TEORÍA DE CONSOLIDACIÓN

ECUACIONES DEL ESTUDIO DE CONSOLIDACIÓN.

Terzagui (1925), propuso la primera teoría para considerar la consolidación unidimensional en suelos arcillosos. Se basa en las siguientes suposiciones:

1.- El sistema arcilla agua es homogéneo.

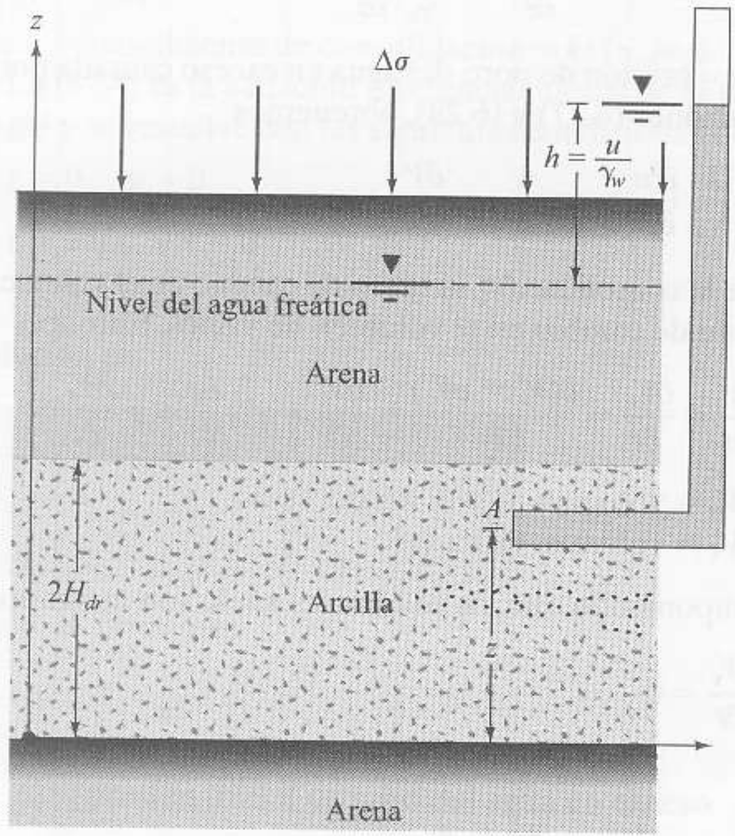
2.- La saturación es completa.

3.- La compresibilidad del agua es despreciable.

4.- La compresibilidad de los granos de suelo es despreciable.

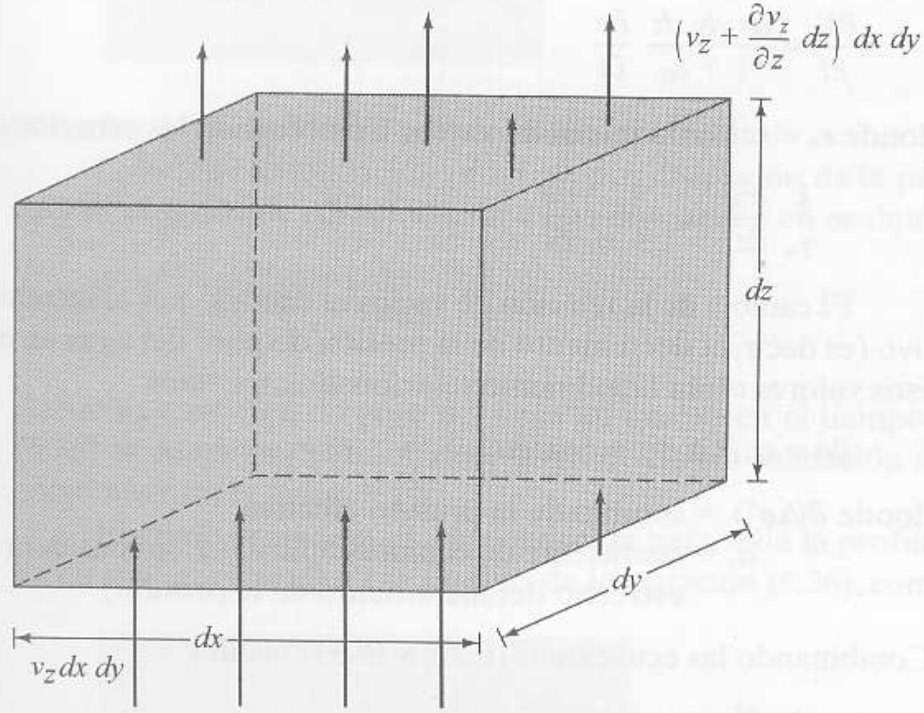
5.- El flujo de agua es solo en una dirección.

6.- La Ley de Darcy es válida.



z
Δσ
$h = \frac{u}{\gamma_w}$
Nivel del agua freática
Arena
A
$2H_{dr}$
Arcilla
z
Arena

(a)

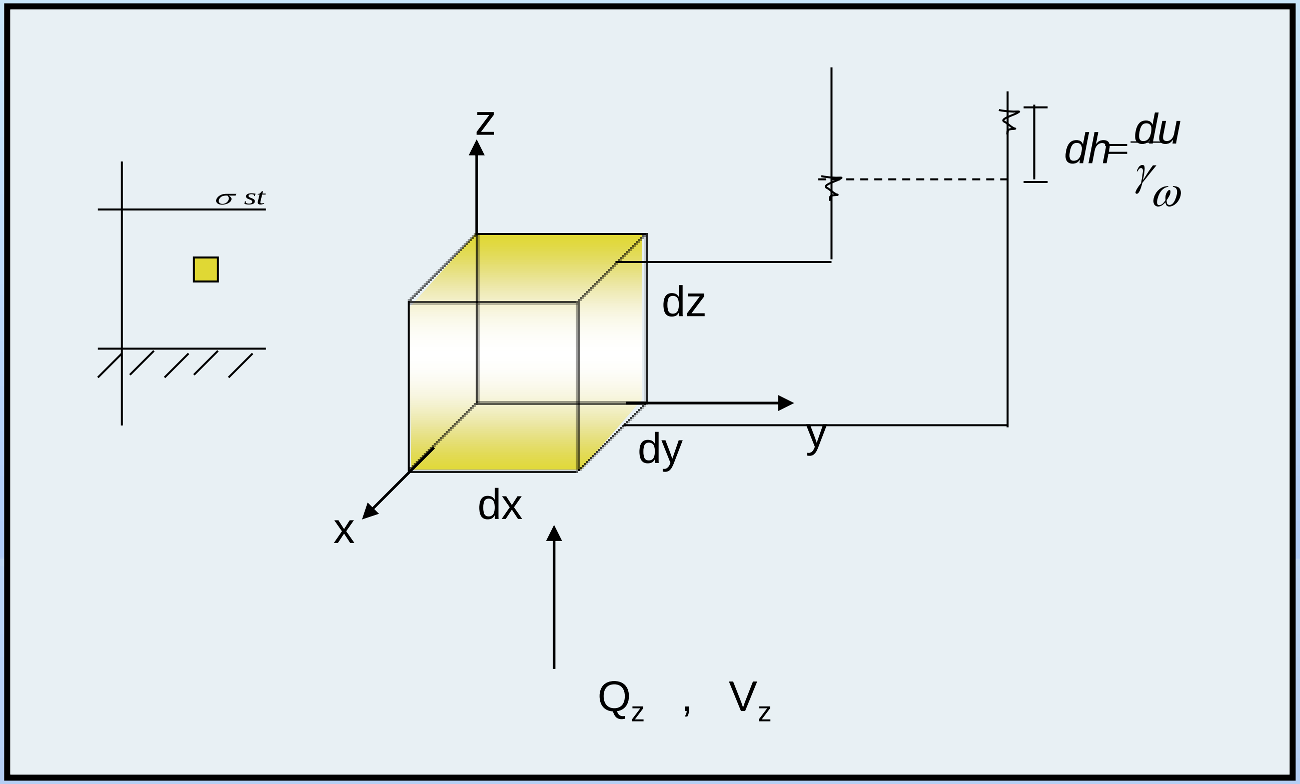


$\left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z}\, dz\right) dx\, dy$
dz
dy
dx
$v_z\, dx\, dy$

(b)

Se toma un elemento de suelo que se este consolidando para deducir una expresión matemática que refleje el proceso de consolidación.

$$\boxed{u = f(z,t)}$$



$$u = h\gamma_{\omega} \quad \Rightarrow \quad du = dh \cdot \gamma_{\omega} \quad \Rightarrow dh = {du}/{\gamma_{\omega}}$$

$$\begin{pmatrix} Caudal \quad de \quad salida \\ del \quad agua \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Caudal \quad de \quad entrada \\ del \quad agua \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{var}\,iación \quad del \\ caudal \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Q_{sale} - Q_{entra} = \Delta Q = \frac{\Delta Vol}{\Delta t}}$$

Entonces:

$$\left(V_z + \frac{\partial V_z}{\partial z} dz \right) dxdy - V_z dxdy = \frac{\Delta Vol}{\Delta t}$$

(1)… $$\frac{\partial V_z}{\partial z} \cdot dxdydz = \frac{\Delta Vol}{\Delta t}$$

Aplicando la Ley de Darcy:

$$V_z = K \cdot i = K_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$$

como

$$\partial h = \frac{\partial u}{\gamma_W} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{1}{\gamma_W}$$

$$\frac{\partial\left(K\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{1}{\gamma_W}\right)}{\partial z}\cdot dxdydz=\frac{\Delta Vol}{\Delta t}$$

(2)… $$\frac{K}{\gamma_\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dxdydz=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{\Delta V_v}{\Delta t}$$

Como: $$e=\frac{V_v}{V_s}\quad\Rightarrow\quad V_v=eV_s$$

$$\frac{K}{\gamma_\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dxdydz=\frac{\partial V_s.e}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\frac{K}{\gamma_\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dxdydz=V_s\frac{\partial e}{\partial t}$$

También: $$V=V_V+V_s\qquad(\div V_s)$$

$$\frac{V}{V_s}=\frac{V_V}{V_s}+1\quad\Rightarrow\quad\frac{V}{V_s}=e+1\quad\Rightarrow\quad V_s=\frac{V}{e+1}$$

$$\frac{K}{\gamma_\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{1+e}\frac{\partial e}{\partial t}$$ .... **(3)**

Definiendo a_v = coeficiente de compresibilidad

$$a_v = \frac{-\Delta e}{\Delta \sigma}$$; pendiente en la curva de compresibilidad

$$\Delta\sigma' = \sigma_t - \mu - \mu_0 \cdots \quad para \quad t = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma'}{\partial t} = -\dfrac{\partial \mu}{\partial t} \\ \dfrac{\partial e}{\partial t} = \dfrac{\partial e}{\partial \sigma}\dfrac{\partial \sigma'}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial e}{\partial t} = -a_v\left(-\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)$$ sustituyendo en (3)

$$\frac{\partial e}{\partial t} = a_v\left(\frac{\partial \mu}{\partial t}\right)$$

$$\frac{K}{\gamma_\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{a_v}{1+e}\frac{\partial u}{\partial t}$$ quedando la expresión como:

$$\frac{K(1+e)}{a_v\gamma_\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$ ……. Ecuación diferencial del proceso de consolidación unidimensional con flujo vertical(4)

$$\boxed{u = f(z,t)}$$

(4) se pudiera expresar como:

m_v : coeficiente del cambio volumétrico $= \dfrac{a_v}{1+e}$

$$\frac{K}{m_v\gamma_\omega}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

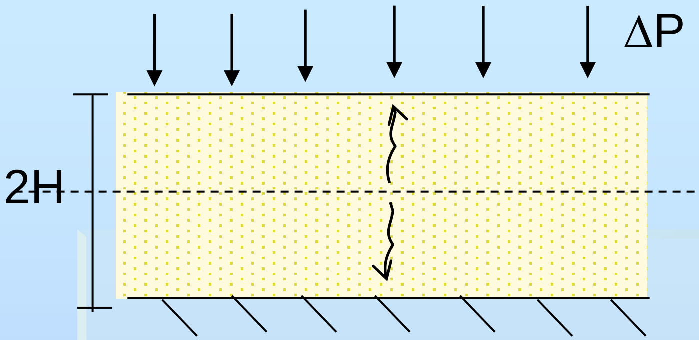
Definiendo el coeficiente de consolidación

$$C_v=\frac{K(1+e)}{a_v\gamma_\omega}=\frac{K}{m_v\gamma_\omega}$$ …. Queda la ecuación:

$$\boxed{C_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial t}}$$

u: exceso de presión sobre la presión hidrostática
en función de la profundidad y del tiempo

Para resolver la ecuación se plantean las condiciones de borde



$$\begin{cases} t = 0 & 0 \le z \le 2H \quad u = \Delta P \\ t = \infty & 0 \le z \le 2H \quad u = 0 \end{cases}$$

Solución: (aplicando Series de Fourier)

$$u = \Delta P \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{(2n+1)\pi} sen\left[\frac{(2n+1)\pi}{2} \cdot \frac{z}{H} \right] \cdot \varepsilon^{-\frac{(2n+1)\pi}{4H^2} \cdot \frac{K(1+e)}{\gamma_\omega a_v} t} \right)$$

Para simplificar se supone que

$$T_v = \frac{K(1+e)}{a_v \gamma_\omega} \frac{t}{H^2} = \frac{C_v}{H^2} t \quad \therefore \quad T_v = \frac{C_v}{H^2} t$$

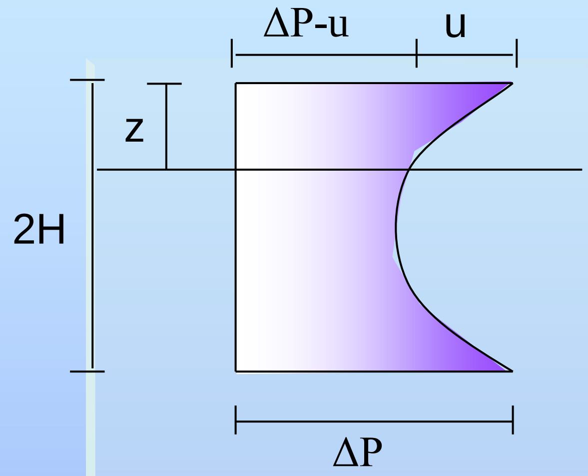
H: máx. altura de recorrido.

$$\boxed{u = \Delta P \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4}{(2n+1)\pi} sen\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} \cdot \frac{z}{H} \right) \cdot \varepsilon^{\frac{(2n+1)\pi}{4} \cdot T_v} \right]}$$

Quedando: $u = f(z, T_v)$

Quedando: $u = f\left(z, T_v\right)$

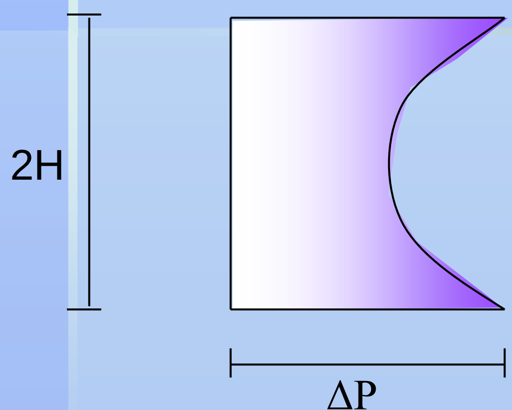
se define:
Grado de consolidación a una profundidad z y un tiempo t; como:



$$\Rightarrow \quad Diagrama \quad de \quad \sigma'$$

$$\%u_z = \frac{\Delta P - u}{\Delta P} \cdot 100 = \left(1 - \frac{u}{\Delta P}\right) \cdot 100$$

Grado medio de consolidación:



$$\%u = \frac{\int_0^{2H} \left(\Delta P - u\right)}{\Delta P \cdot 2H} dz \cdot 100$$

Resolviendo la ecuación queda:

$$\%u = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(2n+1)^2 \pi^2} \varepsilon^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4} T_v} \right) \cdot 100$$

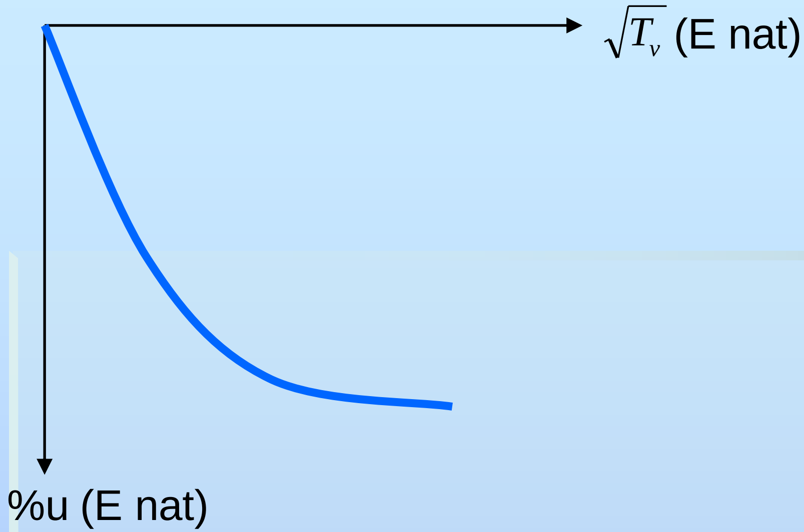
$\%u = f(T_v) \quad \Rightarrow$ Relación Teórica

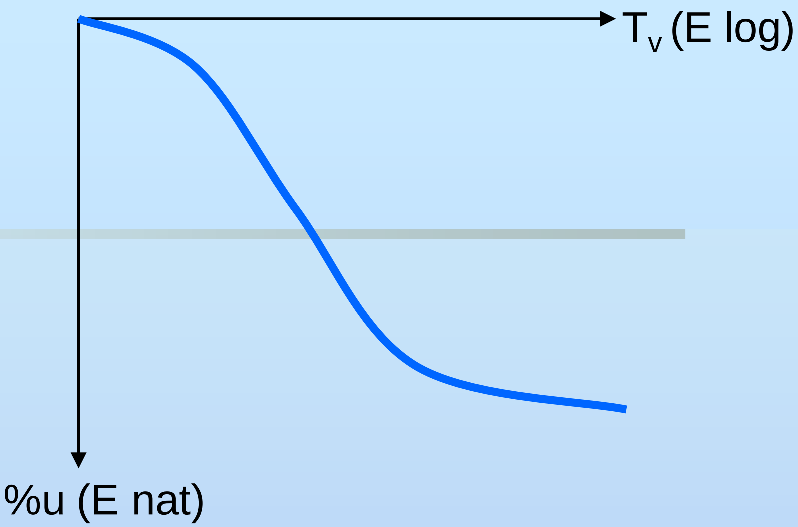
$\%u$ = Porcentaje promedio de consolidación

T_v = Factor tiempo

%u	T_v
0	0.000
10	0.008
20	0.031
30	0.071
40	0.126
50	0.197
60	0.287

%u	T_v
70	0.405
80	0.565
90	0.848
100	∞





Se desarrollaron ecuaciones empíricas para %u en función de T_v

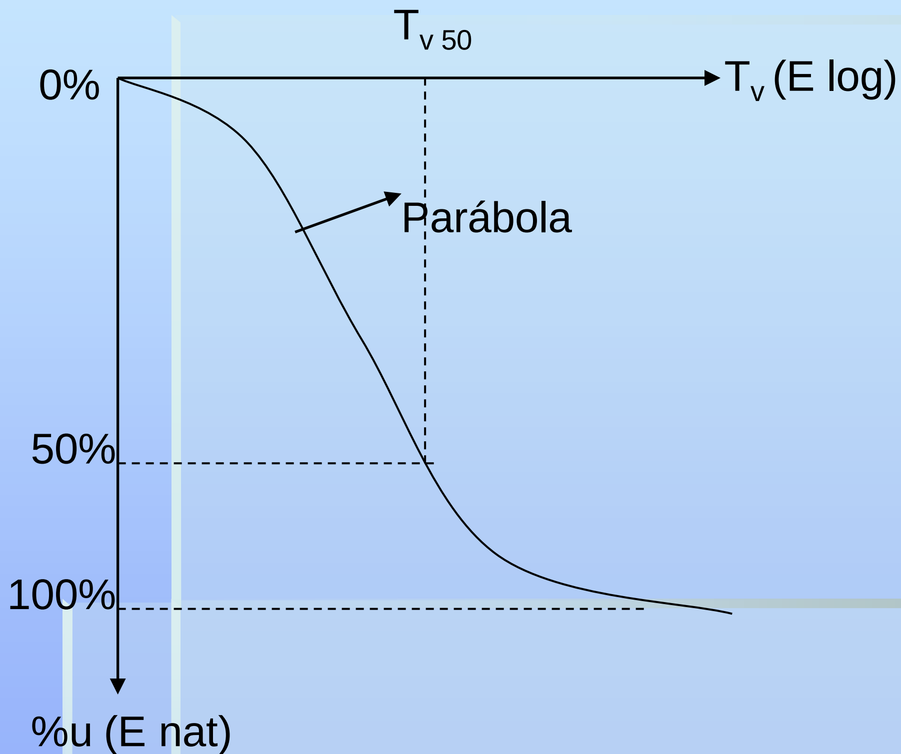
$$\%u \leq 60\% \quad \Rightarrow \quad T_v = \frac{\pi}{4}\left(\frac{u\%}{100}\right)^2$$

$$\%u > 60\% \quad \Rightarrow \quad T_v = 1.781 - 0.933\log(100 - \%u)$$

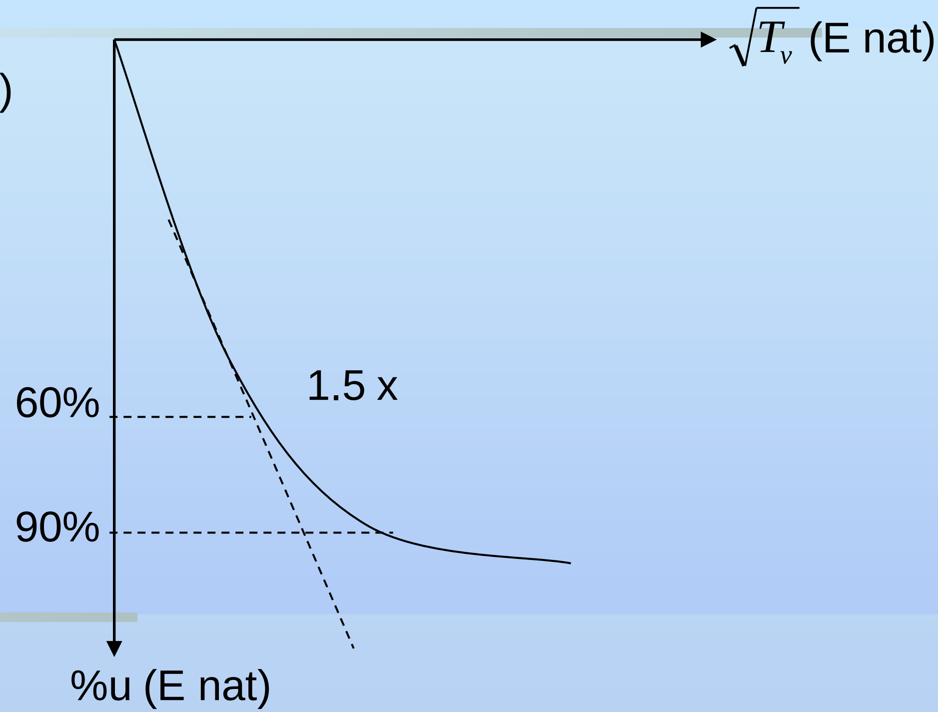
Relaciones Teóricas:

$$\left(\%u \quad V_s \quad T_v\right)$$

Casagrande



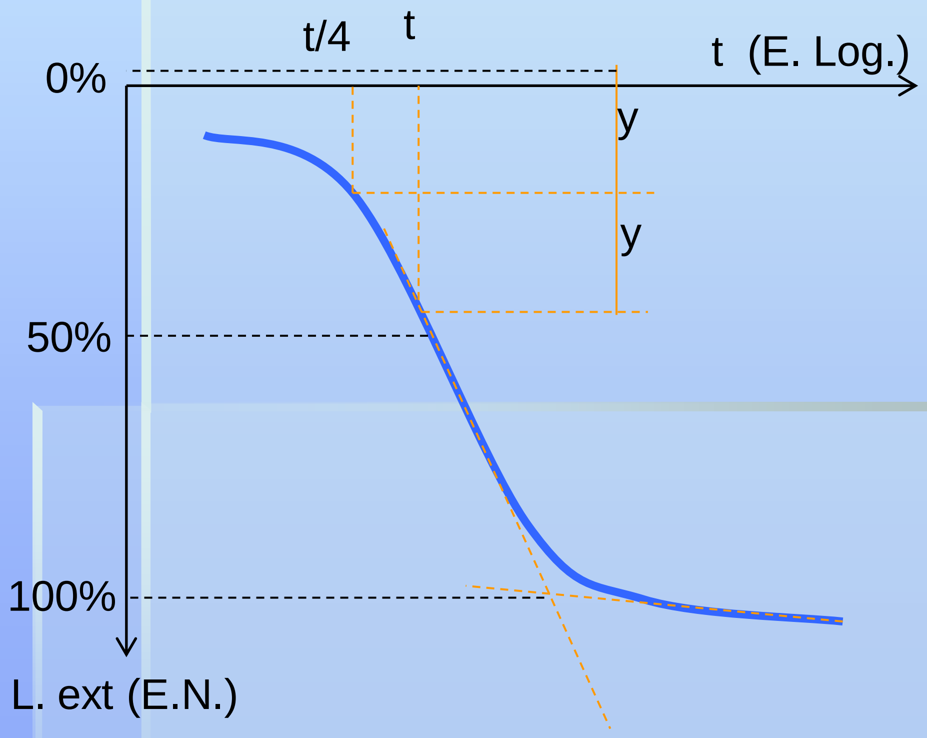
Taylor



CURVAS DE CONSOLIDACIÓN REAL

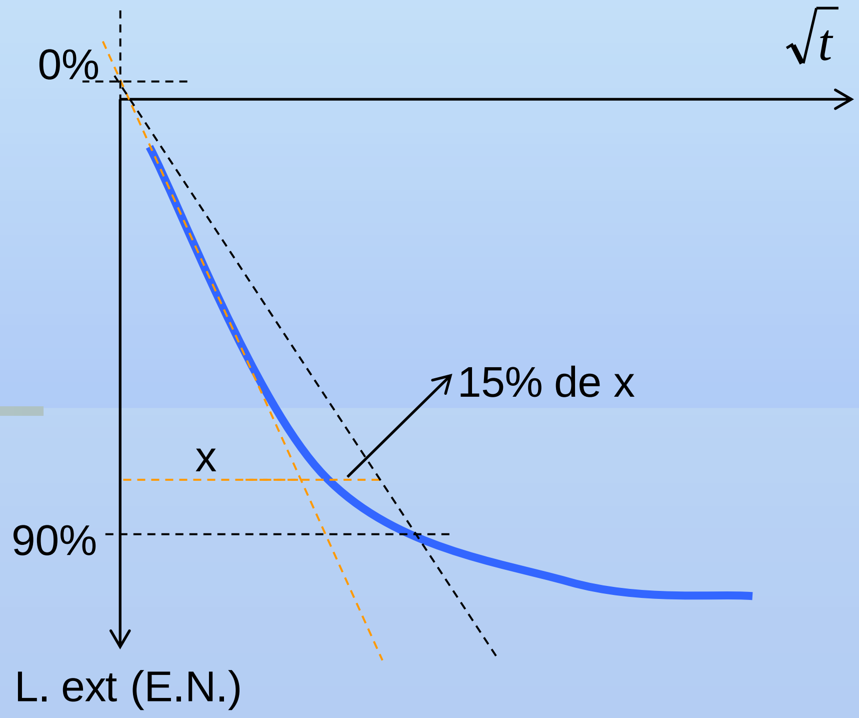
METODO DE CASAGRANDE:

- Papel semi-logarítmico.
- Se define el 0%, el 100% y el 50 % de consolidación.



METODO DE TAYLOR:

- Raiz del tiempo .
- Se define el 90% de consolidación.



Se ajusta la curva de consolidación real a la teórica para obtener C_v por cualquiera de las dos metodologías (Taylor o Casagrande)

"Taylor" obtenemos T_{v90} ; t_{90}

$$T_v = \frac{C_v}{H^2} t \quad \Rightarrow \quad T_{v90} = \frac{C_v}{H^2} t_{90}$$

"Casagrande" obtenemos t_{50}

$$T_v = \frac{C_v}{H^2} t \quad \Rightarrow \quad T_{v50} = \frac{C_v}{H^2} t_{50}$$

T_{v50} y T_{v90} los tomamos de la teoría de consolidación.