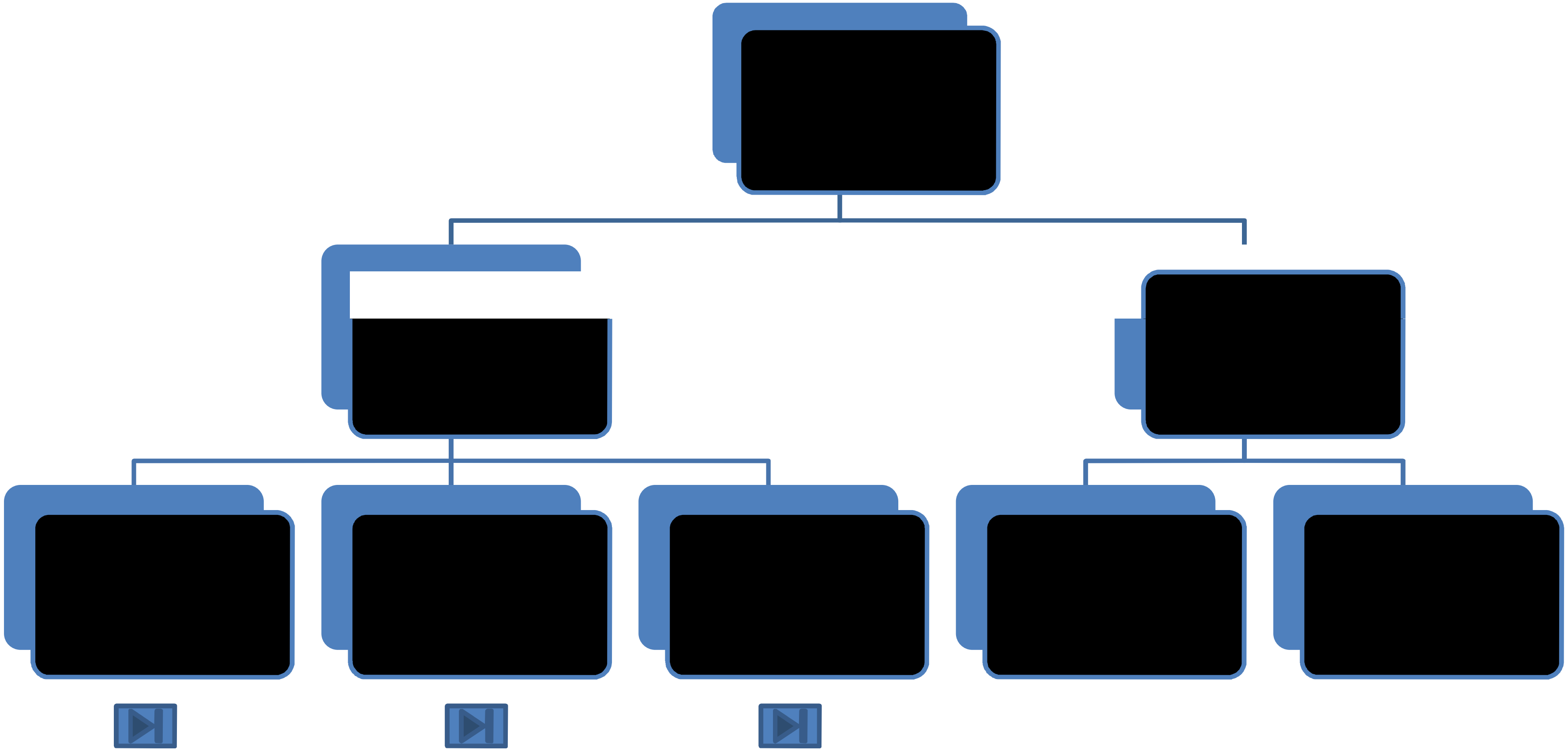
Introducción.

La cinemática de cuerpos rígidos estudia las relaciones existentes entre el tiempo, las posiciones, las velocidades y las aceleraciones de las diferentes partículas que forman un cuerpo rígido.

Cuerpo Rígido.

Es un sistema de partículas, que mantienen fijas las distancias que los separan, bajo la aplicación de una fuerza o momento.

Mecánica Racional 20
TEMA 4: Cinemática de los Cuerpos Rígidos.

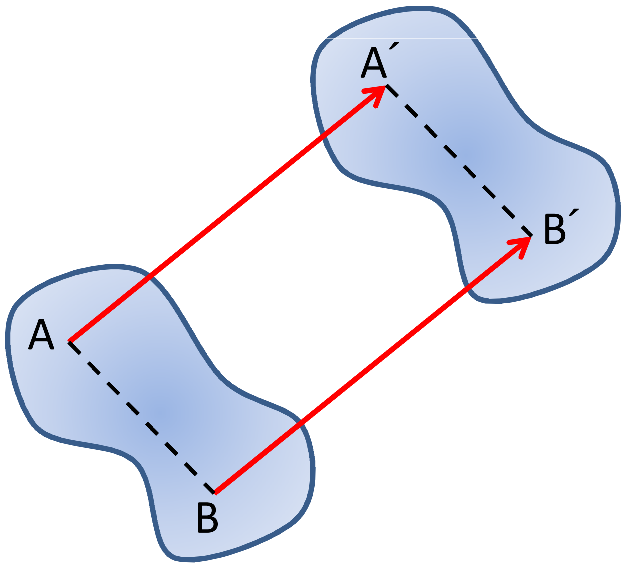


Ing. Nayive Jaramillo Santana

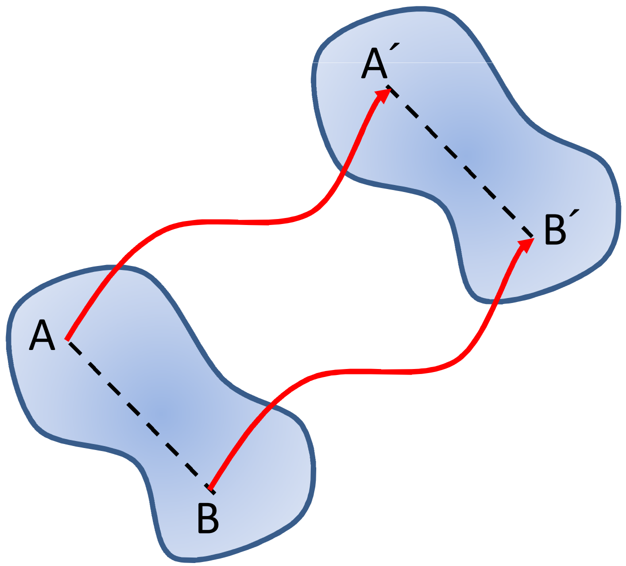
Ing. José Gregorio Gutiérrez

Traslación.

Se afirma que un movimiento será de traslación si toda línea recta dentro del cuerpo mantiene la misma dirección durante el movimiento.



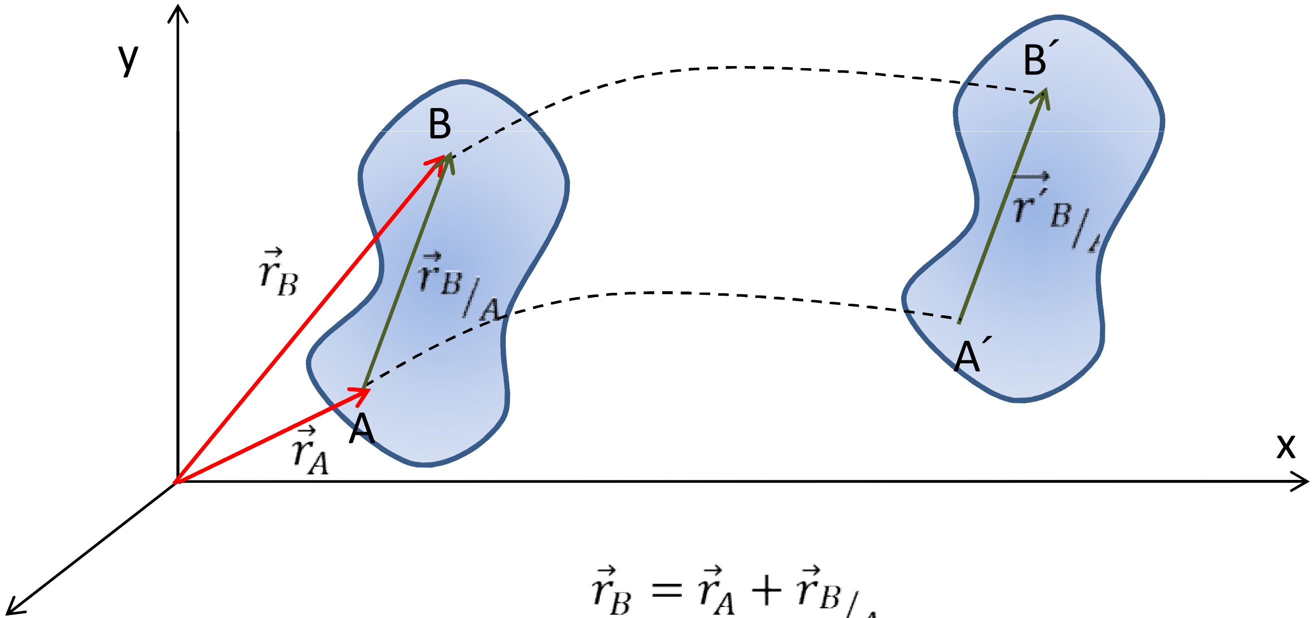
Traslación Rectilínea



Traslación Curvilínea

Traslación.

Consideremos un cuerpo rígido en traslación, además A y B dos partículas cualesquiera de dicho cuerpo rígido, tenemos que:



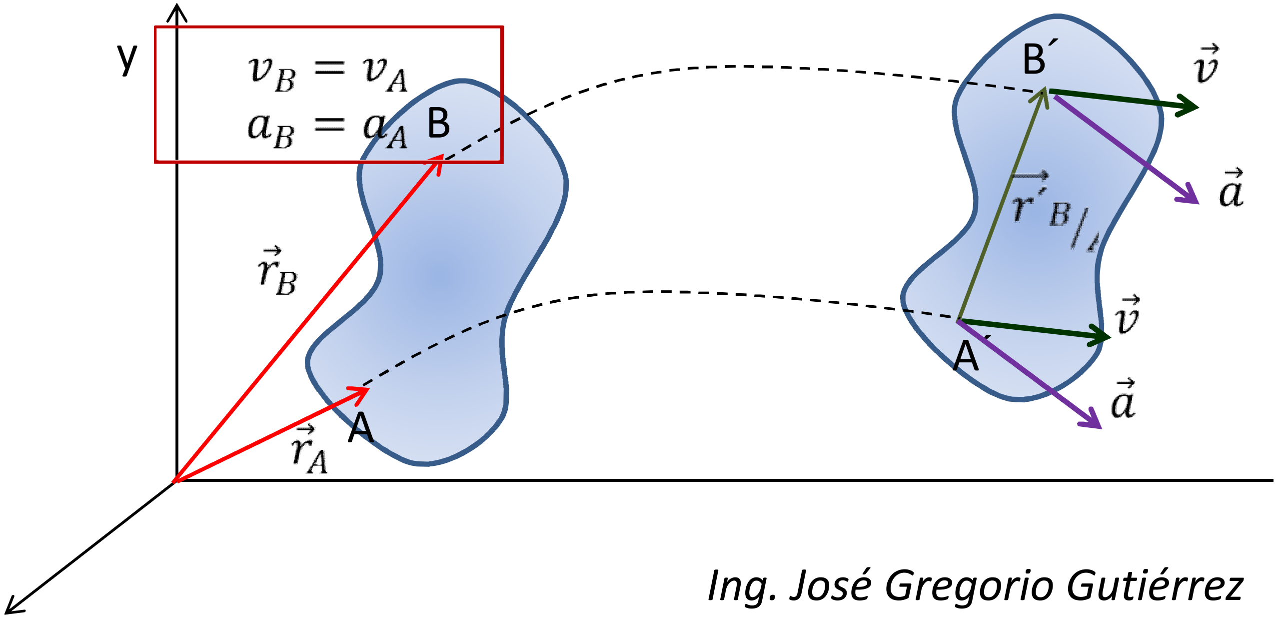
$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

Traslación.

Luego vemos que $\vec{r}_{B/A}$ se mantiene constante durante la traslación, por lo tanto:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_B &= v_A \\ a_B &= a_A \end{aligned}}$$



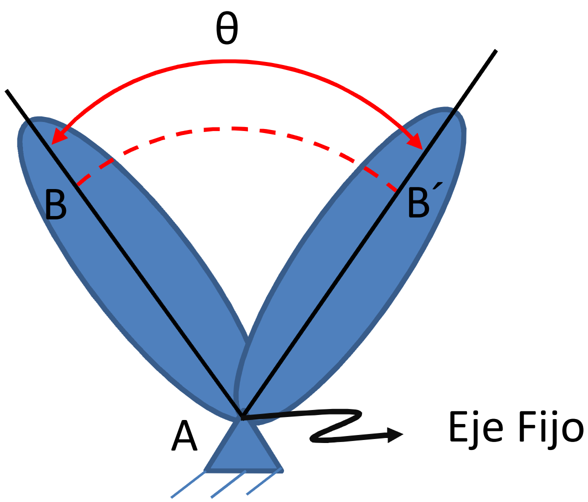
Traslación.

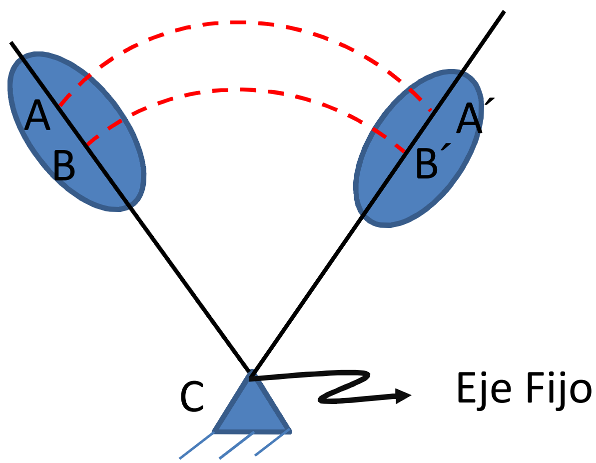
Observaciones:

- ✓ Cuando un cuerpo rígido está en traslación, todos los puntos del cuerpos tienen la misma velocidad y aceleración, en cualquier instante dado.
- ✓ En traslación rectilínea todas las partículas se mueven en línea recta paralelas, y su velocidad y aceleración se mantienen en la misma dirección durante el movimiento.
- ✓ En traslación curvilínea, la velocidad y aceleración cambian en dirección, así como en magnitud en cada instante.

Rotación alrededor de un eje fijo.

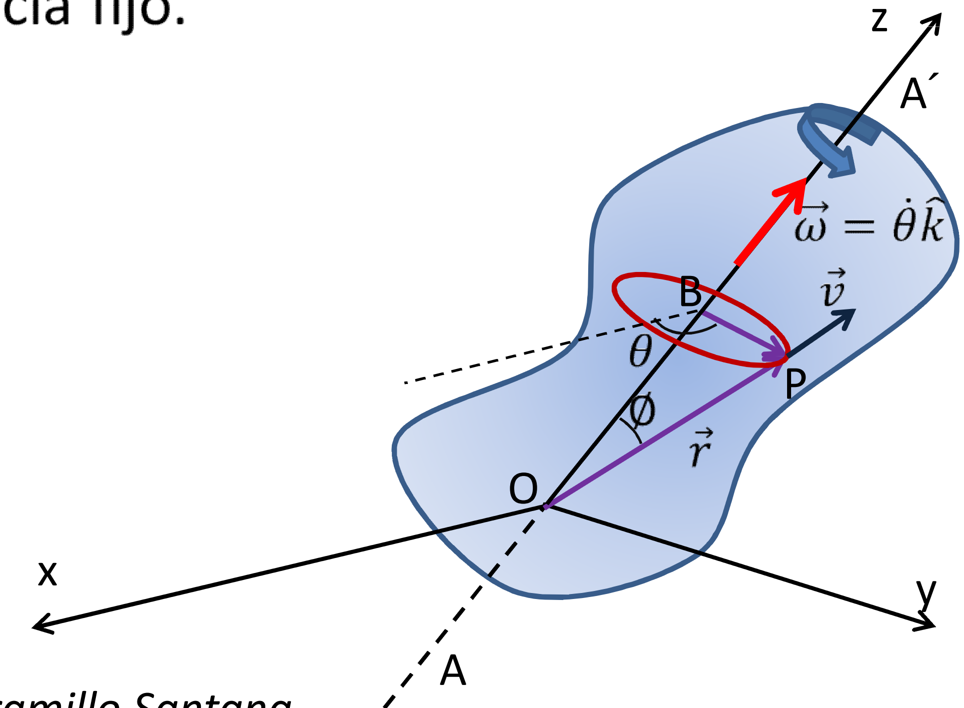
En este movimiento las partículas que forman al cuerpo rígido se mueven en planos paralelos a lo largo de círculos centrados sobre el mismo eje fijo. Si éste eje intersecta al cuerpo rígido cualquier partícula localizada sobre éste tiene velocidad lineal y aceleración nula.





Rotación alrededor de un eje fijo.

Consideremos un cuerpo rígido de forma cualquiera que gira alrededor del eje fijo AA´ y P un punto cualquier sobre dicho cuerpo y $\vec{r}$ su vector posición respecto a un sistema de referencia fijo.



Rotación alrededor de un eje fijo.

Luego el vector velocidad de la partícula P viene dado por:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Vector posición medido desde un punto perteneciente al eje de rotación

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Y el vector aceleración de la partícula P es:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}$$

Velocidad Angular

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k}$$

Aceleración Angular

$$\vec{\alpha} = \alpha \hat{k}$$

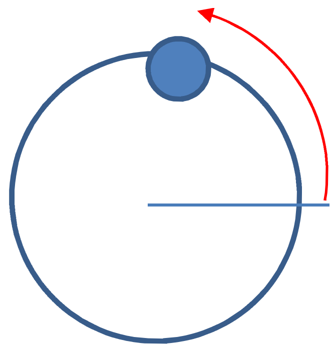
Ecuaciones que rigen la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo.

Si este movimiento es función conocida del tiempo t, las derivadas de los parámetros de posición angular (θ) , velocidad angular (ω) y aceleración angular (α) son:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$



Ecuaciones que rigen la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo.

Casos Particulares:

- ✓ Rotación uniforme ($\omega = ctte, \alpha = 0$)

$$\boxed{\theta = \theta_o + \omega t}$$

- ✓ Rotación acelerada uniformemente ($\alpha = ctte$)

$$\boxed{\omega = \omega_o + \alpha t}$$

$$\boxed{\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

$$\boxed{\omega^2 = {\omega_o}^2 + 2\alpha(\theta - \theta_o)}$$

Ing. Nayive Jaramillo Santana *Ing. José Gregorio Gutiérrez*

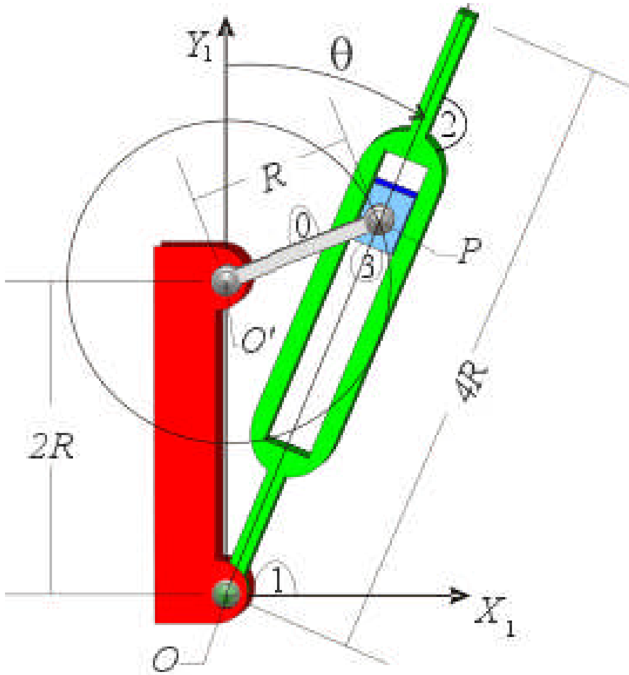
Mecánica Racional 20
TEMA 4: Cinemática de los Cuerpos Rígidos.

Mecánica Racional 20
TEMA 4: Cinemática de los Cuerpos Rígidos.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MERIDA VENEZUELA

Mecánica Racional 20
TEMA 4: Cinemática de los Cuerpos Rígidos.

Escuela Básica de INGENIERIA



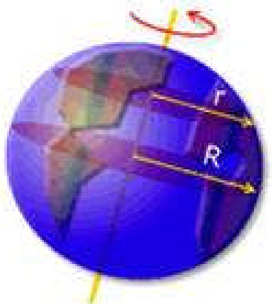


Figura 3 a

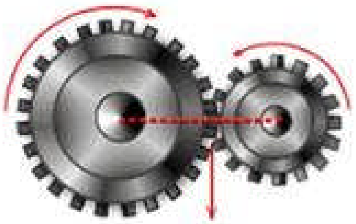
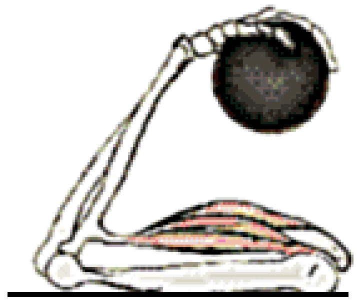
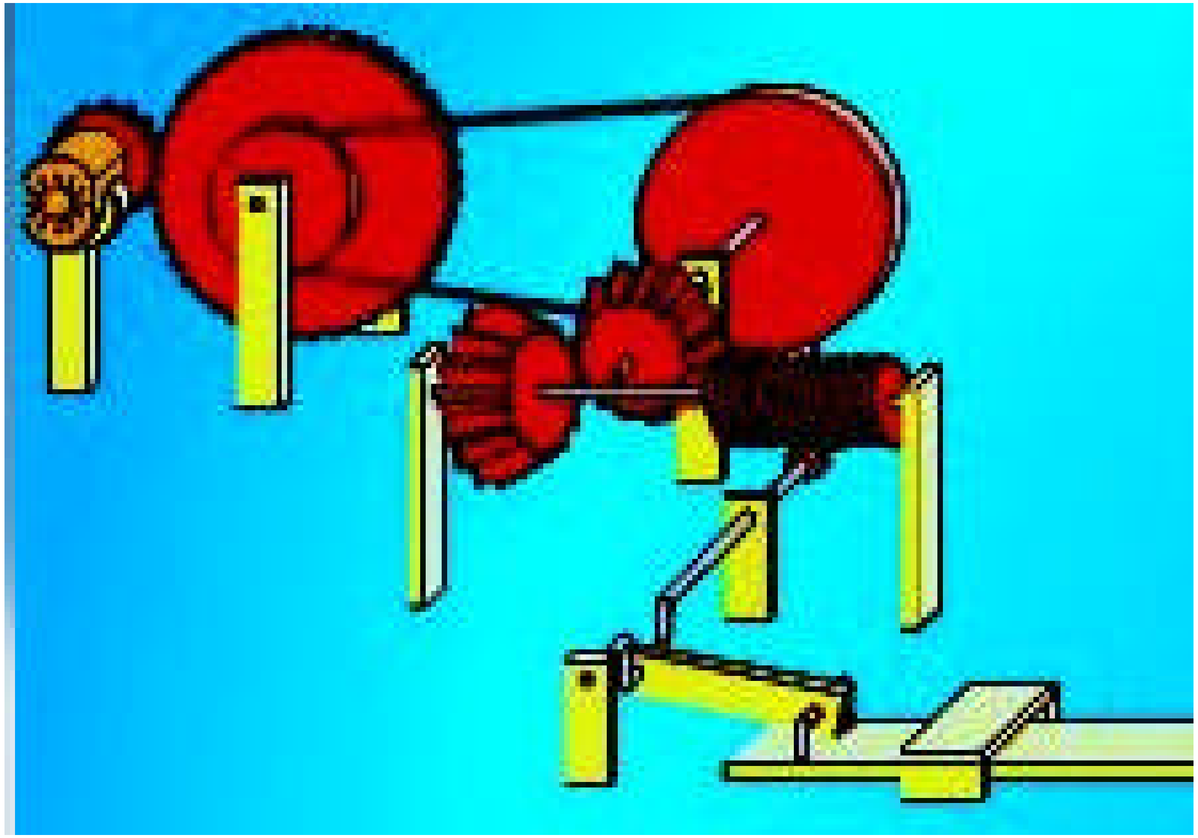


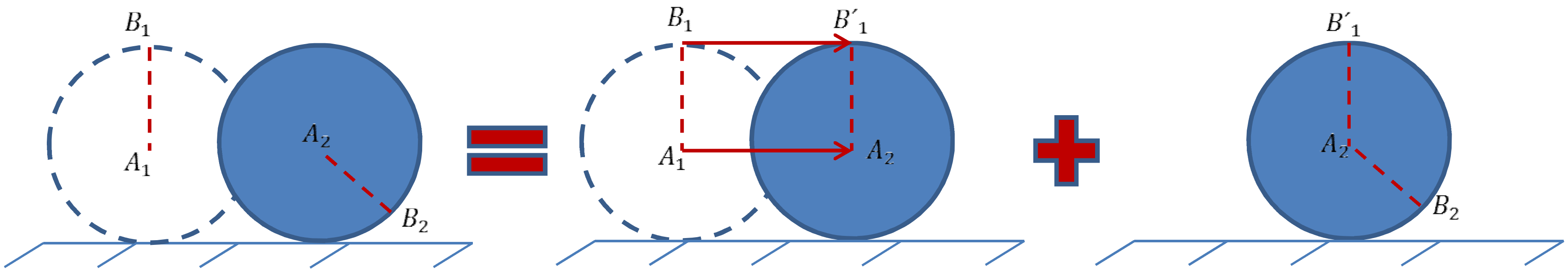
Figura 3 b





Movimiento Plano General.

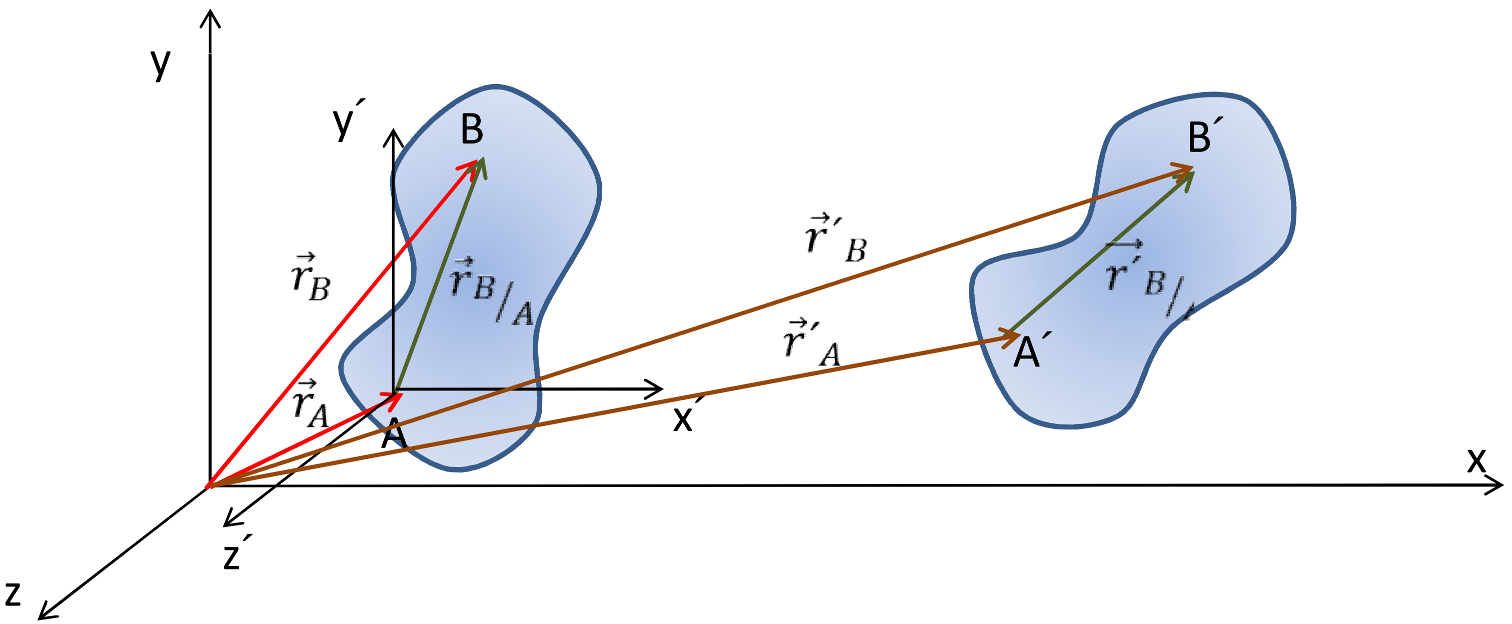
Es un movimiento plano que no es ni una traslación, ni una rotación. Sin embargo, un movimiento plano puede considerarse como la suma de una traslación y una rotación.



Movimiento Plano General — Traslación con A — Rotación alrededor de A

Velocidad Absoluta y Relativa del Movimiento Plano General.

Sean dos sistemas coordenados, uno fijo x,y,z que dan valores absolutos y uno móvil x´,y´,z´.



Velocidad Absoluta y Relativa del Movimiento Plano General.

Luego la posición absoluta de la partícula B es:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

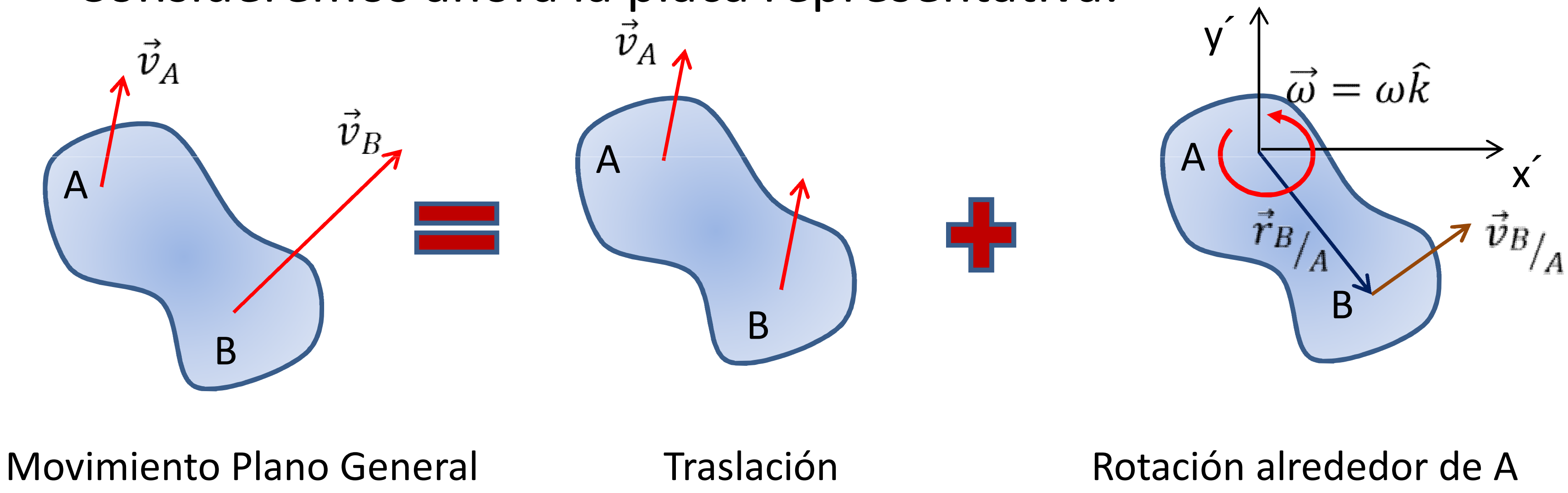
Por lo tanto su velocidad absoluta viene dada por:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

Velocidad Absoluta y Relativa del Movimiento Plano General.

Consideremos ahora la placa representativa:



Velocidad Absoluta y Relativa del Movimiento Plano General.

Luego :

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

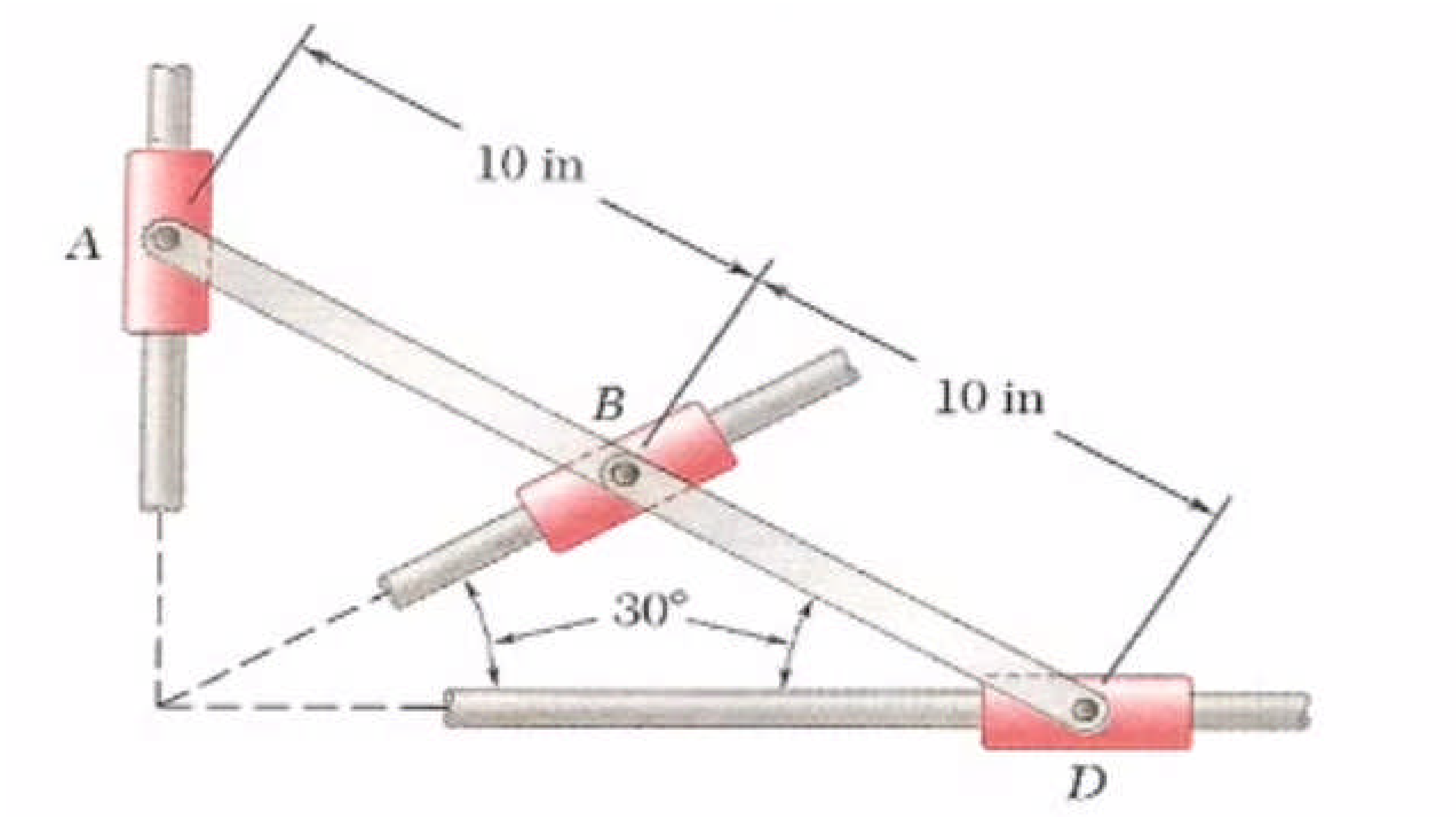
Donde:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}_{B/A} &= \omega\hat{k} \times \vec{r}_{B/A} \\ \vec{v}_{B/A} &= \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A} \end{aligned}}$$

Finalmente el vector velocidad de la partícula B viene dado por:

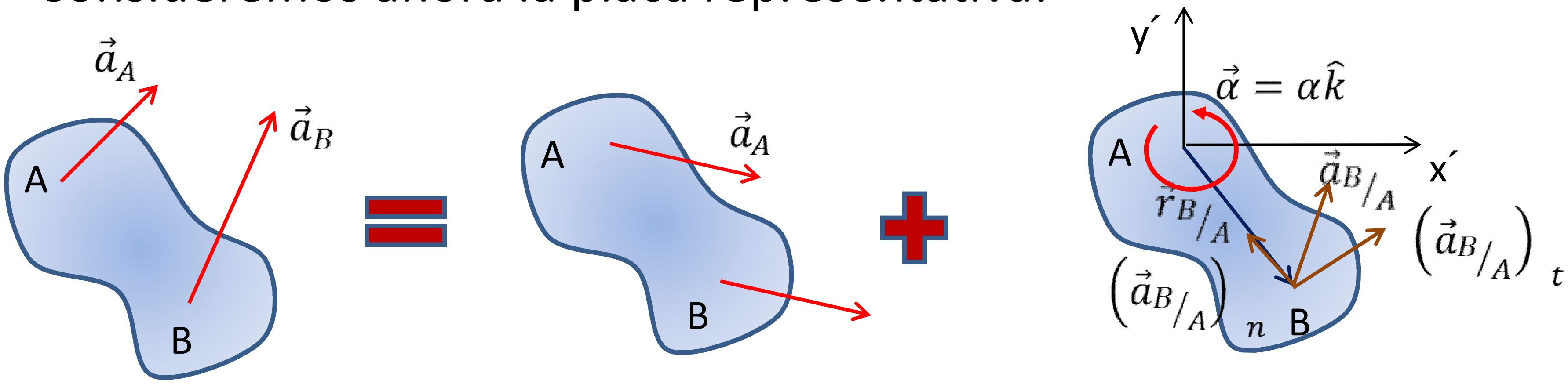
$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}}$$

Dos varillas AB y BD, se unen a tres collarines como se muestra. Si el collarín A se mueve hacia abajo con una velocidad de 6in/s . Determine: a) la velocidad angular de cada varilla, b) la velocidad del collarín D.



Aceleración Absoluta y Relativa del Movimiento Plano General.

Consideremos ahora la placa representativa:



Movimiento Plano General | Traslación | Rotación alrededor de A

Aceleración Absoluta y Relativa del Movimiento Plano General.

Sabemos :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

Luego:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A})}{dt}$$

Entones:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt}$$

Finalmente el vector aceleración de la partícula B viene dado por:

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A})}$$

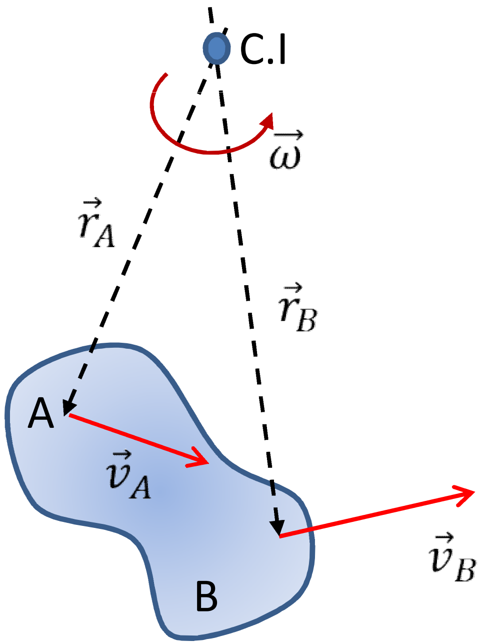
Centro instantáneo de rotación en el movimiento plano.

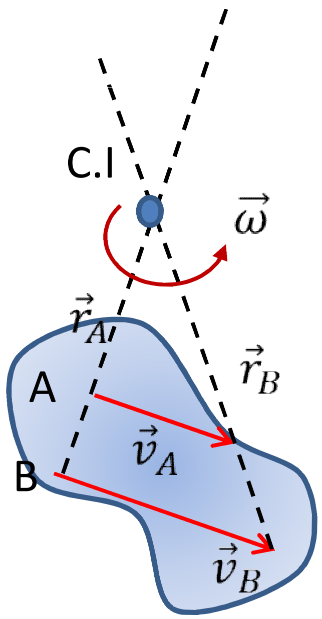
El centro instantáneo de rotación (C.I) es el punto en el cual el eje instantáneo de rotación (E.I) es perpendicular al plano de movimiento y es fijo solo para la rotación pura del cuerpo rígido.

El eje de rotación (E.I) es un eje que es perpendicular al plano del movimiento y además es paralelo al vector velocidad angular instantáneo. También puede definirse como el lugar geométrico de los puntos de velocidad nula.

Centro instantáneo de rotación en el movimiento plano.

✓ Localización del Centro Instantáneo (C.I)





Ing. Nayive Jaramillo Santana *Ing. José Gregorio Gutiérrez*

Centro instantáneo de rotación en el movimiento plano.

Luego para los puntos A y B se cumple que:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{v}_A = \vec{v}_{CI} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A_{/CI}} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_{CI} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B_{/CI}} \end{array}}$$

Si $\vec{v}_{CI} = 0$ entonces:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A_{/CI}} \\ \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B_{/CI}} \end{array}}$$

Y como $\vec{v}_A \perp \vec{r}_A$ y $\vec{v}_B \perp \vec{r}_B$

$$\boxed{\omega = \frac{v_B}{r_{B_{/CI}}} = \frac{v_A}{r_{A\,/CI}}}$$