F_r &= m.\left(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2\right) \\ \sum F_\theta &= m.(2.\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}) \end{aligned}}$$

4.4 COORDENADAS CILÍNDRICAS.

Cuando las fuerzas que actúan sobre una partícula se descomponen en las direcciones: radial (r), transversal (θ) y axial (z), las ecuaciones de movimiento pueden escribirse escalarmente como:



4.4 COORDENADAS CILÍNDRICAS.

Partiendo de: $\sum(F_r.\hat{\imath}_r + F_\theta.\hat{\imath}_\theta + F_z.\hat{\imath}_z) = m.(a_r.\hat{\imath}_r + a_\theta.\hat{\imath}_\theta + a_z.\hat{\imath}_z)$

Luego escalarmente:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum F_r &= m.a_r \\ \sum F_\theta &= m.a_\theta \\ \sum F_z &= m.a_z \end{aligned}}$$

Es decir:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum F_r &= m.\left(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2\right) \\ \sum F_\theta &= m.(2.\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}) \\ \sum F_z &= m.\ddot{z} \end{aligned}}$$

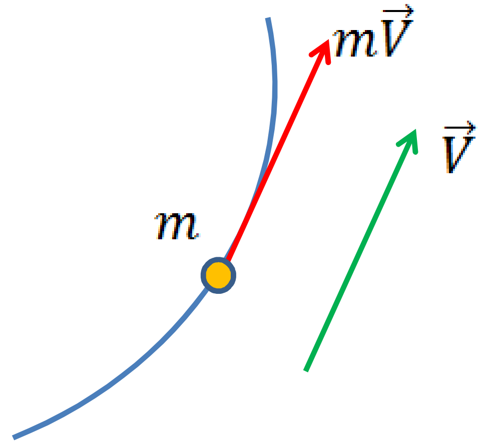
5. Cantidad de Movimiento Lineal de una Partícula.

La ecuación $\vec{F} = m.\vec{a}$ puede escribirse de la forma:

$$\vec{F} = m.\frac{d\vec{V}}{dt}$$

Asumiendo que la masa *m* es constante durante el movimiento tenemos que:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt}$$



5. Cantidad de Movimiento Lineal de una Partícula.

El vector $m\vec{V}$ se denomina cantidad de movimiento lineal de una partícula y se denota como $\vec{L}$, así tendremos que:

$$\boxed{\vec{L} = m\vec{V}}$$

Tiene la misma dirección que la velocidad de la partícula, y su magnitud es igual al producto de la masa la velocidad de la partícula.

5. Cantidad de Movimiento Lineal de una Partícula.

Para un sistema de fuerzas podemos decir que la resultante de la fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal de la partícula, es decir:

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d(\vec{L})}{dt} = \dot{\vec{L}}}$$

5. Cantidad de Movimiento Lineal de una Partícula.

Observación:

- ✓ Cuando la resultante de las fuerzas que actúan sobre sobre una partícula es cero, la cantidad de movimiento lineal de la partícula permanece constante, tanto en magnitud como en dirección, es decir:

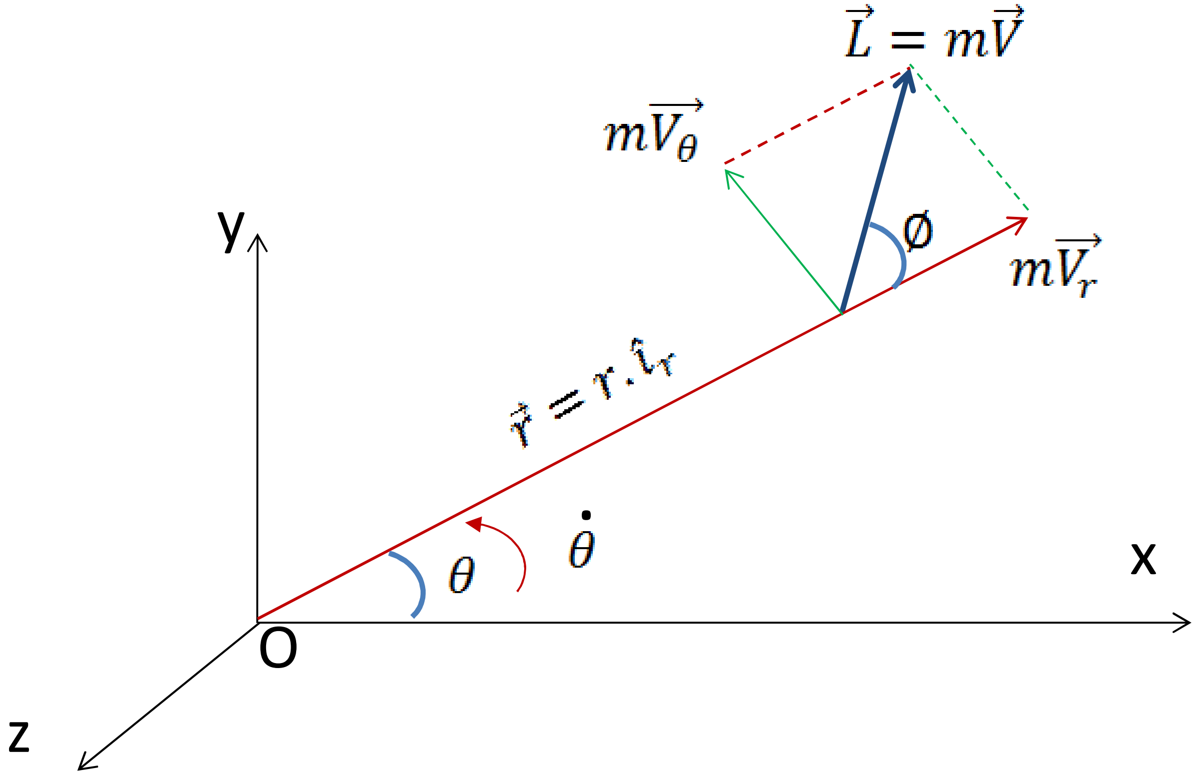
$$\boxed{\begin{gathered}\sum\vec{F} = \frac{d(\vec{L})}{dt} = 0 \\ L = ctte\end{gathered}}$$

Principio de Cantidad de Movimiento Lineal. Enunciado alternativo de la Primera Ley de Newton.

6. Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula.

La cantidad de movimiento lineal $\vec{L}$ para una partícula viene dada por:

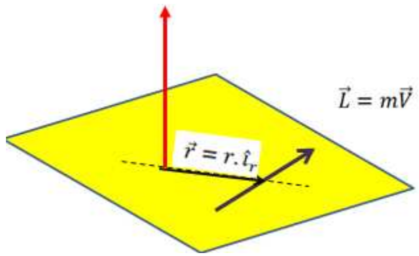
$$\vec{L} = m\vec{V}$$



6. Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula.

El momento de este vector $\vec{L}$ con respecto al origen de un sistema inercial se le llama momento de la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto a O y se denota por medio de $\overrightarrow{H_o}$, vectorialmente se expresa como:

$$\boxed{\overrightarrow{H_o} = \vec{r} \times m.\vec{V}}$$



El vector $\overrightarrow{H_o}$ es perpendicular al plano que contiene a los vectores $\vec{r}$ y $m.\vec{V}$ y su magnitud viene dada:

$$\boxed{H_o = r.mV.\sin\emptyset}$$

6. Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula.

$$\overrightarrow{H_o} = \vec{r} \times (m.\vec{v})$$

Unidades:

- ✓ Sistema Internacional de Unidades:

$$(1\mathrm{m})(\mathrm{kg.m/s}) = 1\mathrm{kg.m^2/s}$$

$$[\text{masa}] = [\text{fuerza}]/[\text{aceleración}]$$

- ✓ Unidades de uso común en Estados Unidades:

$$(\mathrm{ft})(\mathrm{lb.s}) = \mathrm{ft.lb.s}$$

$$m = lb/(pies/s^2)$$

6. Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula.

Partiendo de los vectores $\vec{r}$ y $m.\vec{V}$ en coordenadas rectangulares, podemos escribir $\overrightarrow{H_o}$ como:

$$\overrightarrow{H_o} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ m.V_x & m.V_y & m.V_z \end{bmatrix} = m.\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix}$$

Desarrollando el determinante tenemos que:

$$\boxed{\begin{gathered} \overrightarrow{H_o} = m.(y.V_z - z.V_y)\hat{i} + m.(z.V_x - x.V_z)\hat{j} + m.(x.V_y - y.V_x)\hat{k} \\ \overrightarrow{H_o} = H_x\hat{i} + H_y\hat{j} + H_z\hat{k} \end{gathered}}$$

6. Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula.

Donde:

$$\begin{cases} H_x = m.(y.V_z - z.V_y) \\ H_y = m.(z.V_x - x.V_z) \\ H_z = m.(x.V_y - y.V_x) \end{cases}$$

En el caso de una partícula que se mueva en el plano xy, se tiene que:

$$\begin{cases} z = V_z = 0 \\ H_x = H_y = 0 \end{cases}$$

6. Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula.

Por lo tanto la cantidad de movimiento angular es perpendicular al plano xy, es decir:

$$\overrightarrow{H_o} = H_z\hat{k} = m.(x.V_y - y.V_x)$$

Partiendo del esquema inicial de cantidad de movimiento angular tenemos que

$$\overrightarrow{H_o} = \vec{r} \times \vec{L} = \vec{r} \times (m.V_r\hat{i}_r + m.V_\theta\hat{i}_\theta)$$

$$\overrightarrow{H_o} = \vec{r} \times m.V_r\hat{i}_r + \vec{r} \times m.V_\theta\hat{i}_\theta$$

$$\overrightarrow{H_o} = \vec{r} \times m.V_\theta\hat{i}_\theta$$

6. Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula.

Escalarmente:

$$H_o = r.m.V_\theta = r.m.r.\dot{\theta} = m.r^2.\dot{\theta}$$

$$\boxed{\frac{H_o}{m} = r^2.\dot{\theta}}$$

Cantidad de Movimiento Angular por Unidad de Masa

6.1 Rapidez de Cambio de la Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula.

Partiendo de:

$$\overrightarrow{H_o} = \vec{r} \times m.\vec{V}$$

Derivando con respecto al tiempo *t*:

$$\frac{d\overrightarrow{H_o}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m.\vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m.\vec{V} + \vec{r} \times \frac{d(m.\vec{V})}{dt}$$

$$\dot{\overrightarrow{H_o}} = \vec{V} \times m.\vec{V} + \vec{r} \times m.\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\dot{\overrightarrow{H_o}} = \vec{r} \times m.\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

6.1 Tasa de Cambio de la Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula.

Por lo tanto:

$$\boxed{\dot{\vec{H}}_o = \sum M_o}$$

Lo cual significa que el momento resultante con respecto al punto fijo es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular con respecto al mismo punto. En componentes rectangulares:

$$\sum M_x = H_x$$
$$\sum M_y = H_y$$
$$\sum M_z = H_z$$

6.1 Tasa de Cambio de la Cantidad de Movimiento Angular de una Partícula.

Si $\vec{r}$ o $\vec{F}$ es cero , o $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son paralelas, entonces:

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{H_o}} = 0}$$

$$\overrightarrow{H_o} = \vec{r} \times m.\vec{V} = ctte$$

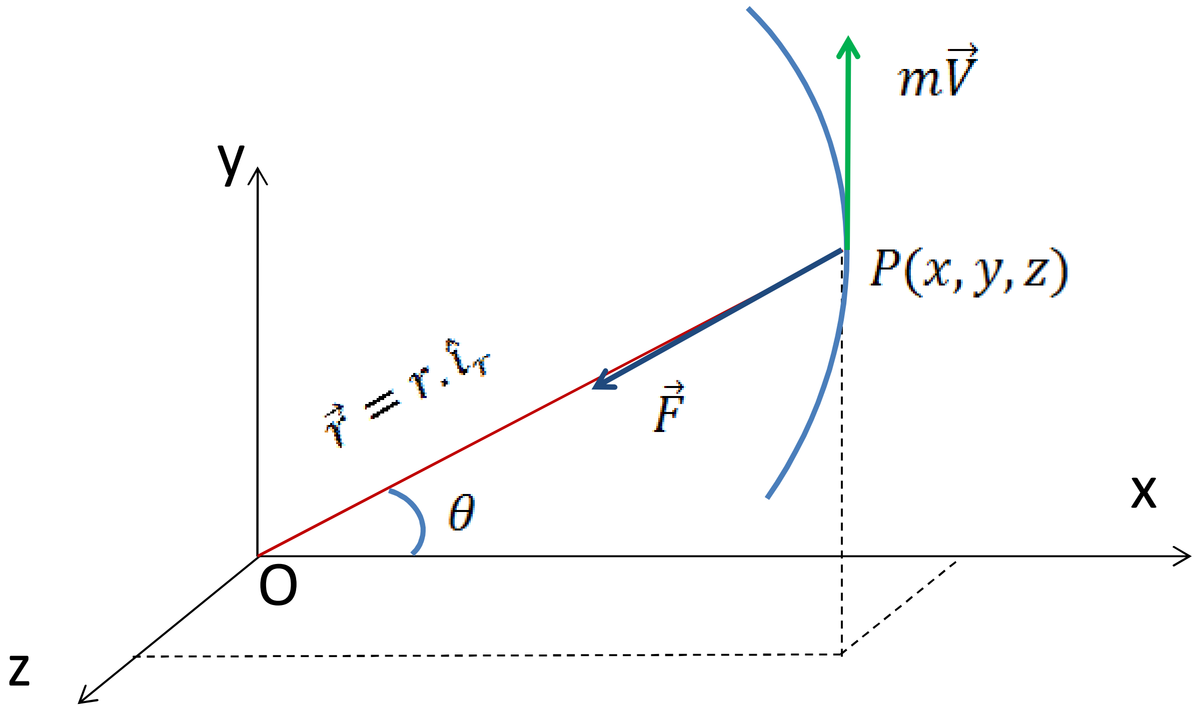
$$\left(\overrightarrow{H_o}\right)_i = \left(\overrightarrow{H_o}\right)_f$$

↓

Principio de la Conservación del Momento de la Cantidad de Movimiento Angular

6.2 Movimiento bajo la Acción de una Fuerza Central.

Una fuerza central es aquella cuya línea de acción pasa siempre por un punto fijo, este punto se denomina centro de fuerza.



6.2 Movimiento bajo la Acción de una Fuerza Central.

Ejemplos:

- Movimiento de los planetas alrededor del Sol.
- Movimiento de la Luna alrededor de la Tierra.

Del esquema anterior notamos que como $\vec{F}$ pasa por O, entonces:

$$\sum M_o = 0$$

Por lo tanto:

$$\overrightarrow{\dot{H}_o} = 0$$

$$\overrightarrow{H_o} = ctte$$

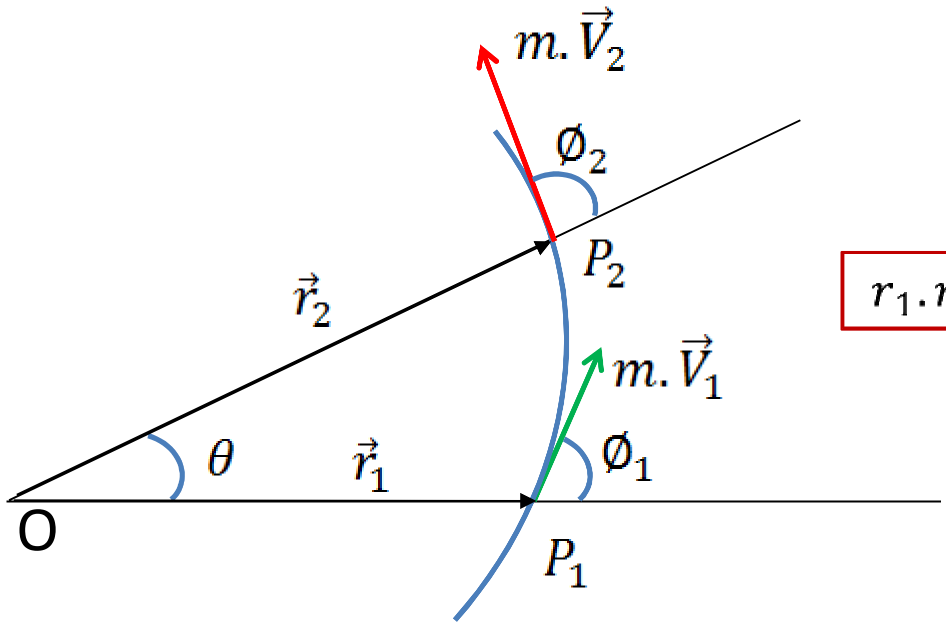
6.2 Movimiento bajo la Acción de una Fuerza Central.

- ✓ Se establece entonces que la cantidad de movimiento angular de una partícula que se mueva bajo la acción de una fuera central es *constante*, tanto en magnitud como en dirección.

- ✓ Así que una partícula sujeta a una fuerza central se mueve en un plano fijo a $\overrightarrow{H_o}$

6.2 Movimiento bajo la Acción de una Fuerza Central.

Del esquema entonces se tiene que cumplir que:



$$\boxed{\left(\overrightarrow{H_o}\right)_1 = \left(\overrightarrow{H_o}\right)_2}$$

$$\boxed{r_1.m.V_1.\sin\emptyset_1 = \quad r_2.m.V_2.\sin\emptyset_2}$$