CAPITULO 2

CONTROLADORES PID

2.1 INTRODUCCIÓN

El control automático de un proceso requiere de un sistema que ajuste automáticamente una(s) variable(s) del proceso para mantener otra(s) dentro de límites establecidos. Una de las formas más comunes de controlar un proceso es utilizar un sistema de control por retroalimentación, o de lazo cerrado. En este se mide, la variable que se quiere controlar; esta medición va retroalimentada al controlador para compararla con el valor deseado, y determinar la corrección necesaria, en caso de que exista alguna diferencia entre su valor actual y el valor deseado. El comportamiento del sistema de control es evaluado con base en la característica de la respuesta en el tiempo de la variable controlada. Este comportamiento depende del tipo de proceso, del tipo de controlador y de la forma en que es ajustado para producir una determinada señal de control.

La relación que existe entre la señal de salida de un controlador y el error en la variable controlada (diferencia entre el valor deseado y el valor instantáneo de la variable controlada) se denomina "Acción de Control". Por lo tanto, un controlador tendrá una acción de control dada por esta relación. Comercialmente existen controladores que pueden tener una de las siguientes acciones:

Tabla 2.1. Acciones de los Controladores Comerciales.

Acción de Control
Proporcional (P)
Proporcional más Integral (PI)
Proporcional más Derivativo (PD)
Proporcional más Integral más Derivativo (PID)
Dos Posiciones (ON – OFF)

Estas acciones son las que normalmente encontramos en un controlador, sin embargo, el empleo de controladores programables y dispositivos de control computarizados permiten la programación de acciones de control diferentes a las mencionada anteriormente.

2.2 MODO DE CONTROL PROPORCIONAL

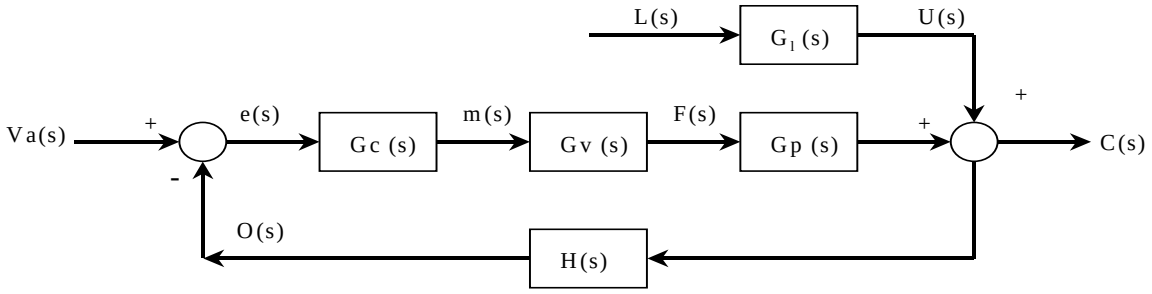

Figura 2.1. Diagrama de Bloques General de un Lazo de Control por Retroalimentación.

Un controlador de acción proporcional puede ser descrito por la siguiente ecuación:

$$m(t) = M_0 + K_c e(t) \tag{2.1}$$

Donde:

- *m()* : Señal de salida del controlador (Variable Manipulada).
- K_c : Ganancia proporcional (parámetro ajustable).
- M_o : Señal de salida del controlador cuando el error es cero (normalmente se le conoce como "Bias").

e(t) : Error.

De la Ec. 2.1, se puede deducir que en un controlador de acción proporcional la señal de salida del controlador (señal de control) es proporcional al error. Al aplicar transformada de Laplace a dicha ecuación se tiene como resultado la función de transferencia representada en la Ec. 2.2, para un controlador de acción proporcional:

$$Gc(s) = \frac{M(s)}{e(s)} = K_c \tag{2.2}$$

Al igual que la ganancia del proceso, la ganancia proporcional generalmente se expresa porcentualmente. Sin embargo, muchos controladores tienen el ajuste proporcional expresado en función de la banda proporcional, la cual puede definirse como el porcentaje de variación en la variable controlada que hace que la señal de salida del controlador cambie desde 0 % a 100 %, como se observa en la ecuación 2.4.

Para ilustrar mejor el concepto de banda proporcional suponga el siguiente ejemplo:

En un proceso, con un sistema de control de temperatura, la temperatura puede variar entre 20°C y 100°C. Con un controlador de temperatura que regula el flujo de agua de enfriamiento al proceso, se mantiene la temperatura en 60°C (valor deseado). El controlador esta ajustado de forma tal que cuando la temperatura llega a 40°C la válvula de agua de enfriamiento está completamente cerradas; y cuando la temperatura llega a 80°C, la válvula está completamente abierta. ¿Cuál es la banda proporcional?.

El porcentaje de variación en la variable controlada, sobre el cual opera el controlador es:

$$\%Bp = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta y}{y}} \times 100 \tag{2.3}$$

donde:

Δx : Variación de la señal de entrada.
Δy : Variación de la señal de salida
x : Rango de entrada.
y : Rango de salida.

Calculando se tiene:

$$\%Bp = \frac{80-40}{100-20} \times 100 = 50\%$$

Se tiene que este 50% de variación produce una variación de 100% en la señal de salida del controlador; luego, la banda proporcional es de 50%.

También:

$$\%Bp = \frac{1}{K_c} \times 100 \qquad (2.4)$$

En la figura 2.2, se representa gráficamente la banda proporcional obtenida:

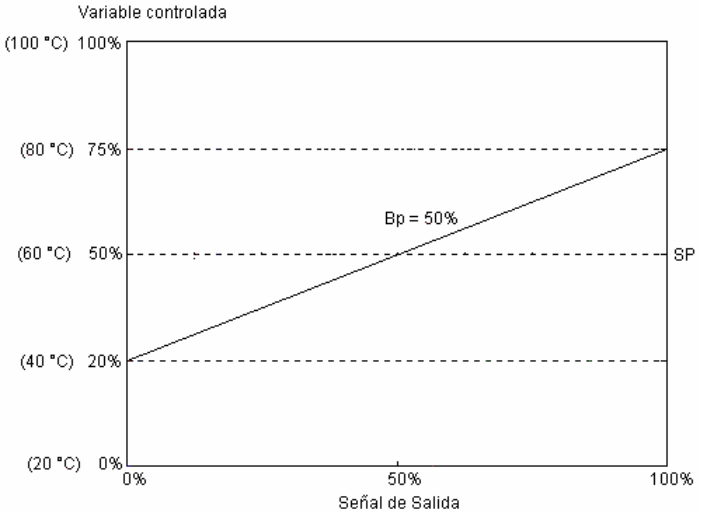

Figura 2.2. Variación de la Señal de Salida.

Tanto la banda proporcional como la ganancia son de uso común, sin embargo, en este capítulo, se utilizará la ganancia proporcional como el ajuste proporcional.

A continuación se estudiará el efecto de la acción de control proporcional sobre las características de la respuesta de lazo cerrado.

2.2.1 **Proceso de primer orden.**

Tomando como ejemplo el proceso mostrado en la figura 2.3. Para simplificar el estudio se presume que el proceso es de primer orden, y que la función de transferencia del transmisor de temperatura y la válvula del vapor son iguales a uno.

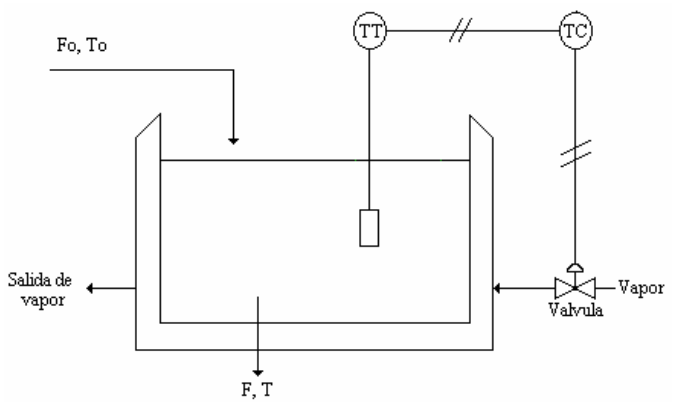

Figura 2.3. Calentador.

El diagrama de bloques para este ejemplo corresponde al mostrado en la figura 2.3a.

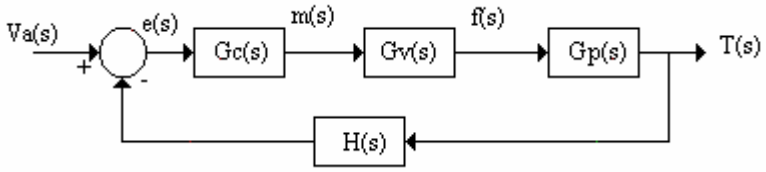

Figura 2.3a. Diagrama de bloques del sistema de control del calentador.

La función de transferencia para este caso, es:

$$\frac{T(s)}{Va(s)} = \frac{Gp(s)\cdot Gv(s)\cdot Gc(s)}{1+Gp(s)\cdot Gv(s)\cdot Gc(s)\cdot H(s)} \tag{2.5}$$

Como se presumió que la función de transferencia para el transmisor y para la válvula es de 1, es decir, *Gv(s) = H(s) =* 1 se tiene:

$$\frac{T(s)}{Va(s)} = \frac{Gp(s) \cdot Gc(s)}{1 + Gp(s) \cdot Gc(s)} \tag{2.6}$$

Con la que se obtiene el diagrama de bloques de la figura 2.3b

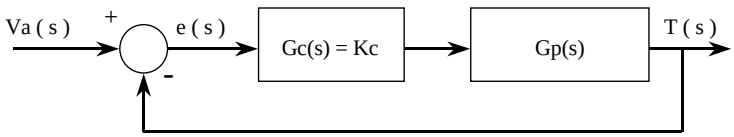

Figura 2.3b. Diagrama de bloques con Gv(s) = 1 y H(s) =1.

Sustituyendo los parámetros en cada una de las funciones, se obtiene:

$$Gp(s) = \frac{K_p}{\tau_p s + 1} \qquad y \qquad Gc(s) = K_c$$

$$\frac{T(s)}{Va(s)} = \frac{K_c\left(\dfrac{K_p}{\tau_p s + 1}\right)}{1 + K_c\left(\dfrac{K_p}{\tau_p s + 1}\right)} \tag{2.7}$$

Esta es la función de transferencia de lazo cerrado del ejercicio del calentador, simplificando se tiene:

$$\frac{T(s)}{Va(s)} = \frac{K_c K_p}{\tau_p s + (1 + K_c K_p)}$$

dividiendo el numerador y denominador por (1+KcKp), resulta:

$$\frac{T(s)}{Va(s)} = \frac{\dfrac{K_c K_p}{1+K_c K_p}}{\dfrac{\tau_p s}{1+K_c K_p}+1} = \frac{N}{D+1} \qquad (2.8)$$

Donde "*N*" es la ganancia de lazo cerrado y "*D*" es la constante de tiempo de lazo cerrado.

Observe que a lazo cerrado la constante de tiempo (τ) del sistema es menor, debido a que la constante Kc es mayor.

Como se puede observar el orden de la función de transferencia de lazo cerrado es el mismo que el de la función de transferencia de lazo abierto.

Debido a que KcKp es un número positivo, la constante de tiempo de lazo cerrado, "D" siempre será menor que la constante de tiempo de lazo abierto. De este modo, el sistema de lazo cerrado responderá más rápidamente que el sistema de lazo abierto. Por otro lado, la constante de tiempo de lazo cerrado disminuye a medida que la ganancia del controlador aumenta. Así, que una mayor ganancia del controlador implica una respuesta más rápida.

La ganancia de lazo cerrado, "*N*" relaciona los cambios en la variable controlada *T(s)* con los cambios en el valor deseado *Va(s)*.

Usando el calentador de la figura 2.3, como ejemplo, se observará cuál será la variación en la temperatura T, si el valor deseado se incrementa en 10 °C en forma escalón.

De la ecuación 2.8 se tiene:

$$T(s) = \frac{\dfrac{K_c K_p}{1+K_c K_p}}{\dfrac{\tau_p s}{1+K_c K_p}+1} Va(s)$$

Sustituyendo Va(s) por su valor: $Va(s) = \dfrac{10}{s}$ se tiene:

$$T(s)=\frac{\dfrac{K_cK_p}{1+K_cK_p}}{\dfrac{\tau_p s}{1+K_cK_p}+1}\frac{10}{s}$$

La variación final de la variable controlada T con respecto al nuevo valor deseado es:

$$T=\underset{s\to 0}{Lim}(sT(s))=\underset{s\to 0}{Lim}\,s\left(\frac{\dfrac{K_cK_p}{1+K_cK_p}}{\dfrac{\tau_p s}{1+K_cK_p}+1}\frac{10}{s}\right) \tag{2.9}$$

$$\Delta T=\left(\frac{K_cK_p}{1+K_cK_p}\right)10=\left(\frac{1}{\dfrac{1}{K_cK_p}+1}\right)10 \tag{2.10}$$

Si $K_cK_p \to \infty$ => ΔT => 10.

Como se puede observar el cambio de la variable controlada depende de la ganancia del controlador Kc.

En la figura 2.4 se muestra la respuesta del calentador (donde se presume un comportamiento de primer orden) para diferentes valores de Kc. El valor deseado inicial está fijado en 60 °C. La diferencia entre el cambio en el valor deseado, cambio en la variable controlada se conoce como error.

$$\mathrm{e}=10\ ^\circ\mathrm{C}\ -\Delta\mathrm{T}\ ^\circ\mathrm{C} \tag{2.11}$$

Sustituyendo:

$$e = 10^{o}C - \left(\frac{K_c K_p}{1 + K_c K_p} \right) 10^{o}C$$ Para Kc→ ∞

$$e = 10 - \left(\frac{\frac{10}{1}}{\frac{1}{K_c K_p} + 1} \right) = 0$$

Se observa que el error solamente está determinado por la ganancia del controlador y por las características de estado estacionario del proceso. La dinámica del proceso no tiene efecto sobre el error. Como se muestra en la figura 2.4, al incrementar la ganancia del controlador se disminuye el error. El error sería cero únicamente cuando Kc → ∞ por este se dice que la acción de control proporcional no elimina el error.

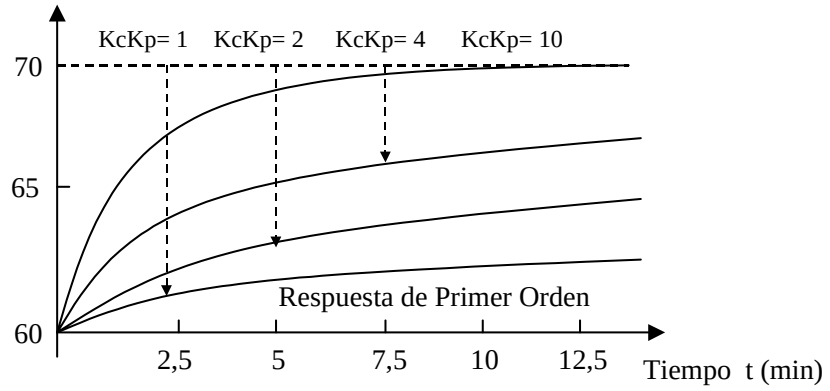

Figura 2.4. Respuesta de un Proceso de Primer Orden, con Acción de Control Proporcional, para un cambio en la referencia.

De las curvas de respuesta de la figura 2.4, se puede observar que aumentando la ganancia del controlador, disminuye el error y la respuesta se hace más rápida, siendo estas dos condiciones deseables. Esto sugiere que la ganancia del controlador debería ajustarse lo más alto posible. Desafortunadamente esto solamente es cierto para los procesos de primer orden. En procesos de orden mayor, el aumento de la ganancia del controlador produce otros efectos que limitan los valores aceptables de Kc.

2.2.2 **Procesos de segundo orden**

La figura 2.5 muestra el diagrama de bloques de un proceso de segundo orden con acción de control proporcional. De la misma forma que en el caso anterior, el diagrama de bloques se obtiene, haciendo Gv(s) = H(s) = 1.

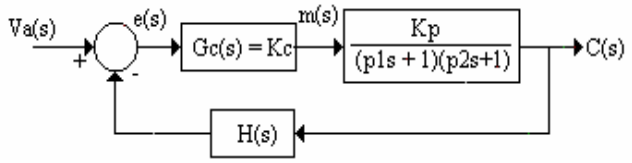

Figura 2.5. Diagrama en bloques de un sistema de segundo orden.

En este caso, la función de transferencia de lazo cerrado, con respecto al valor deseado se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{C(s)}{Va(s)} = \frac{\dfrac{K_c K_p}{(\tau_{p1}s+1)(\tau_{p2}s+1)}}{1+\dfrac{K_c K_p}{(\tau_{p1}s+1)(\tau_{p2}s+1)}} \tag{2.12}$$

$$\frac{C(s)}{Va(s)} = \frac{K_c K_p}{(\tau_{p1}s+1)(\tau_{p2}s+1)+K_c K_p} \tag{2.13}$$

resolviendo el denominador de la función de transferencia:

$$\frac{C(s)}{Va(s)} = \frac{K_c K_p}{\tau_{p1}\tau_{p2}s^2+(\tau_{p1}+\tau_{p2})s+K_c K_p+1} \tag{2.14}$$

dividiendo toda la expresión por 1+KcKp se tiene:

$$\frac{\mathrm{C(s)}}{\mathrm{Va(s)}} = \frac{\dfrac{\mathrm{KcKp}}{1+\mathrm{KcKp}}}{\left(\dfrac{\tau\,\mathrm{p}_1\,\tau\,\mathrm{p}_2}{1+\mathrm{KcKp}}\right)\mathrm{s}^2+\left(\dfrac{\tau\,\mathrm{p}_1+\tau\,\mathrm{p}_2}{1+\mathrm{KcKp}}\right)\mathrm{s}+1}$$

$$\frac{C(s)}{Va(s)} = \frac{\dfrac{K_c K_p}{K_c K_p+1}}{\left(\dfrac{\tau_{p1}\tau_{p2}}{K_c K_p+1}\right)s^2+\left(\dfrac{\tau_{p1}+\tau_{p2}}{K_c K_p+1}\right)s+1} \tag{2.15}$$

El termino: $\frac{K_c K_p}{K_c K_p + 1}$ es la ganancia del lazo cerrado, y es igual a la expresión obtenida en el caso anterior en un proceso de primer orden, lo cual confirma que el error (off-set) no es afectado por la presencia de una segunda constante de tiempo en la función de transferencia (no depende de la dinámica del proceso). Solamente depende de la ganancia del controlador K_c.

El efecto de la ganancia del controlador sobre la velocidad de respuesta y sobre la estabilidad del lazo de control se puede deducir, analizando el denominador de la función de transferencia de segundo orden que tiene la forma general, como se muestra a continuación

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_p}{\tau_p{}^2 s^2 + 2\delta\tau_p s + 1}$$

De acuerdo a los términos del denominador e igualando se obtiene:ç

$$\tau_p{}^2 = \frac{\tau_{p_1}\tau_{p_2}}{1 + K_c K_p} \Longrightarrow \tau p = \sqrt{\frac{\tau p_1 \tau p_2}{1 + KcKp}}$$

$$\tau_p{}^2 = \frac{\tau_{p1}\tau_{p2}}{1 + K_c K_p} \qquad \tau_p = \sqrt{\frac{\tau_{p1}\tau_{p2}}{1 + K_c K_p}}$$

Constante de tiempo en lazo cerrado (frecuencia de resonancia)

$$2\delta\tau_p = \frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{1 + K_p K_c}$$

$$\delta = \frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{2\tau_p\left(1 + K_p K_c\right)} \tag{2.16}$$

$$\delta = \frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{2\tau_p = \sqrt{\frac{\tau_{p1}\tau_{p2}}{1 + K_c K_p}}\left(1 + K_p K_c\right)} = \frac{\tau_{p1} + \tau_{p2}}{2\sqrt{\tau_{p1}\tau_{p2}\left(1 + K_p K_c\right)}} \tag{2.17}$$

Donde:

δ : Coeficiente de amortiguamiento.

Las ecuaciones anteriores muestran que la constante de tiempo de lazo cerrado τ_p, al igual que en el caso anterior del control de un proceso de primer orden, es función de la ganancia del controlador. A medida que K_c aumenta, τ_p es menor, por lo tanto, la respuesta del lazo de control es más rápida.

Al analizar la ecuación 2.17, se observa que un aumento de la ganancia del controlador, produce una disminución en el valor del coeficiente de amortiguamiento δ. En el punto anterior se estableció que la estabilidad de un sistema o proceso de segundo orden está estrechamente relacionada con el valor de δ. En particular, se vio que $0 < \delta < 1$, la respuesta sería subamortiguada.

Las oscilaciones y el sobreimpulso de la respuesta del lazo de control serán mayores a medida que K_c aumenta. Como se vio anteriormente esto limita el valor máximo de K_c.

En la figura 2.6 se pueden observar las curvas de respuesta del sistema de control, del proceso de segundo orden esquematizado en la figura 2.5, frente a una perturbación tipo escalón unitario en el valor deseado, para diferentes valores de Kc. El análisis de las curvas de respuesta confirma lo siguiente.

- El error disminuye al aumentar la ganancia del controlador.

- La respuesta es más rápida al aumentar, la ganancia del controlador.

- El valor de sobreimpulso y las oscilaciones se incrementan al aumentar la ganancia del controlador.

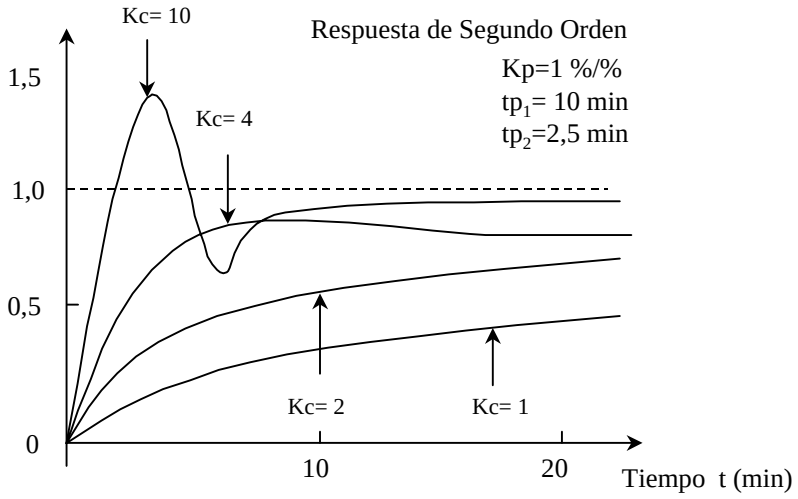

Figura 2.6. Respuesta de un Proceso de Segundo Orden con Acción de Control Proporcional, Cambio de Escalón en el Valor Deseado.

Se concluye que un controlador de acción proporcional no elimina el error. Solo una alta ganancia permite reducir el error a un mínimo. En la práctica, la ganancia del controlador se aumenta asta que el sobreimpulso y las oscilaciones alcanzan un limite aceptable.

2.3 MODO DE CONTROL PROPORCIONAL MAS INTEGRAL (PI)

Una de las desventajas de la acción de control proporcional es que no puede eliminar el error. Para compensar esta dificultad, muchos controladores de procesos incorporan una acción de control adicional, llamada acción integral, la cual permite eliminar el error. Como se observara más adelante, la respuesta de la acción integral está basada en la integral del error.

Un controlador de Acción Proporcional más Integral puede describirse por medio de la siguiente ecuación:

$$m(t) = M_0 + K_c e(t) + K_c \frac{1}{\tau_i} \int_0^t e(t) dt \qquad (2.18)$$

Donde, τ_i es un parámetro ajustable y se denomina "tiempo integral", normalmente se expresa en minutos. Se observa que el coeficiente de la acción integral disminuye al aumentar el tiempo integral, esto genera una relación

inversa entre el tiempo integral y la acción integral ($\tau_i = \infty$ significa que no hay acción integral).
Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación 2.18, se obtiene la función de transferencia de un controlador de acción proporcional más integral como se muestra en la ecuación 2.19.

$$M(s) = K_c E(s) + \frac{K_c E(s)}{\tau_i s} = K_c E(s)\left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right) \tag{2.19}$$

$$Gc(s) = \frac{m(s)}{e(s)} = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right) \tag{2.20}$$

En las ecuaciones anteriores se observa que la señal de salida de un controlador proporcional más integral consta de dos partes:

- La primera es proporcional al error.
- La segunda es proporcional a la integral del error.

La figura 2.7, muestra la respuesta de un controlador de acción proporcional más integral ideal frente a un cambio en escalón (ΔE) en la señal de error.

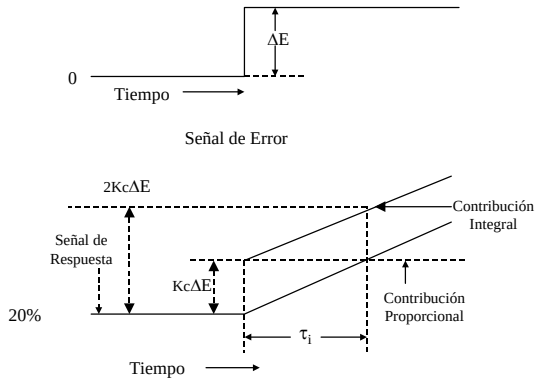

Figura 2.7. Respuesta de un controlador Proporcional más Integral frente a una entrada escalón.

Inicialmente la salida del controlador es del 20%. Cuando el error varia desde 0 hasta ΔE, la acción proporcional inmediatamente cambia la salida en una magnitud igual a KcΔE y permanece constante. La salida de la acción de control

integral no se modifica instantáneamente con el error, sino que varía linealmente con el tiempo.

De la ecuación 2.18 para un error constante ΔE, se tiene que la componente de la ecuación proporcional es una constante igual a $K_c \Delta E$, y la componente de la acción integral es una rampa igual a $\frac{K_c \Delta E}{\tau_i} t$.

$$m(t) = M_0 + K_c \Delta E + \frac{K_c}{\tau_i} \int_0^t \Delta E dt \tag{2.21}$$

$$m(t) = M_0 + K_c \Delta E + K_c \Delta E \frac{t}{\tau_i} \tag{2.22}$$

De la ecuación 2.19, se obtiene:

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \tag{2.23}$$

De esto se deduce que la acción proporcional actúa primero, respondiendo instantáneamente cuando cambia el error, mientras que la acción integral cambia linealmente en el tiempo proporcional al error.

El tiempo integral τ_i se define como el tiempo necesario para que la respuesta de la acción integral sea igual a la respuesta de la acción proporcional. La figura 2.7, muestra que, cuando la respuesta de acción integral alcanza el valor $K_c \Delta E$ (la respuesta total es $K_c.\Delta E + K_c.\Delta E$ ó $2K_c \Delta E$), el tiempo transcurrido es igual a τ_i.

Para estudiar las características de la acción de control proporcional más integral, se toma como ejemplo el lazo de control mostrado en la figura 2.8.

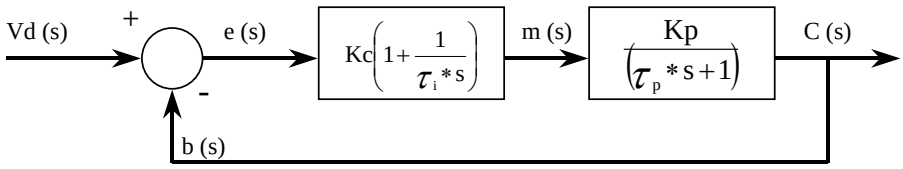

Figura 2.8. Diagrama de bloques de un proceso de primer orden con acción de control PI.

La función de transferencia de lazo cerrado que relaciona la variable controlada C(s) con el valor deseado Va(s) se describe como sigue:

$$\frac{C(s)}{Va(s)} = \frac{K_c\left(1+\frac{1}{\tau_i s}\right)\left(\frac{K_p}{\tau_p s+1}\right)}{1+K_c\left(1+\frac{1}{\tau_i s}\right)\left(\frac{K_p}{\tau_p s+1}\right)} \tag{2.24}$$