# Reducción de un sistema de Fuerzas

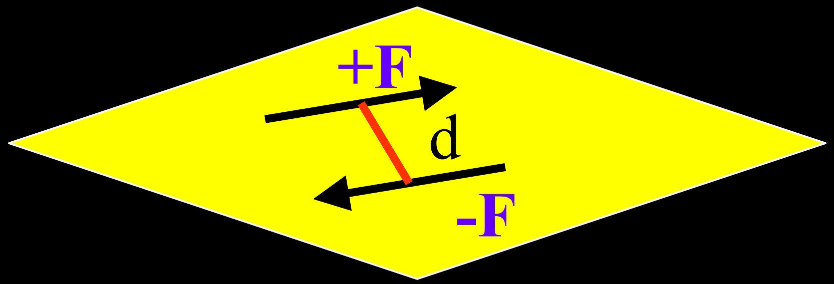
Pares.
Traslación de una fuerza
Invariantes de un sistema
Eje Central

Prof. Nayive Jaramillo

# Objetivo

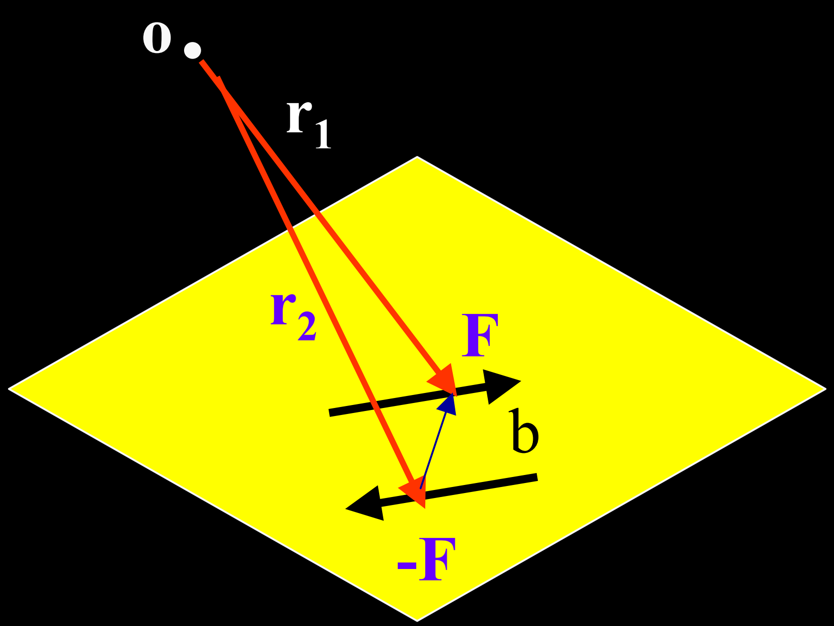
- Conocer y calcular pares de fuerzas.
- Comparar y determinar sistemas de fuerzas equivalentes.
- Reducir cualquier sistema de fuerzas.
- Determinar la expresión de eje central.

# Pares de Fuerzas




- Un par de fuerzas es un sistema formado por dos fuerzas de igual magnitud, dirección, sentido contrario y cuyas líneas de acción son paralelas.

# Pares de Fuerzas: momento de un par con respecto a un punto "o"




$$\vec{M}_o = \vec{G} = \vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F}$$

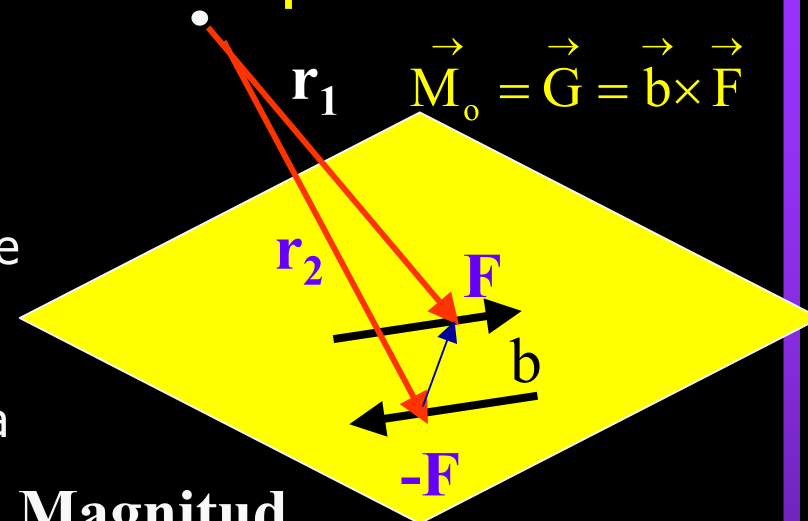
$$\vec{b} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

- Recordemos que el momento de un sistema de fuerzas respecto a un punto es equivalente a la suma de los momentos de las fuerzas respecto al punto.

$$\vec{M}_o = \vec{G} = \vec{b} \times \vec{F}$$

# Pares de Fuerzas: momento de un par con respecto a un punto "o"

- El momento del par se obtiene multiplicando vectorialmente los vectores **b** y +F . El **b** define el vector posición que va desde cualquier punto de la línea de acción de la fuerza negativa (**– F)** hasta otro cualquiera de la línea de acción de la fuerza positiva (**+F)**



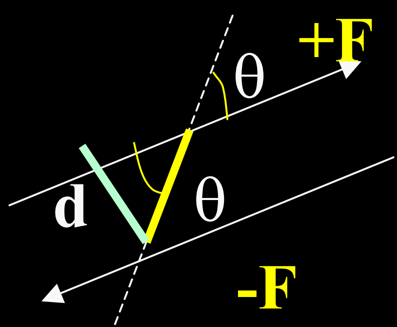

$$\vec{M}_o = \vec{G} = \vec{b} \times \vec{F}$$

**Magnitud**

$$\left|\vec{G}\right| = G = \left|\vec{b}\right| \bullet \left|\vec{F}\right| \bullet \mathrm{sen}(\theta)$$

$$\text{pero } \ \mathrm{Sen}\theta = \frac{d}{b} \therefore b = \frac{d}{\mathrm{Sen}\theta}$$

$$G = \left|\vec{F}\right| \bullet d$$



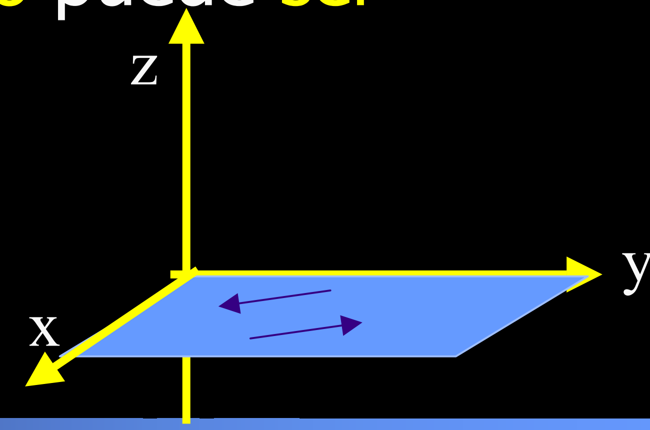

d= brazo del par (distancia perpendicular entre las fuerzas)

"Haciendo coincidir la rotación del par con los dedos cerrados de la mano derecha siendo el pulgar extendido el que nos indique la dirección de G"

**Sentido** se obtiene usando la regla de la mano derecha.

# Características de **G**. Resumen

- $\vec{G} = \vec{b} \times \vec{F}$
- El momento G es independiente del polo.
- Su dirección se obtiene de acuerdo a la regla de la mano derecha.
- G será perpendicular al plano formado por **F** y **b** (plano del par)
- **Un par es irreducible**, no puede ser reducido a una sola fuerza.

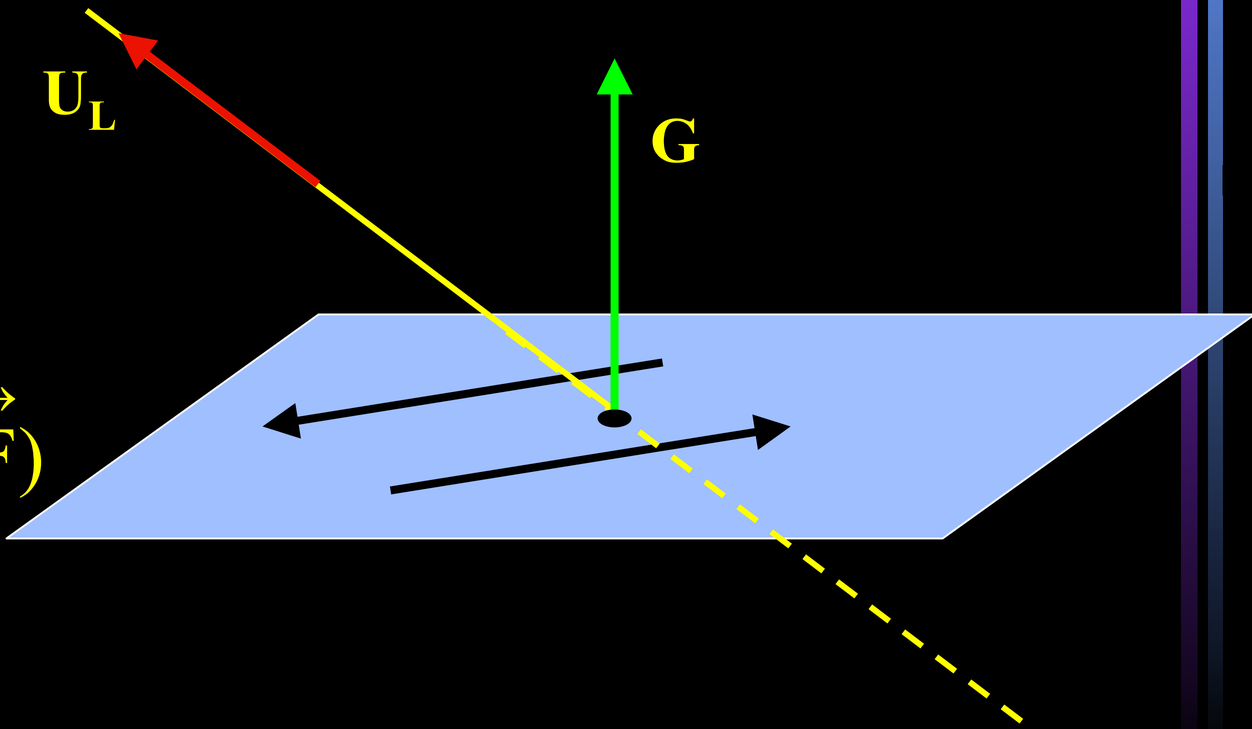


# Momento de un par respecto a un eje

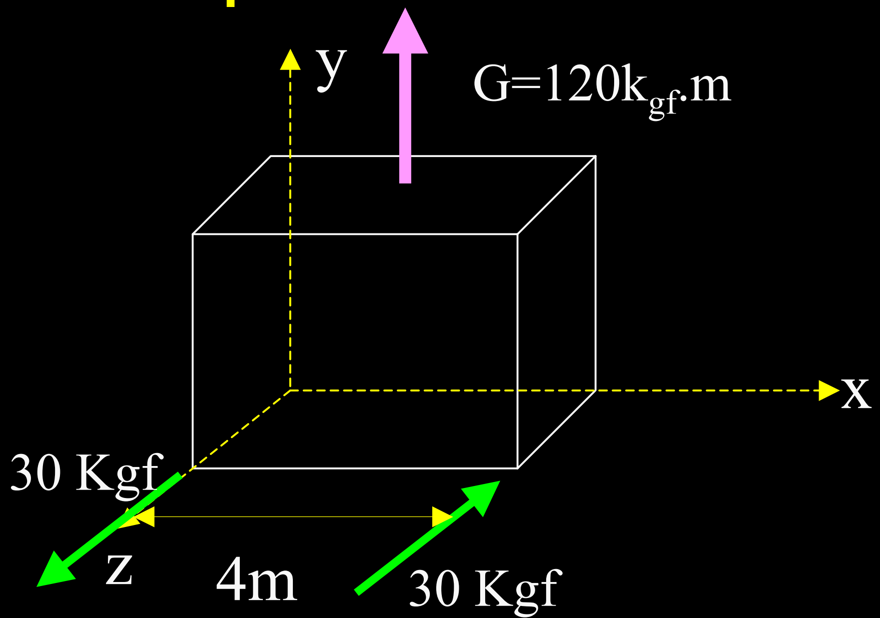
- $M_L = \vec{U_L} \circ \vec{M_q}$
- Siendo **q** un punto del eje pero como **G** no depende del punto $\vec{M_q} = \vec{b} \times \vec{F}$

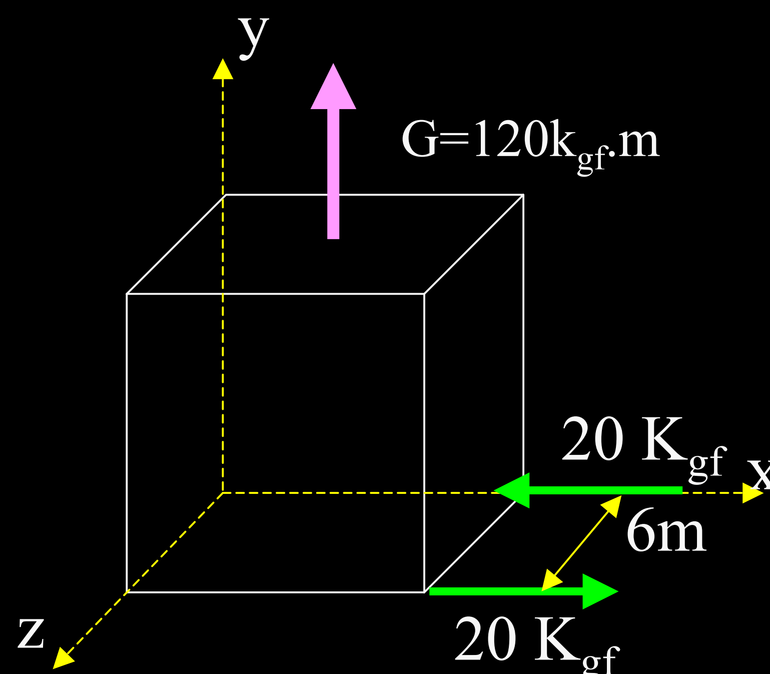
$$M_L = \vec{U_L} \circ \vec{G} =$$

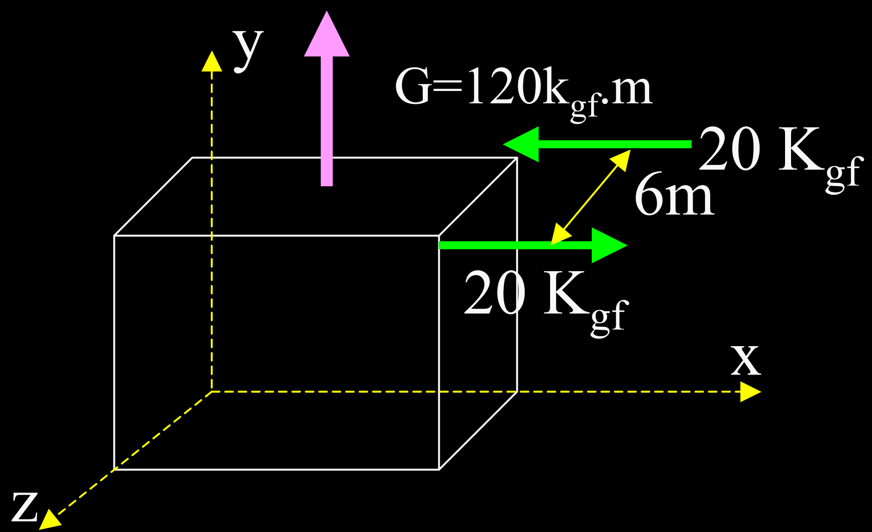
$$M_L = \vec{U_L} \circ (\vec{b} \times \vec{F})$$



# Pares Equivalentes ?




- Se observa que en los diferentes sistemas de pares se produce un mismo momento en magnitud, dirección y sentido. Cuando esto sucede se dice que los pares son equivalentes. Equivalencia implica que un sistema vectorial puede ser sustituido por otro.

# Conclusión de pares equivalentes

- Pares de igual momento, magnitud dirección y sentido producen el mismo efecto sobre el cuerpo.
- La Característica fundamental del par de fuerzas es su momento, no la magnitud de las fuerzas ni la distancia entre ellas.

# Composición de Pares ó Suma de pares.

- Sean dos pares actuando en los planos $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$, por conveniencia aplicados en los puntos A y B que pertenecen a la recta de intersección de los planos
- $G_1$ par debido a las fuerzas $F_1$ y $-F_1$
- $G_2$ par debido a las fuerzas $F_2$ y $-F_2$

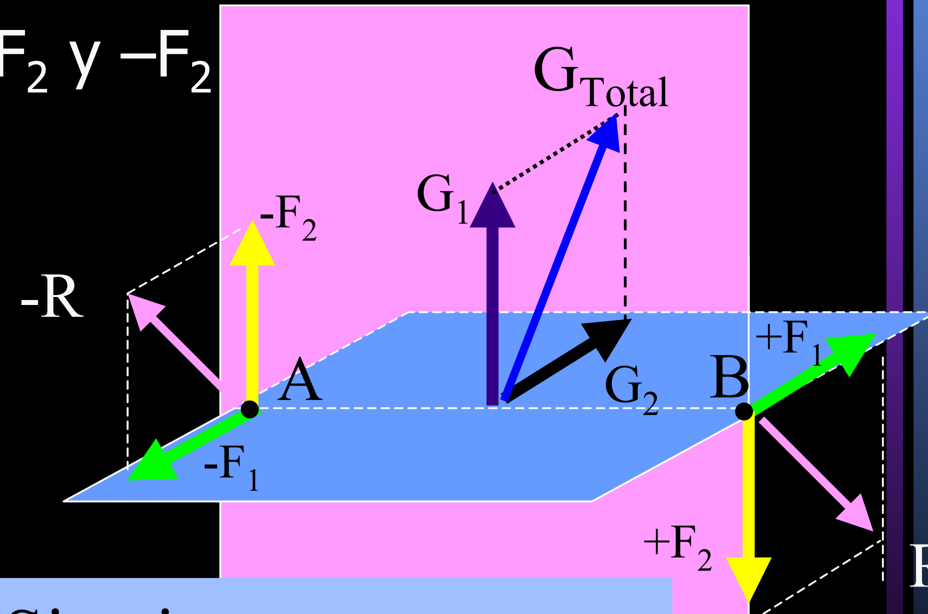
$$\vec{M}_R = \vec{AB}\times\vec{R} = \vec{AB}\times\left[\vec{F}_1+\vec{F}_2\right] =$$

$$= \vec{AB}\times\vec{F}_1 + \vec{AB}\times\vec{F}_2$$

Donde:

$$\vec{G}_1 = \vec{AB}\times\vec{F}_1 \;;\; \vec{G}_2 = \vec{AB}\times\vec{F}_2 \;\therefore$$

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \;\text{ ó }\; \vec{G}_{Total} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2$$

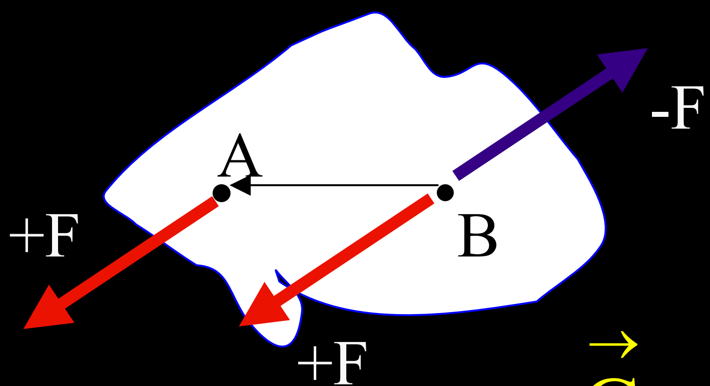



Si existen n pares

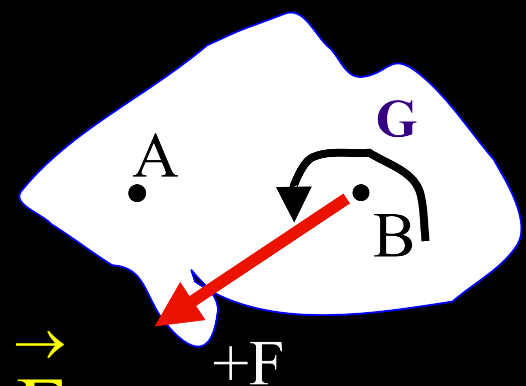
$$\vec{G}_{total} = \sum_{i=1}^{n} \vec{G}_i$$

# Translación de una fuerza

- El objetivo es trasladar una fuerza aplicada en un punto A de un cuerpo hasta otro cualquiera B.
- Basándose en los postulados básicos se tiene:




Equivale a

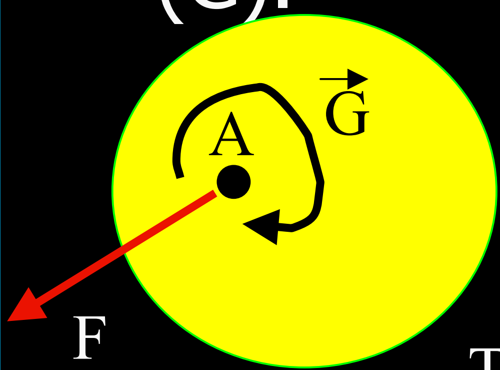



$$\vec{G} = \vec{M}_B^F = \vec{BA} \times \vec{F}$$

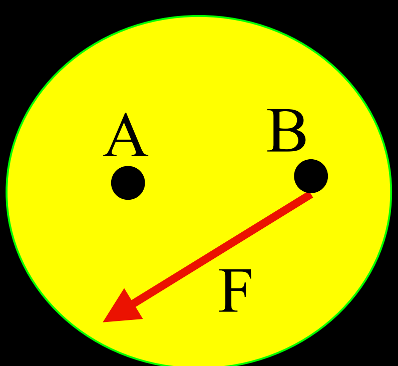
- +F y –F en B están equilibradas es decir seria equivalente a +F en A, Pero se puede sustituirse por +F en el punto B más el momento que produce +F aplicada en A respecto a B.

# Composición de un par y una fuerza que actúan en el mismo plano.

- Es equivalente a una fuerza de igual magnitud, dirección y sentido a la fuerza F dada. Pero ubicada en otro punto B tal que su momento respecto al punto original (A) sea igual al momento del par (G).

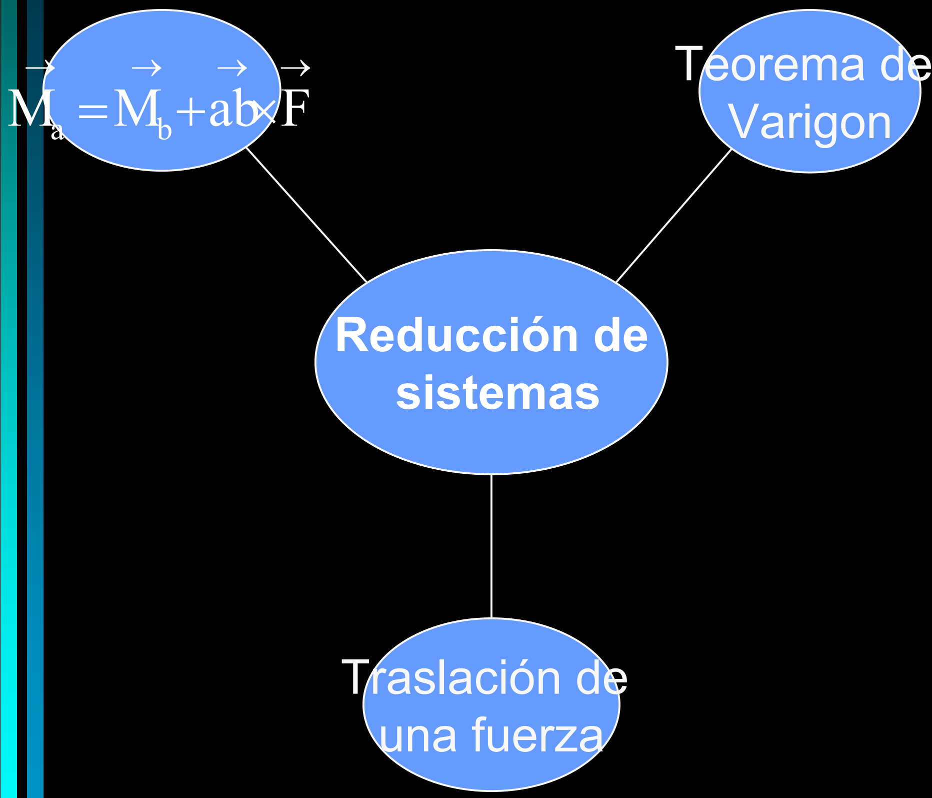



Equivale a




Tal que $\vec{G} = \vec{M}_A^{F_{\text{en B}}}$

# Requisitos para lograr Reducir un sistema General de fuerzas exitosamente.




- El estudiante debe tener claro los principios fundamentales.
- Realizar un bosquejo del problema que se analice
- Recordar la independencia de G

# Reducción de un sistema de Fuerzas en el espacio.

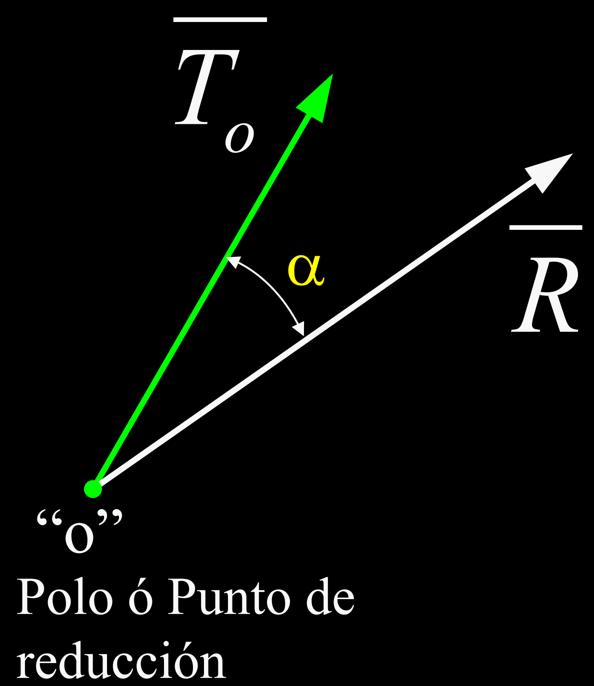
- R= Suma Vectorial de todas las Fuerzas Fi.
- Momento total es la suma vectorial de todos los pares ó momentos respecto al punto de reducción “o” de las fuerzas que se trasladen.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_o = \vec{T}_o = \vec{M}_o^{F_1} + \vec{M}_o^{F_2} + \ldots + \vec{M}_o^{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_o^{F_i}$$

# Reducción de un sistema de Fuerzas en el espacio.

- En general es sistema se reduce a una fuerza resultante R y un Par To.

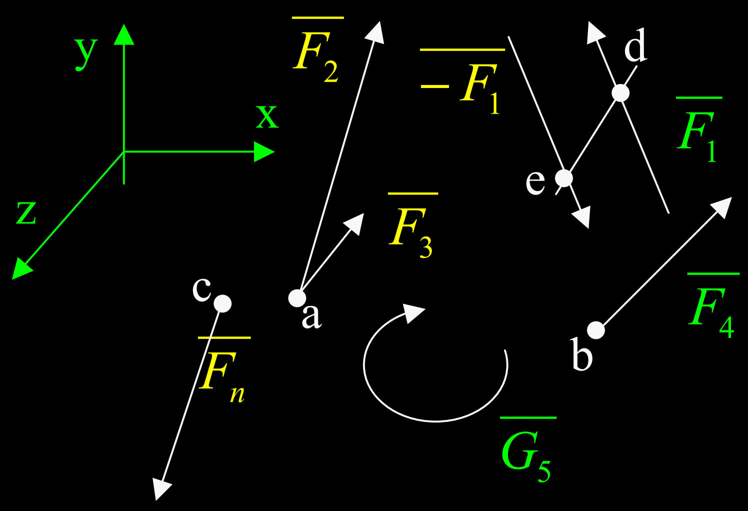


# Reducción de un sistema de Fuerzas en el espacio.

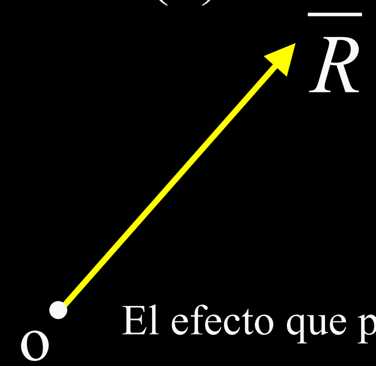
- Casos 1

$$\boxed{\vec{T}_o = 0 \quad \wedge \quad \vec{R} \neq 0}$$

El sistema de fuerzas dado se reduce a un sistema cuya resultante ($\overline{\text{R}}$) pasa por el punto de reducción (o).




$\cong$



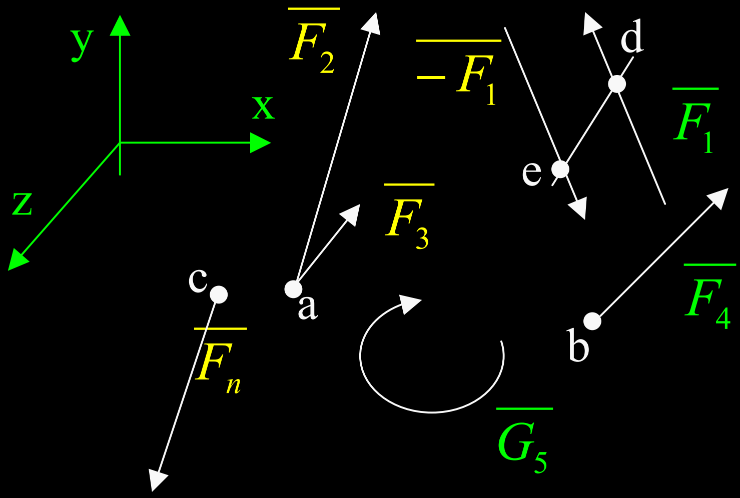

El efecto que produce el sistema general de fuerzas dado es de traslación en la dirección de la resultante.

# Reducción de un sistema de Fuerzas en el espacio.

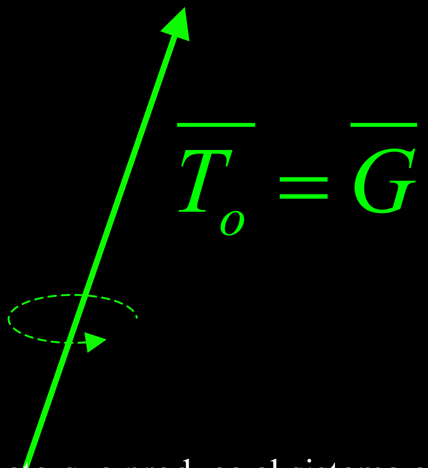
- Casos 2

$$\boxed{\vec{T}_o \neq 0 \quad \wedge \quad \vec{R} = 0}$$

El sistema de fuerzas dado se reduce a un par cuyo momento es igual al momento del sistema (To) respecto al punto de reducción (o)




$\cong$



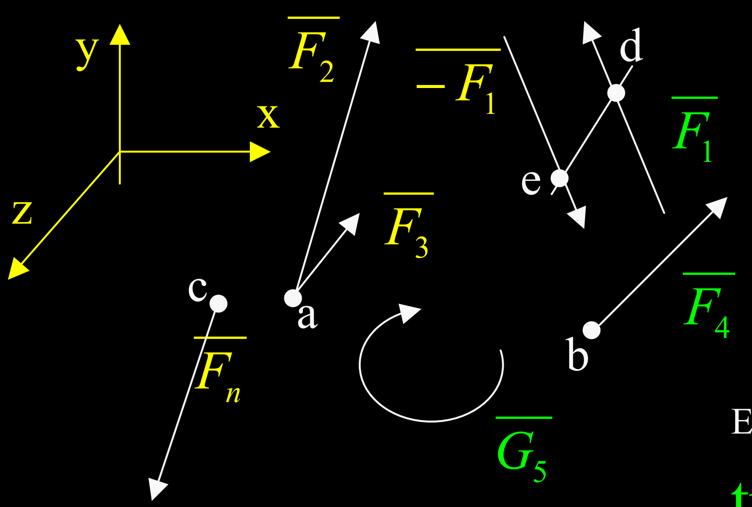

El efecto que produce el sistema general de fuerzas dado es de **Rotación** en la dirección del par To.

# Reducción de un sistema de Fuerzas en el espacio.

- Casos 3

$$\boxed{\vec{T}_o = 0 \;\wedge\; \vec{R} = 0}$$

El sistema está en equilibrio (traslación y rotación nulas)




$\cong$

o

Punto de reducción

El sistema general de fuerzas dado **No** produce efectos de **traslación** ni de **rotación** sobre el cuerpo que actúa.

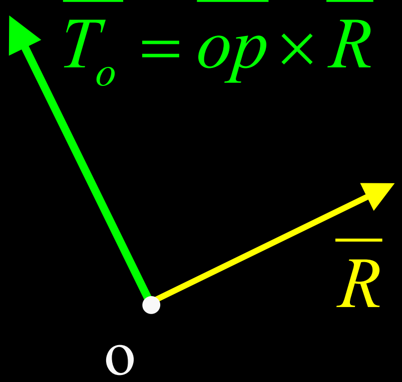
# Reducción de un sistema de Fuerzas en el espacio.

- Casos 4

$$\vec{T}_o \neq 0 \quad \wedge \quad \vec{R} \neq 0$$

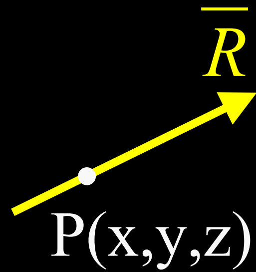
Si $\overline{\mathbf{To}}$ es perpendicular a $\overline{\mathbf{R}}$ ($\overline{\text{To}}.\overline{\text{R}}$=0) el sistema se reduce a una sola fuerza $\overline{\mathbf{R}}$ aplicada en un punto **p** tal que su momento respecto a **o** sea igual a **To** ($\overline{\text{To}}$=$\overline{\text{OP}}$ x $\overline{\text{R}}$)

$$\overline{T_o} = \overline{op} \times \overline{R}$$




$$\cong$$

o




Se debe obtener la ecuación de la nueva recta de acción de la resultante, aplicada en el punto P (x,y,z)

# Reducción de un sistema de Fuerzas en el espacio.

- En general es sistema se reduce a una R y un Par.
- Caso

$$\vec{T}_o \neq 0 \quad \wedge \quad \vec{R} \neq 0$$

Si **To** es no es perpendicular a $\overline{\mathbf{R}}$ (C diferente de cero) el sistema se reduce a un torsor equivalente.

En este caso se debe buscar el Tmin y la ecuación del eje central.

Eje central se define como el lugar geométrico de puntos donde el sistema posee el mínimo momento.

El sistema se reduce a un par y una fuerza, cuyo momento es igual al momento del sistema proyectado en la dirección de la fuerza Resultante.

# Reducción de un sistema de Fuerzas en el espacio.

- Casos
  - $\vec{T}_o = 0 \;\wedge\; \vec{R} \neq 0$

    El sistema se reduce a un sistema cuya resultante pasa por el punto de reducción
  - $\vec{T}_o \neq 0 \;\wedge\; \vec{R} = 0$

    El sistema se reduce a un par cuyo momento es igual al momento del sistema respecto al punto de reducción
  - $\vec{T}_o = 0 \;\wedge\; \vec{R} = 0$

    El sistema está en equilibrio (traslación rotación nulas)
  - $\vec{T}_o \neq 0 \;\wedge\; \vec{R} \neq 0$

    Si **To** es perpendicular a **R** $(\overline{To}.\overline{R}=0)$ el sistema se reduce a una sola fuerza **R** aplicada en un punto **p** tal que su momento respecto a **o** sea igual a **To** $(\overline{To}=\overline{OP} \times \overline{R})$
  - $\vec{T}_o \neq 0 \;\wedge\; \vec{R} \neq 0$

    Si **To** NO es perpendicular a **R** el sistema se reduce a TORSOR EQUIVALENTE.