Introducción al Modelado de Sistemas Físicos

Prof. Pablo A. Lischinsky [1]
Departamento de Sistemas de Control
Escuela de Ingeniería de Sistemas
Universidad de Los Andes
Mérida, Venezuela

10 de septiembre de 2004

[1]email: pablo@ula.ve, Tel. 0274-2402983

Capítulo 1

Sistemas dinámicos

Prefacio La materia "Modelado de Sistemas Físicos" del nuevo plan de estudios de la carrera de Ingeniería de Sistemas viene a cubrir un vacío importante. Actualmente los Ingenieros de Sistemas deben tener herramientas para modelar, simular y analizar el comportamiento dinámico de diferente clases de sistemas reales. El modelado de sistemas continuos mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias cubre indudablemente un gran espectro de sistemas y su uso es diverso: optimización, control, estudios de estabilidad, etc.

La bibliografía que cubre esta temática, ver [4, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 2, 9], es dispersa, de poca disponibilidad (este curso está ubicado en el quinto semestre y la matrículas es actualmente de 70 - 80 estudiantes), la mayoría con pocos ejemplares y en idioma inglés y finalmente, casi todos los textos cubren parcialmente el programa propuesto.

Por todo esto el Prof. Miguel Ríos y mi persona (encargados de dictar las 2 secciones en los semestres B 2003), con la ayuda de nuestra preparadora Ing. de Sistemas Carla González (estudiante de Postgrado de Control y Automatización) estamos preparando unas notas del curso durante este régimen de transición de cambio de currículum. Esta es una primera versión y saldrá a la disposición de los estudiantes *sin haber pasado* por un período de revisión y corrección exhaustiva como debería ser, pero con la intensión de que esté disponible al comienzo del semestre actual. Agradezco a los estudiantes y colegas que revisen este texto hacerme llegar sus correcciones y sugerencias por correo electrónico.

El contexto de este curso es el siguiente: esta ubicado en el 5o. semestre del plan de estudios vigente, un estudiante regular ya ha visto Física 11 (cinemática y dinámica de cuerpos rígidos) y Física 21 (termodinámica, electricidad y magnetismo), Laboratorio de Física General (péndulo, campo eléctrico, campo magnético, fuerza, presión y trabajo)) y Cálculo 40 (ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, series). Asimismo está cursando simultáneamente Matemáticas Especiales (álgebra lineal, transformada de Laplace y variable compleja). El semestre siguiente el estudiante regular cursará las materias Control 1 (análisis y diseño de sistemas de control en el espacio de estado), Modelado y Simulación (de sistemas a eventos discretos) y Análisis Numérico (algebra lineal, integración y resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el uso de un computador digital).

La presente guía no pretende ser sino un material didáctico de *apoyo y complemento* y por lo tanto los alumnos deben consultar otras fuentes como libros de física general o ecuaciones diferenciales para repasar y/o completar sus estudios de la materia.

1.1. Introducción al modelado de sistemas físicos

Describir la realidad con modelos El uso de las matemáticas para resolver problemas reales (en oposición a los problemas artificiales - académicos, de libros) se ha generalizado en tiempos recientes. La metodología usada se puede resumir como sigue:

1. Formulación del problema
2. Descripción matemática
3. Análisis matemático
4. Interpretación del análisis para obtener la solución

La fase mas crucial e importante es la traducción satisfactoria del problema desde el mundo físico real en una descripción matemática. Una vez que se hace esto, se pueden utilizar técnicas de análisis matemático para obtener una solución al problema. La validez de la solución dependerá en gran parte de cuán bien la descripción matemática propuesta *modela* el mundo real. A la descripción matemática se le llama un modelo matemático y al proceso para obtenerlo se le llama el modelado matemático.

La ciencias de la ingeniería y otras áreas intentan construir modelos de una parte de la realidad y estudiar sus propiedades. Los modelos, las hipótesis, las leyes de la naturaleza y los paradigmas usados en este proceso, pueden ser de carácter mas o menos formal, pero todos tienen la propiedad fundamental de intentar enlazar o relacionar las observaciones a algún patrón (modelo: *del latín*, molde o patrón).

Recientemente la importancia del análisis de sistemas y del modelado ha aumentado en varias disciplinas como la economía, la biología, en medicina, la ecología, lógicamente en todas las ramas de la ingeniería y en el control y automatización de procesos o sistemas.

El diseño de modelos matemáticos es necesario para entender el comportamiento dinámico de los procesos y el modelado pretende entonces el desarrollo metodológico de los mismos. La resolución del modelo matemático de un sistema se realiza mediante algoritmos numéricos apropiados implementados en un computador digital. El enfoque matemático de resolver problemas tiene varias ventajas que se ilustran en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1 ¿Cuál es el nivel de empuje y duración necesario para asegurar que un cohete alcance la luna? En este problema una solución basada en un programa experimental que involucra lanzamientos de cohetes con diferentes historiales empuje - tiempo es obviamente inaceptable debido al costo y a la incertidumbre del éxito. Mas aún, la solución de este problema no puede obtenerse usando modelos a escala. Este problema se presta a un tratamiento matemático.

Ejemplo 2 ¿Cuáles son las consecuencias de cambios en la operación de una planta química existente? Por razones de costos y seguridad es indeseable realizar los cambios sobre la planta misma sin saber de antemano las consecuencias. Un modelo físico a escala podría usarse para obtener la información deseada pero se requieren instalaciones especiales. Un enfoque matemático es claramente atractivo en este caso.

Ejemplo 3 ¿Cuál será el incremento de los pasajeros de una línea aérea en los próximos 5 años? Pronósticos de este tipo son necesarios frecuentemente para propósitos de planificación. No hay en este caso alternativas distintas al tratamiento matemático para problemas de este estilo.

Definición de Sistemas Un sistema es un conjunto de elementos interrelacionados que actúan interactuando entre ellos en forma coordinada para obtener o alcanzar un fin común. Cada elemento es un sub-sistema encargado de una función particular del sistema. De ninguna manera limitado a sistemas físicos, *tecnológicos o industriales*, el concepto de sistema se puede ampliar a fenómenos dinámicos abstractos, tales como se encuentran en la economía, el transporte, el crecimiento de poblaciones y la biología. En este contexto se hacen dos asunciones básicas:

1. Se asume que un sistema es una entidad separable del resto del universo (el ambiente del sistema) por medio de fronteras físicas o conceptuales;

2. Un sistema esta compuesto por partes interactuantes

La esencia del llamado "enfoque de sistemas" en concentrarnos en la operación del sistema completo como un todo mas que en la de cada componente (subsistema) por separado. Un conjunto de buenos componentes en perfecto estado pueden estar ensamblados en un sistema insatisfactorio: el sistema es mas que la simple suma de las partes.

Clases de modelos Un modelo es una herramienta que permite aprender, explorar e investigar algunos aspectos de la realidad. Existen diferentes clases de modelos, entre ellos:

- modelos gráficos de 2 o 3 dimensiones y de animación por computadora,

- modelos lógicos - verbales que proporcionan una descripción funcional del sistema,

- modelos a escala o maquetas,

- modelos matemáticos.

1.1.1. ¿Qué es un modelo matemático?

Las relaciones entre las variables físicas del sistema, proceso o planta a modelar se traducen en estructuras matemáticas como ecuaciones algebraicas simples y/o ecuaciones diferenciales. Este modelo representa unas hipótesis simbólicas, abstractas y simplificadas sobre la manera en que evoluciona el sistema bajo investigación, y su análisis (examen y solución) da respuestas aproximadas sobre el comportamiento del sistema. En otras palabras los modelos matemáticos de los sistemas son construcciones abstractas y simplificadas para *predecir* su comportamiento.

Ejemplo 1 El flujo volumétrico y la velocidad media en una tubería se modela por una ecuación algebraica simple producto de la velocidad media por el área transversal. Este es un modelo *estático* ya que la *salida* del sistema (flujo volumétrico) depende solamente de la *entrada* (velocidad del flujo) en curso.

Ejemplo 2 La relación entra la fuerza aplicada (la entrada) y la posición (la salida) de un sistema mecánico de tipo masa, resorte y amortiguador "ideal", puede ser descrito por una sola ecuación diferencial ordinaria lineal (EDOL) con coeficientes constantes. Este es un ejemplo de un sistema *dinámico* ya que la posición de la masa depende de la fuerza aplicada en el pasado, es decir, tiene *memoria*. Esta EDOL tiene como única variable independiente el tiempo y representa o reproduce el comportamiento dinámico y estático del sistema.

Ejemplo 3 Las EDP aparecen por el hecho de existir variables independientes *espaciales* apartes del tiempo.

Por *modelado de sistemas físicos* se quiere entonces significar *desarrollo de modelos matemáticos de sistemas tecnológicos*, donde ocurren fenómenos de diferente naturaleza: mecánicos, eléctricos, magnéticos, de flujo de fluidos, de calor o termodinámicos, químicos, etc..

1.1.2. Clasificación de modelos matemáticos

A los modelos matemáticos (o sistemas) los podemos clasificar de acuerdo a distintos criterios. En esta guía distinguiremos algunos de ellos.

Estáticos - Dinámicos En un modelo matemático estático un cambio en la variable de entrada produce un cambio *instantáneo* en la variable de salida. Si observamos en un gráfico en el tiempo la variable de entrada y de salida de un modelo estático, veremos que ambas curvas son cualitativamente (su forma) iguales, la única diferencia es la escala de sus valores (diferencia cuantitativa). Ejemplo: en una resistencia eléctrica R la relación entre el voltaje $v(t)$ y la corriente $i(t)$ es $v(t) = i(t)R$, lo cual es una relación matemática de tipo algebraica: al variar $i(t)$, $v(t)$ cambia instantáneamente, o de otra manera, $v(t)$ sólo depende de $i(t)$.

En cambio al graficar las señales de entrada y salida de un sistema dinámico, ambas curvas tienen forma diferente o son cualitativamente distintas. La variable de entrada afecta la salida del sistema pero luego de una *dinámica interna*. Ejemplo: en un capacitor eléctrico C la relación entre el voltaje $v(t)$ y la corriente $i(t)$ es $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$, lo cual es una EDO: $v(t)$ corresponde a la solución de una *ecuación diferencial ordinaria* y por lo tanto, depende de $i(t)$ entre $t = t_0$ y el instante actual t, y además de la *condición inicial* de $v(t_0)$: $v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\sigma)d\sigma$.

Lineales - No Lineales De acuerdo a la dependencia mutua entre las variables (de estado x, entrada u y salida y y sus derivadas) en las ecuaciones presentes en el modelo, éstos pueden ser lineales descritos por relaciones matemáticas lineales entre ellas y con coeficientes constantes, tales como $y = a_1u + a_2$, $\dot{x}_1 = a_1x_1 + a_2u_1 + a_3u_2$. Los coeficientes a_i son constantes, y las variables x, $\dot{x}$, y y u son variantes en el tiempo y pueden entonces escribirse $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $y(t)$ y $u(t)$ respectivamente. Si las relaciones matemáticas son del tipo $y = a_1ux$, $\dot{x} = \frac{x}{u}$, $\dot{x} = \sqrt{xu}$, $\dot{x} = u\sin x$, el modelo matemático es no lineal.

En particular este hecho divide en dos grandes temas el estudio matemático de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) que resultan: lineales (EDOL) y no lineales (EDONL). En la práctica la mayoría de los sistemas son no lineales, pero para facilitar su análisis y diseño de sistemas de control se aproximan mediante modelos lineales. Esta aproximación es sólo válida en un rango de variación pequeño alrededor de unas condiciones de operación del sistema (que llamaremos *punto de operación*). Esto es también conocido como la validez *local* del modelo lineal mientras que el modelo no lineal tiene un rango de validez mayor. Es decir, los modelos lineales pueden reproducir fielmente (con poco error) a un sistema real en un entorno pequeño de variación de las variables alrededor de un punto de operación. Si el sistema se aleja mucho de tal punto de operación, las variables del modelo lineal tendrán mucha diferencia con respecto a las variables reales del sistema. Por lo tanto decimos que un modelo no lineal puede representar fielmente a un sistema en diferentes puntos de operación y es por lo tanto mas exacto o representativo que los modelos lineales. El proceso de hallar un modelo lineal a partir de un modelo lineal se llama *linealización*, en el cual las expresiones matemáticas no lineales se reemplazan por lineales, puede verse gráficamente en el espacio bi-dimensional como reemplazar una curva por una recta tangente en el punto de operación. Dependiendo de la curva, la recta tangente representará a la curva de una manera mas o menos exacta en un entorno mas o menos extenso alrededor del punto de tangencia.

Una de las propiedades claves de los sistemas lineales es que para ellos es aplicable el principio de superposición, que en palabras puede expresarse como sigue: si la salida o respuesta de un sistema ante una entrada u_1 es y_1 y ante u_2, y_2, entonces ante $u = u_1 + u_2$ responderá como $y = y_1 + y_2$ (verificar para una función lineal y una no lineal!).

Ejemplo: el modelo de un péndulo simple suspendido (sin fricción, con la masa m concentrada en un punto a una distancia l del centro de giro y que evoluciona en un plano) se puede derivar aplicando las leyes de Euler, considerando el ángulo θ que forma con respecto a la vertical. Su EDONL es: $ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$. Sin embargo en el curso Laboratorio de Física general, se consideró que para ángulos pequeños (valores cercanos a cero) se puede aproximar $\sin\theta \approx \theta$ lo cual produce una EDOL: $ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$. Esta es una ecuación simplificada *linealizando* la primera en el punto de operación $\theta = 0$ y solo es válida para valores pequeños de θ (localmente).

Sistemas concentrados o distribuidos en el espacio Cuando los cambios en las variables del sistema son independientes de variables espaciales (cualesquiera de las 3 dimensiones) se dice que el sistema es de *parámetros concentrados*. Cuando alguna variable se considera que no es igual en el volumen completo del sistema, entonces éste es *distribuido en el espacio*. Ejemplo: la temperatura en una barra metálica larga calentada en un extremo es distinta en distintos puntos de ella, es por lo tanto de parámetros distribuidos.

Las consecuencias de esta distinción son importantes desde el punto de vista del tipo de modelo resultante. Para el primer caso la única variable independiente es entonces el tiempo y el modelo será de la forma de EDO. Por el contrario, en el último caso, existirán mas de una variable independiente, el tiempo y al menos una variable espacial, en cuyo caso resulta en un modelo de tipo EDP. Transformar una EDP en una EDO o hacer la hipótesis simplificadora de suponer que el sistema en estudio es de parámetros concentrados, es un paso importante a la hora planter el problema de modelado.

Invariantes - Variantes Esencialmente un sistema invariante es aquel en el cual los cambios en las variables de estado o salida son independientes del momento en el cual se cambia la señal de entrada. En otras palabras, si un sistema responde en forma diferente ante las mismas entradas y en condiciones iniciales iguales, es variante en el tiempo.

Debe tenerse en cuenta que a largo plazo, todos los sistemas son variantes en el tiempo, es decir tienen tendencia a cambiar sus propiedades dinámicas. Esto se debe al desgaste, envejecimiento, rotura, etc de los diversos componentes del sistema (piense por ejemplo, en los cambios que ocurren en un carro con los años). Para propósitos de control tales cambios lentos deben despreciarse y considerarse por lo tanto invariante.

Un ejemplo típico de un proceso variante en el tiempo es el vuelo de un avión o cohete espacial, el cual quema combustible y cambia entonces su masa durante el vuelo. Suponiendo que vuela en una línea recta, aplicando la segunda ley de Newton (no $F(t) = Ma$ sino $F(t) = \frac{d(Mv)}{dt}$) tenemos:

$$M(t)\frac{dv}{dt} + v(t)\frac{dM}{dt} = F(t) \tag{1.1}$$

donde F es el empuje, M la masa del avión o cohete (el cual no es un coeficiente constante sino una variable), v la velocidad de vuelo.

Determinísticos - Estocásticos Los sistemas determinísticos son aquellos para los cuales para una señal de entrada y condiciones iniciales dadas, el sistema responde con una señal de salida completamente determinada o sin incertidumbre. En los sistemas estocásticos por el contrario, la influencia de factores externos aleatorios es tan importante que la señal de salida es incierta y debe ser descrita por leyes probabilísticas. En realidad ningún sistema real puede evitar influencias aleatorias como ruidos, perturbaciones o fallas. La decisión de si es o no considerado estocástico depende de cuanta influencia tienen esos efectos aleatorios sobre las variables de interés del sistema bajo estudio.

Flujo - Eventos Discretos - Híbridos Los sistemas que procesan la materia o energía en forma de flujos continuos a través del sistema son llamados de *tipo flujo* (o continuos), por ejemplo, tren de laminado metalúrgico, reactores químicos de flujo, generadores de vapor, generadores de electricidad.

En los procesos tipo "batch" o *por lotes*, el flujo es interrumpido y tienen tres estados: carga de las unidades, el proceso en sí mismo y la descarga de las unidades. Por ejemplo, reactores químicos por lotes, hornos rotacionales en la industria de cemento y alimenticia.

Finalmente, los procesos discretos de manufactura (*o a eventos discretos*), los objetos o eventos que se procesan aparecen en períodos de tiempo discontinuos, por ejemplo el armado de piezas, el llenado de envases, la clasificación y paletización de piezas distintas.

Continuos - Discretos o muestreados Un modelo matemático que describe las relaciones entre señales continuas en el tiempo es llamado *continuo en el tiempo*, y se usan EDO para describir tales relaciones. En la práctica hoy en día todos los sistemas son supervisados y controlados por medio de computadores digitales que muestrean (o miden) las variables de sistema en instantes discretos (finitos) de tiempo. Un modelo que expresa directamente las relaciones entre las variables del sistema en los instantes de muestreo, es llamado *discreto en el tiempo* o *muestreado*, y se usan *ecuaciones en diferencias* para representarlos matemáticamente.

1.1.3. La ficción del sistema real: jerarquía de modelos

Siendo el sistema real infinitamente complejo, variante en el tiempo y sujeto a perturbaciones externas desconocidas o no previsibles, y nuestros conocimientos de las "leyes de la naturaleza" meras aproximaciones, nunca podremos alcanzar "el modelo real" o el "verdadero modelo" que lo represente en forma exacta al sistema que se intenta modelar.

Para el diseño de sistemas de control nos interesa principalmente disponer de modelos útiles mas que verdaderos, que nos permitan analizar la dinámica del sistema y diseñar controladores efectivos, resultando así en una visión más pragmática del modelado.

En este sentido se puede hablar de una jerarquía de modelos en términos de precisión del modelo versus complejidad y tiempo de desarrollo: un modelo poco preciso será relativamente sencillo de resolver matemáticamente y fácil de obtener; un modelo muy preciso será muy complejo, difícil de desarrollar y de resolver aún con computadores rápidos y algoritmos eficientes. Es por ello que podemos hablar de un compromiso entre precisión y complejidad que siempre debe considerarse a la hora de desarrollar modelos matemáticos en cualquier disciplina.

1.1.4. Usos de los modelos matemáticos

La característica fundamental de los modelos matemáticos es que algunas propiedades del sistema están reflejadas en el modelo, pero no todas. Sólo aquellos aspectos que se suponen que son importantes para el estudio que se realiza serán tomados en cuenta en el modelo. Es decir el *uso final* del modelo define en gran parte el alcance del miso. Entre ellos podemos enunciar,

1. Investigación y desarrollo: estudiar el funcionamiento de sistemas y estimar los parámetros asociados a partir de plantas pilotos o prototipos de laboratorio; explorar los efectos de diferentes condiciones de operación para asistir a la optimización y al diseño de los sistemas de control; ayudar a los cálculos de escalamiento.

2. Diseño de procesos o sistemas: explorar el dimensionamiento y arreglo de los equipos para mejorar el desempeño dinámico; estudiar las interacciones entre los subsistemas; evaluar diferentes alternativas de estructuras y estrategias de control; simular arranques, paradas, situaciones de emergencias y sus procedimientos de manejo.

3. Operación y control de procesos: control de fallas y problemas de procesamiento; entrenamiento de operadores; estudiar los efectos y los requerimientos de proyectos de expansión de la planta; reducir los modelos dinámicos para usarlos en los sistemas de control en línea; optimizar la operación de la planta. Es usualmente mas económico, seguro y rápido efectuar esta clase de estudios sobre un modelo matemático en la forma de experiencias de simulación, que sobre una planta en operación y producción.

En el área de control automático, la síntesis o diseño de un algoritmo de control o controlador se desarrolla mediante técnicas formales o matemáticas y requieren de un modelo matemático adecuado del sistema a controlar.

En nuestro contexto consideramos que un proceso (*del latin processus*: progresando, creciendo) es un cambio cualitativo y cuantitativo en el tiempo, es decir una transformación en cantidad y calidad. La palabra dinámica implica que nuestro interés esta en el perfil de estos cambios en el tiempo, su descripción matemática y análisis.

1.1.5. Cómo construir modelos

El *modelado físico* (llamaremos "M") es el proceso de construir modelos matemáticos usando principios teóricos que describen los fenómenos del sistema, es decir, las leyes físicas fundamentales de conservación de masa, energía o momentum y asumiendo hipótesis simplificadoras. Estas leyes dependen de la naturaleza del proceso: movimiento mecánico, circuitos eléctricos, dinámica de fluidos, termodinámica, electromagnetismo, cinética química, aerodinámica, etc. Debido a esta complejidad de fenómenos físicos involucrados, el modelado es en general un trabajo *interdisciplinario* donde participan profesionales especialistas de diferentes áreas. Estos modelos son también conocidos como *modelos de conocimiento* por su fundamentación teórica. Algunos sistemas son difíciles de modelar de esta manera, ya sea porque son muy complejos o porque las leyes físicas que los gobiernan son desconocidas.

Por otro lado, la *identificación* (llamaremos "I") es un proceso experimental de construcción de modelos matemáticos usando mediciones de variables de entrada u y salida del sistema real y y de su modelo y_m. Una vez escogida la estructura del modelo, la diferencia $e = y - y_m$ es minimizada iterativamente mediante la actualización o estimación óptima de los parámetros o coeficientes del modelo. Esto puede verse también como ajustar el modelo a las observaciones realizadas sobre el sistema. La identificación es también conocida como em *modelado empírico* por su naturaleza eminentemente experimental.

Diferencias entre el modelado físico (M) y la identificación (I) de sistemas

- en M la estructura del modelo (tipo de relaciones matemáticas, orden de las EDO, número de parámetros) resulta directamente de las leyes naturales y de las simplificaciones necesarias. En I la estructura debe decidirse o prefijarse de antemano.

- M reproduce las relaciones entre las entradas, las salidas y las variables internas (estados), mientras que I usualmente resulta en un modelo de tipo "caja negra", es decir, un modelo que reproduce solamente las relaciones entrada-salida del sistema.

- En M los parámetros del modelo están directamente relacionados con cantidades y propiedades físicas, mientras que en I los parámetros son solo números sin relación con cantidades físicas.

- Un modelo construido por M puede ser usado para muchos puntos de operación del sistema y para sistemas similares sobre los cuales se conoce poco. Por el contrario la I proporciona un modelo "ad hoc" válido solamente para el sistema estudiado y para el régimen de operación específico para el cual se realizaron las experiencias y mediciones.

- En M se puede formular un modelo para un sistema que no ha sido construido y está aún en la fase de diseño. La I sólo se puede aplicar a sistemas existentes y en operación.

- Para diseñar por M todos los procesos internos deben ser conocidos y modelados, lo cual no es requerido en I (modelos de tipo caja negra).

- Una vez que se tiene un paquete computacional para la I (por ejemplo el *Identification Toolbox* de Matlab), éste puede utilizarse rápida y fácilmente en la obtención de diferentes modelos de diferentes sistemas. En el caso del M, el procedimiento debe repetirse desde el comienzo cada vez y lleva en general mas tiempo.

1.1.6. Como verificar los modelos

Para que un modelo sea útil debemos tener un grado de certeza o confianza de los resultados y las predicciones que se infieren de él. Esta confianza puede obtenerse por medio de la *verificación* o *validación* del modelo. En principio, esta validación se realiza comparando los comportamientos del modelo y del sistema y evaluando su diferencia.

Todos los modelos tienen un cierto *dominio de validez*. Esto determina cuán exactos son capaces de describir el comportamiento del sistema. El dominio de validez puede significar el rango de variación de las variables y valores de los parámetros para los cuales el modelo es válido. Ejemplos:

1. la constante de rigidez k de un resorte (Ley de Hooke: $F_r = kx$) se puede determinar de experiencias en reposo agregándole diversas masas en su extremo (F_r) y midiendo su estiramiento x. El conjunto de valores obtenidos se grafican en F_r versus x y se *aproximan* por una *recta* que pasa por el origen con pendiente k. En realidad estamos aproximando una curva no lineal por una recta tangente a ella en el origen. Por lo tanto la Ley de Hooke es una aproximación con un dominio limitado de validez alrededor del origen. En realidad todos los resortes son no lineales. El mismo razonamiento es válido para muchas “leyes” de la naturaleza, por ejemplo la ley de Ohm sobre la relación entre el voltaje y la corriente en una resistencia eléctrica.

2. Un modelo de un péndulo simple puede ser válido solamente para pequeñas desviaciones angulares alrededor de la vertical, mientras que otro puede ser aún confiable para ángulos mayores.

3. Las leyes de Newton del movimiento son válidas con buena precisión para un gran espectro de velocidades, pero cerca de la velocidad de la luz es incapaz de describir el movimiento de las partículas.

Es importante entonces reconocer que *ningún sistema puede ser modelado exactamente*; los modelos siempre tendrán una *incertidumbre*. La incertidumbre significa que el modelo matemático no puede predecir exactamente cuál será el comportamiento del sistema físico real, es decir siempre tendremos dudas de la exactitud del modelo. Los ingenieros de sistemas necesitan tener un procedimiento para construir una variedad de modelos de complejidad variable de manera a que pueda encontrar el modelo *mas simple* capaz de dar las respuestas que consideramos *mas importantes o relevantes* sobre el sistema bajo estudio.

1.1.7. El proceso de modelado en la ingeniería de control

Los pasos básicos para el desarrollo de sistemas de control son similares a todos las metodologías de diseño en ingeniería:

1. modelado matemático del sistema

2. análisis del modelo
3. diseño del controlador
4. validación del controlador diseñado (sistema en lazo cerrado)

Como en esta área estamos interesados en diseñar sistemas de control y ellos se evalúan en parte según su desempeño dinámico, los modelos estáticos modelados por expresiones algebraicas están descartados.

Por otro lado, debido a que clásicamente las técnicas de análisis y diseño de controladores están muy desarrollados para sistemas lineales (EDOL), algo desarrolladas par sistemas no lineales (EDONL) y muy poco desarrolladas para sistemas distribuidos (EDP), a pesar del grado de complejidad y exactitud que podría alcanzarse en la fase de modelado, las restricciones teóricas y prácticas de los sistemas de control hacen que en muchos casos nos podamos contentar con modelos relativamente simples o aproximados dados por EDONL o las EDOL. Este compromiso entre complejidad y aproximación nos permitirá evaluar si el proceso de diseño anterior es satisfactorio o por el contrario si se debe recomenzar en la fase de modelado considerando un modelo más representativo.

Bibliografía

[1] Karnopp, D.C. and Margolis, D. L. and Rosenberg, R.C., *Systems Dynamics, Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*, Third Ed., John Wiley & Sons, 2000.

[2] Wellstead, P. E., *Introduction to Physical System Modelling*, Academic Press, 1979.

[3] Kecman, V., *State Space Models of Lumped and Distributed Systems*, Springer-Verlag, 1988.

[4] Ljung, L. and Glad, T., *Modeling of Dynamic Systems*, Prentice Hall, 1994.

[5] Ogata, K., *Dinámica de Sistemas*, Prentice Hall Hispanoamericana, 1987.

[6] Nicholson, H., *Modelling of Dynamical Systems, Vol. 1 y Vol. 2*, IEE – Peter Peregrinus, 1981.

[7] Meisel, J., *Principios de Conversión de Energía Electromecánica*, McGraw-Hill, 1969.

[8] Cannon, R. H., *Dynamics of Phisical Systems*, McGraw-Hill, 1967.

[9] Luyben, W. L., *Process Modelin, Simulation, and Control for Chemical Engineers*, Second Ed., McGraw-Hill, 1990.