INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MÉRIDA VENEZUELA

Escuela Básica de INGENIERIA

Cálculo 10. Semestre B-2015

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

1. Polinomios. Inecuaciones.

Problema 1 — Determine el grado y el término independiente de los siguientes polinomios.

1. $P(x) = 3x^7 - 8x^2 + 5x^8 - 3.$
2. $Q(x) = 5x^2 - 3x^4 - 5x^3 + 1.$
3. $R(x) = x^3 + 5x^2 + x.$
4. $S(x) = 6x + 30x^8 + 6 + x^2.$

Problema 2 — Dados los polinomios.

- $P(x) = x^3 - 8x - 3,$
- $Q(x) = 5 - 3x^4 - x,$
- $R(x) = x^6 - x + 4x^2 - 6,$
- $S(x) = 2x - 2x^2 - 5.$

realizar las siguientes operaciones:

1. $P(x) - (Q(x) - 6S(x))$
   Solución: $3x^4 + x^3 - 12x^2 + 5x - 38$

2. $S(x) \cdot R(x) - 2P(x) \cdot Q(x)$
   Solución: $-2x^8 + 8x^7 - 5x^6 - 48x^5 - 24x^4 - 26x^2 + 67x + 60$

3. Hallar el cociente y el resto al dividir el polinomio $3Q(x)$ entre $P(x)$.
   Solución: Cociente: $-9x$. Resto: $-72x^2 - 30x + 15$

4. Hallar el cociente y el resto al dividir el polinomio $R(x)$ entre $S(x)$.
   Solución: Cociente: $-\frac{1}{2}\,x^4 - \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{3}{4}\,x^2 + 2\,x - \frac{15}{8}$. Resto: $\frac{51}{4}\,x - \frac{123}{8}$

Problema 3 — Determine el resto de dividir $P(x)$ entre $Q(x)$, mediante el algoritmo de la división y el Teorema del residuo, para cada uno de los siguientes:

1. $P(x) = x^2 - x^3 - 8x + 12$; $Q(x) = x + 1$ — Solución: 22
2. $P(x) = x^4 + 81$; $Q(x) = x + 3$; — Solución: 162
3. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2$; $Q(x) = 2x + 1$ — Solución: $\frac{1}{2}$
4. $P(x) = 6x^4 - 5x^3 - 39x^2 - 4x + 12$; $Q(x) = 3x + 2$ — Solución: 0

Problema 4 — Para cada uno de los siguientes ejercicios hallar el cociente y el resto, aplicando la regla de Ruffini

1. Al dividir el polinomio $P(x) = 5x^4 - 2x^2 + 8x - 3$ entre $H(x) = x - 2$
   Solución: Cociente: $5\,x^3 + 10\,x^2 + 18\,x + 44$ y Resto: 85

2. Al dividir el polinomio $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + x - 3$ entre $H(x) = x - \frac{1}{2}$
   Solución: Cociente: $4\,x^2 - 6\,x - 2$ y Resto: -4

3. Al dividir el polinomio $P(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ entre $H(x) = 2x + 1$
   Solución: Cociente: $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{1}{8}$ y Resto: $\frac{7}{8}$

4. Al dividir el polinomio $P(x) = 6x^4 - 5x^3 - 39x^2 - 4x + 12$ entre $H(x) = 3x + 2$
   Solución: Cociente: $2\,x^3 - 3\,x^2 - 11\,x + 6$ y Resto: 0

Problema 5 — Determine el valor de k, para que el polinomio $P(x) = x^3 + kx^2 - kx + 10$, sea divisible por $x + 3$.
Solución: $k = \frac{17}{12}$.

Problema 6 — Determine m, para que $Q(x) = m^2x^4 - 3m^2 + 1$, sea divisible entre $x - 1$.
Solución: $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problema 7 — Si $\alpha = 2$ es una raíz de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 16x + 16k$, encuentre las otras raíces de $P(x)$.
Solución: $\alpha_1 = -4$ y $\alpha_2 = 4$.

Problema 8 — Determine los valores de m y n para que $P(x) = 3x^3 + mx^2 + nx + 42$, sea divisible por $Q(x) = (x - 2)(x + 3)$.
Solución: $m = -4$ y $n = -25$.

Problema 9 — Si $\alpha = -1$ es una raíz de multiplicidad 5 del polinomio

$$P(x) = x^6 + 3x^5 - 10x^3 - 15x^2 - 9x - 2,$$

halle la otra raíz de $P(x)$.
Solución: $\alpha = 2$.

Problema 10 — Verifique $Q(x) = x + 2$, es un factor de $P(x) = x^{12} - 4096$.

Problema 11 — Construya un polinomio de grado cuatro, tal que $\alpha = -2$ y $\beta = -3$ sean raíces de multiplicidad 2.

Problema 12 — Construya un polinomio $P(x)$ de grado 3, tal que $\alpha = 2$ y $\beta = -3$ sean raíces de $P(x)$ y $P(-1) = 3$.

Problema 13 — Construya un polinomio $P(x)$, con coeficiente racionales que posean al menos las raíces $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

Problema 14 — Construya un polinomio $P(x)$, con coeficiente racionales que posean al menos las raíces $2 + \sqrt{5}$ y $\sqrt{3}$.

Problema 15 — Construya un polinomio $P(x)$ de grado 5, con coeficiente racionales tales que $P(1) = 3$, $P(0) \neq 0$ y que posean al menos las raíces $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$.

Problema 16 — Mencione las posibles raíces racionales de los siguientes polinomios:

1. $P(x) = 2x^2 - 3x + 6$
2. $P(x) = x^4 - 3x + x^2 - 12$
3. $P(x) = 24x^4 - 18 - 3x^2 - 6x$
4. $P(x) = 4x^5 - 20x^4 - 16x^2$

Problema 17 — Encontrar las raíces reales y sus multiplicidades, de los siguientes polinomios:

1. $P(x) = 3(x^2 + 1)(x + 2)^2$
2. $Q(x) = x^2(x + 1)(x^2 - 1)$
3. $R(x) = (x^2 - x - 6)^2(x^2 - 3)(x^2 + 1)$
4. $S(x) = 5(3x + 2)(x^2 - 2)(x^2 + x + 1)$
5. $T(x) = (x^3 - x^2)(x^2 - x)^2(x^2 + 4)$
6. $M(x) = (x^3 + 8)(x^2 - 4)(x^2 + x)$

Problema 18 — De ser posible, encuentre todas las raíces reales de los siguientes polinomios. Factoricé $P(x)$ sobre $\mathbb{R}$.

1. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$
2. $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$
3. $Q(x) = x^5 + 3x^4 - x - 3$
4. $R(x) = x^6 - 5x^4 + 6x^2$
5. $P(x) = x^3 + 2\,x^2 - 5\,x - 6$
6. $P(x) = x^3 + 5\,x^2 + 5\,x + 4$
7. $P(x) = x^4 - 5\,x^3 - 5\,x^2 + 45\,x - 36$
8. $P(x) = x^4 - 3\,x^3 - x + 3$
9. $P(x) = x^4 - 4\,x^3 + 6\,x^2 - 12\,x + 9$
10. $P(x) = x^4 + x^3 - 5\,x^2 + x - 6$
11. $P(x) = x^4 - 3\,x^2 - 4$
12. $P(x) = x^5 - 5\,x^3 - 36\,x$
13. $P(x) = x^{11} - 256\,x^3$
14. $P(x) = x^8 + x^4 - 12$

Problema 19 — Simplifique hasta obtener una expresión irreducible.

1. $P(x) = \dfrac{10\,x^2 + 29\,x - 21}{5\,x^2 - 23\,x + 12}$ Solución: $\dfrac{2\,x + 7}{x - 4}$
2. $P(z) = \dfrac{4\,z^2 + 12\,z + 9}{2\,z^2 + 3\,z}$ Solución: $\dfrac{2\,z + 3}{z}$
3. $P(x) = \dfrac{9\,x - 6}{8\,x^3 - 27} \cdot \dfrac{4\,x^2 - 9}{12\,x^2 + 10\,x - 12}$ Solución: $\dfrac{3}{2(4\,x^2 + 6\,x + 9)}$
4. $P(x) = \dfrac{5\,x^2 + 12\,x + 4}{x^4 - 16} \cdot \dfrac{x^2 - 2\,x}{25\,x^2 + 20\,x + 4}$ Solución: $\dfrac{x}{(5\,x + 2)\,(x^2 + 4)}$
5. $P(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \cdot \dfrac{x^3 + 8}{x}$ Solución: $\dfrac{\left(x^2 - 2\,x + 4\right)\left(x^2 + 2\,x + 4\right)}{x}$
6. $P(x) = \dfrac{x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 12}{x^3 - x^2 - 6\,x}$ Solución: $\dfrac{x - 2}{x}$

7. $P(x) = \dfrac{x^3 - 7\,x + 6}{x^3 + 2\,x^2 - 3\,x}$ Solución: $\dfrac{x-2}{x}$

8. $P(x) = \dfrac{2\,x - 3}{18\,x^3 + 15\,x^2 - 63\,x}$ Solución: $\dfrac{1}{3\,(3\,x+7)\,x}$

Problema 20 — Desarrollar los siguientes ejercicios

1. $(x+1)^2$

2. $(x+1)^3$

3. $(2x+1)^3$

4. $(3x+2)^3$

5. $(x+2)^4$

6. $(x-1)^3$

7. $(2x-1)^3$

8. $(x-2)^4$

9. $(x-3)^3$

Problema 21 — Resuelve las siguientes inecuaciones, dando el resultado mediante intervalos y representando el mismo en la recta real.

1. $2(x-3) > 5$ $Sol = \left(\frac{11}{2}, +\infty\right)$

2. $2(x-3) \leqslant 5$ $Sol = \left(-\infty, \frac{11}{2}\right]$

3. $x + 3 \geqslant 2(x-1)$ $Sol = (-\infty, 5]$

4. $(x+1)^2 \geqslant x^2$ $Sol = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

5. $(x-1)^2 < x^2$ $Sol = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

6. $(x+3)^3 > x^3 + (3x+2)^2$ $Sol = \left(-\frac{23}{15}, +\infty\right)$

7. $3[(x+3)^2 + x(x+3) + x^2] < (3x+2)^2$ $Sol = \left(-\infty, -\frac{23}{15}\right)$

8. $\dfrac{x+11}{2} \leqslant \dfrac{x}{3} + 1$ $Sol = (-\infty, -27]$

9. $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x}{3} > 1$ $Sol = (3, +\infty)$

10. $\dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{(x-1)^2}{2} > 2x^2 + \dfrac{x+1}{4}$ $Sol = \left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$

11. $\dfrac{6x^2 - (x+1)}{4} - 2x^2 \leqslant -\dfrac{(x-1)^2}{2}$ $Sol = \left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$

12. $\dfrac{(2x+3)^3}{8} \geqslant x^3 + \dfrac{9x^2}{2} + 1$ $Sol = \left[-\frac{19}{54}, +\infty\right)$

13. $x^2 - 2x - 3 > 0$ $Sol = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

14. $x^2 + 5x + 6 \geqslant 0$ $Sol = (-\infty, -3] \cup [-2, +\infty)$

15. $2x^2 + 5x + 2 \leqslant 0$ $Sol = [-2, -\frac{1}{2}]$

16. $x^2 + \frac{5}{2}x + 1 < 0$ $Sol = (-2, -\frac{1}{2})$

Problema 22 — Resuelve las siguientes inecuaciones, dando el resultado mediante intervalos y representando el mismo en la recta real.

1. $\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x} \leqslant 0$ $\quad Sol = (-1, 0)$

2. $\dfrac{-5x^2+3x-2}{x^4-1} > 0$ $\quad Sol = (-1, 1)$

3. $\dfrac{2x+1}{3x-1} \geqslant \dfrac{2x+5}{3x+1}$ $\quad Sol = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$

4. $\dfrac{5}{3x+1} - \dfrac{20}{9x^2-1} \leqslant \dfrac{2}{3x-1}$ $\quad Sol = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 3\right]$

5. $\dfrac{1}{x^2+x} > \dfrac{1}{x^2-x} - \dfrac{1}{x^2-1}$ $\quad Sol = (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$

6. $\dfrac{(x+1)^2(x+3)(x-1)}{x+2} \leqslant 0$ $\quad Sol = (-\infty, -3] \cup (-2, 1]$

7. $\dfrac{x}{1-x} \leqslant \dfrac{x-3}{2-x}$ $\quad \left(1, \frac{3}{2}\right] \cup (2, +\infty)$

8. $\dfrac{x-2}{x+3} < \dfrac{x+1}{x}$ $\quad Sol = \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$

9. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+x-42} \geqslant 0$ $\quad Sol = (-\infty, -7) \cup [2, 3] \cup (6, +\infty)$

10. $\dfrac{-x^3+x^2+22x-40}{x(x+7)} \geqslant 0$ $\quad Sol = (-\infty, -7) \cup [-5, 0) \cup [2, 4]$

11. $1 + \dfrac{24-4x}{x^2-2x-15} > 0$ $\quad Sol = (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

12. $\dfrac{3x+5}{2x+1} \leqslant 3$ $\quad Sol = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$

13. $\dfrac{x+1}{2-x} < \dfrac{x}{3+x}$ $\quad Sol = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

14. $\dfrac{x-1}{x} \leqslant \dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{x}{x-1}$ $\quad Sol = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

15. $\dfrac{7}{x-4} + \dfrac{1}{x+2} < -2$ $\quad Sol = (-3, -2) \cup (1, 4)$

16. $\dfrac{(x^2-2)(x+5)(x-3)}{x(x^2+2)(x+3)} > 0$ $\quad Sol = (-\infty, -5) \cup (-3, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}) \cup (3, +\infty)$

17. $\dfrac{(6x+3)^2(x^2+1)^3(3x-5)^7}{(x+6)^2(2x+3)^{17}} > 0$ $\quad Sol = (-\infty, -6) \cup \left(-6, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$

18. $\dfrac{(4x+2)^2(x^2+2)^5(2x-8)^9}{(x+1)^2(2x+5)^{13}} < 0$ $Sol = \left(-\frac{5}{2}, 4\right) \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$

Problema 23 — Hallar el valor de las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{|12+5x|-|12-4x|}{x}$, si $x \in (1,3)$ Solución: 9
2. $\dfrac{|5x-20|-|3x-20|}{x}$, si $x \in (-3,-2)$ Solución: -2
3. $\dfrac{|5x+4|-|4+3x|}{x}$, si $x \in (0,3)$ Solución: 2
4. $\dfrac{|4x+7|-|x-7|}{x}$, si $x \in (2,5)$ Solución: 5
5. $\dfrac{|7x+10|-|5x-10|}{2x}$, si $x \in (0,1)$ Solución: 6
6. $\dfrac{|9x+8|-|2x-8|}{x}$, si $x \in (1,2)$ Solución: 11
7. $\dfrac{|2x+3|-|3-x|}{x}$, si $x \in (0,1)$ Solución: 3

Problema 24 — Hallar los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones. Exprese su solución en conjunto.

1. $|3x-8| = 4$ $Sol = \left\{4, \dfrac{4}{3}\right\}$
2. $|x-2| = |3-2x|$ $Sol = \left\{1, \dfrac{5}{3}\right\}$
3. $|3x-1| - |x+2| = 1$ $Sol = \left\{2, -\dfrac{1}{2}\right\}$
4. $|x^2-1| = 3$ $Sol = \{-2, 2\}$
5. $|x^4-4| = 0$ $Sol = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
6. $|3x+1| = 7-x$ $Sol = \left\{-4, \dfrac{3}{2}\right\}$
7. $|4x+5| = 2x-3$ $Sol = \emptyset$
8. $|x^3+x| - 2|x| = 0$ $Sol = \{-1, 0, 1\}$
9. $\left|\dfrac{x}{x-1}\right| = \dfrac{4}{x}$ $Sol = \{2, -2+2\sqrt{2}\}$

10. $||x^2-1|-x| = x$ $Sol = \{1, -1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$

11. $|x-4|^2 - 5|x-4| + 6 = 0$ $Sol = \{1, 2, 6, 7\}$

12. $3\,||x+1|-4|^2 - 5\,||x+1|-4| = 2$ $Sol = \{-7, -3, 1, 5\}$

Problema 25 — Resuelve las siguientes inecuaciones, dando el resultado mediante intervalos y representando el mismo en la recta real.

1. $|2x-5| < 3$ $Sol = (1, 4)$
2. $|6x-2| \geqslant 7$ $Sol = \left(-\infty, -\frac{5}{6}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$
3. $|3+2x| < |4-x|$ $Sol = \left(-7, \frac{1}{3}\right)$
4. $4 - 5|x+2| < 0$ $Sol = \left(-\infty, -\frac{14}{5}\right] \cup \left[-\frac{6}{5}, +\infty\right)$
5. $\left|\dfrac{6-5x}{3+x}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ $Sol = \left[\frac{9}{11}, \frac{5}{3}\right]$
6. $|3x| \geqslant \left|3 - \dfrac{x}{2}\right|$ $Sol = \left(-\infty, -\frac{5}{6}\right] \cup \left[\frac{6}{7}, +\infty\right)$
7. $\dfrac{3|x-2|}{-4} > -3$ $Sol = (-2, 6)$
8. $\left|\dfrac{5}{2x-1}\right| - \left|\dfrac{1}{x-2}\right| \geqslant 0$ $Sol = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{7}\right] \cup [3, +\infty)$
9. $\dfrac{|2x - \frac{3}{5}| + 5}{8} \leqslant 2$ $Sol = \left[-\frac{26}{5}, \frac{29}{5}\right]$
10. $\left|\dfrac{2x^3-8}{x^5}\right| \geqslant 0$ $Sol = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
11. $\left|\dfrac{x^2+3x+11}{x-2}\right| \leqslant 3$ $Sol = [-5, -1]$
12. $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \leqslant 6$ $Sol = [-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}] \cup [3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$
13. $\left|\dfrac{x+3}{-3\,x+6}\right| \leqslant 2$ $Sol = \left(-\infty, \frac{9}{7}\right] \cup [3, +\infty)$
14. $|x-2| \leqslant 2x$ $Sol = \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$
15. $|3x-9| \leqslant x+1$ $Sol = (2, 5)$
16. $\left|\dfrac{x-2}{x+4}\right| \leqslant \dfrac{x+3}{x-6}$ $Sol = (6, +\infty)$

17. $\dfrac{|x-1|-|x|}{1-|x|} \geqslant 0$ $Sol = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

18. $\dfrac{4-|x-4|}{|x|+4} < 0$ $Sol = (-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$

19. $\dfrac{4-|x-4|}{|x|+4} > 0$ $Sol = (0, 8)$

20. $\left|\dfrac{3\,x^2-1}{x-2}\right| > -6$ $Sol = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

21. $\dfrac{|3\,x-1|+2\,x}{|x+1|-3\,x} \geqslant 0$ $Sol = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Cálculo 10. Semestre B-2015

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

2. Rectas y Cónicas

Problema 1 — Hallar las distancia entre los siguientes pares de puntos P y Q, además encontrar el punto medio que los une:

1. $P = (0, 0)$, $Q = (1, 2)$
2. $P = (1, 3)$, $Q = (3, 5)$
3. $P = (1, 1)$, $Q = (1, \sqrt{2})$
4. $P = (\sqrt{3}, 5)$, $Q = (0, 3)$
5. $P = (10, 8)$, $Q = (11, 3)$
6. $P = (-2, -4)$, $Q = (1, -2)$

Problema 2 — Si $A = (-3, -5)$ y $M = (0, 2)$. Hallar B sabiendo que M es el punto medio del segmento AB.
Solución: $(3, 9)$.

Problema 3 — Si $B = (8, -12)$ y $M = \left(\frac{7}{2}, 3\right)$. Hallar A sabiendo que M es el punto medio del segmento AB.
Solución: $(-1, 18)$.

Problema 4 — Hallar los puntos $P = (x, 2)$ que distan 5 unidades del punto $(-1, -2)$.
Solución: $(2, 2)$ y $(-4, 2)$.

Problema 5 — Hallar los puntos $P = (1, y)$ que distan 13 unidades del punto $(-4, 1)$.
Solución: $(1, 13)$ y $(1, -11)$.

Problema 6 — Los puntos medios de los lados de un triángulo son $M = (2, -1)$, $N = (-1, 4)$ y $Q = (-2, 2)$. Hallar los vértices.
Solución: $(1, -3)$, $(3, 1)$ y $(-5, 7)$.

Problema 7 — Demuestre que $(2, -1)$; $(5, 3)$ y $(11, 11)$ están en la misma recta.

Problema 8 — Para cada uno de los siguientes items, hallar la ecuación de la recta y dar su representación gráfica en el plano cartesiano tales que:

1. Pasa por los puntos $(4, -2)$ y $(1, 7)$.
   Solución: $y = -3x + 10$
2. Tiene pendiente 3 e intersección con el eje y igual a 4.
   Solución: $y = 3x + 4$
3. Pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(0, 3)$.
   Solución: $y = 3x + 3$

4. Pasa por $(2, -3)$ y es paralela al eje x.
Solución: $y = -3$

5. Pasa por $(2, 3)$ y sube 4 unidades en la ordenada por cada unidad que aumenta en la abscisa.
Solución: $y = 4x - 5$

6. Pasa por $(-2, 2)$ y baja 2 unidades en la ordenada por cada unidad que aumenta en la abscisa.
Solución: $y = -2x + 2$

7. Pasa por $(3, -4)$ y es paralela a la recta $5x - 2y = 4$.
Solución: $y = \frac{5}{2}x - \frac{23}{2}$

8. Pasa por el origen y es paralela a la recta $y = 2$.
Solución: $y = 0$

9. Pasa por $(-2, 5)$ y es perpendicular a la recta $4x + 8y = 3$.
Solución: $y = 2x + 9$

10. Pasa por el origen y es perpendicular a la recta $3x - 2y = 1$.
Solución: $y = -\frac{2}{3}x$

11. Pasa por $(2, 1)$ y es perpendicular a la recta $x = 2$.
Solución: $y = 1$

Problema 9 — Para cada uno de los siguientes items, hallar una ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -3)$ y que es:

1. paralela a la recta $y = 2x + 5$.

2. perpendicular a la recta $y = 2x + 5$.

3. paralela a la recta $2x + 3y = 6$.

4. perpendicular a la recta $2x + 3y = 6$.

5. paralela a la recta que pasa por los puntos $(-1, 3)$ y $(3, -1)$.

6. paralela a la recta $x = 8$.

7. perpendicular a la recta $x = 8$.

Problema 10 — Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (-4, -3)$ y tiene un ángulo de inclinación de $\frac{\pi}{4}$.

Problema 11 — Encontrar la distancia del punto P a la recta l_1, donde

1. $P = (3, 2)$ y l_1 es una recta que pasa por (3,0) y es perpendicular a la recta l_2 que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

2. $P = (10, 5)$ y l_1 es una recta que tiene pendiente $-\frac{3}{4}$ y pasa por $(4, -18)$.

3. $P(0,0)$ y l_1 es una recta que pasa por $(-3,0)$ y tiene una inclinación con el eje x positivo de $\frac{\pi}{4}$.

Problema 12 — Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -4, y que pasa por el punto de intersección de las rectas

$$2x + y - 8 = 0, \qquad 3x - 2y + 9 = 0.$$

Problema 13 — Determinar el valor de los coeficientes A y B de la ecuación $Ax - By + 4 = 0$ de una recta, si debe pasar por los puntos $C = (-3,1)$ y $D = (1,6)$.
Solución: $A = \frac{20}{19}$; $B = \frac{16}{19}$.

Problema 14 — Hallar el valor de k para que la recta $kx + (k-1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 7 = 0$.

Solución: $k = 4$.

Problema 15 — Determinar el valor de k para que la recta $k^2x+(k+1)y+3 = 0$ sea perpendicular a la recta $3x - 2y - 11 = 0$.
Solución: $\frac{1-\sqrt{7}}{3}$, $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$.

Problema 16 — Si el punto $(3,k)$ está en la recta con pendiente $m = -2$ y pasa por el punto $(2,5)$. Hallar el valor de k.

Solución: $k = 3$.

Problema 17 — Determine para que valores de k y de n las rectas:

$$k\,x - 2\,y - 3 = 0, \qquad 6\,x - 4\,y - n = 0.$$

1. Se intersectan en un único punto.
Solución: $k \neq 3$ y $n \in \mathbb{R}$.

2. Son perpendiculares.
Solución: $k = -\frac{4}{3}$ y $n \in \mathbb{R}$.

3. Son paralelas no coincidentes.
Solución: $k = 3$ y $n \neq 6$.

4. Son coincidentes.
Solución: $k = 3$ y $n = 6$.

Problema 18 — Determinar para qué valores de k y de n kas rectas:

$$k\,x + 8\,y + n = 0, \qquad 2\,x + k\,y - 1 = 0.$$

1. Son paralelas no coincidentes.
Solución: $(k = 4,\ n \neq -2)$; $(k = -4,\ n \neq 2)$.

2. Son coincidentes.
Solución: $(k = 4,\ n = -2)$; $(k = -4,\ n = 2)$.

3. Son perpendiculares.
Solución: $k = 0$ y $n \in \mathbb{R}$.

Problema 19 — Para cada uno de los siguientes items, determine el valor c para el cual la recta

$$l_1 : \quad 3x + cy = 5$$

1. pasa por el punto (3,1). $c = -4$

2. es paralela al eje y. $c = 0$

3. es paralela a la recta $2x + y = -1$. $c = \frac{3}{2}$

4. es perpendicular a la recta $y - 2 = 3(x + 3)$. $c = -1$

Problema 20 — Encontrar toda la geometría y dibujar las siguientes cónicas.

1. $x^2 + 4x - 4y + 14 = 0$

2. $x^2 - 6x - 4y + 3 = 0$

3. $x^2 - 6x + 8y - 3 = 0$

4. $y^2 - y + \frac{81}{4} + 8x = 0$

5. $y^2 + 16x + 64 = 0$

6. $2x^2 - 7y = 0$

7. $y^2 = 20x$

8. $x^2 - 4x + 8y = 0$

9. $y^2 - 10x - 8y - 14 = 0$

10. $-x^2 + 9y^2 = 9$

11. $9x^2 - 4y^2 = 36$

12. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$

13. $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

14. $4x^2 + 25y^2 - 16x - 150y + 141 = 0$

15. $9x^2 + 36y^2 - 18x + 144y - 171 = 0$

16. $16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$

17. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$

18. $-9x^2 + 4y^2 + 36x - 16y - 56 = 0$

19. $x^2 - y^2 - 2x + 2y - 4 = 0$

20. $-9x^2 + 25y^2 + 18x - 150y - 9 = 0$

21. $-9x^2 + 36y^2 + 72x - 144y - 36 = 0$

22. $9x^2 - 4y^2 + 36x - 24y - 36 = 0$

Problema 21 — Dados algunos datos geométricos de una cónica, para cada uno de los siguientes items encontrar la ecuación canónica.

1. Parábola con foco $(2, 5)$ y vértice $(2, 6)$.
Solución: $(x - 2)^2 = -4(y - 6)$

2. Parábola con foco $(2, 5)$ y directriz $x = 10$.
Solución: $(y - 5)^2 = -16(x - 6)$

3. Parábola con directriz $y = \frac{5}{2}$ y vértice en el origen.
Solución: $x^2 = -10y$

4. Parábola con vértice en $(-2, 4)$ y foco en $(-2, 3)$.
Solución: $(x + 2)^2 = -4(y - 4)$

5. Parábola con vértice en $(1, 3)$ y foco en $(2, 3)$.
Solución: $(y - 3)^2 = 4(x - 1)$

6. Parábola foco en $(3, 4)$ y directriz $x = 7$.
Solución: $(y - 4)^2 = -8(x - 5)$

7. Elipse cuyo eje mayor tiene extremos $(-3,5)$ y $(7,5)$ y cuyo eje menor tiene extremos $(2,2)$ y $(2,8)$.
Solución: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$

8. Elipse con focos $F(1,2)$ y $F'(1,-3)$, y diámetro mayor 7.
Solución: $\frac{(x-1)^2}{6}+\frac{(y+\frac{1}{2})^2}{\frac{49}{4}}=1$

9. Elipse con focos $F(3,-2)$ y $F'(1,-2)$, y diámetro menor 1.
Solución: $\frac{(x-2)^2}{\frac{5}{4}}+\frac{(y+2)^2}{\frac{1}{4}}=1$

10. Elipse para la cual la suma de las distancias de cualesquiera de sus puntos a $(4,-1)$ y $(4,7)$ es 12.
Solución: $\frac{(x-4)^2}{20}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$

11. Elipse para la cual la suma de las distancias de cualesquiera de sus puntos a $(2,1)$ y $(2,9)$ es 10.
Solución: $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$

12. Elipse con focos en $(2,5)$ y $(2,3)$ y que contiene al punto $(3,6)$.
Solución: $\frac{(x-2)^2}{2+\sqrt{5}}+\frac{(y-4)^2}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}}=1$

13. Hipérbola con focos $F(3,6)$ y $F'(3,0)$ y vértices $V(3,4)$ y $V'(3,2)$.
Solución: $(y-3)^2-\frac{(x-3)^2}{8}=1$

14. Elipse con focos en los vértices de la hipérbola $11x^2-7y^2=77$, y con vértices en los focos de esta hipérbola.
Solución: $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{11}=1$

15. Hipérbola con focos en los vértices de la elipse $7x^2+11y^2=77$, y con vértices en los focos de esta elipse.
Solución: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{7}=1$

16. Hipérbola para la cual el valor absoluto de la diferencia entre las distancias de cualesquiera de sus puntos a $(2,1)$ y $(2,9)$ es 4.
Solución: $\frac{(y-5)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{12}=1$

17. Hipérbola con centro en $(3,-5)$, un vértice en $(7,-5)$ y un foco en $(8,-5)$.
Solución: $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+5)^2}{9}=1$

18. Elipse con centro en $(4,-2)$, un vértice en $(9,-2)$ y un foco en $(0,-2)$.
Solución: $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$

19. Hipérbola con vértices en $(3,4)$ y $(3,-2)$, y excentricidad 2.
Solución: $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{27}=1$

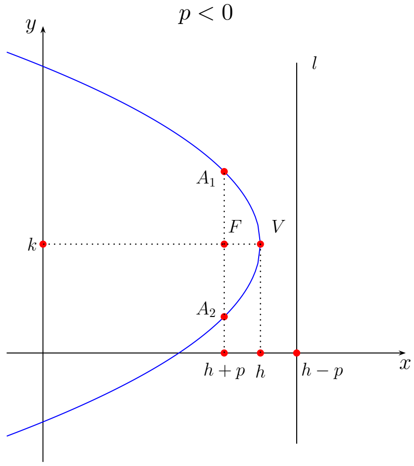
Problema 22 — Determine la ecuación de la circunferencia de radio 2 con centro en el vértice de la parábola de foco $(1,-1)$ y directriz $x=-3$.
Solución: $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

Gráficas de Cónicas

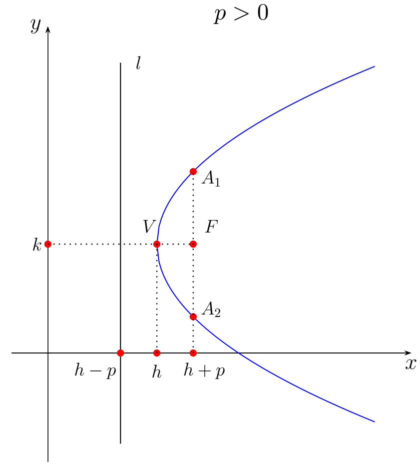
1. Parábola

Ecuación canónica: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

$p<0$



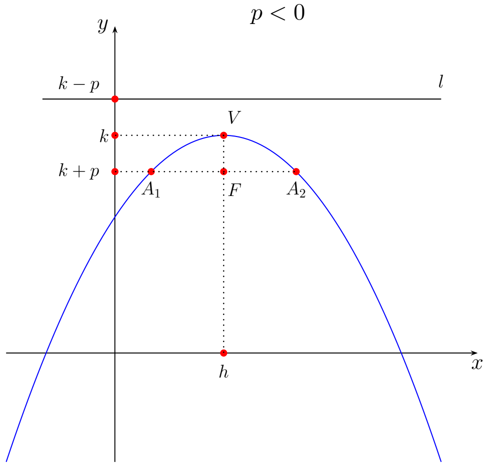
$p>0$



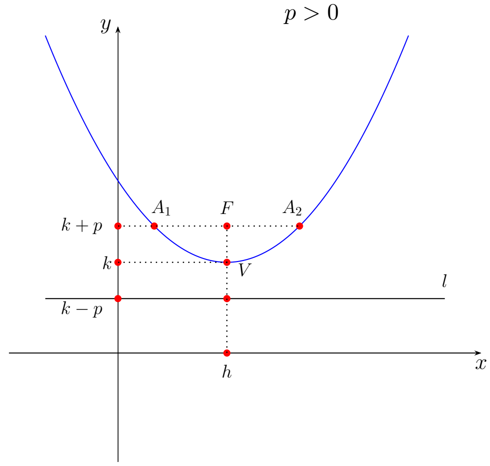
- Vértice: $V(h,k)$
- Foco: $F(h+p,k)$
- Directriz: $x = h-p$
- Latus rectum: $d(A_1,A_2) = 4|p|$

Ecuación canónica: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$p<0$



$p>0$

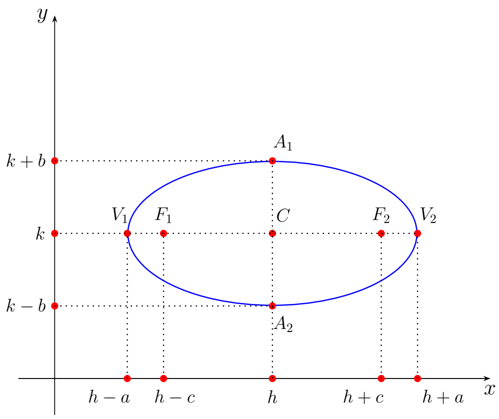


- Vértice: $V(h,k)$
- Foco: $F(h,k+p)$
- Directriz: $y = k-p$
- Latus rectum: $d(A_1,A_2) = 4|p|$

2. Elipse $(0 < b \leqslant a)$

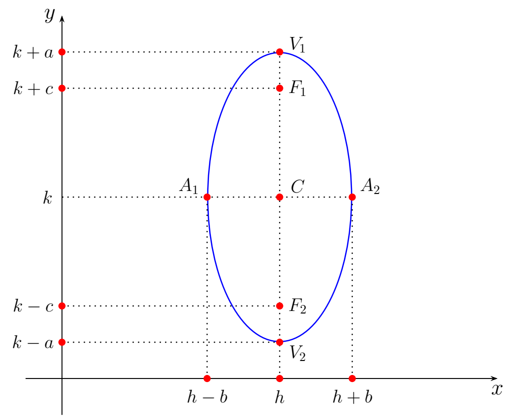
Ecuación canónica:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Eje mayor horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



Eje mayor vertical

- Centro: $C(h,k)$
- $A_1(h,k+b)$ y $A_2(h,k-b)$
- Vértices: $V_1(h-a,k)$ y $V_2(h+a,k)$
- Focos: $F_1(h-c,k)$ y $F_2(h+c,k)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
- Latus Rectum: $\frac{2b^2}{a}$
- Eje mayor: $2a$
- Eje menor: $2b$

- Centro: $C(h,k)$
- $A_1(h-b,k)$ y $A_2(h+b,k)$
- Vértices: $V_1(h,k+a)$ y $V_2(h,k-a)$
- Focos: $F_1(h,k+c)$ y $F_2(h,k-c)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
- Latus Rectum: $\frac{2b^2}{a}$
- Eje mayor: $2a$
- Eje menor: $2b$

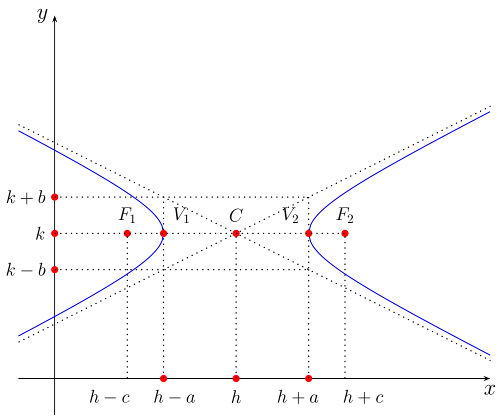
Donde $c^2 = a^2 - b^2$.

Latus Rectum. Los latus rectum en la elipse corresponden a las cuerdas perpendiculares al eje focal y que pasan por cada uno de los focos. Si a es la longitud del semiejemayor y b es la longitud del semieje menor, la longitud de cada cuerda es $\frac{2b^2}{a}$

3. Hipérbola

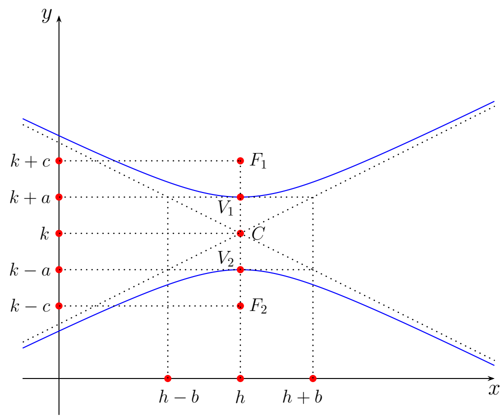
Ecuación canónica:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Eje transversal horizontal

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Eje transversal vertical

- Centro: $C(h,k)$
- Vértices: $V_1(h-a,k)$ y $V_2(h+a,k)$
- Focos: $F_1(h-c,k)$ y $F_2(h+c,k)$
- Asíntotas: $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
- Latus Rectum: $\frac{2b^2}{a}$

- Centro: $C(h,k)$
- Vértices: $V_1(h,k+a)$ y $V_2(h,k-a)$
- Focos: $F_1(h,k+c)$ y $F_2(h,k-c)$
- Asíntotas: $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
- Latus Rectum: $\frac{2b^2}{a}$

Donde $c^2 = a^2 + b^2$.

Latus Rectum. Los latus rectum en la hipérbola corresponden a las cuerdas perpendiculares al eje focal y que pasan por cada uno de los focos.

Cálculo 10. Semestre B-2015

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

3. Funciones

Problema 1 — Para cada una de las siguientes funciones hallar $f(a)$ para el valor a indicado

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 2$
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = -8$
4. $f(x) = \log(x)$, $a = \frac{1}{10}$
5. $f(x) = \log_2(x)$, $a = 8$
6. $f(x) = \arccos(\log(x))$, $a = 1$
7. $f(x) = \arccos(\log(x))$, $a = 10$
8. $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\ln(x))$, $a = e$
9. $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\log_2(x))$, $a = \sqrt{2}$
10. $f(x) = \arccos(\sqrt{3}\log_2(x))$, $a = \sqrt{2}$

Problema 2 — Para cada una de las siguientes funciones, construir la gráfica y halle su dominio natural:

1. $y = \frac{3}{4}\sqrt{15 - x^2 + 2x} + 1$
2. $y = -\frac{3}{4}\sqrt{15 - x^2 + 2x} + 1$
3. $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x + 17} + 1$
4. $y = -\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x + 17} + 1$
5. $y = \frac{3}{5}\sqrt{-x^2 + 4x + 21} + 1$
6. $y = -\frac{3}{5}\sqrt{-x^2 + 4x + 21} + 1$

Problema 3 — Considere las siguientes funciones elementales

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = x^3$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(f) $f(x) = |x|$

(g) $f(x) = \frac{1}{x}$

(h) $f(x) = e^x$

(i) $f(x) = \ln(x)$

para cada una de las funciones elementales, realice un bosquejo de las siguientes funciones y halle su dominio natural:

1. $y = f(x)$
2. $y = f(x+1)$
3. $y = f(x-1)$
4. $y = f(x) + 1$
5. $y = f(x) - 1$
6. $y = f(x-3) + 2$
7. $y = f(x+2) - 1$
8. $y = -f(x)$
9. $y = -f(x) + 2$
10. $y = f(-x)$
11. $y = f(-x) + 2$
12. $y = -f(x) - 1$

Problema 4 — Para cada una de las siguientes funciones, construir la gráfica y halle su dominio natural:

1. $y = \frac{x+1}{x-1}$
2. $y = \frac{x-1}{x+1}$
3. $y = \frac{3x+1}{x-2}$
4. $y = \frac{2x-3}{x+1}$
5. $y = \frac{2x-3}{x-1}$
6. $y = \frac{x+5}{2x-5}$
7. $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$
8. $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{x}{2})$
9. $f(x) = \cos(2x)$
10. $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$
11. $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$
12. $f(x) = \operatorname{tg}(4x)$
13. $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x+1)$
14. $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x-1) + \frac{\pi}{2}$
15. $f(x) = \operatorname{arc\,cos}(x-1) + \frac{\pi}{2}$
16. $f(x) = \sqrt{|x|}$
17. $f(x) = \ln(|x|)$
18. $f(x) = |x^2 - 9|$
19. $f(x) = |x| + |x-1|$
20. $f(x) = |2x-1| - x$
21. $f(x) = |x-1| + |x+1|$
22. $f(x) = \sqrt{5 - |x-3|}$
23. $f(x) = [\![\sqrt{x}\,]\!]$
24. $f(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{|x+1|}$

Problema 5 — Hallar el dominio natural de cada uno de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x + \sqrt{x}$ $\qquad dom(f) = [0, \infty)$
2. $f(x) = x + \sqrt{-x}$ $\qquad dom(f) = (-\infty, 0]$
3. $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$ $\qquad dom(f) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
4. $f(x) = \ln(x) + \sqrt{x^2 - 4}$ $\qquad dom(f) = [2, \infty)$
5. $f(x) = \ln(-x) + \sqrt{x^2 - 4}$ $\qquad dom(f) = (-\infty, -2]$
6. $f(x) = \arccos(x^2 - 4) + \sqrt{x(x-1)}$ $\qquad dom(f) = \left[-\sqrt{5}, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \sqrt{5}\right]$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ $\qquad dom(f) = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$
8. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ $\qquad dom(f) = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$
9. $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$ $\qquad dom(f) = [-1, 1]$
10. $f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$ $\qquad dom(f) = \{1\}$
11. $f(x) = 1 - \sqrt{8 - x^2 - 2x}$ $\qquad dom(f) = [-4, 2]$
12. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{-x^2+4}}$ $\qquad dom(f) = (-\infty, -2) \cup [0, 2)$
13. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2 - 5\,x + 6}}$ $\qquad dom(f) = [1, 2) \cup (3, \infty)$
14. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2\,x^2 - x - 1}{x^2 + 3\,x}}$ $\qquad dom(f) = (-\infty, -3) \cup [-\frac{1}{2}, 0) \cup [1, \infty)$

15. $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x^2-4)(x^2-9)}{-x^4+17x^2-16}}$ $\qquad dom(f) = (-4,-3] \cup [-2,-1) \cup (1,2] \cup [3,4)$

16. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^4-16}{x^3+2x^2-8x}\right)$ $\qquad dom(f) = (-4,-2) \cup (0,2) \cup (2,\infty)$

17. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3+2x^2-5x-6}\right)$ $\qquad dom(f) = (-\infty,-3) \cup (-2,-1) \cup (1,2) \cup (3,\infty)$

18. $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{3x+6}{x-6}\right)$ $\qquad dom(f) = [-6,0]$

19. $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x(3x+6)}{x-6}\right)$ $\qquad dom(f) = \left[-3, \frac{2}{3}\right]$

20. $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)$ $\qquad dom(f) = (-\infty,0]$

21. $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{(x+2)(x+3)}{x-2}\right)$ $\qquad dom(f) = [-3-\sqrt{5}, -3+\sqrt{5}]$

22. $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$ $\qquad dom(f) = (-1,1] \cup [2,3)$

Problema 6 — Determinar el dominio, rango y graficar cada una de las funciones siguientes:

1. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 1, \\ -x^3, & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 3x-2, & \text{si } -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ x, & \text{si } 4 < x < 6. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & \text{si } x \geqslant 2, \\ x^2+2x-3, & \text{si } -1 < x < 1. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} x^2-4, & \text{si } x < 0, \\ 2x-1, & \text{si } x \geqslant 3. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{si } 4 < x \leqslant 7, \\ |x|, & \text{si } x \leqslant 4. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} [\![x-1]\!], & \text{si } 4 \leqslant x \leqslant 7, \\ \sqrt{|x|}, & \text{si } x < 4. \end{cases}$

Problema 7 — Determinar el dominio, rango y graficar cada una de las funciones siguientes:

1. $f(x) = \begin{cases} |x+2|-x, & \text{si } -4 < x < 0, \\ \sqrt{4-x}, & \text{si } 0 < x < 4, \\ 2x-8, & \text{si } x > 4. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 2[\![x]\!]+2, & \text{si } -5 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sqrt{x}, & \text{si } 1 < x \leqslant 4, \\ 6, & \text{si } -7 < x < -5. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} [\![x]\!], & \text{si } x < -2, \\ 2, & \text{si } x > 2, \\ \sqrt{4-x^2}+2, & \text{si } -2 < x \leqslant 2. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 2[\![x]\!], & \text{si } -5 < x \leqslant 1, \\ \sqrt{x}, & \text{si } 1 < x \leqslant 4, \\ x^2+3, & \text{si } -7 < x \leqslant -5. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} |x+3|, & \text{si } x < 0, \\ 2(x-3)^2, & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 2-|x-4|, & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} x^2-2, & \text{si } -3 \leqslant x < 0, \\ x-|x-2|, & \text{si } 0 \leqslant x < 4 \\ 2+\sqrt{x-4}, & \text{si } 4 \leqslant x < 8. \end{cases}$

Problema 8 — Calcular $f+g$, fg y $\frac{f}{g}$ de las funciones siguientes:

1. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \geqslant 1, \\ x^2-2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{si } x \leqslant 8, \\ 3x^3, & \text{si } x > 10. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 7, & \text{si } x \leqslant 10, \\ x-1, & \text{si } x \geqslant 11. \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{si } |x-1| < 1, \\ x, & \text{si } x > 3. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x > 1, \\ |x-1|, & \text{si } x \leqslant 1. \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{si } x \geqslant 1, \\ x^2-1, & \text{si } x < -1. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{si } 0 \leqslant x < 1, \\ x^2, & \text{si } 2 \leqslant x < 5. \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } -1 \leqslant x < 1, \\ 2x, & \text{si } 1 \leqslant x < 4. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } -1 \leqslant x < 3, \\ -2x+3, & \text{si } 3 \leqslant x < 6. \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} [\![x]\!], & \text{si } 5 \leqslant x < 7, \\ \sqrt{x-1}, & \text{si } 1 \leqslant x < 4. \end{cases}$

Problema 9 — Para cada una de las funciones f y g. Hallar $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$, con sus respectivos dominios

1. $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$

   - $dom(f \circ g) = [0, +\infty)$
   - $dom(g \circ f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
   - $dom(f \circ f) = \mathbb{R}$
   - $dom(g \circ g) = [0, +\infty)$

2. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x-4}$

   - $dom(f \circ g) = [4, +\infty)$
   - $dom(g \circ f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
   - $dom(f \circ f) = \mathbb{R}$
   - $dom(g \circ g) = [12, +\infty)$

3. $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

- $dom(f \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $dom(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
- $dom(f \circ f) = \mathbb{R}$
- $dom(g \circ g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$

- $dom(f \circ g) = [0, 1]$
- $dom(g \circ f) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$
- $dom(f \circ f) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$
- $dom(g \circ g) = [0, 1]$

Problema 10 — Para cada una de las funciones f, g y h. Hallar $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $g \circ h$ y $h \circ g$ con sus respectivos dominios

1. $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $h(x) = \ln(x)$

- $dom(f \circ g) = \mathbb{R}$
- $dom(g \circ f) = \mathbb{R}$
- $dom(f \circ h) = (0, \infty)$
- $dom(h \circ f) = (-1, \infty)$
- $dom(g \circ h) = (0, \infty)$
- $dom(h \circ g) = \mathbb{R}$

2. $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$, $h(x) = e^x$

- $dom(f \circ g) = [1, \infty)$
- $dom(g \circ f) = [0, \infty)$
- $dom(f \circ h) = \mathbb{R}$
- $dom(h \circ f) = \mathbb{R}$
- $dom(g \circ h) = [0, \infty)$
- $dom(h \circ g) = [1, \infty)$

3. $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $h(x) = e^{x^2}$

- $dom(f \circ g) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
- $dom(g \circ f) = (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$
- $dom(f \circ h) = \mathbb{R}$
- $dom(h \circ f) = \mathbb{R}$
- $dom(g \circ h) = \mathbb{R}$
- $dom(h \circ g) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

4. $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x^4 - 4}$, $h(x) = \text{arcsen}(x)$

Problema 11 — Para cada una de funciones f y g. Hallar $(f \circ g)(a)$ para los valores de a indicado, además halle $f \circ g$.

1. $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{si } -4 \leqslant x < 4, \\ x, & \text{si } 4 \leqslant x < 6. \end{cases}$ $\quad g(x) = x^2 + 1, \quad a = 0,\ a = 2,\ a = -2,\ a = \dfrac{1}{2}.$

2. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x \leqslant 1, \\ x - 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0, \\ 1 - x, & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$, $\quad a = -2,\ a = 0,\ a = 1$

3. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leqslant 0, \\ 2x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{si } x \leqslant -1, \\ x + 2, & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$, $\quad a = -5,\ a = 0,\ a = 1$

4. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 2, \\ 2x, & \text{si } x \geqslant 4. \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 1, \\ -x^3, & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$, $a = -2$, $a = 0$, $a = 2$ $a = 3$

5. $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1|, & \text{si } x < 3, \\ \sqrt{x^2+1}, & \text{si } x \geqslant 3. \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 4, \\ |x| - x, & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$, $a = \sqrt{24}$, $a = 0$, $a = -1$

6. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{si } x < 1, \\ e^x, & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2x - 5, & \text{si } x < 2, \\ -x - 2, & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$, $a = -2$, $a = 0$, $a = 2$

Problema 12 — Sea la función $f : [1, 4] \to [a, b]$ tal que $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Demostrar que f es inyectiva y hallar los valores de a y b para que f sea biyectiva. Halle su inversa.

Problema 13 — Hallar la función inversa para cada una de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^2 + 4x - 1$, $x \in [-4, -3)$.
2. $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $x \geqslant 2$.

Problema 14 — Dadas las funciones reales siguientes

$$f(x) = 3x + 2|x|, \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1},\ x \neq 1, \quad h(x) = 3x + 7.$$

¿Cuál de estas funciones es inyectiva?

Problema 15 — Hallar la inversa de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } x \leqslant 0, \\ x^2 + 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x}, & \text{si } x \leqslant 0, \\ x^2 + 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0, \\ -x^2, & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$

Problema 16 — En los problemas $1 - 7$, indique si la afirmación dada es falsa o verdadera.

1. Si f es una función y $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$.
2. La función $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2$ es una función impar.
3. La gráfica de la función $f(x) = 5x^2 \cos(x)$ es simétrica con respecto al eje y.
4. La gráfica de la función $y = f(x + 3)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada 3 unidades a la derecha.

5. La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$ no tiene intersección con el eje x

6. El rango de la función $f(x) = 2 + \cos(x)$ es $[1, 3]$

7. El punto $(b, 1)$ está sobre la gráfica de $f(x) = \log_b(x)$

Problema 17 — Calcule $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$, y simplificar.

1. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 5$

2. $f(x) = 1 + 2x - \dfrac{3}{x}$

Funciones como modelo matemático

Problema 18 — Exprese el perímetro p de un cuadrado como una función de su área A.
Solución: $p(A) = 4\sqrt{A}$

Problema 19 — Exprese el área A de un círculo como una función de su diámetro d.
Solución: $A(d) = \pi\frac{d^2}{4}$

Problema 20 — Exprese el área A de un círculo como una función de su perímetro p.
Solución: $A(p) = \frac{p^2}{4\pi}$

Problema 21 — Exprese el diámetro d de un círculo como una función de su perímetro p.
Solución: $d(p) = \frac{p}{\pi}$

Problema 22 — Exprese el área A de un triángulo equilátero como una función de su altura h.
Solución: $A(h) = \frac{\sqrt{3}}{3}h^2$

Problema 23 — Exprese el área A de un triángulo equilátero como una función de la longitud s de uno de sus lados.
Solución: $A(s) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

Problema 24 — Un rectángulo tiene dos vértices sobre el eje x y dos vértices sobre el semicírculo cuya ecuación es $y = \sqrt{25 - x^2}$. Exprese el área A del rectángulo como una función.
Solución: $A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}$, donde $x \in (0, 5)$.

Problema 25 — Exprese la distancia d de un punto (x, y) en el primer cuadrante sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ hasta el punto $(2, 4)$ como una función de x.
Solución: $d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{1-x^2} - 4)^2}$, donde $x \in (0, 1)$

Problema 26 — Un alambre de 12m de largo se corta en dos pedazos. Con uno de ellos se forma una circunferencia y con el otro un cuadrado. Expresar el área encerrada por estas dos figuras como una función del radio r de la circunferencia.
Solución: $A(r) = \pi r^2 + \frac{(2-\pi r)^2}{4}$, $r \in (0, \frac{2}{\pi})$

Problema 27 — Exprese el volumen V de un cubo como una función de área A de su base.
Solución: $V(A) = A\sqrt{A}$

Problema 28 — Un fabricante de cajas de cartón, desea elaborar cajas abiertas a partir de piezas de cartón rectangulares de 10 pulgadas por 17 pulgadas, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando hacia arriba los lados. Encuentre un modelo matemático que exprese el volumen de la caja como una función de la longitud del lado de los cuadrados que se cortarán.
Solución: $V(x) = x(17-2x)(10-2x)\ x \in (0,5)$.

Problema 29 — Un envase cerrado de hojalata, cuyo volumen es de 60 $pulg^3$, tiene la forma de un cilindro circular recto. Determine un modelo matemático que exprese el área de la superficie total del envase como una función del radio de la base.
Solución: $S(r) = \frac{120}{r} + 2\pi r^2$, $r > 0$.

Problema 30 — La suma de dos números no negativos es 5. Exprese el producto de uno y el cuadrado del otro como una función de uno de los números.
Solución: $f(x) = x(5-x)^2$

Problema 31 — El producto de dos números positivos es 50. Exprese su suma como una función de uno de los números.
Solución: $f(x) = x + \frac{50}{x}$

Problema 32 — Un árbol se planta a 30 pies de la base un poste que mide 25 pies de altura. Exprese la longitud de la sombra s del árbol como función de su altura h.
Solución: $s(h) = \frac{30h}{25-h}$, $h \in (0,25)$

Problema 33 — Considere un piscina que mide 3 pies de profundidad en la parte poco profunda, 8 pies en la profunda, 40 pies de largo, 30 pies de ancho y el fondo es un plano inclinado. La piscina se bombea agua. Exprese el volumen del agua en la piscina como una función de la altura h del agua.

Solución: $V(h) = \begin{cases} 120h^2, & \text{si } 0 < h < 5, \\ 3000 + 1200(h-5), & \text{si } 5 \leqslant h \leqslant 8. \end{cases}$

Cálculo 10. Semestre B-2015

Prof. José Prieto

Correo: prieto@ula.ve

4. Límites y Continuidad

Problema 1 — Resolver los siguientes límites.

1. $$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+17x+4}{5x^2-3x+10} = \frac{25}{12}$$

2. $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15} = -\frac{1}{2}$$

3. $$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{3x^2+3x-6} = -\frac{16}{9}$$

4. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \frac{1}{2}$$

5. $$\lim_{x\to -1} \frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1} = \frac{1}{3}$$

6. $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16} = \frac{1}{4}$$

7. $$\lim_{x\to 1} \frac{-x^3+2x^2+5x-6}{x^3+4x^2-x-4} = \frac{3}{5}$$

8. $$\lim_{x\to -1} \frac{x^4+3x^3+5x^2+9x+6}{x^4+3x^2-4} = -\frac{2}{5}$$

9. $$\lim_{x\to -2} \frac{x^5+2x^4-9x-18}{x^5+3x^4-16x-48} = -\frac{7}{32}$$

10. $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5} = 10$$

11. $$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

12. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} = \frac{49}{24}$$

Problema 2 — Resolver los siguientes límites.

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$$

2. $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \frac{1}{2}$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x} = -2$$

4. $$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} = -\frac{1}{16}$$

5. $$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \frac{4}{3}$$

6. $$\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = -\frac{1}{3}$$

7. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x} = \frac{1}{4}$$

8. $$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} = \frac{1}{144}$$

9. $$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = 3$$

10. $$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4} = \frac{1}{4}$$

11. $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{x-1} = \frac{13}{12}$$

12. $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{5x-2}-\sqrt[3]{x+6}}{x^2-4} = \frac{1}{12}$$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}} = \dfrac{3}{2}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+8}-\sqrt{x^2+4}}{x^2} = -\dfrac{1}{4}$

15. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} = \dfrac{112}{27}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x/3}-\sqrt[4]{1+x/4}}{1-\sqrt{1-x/2}} = \dfrac{7}{36}$

17. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+13}}{x-1} = \dfrac{19}{24}$

18. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}$

Problema 3 — Resolver los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = 5$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)-\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(x)} = 2$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg}(3x)} = \dfrac{1}{3}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x} = 1$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x-\operatorname{sen}(2x)}{2x+3\operatorname{sen}(4x)} = \dfrac{2}{7}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}^3(x)} = \dfrac{1}{2}$

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x-1)}{x^2-2x+1} = 1$

10. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x-\pi} = -1$

11. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\operatorname{ctg}(2x)} = \dfrac{1}{2}$

12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \dfrac{2}{\pi}$

13. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

14. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg}^3(x)-3\operatorname{tg}(x)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = -24$

15. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\operatorname{sen}^2(x)+\operatorname{sen}(x)-1}{2\operatorname{sen}^2(x)-3\operatorname{sen}(x)+1} = -3$

16. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\operatorname{ctg}^3(x)}{2-\operatorname{ctg}(x)-\operatorname{ctg}^3(x)} = \dfrac{3}{4}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)\cos(2x)-1}{x} = 0$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)\cos(2x)\cos(3x)}{1-\cos(x)} = 14$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}}{x^3} = \dfrac{1}{4}$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\operatorname{sen}(x)}-\sqrt{\cos(x)}} = \dfrac{4}{3}$

21. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(a)}{x-a} = \cos(a)$

22. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a} = -\operatorname{sen}(a)$

23. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{tg}(a)}{x-a} = \sec^2(a)$

24. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{ctg}(x)-\operatorname{ctg}(a)}{x-a} = -csc^2(a)$

25. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sec(x)-\sec(a)}{x-a} = \sec(a)\operatorname{tg}(a)$

26. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\csc(x)-\csc(a)}{x-a} = -\csc(a)\operatorname{ctg}(a)$

Problema 4 — Resolver los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3x+5}{3x^2-2x+1} = \dfrac{2}{3}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+2x^2+2} = \dfrac{1}{4}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+7x-5}{x^3+2x+1} = 0$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+2} - \dfrac{x^2}{x+2}\right) = 2$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+11)^{50}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}} = 2$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+7} = 1$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+7} = -1$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt[3]{x^2+3}} = 0$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+2}}}}{\sqrt{x+2}} = 1$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x} = -1$

Problema 5 — Resolver los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x) = 1$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+9}) = \dfrac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-5x+6}-x) = -\dfrac{5}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-2x+4}+x) = 1$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x) = \dfrac{a+b}{2}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}$

Problema 6 — Resolver los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x+2}{x^2-4} = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{5x^3+1}{2-x-x^2} = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2-4x^3}{5x^2+3x^3} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{x^3+9x^2+20x}{x^2+x-12} = -\infty$
5. $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{3x^2-7x+6}{x^2-x-6} = -\infty$
6. $\lim\limits_{x\to4^-} \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-4} = -\infty$
7. $\lim\limits_{x\to4^-} \dfrac{[\![x]\!]-4}{x-4} = +\infty$
8. $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{[\![x]\!]-x}{3-x} = -\infty$
9. $\lim\limits_{x\to1^+} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x^2-2x-1}\right) = -\infty$
10. $\lim\limits_{x\to1^-} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x^2-2x-1}\right) = +\infty$
11. $\lim\limits_{x\to2^+} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3}{x^2-4}\right) = +\infty$
12. $\lim\limits_{x\to2^-} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3}{x^2-4}\right) = -\infty$

Problema 7 — Determinar los valores de x para los cuales la función es discontinua y construir la gráfica.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$
2. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$
3. $f(x) = \dfrac{2x - |x|}{3x + |x|}$
4. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{|x^2 - 4|}$

Problema 8 — Determinar los puntos de discontinuidades de las siguientes funciones. Además, clasifique cada punto de discontinuidad.

1. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}, & \text{si } x \neq -3, \\ 1, & \text{si } x = -3 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - 2x}, & \text{si } x \neq 0,\ x \neq 2, \\ 3, & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}, & \text{si } x \neq -2, \\ 5, & \text{si } x = -2 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x)}{x \operatorname{sen}(x)}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{tg}(2x)}{1 - \cos(x)}, & \text{si } x \neq 0, \\ 4, & \text{si } x = 0 \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} + e^x - 6}{e^x - 2}, & \text{si } x \neq 0, \\ 2, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Problema 9 — Determinar los puntos de discontinuidades de las siguientes funciones. Además, clasifique cada punto de discontinuidad.

1. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
2. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)(x - 2)}{x(x^2 + 4x - 12)}$
3. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^4 - x^2 - 12}$
4. $f(x) = \dfrac{[\![x]\!] - 1}{x - 1}$
5. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x - 1}$
6. $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^x - 4}{e^x - 1}$
7. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} - 4}$
8. $f(x) = \dfrac{\ln^2(x) - 2\ln(x) + 1}{\ln(x^2) - 2}$
9. $f(x) = \dfrac{\ln^2(x) + 2\ln(x)}{\ln^2(x) - 4}$
10. $f(x) = \dfrac{4e^{2x} - 2e^{2x} - 2}{(2e^{2x} - 2)x}$

Problema 10 — Determinar el valor de a para que la función f sea continua.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{si } x \neq 2 \\ a, & \text{si } x = 2 \end{cases}$ Solución: $a = 4$

2. $f(x) = \begin{cases} -ax^2, & \text{si } x < 4 \\ -6x+16, & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$ Solución: $a = \dfrac{1}{2}$

3. $f(x) = \begin{cases} -ax^2, & \text{si } x \leqslant 2 \\ 3, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ Solución: $a = -\dfrac{3}{4}$

Problema 11 — Hallar a y b para que las funciones dadas sean continuas en sus dominios.

1. $f(x) = \begin{cases} 3x+6a, & \text{si } x < -3 \\ 3ax-7b, & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ x-12b, & \text{si } 3 < x \end{cases}$ Solución: $a = 2$, $b = -3$

2. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \leqslant 3 \\ ax+b, & \text{si } 3 < x < 5 \\ x^2+2, & \text{si } 5 \leqslant x \end{cases}$ Solución: $a = 10$, $b = -23$

3. $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < -1 \\ ax+b, & \text{si } -1 \leqslant x < 3 \\ 2, & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ Solución: $a = 1$, $b = -1$

4. $f(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen}^2(x), & \text{si } x < \frac{\pi}{4} \\ ax+b, & \text{si } \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \\ \cos^2(x), & \text{si } x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$ Solución: $a = \dfrac{9}{\pi}$, $b = -\dfrac{11}{4}$

5. $f(x) = \begin{cases} -2\operatorname{sen}(x), & \text{si } x \leqslant -\frac{\pi}{2} \\ a\operatorname{sen}(x)+b, & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos^2(x), & \text{si } x \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$ Solución: $a = -1$, $b = 1$

Problema 12 — Determine si la función dada satisface las hipótesis del **Teorema de Bolzano** sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, encuentre todos los valores de c que satisfacen la conclusión del teorema. Si no se puede aplicar, explicar por qué no.

(a) $f(x) = x^2 + x - 12,\ [0, 5]$

(b) $f(x) = x^2 - 6x + 8,\ [0, 3]$

(c) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 6,\ [0, 3]$

(d) $f(x) = \frac{x^2+x}{x-1} - 6,\ [\frac{5}{2}, 4]$

(e) $f(x) = |3x - 8| - 4,\ [2, 5]$

(f) $f(x) = |x - 2| - |3 - 2x|,\ \left[\frac{1}{2}, 5\right]$

(g) $f(x) = |x^2 - 1| - 3,\ [0, 5]$

(h) $f(x) = |x^3 + x| - 2|x|,\ \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

(i) $f(x) = ||x^2 - 1| - x| - x,\ [-2, 2]$

(j) $f(x) = -4\cos^2(x) + 3,\ [0, \frac{\pi}{2}]$

Problema 13 — Determine si la función dada satisface las hipótesis del **Teorema de Bolzano** sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, encuentre todos los valores de c que satisfacen la conclusión del teorema. Si no se puede aplicar, explicar por qué no.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } x \leqslant 0, \\ x^2, & \text{si } x > 0. \end{cases}$ en $[-1, 1]$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x, & \text{si } x \leqslant 1, \\ x^2 + 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$ en $[0, 2]$

Cálculo 10. Semestre B-2015

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

5. La Derivada

Problema 1 — Para cada una de las siguientes funciones, hallar la derivada de la función en el punto a indicado, aplicando la definición.

1. $f(x) = 2$, en $a = 1$.
2. $f(x) = -3x + 5$, en $a = 3$.
3. $f(x) = 3x^2$, en $a = 2$.
4. $f(x) = (x + 1)^2$, en $a = 2$.
5. $f(x) = \frac{2}{x+1}$, en $a = 3$.
6. $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$, en $a = 1$.
7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, en $a = 4$.
8. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, en $a = 4$.

Problema 2 — Para cada una de las siguientes funciones hallar la función derivada, aplicando la definición.

1. $f(x) = 2$
2. $f(x) = x$
3. $f(x) = 2x + 5$
4. $f(x) = 2x^2 - 5$
5. $f(x) = 3x^2 - 5$
6. $f(x) = x^3 + 2$
7. $f(x) = x^3 - x$
8. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$
9. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Problema 3 — Para cada uno de los siguientes ejercicios, hallar $f'(x)$, $f''(x)$ y $f^{(3)}(x)$, aplicando la tabla.

1. $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$
2. $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - \frac{1}{2}x^4$
3. $f(x) = ax^2 + bx + c$
4. $f(x) = ax^m + bx^{m+n}$, $m > 2$, $n > 0$
5. $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln(2)$
6. $f(x) = 3x^{2/3} - 2x^{5/2} + x^{-3}$
7. $f(x) = 5\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x)$
8. $f(x) = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{ctg}(x)$
9. $f(t) = 2t\operatorname{sen}(t) - (t^2 - 2)\cos(t)$
10. $f(z) = \operatorname{arc\,tg}(z) + \operatorname{arcctg}(z)$
11. $f(x) = x\operatorname{ctg}(x)$
12. $f(x) = x \operatorname{arc\,sen}(x)$
13. $f(x) = (1 + x^2)\operatorname{arc\,tg}(x) - x^2$
14. $f(x) = 10^x + e^x$
15. $f(x) = 2^x e^x$
16. $f(x) = xe^x$
17. $f(x) = (x^2 + \ln(x))e^x$
18. $f(x) = \ln(x)\log(x) - \ln(a)\log_a(x)$
19. $f(x) = (10^x + e^x)(\log(x) + \ln(x))$
20. $f(x) = x^{2/3} + 10^x + \ln(x)$

Problema 4 — Para cada uno de los siguientes ejercicios, hallar la función derivada, aplicando la tabla.

1. $f(x) = \dfrac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

2. $f(x) = \dfrac{2^x + \csc(x) - \sqrt[3]{x}}{\ln(x) + \operatorname{tg}(x)}$

3. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{2}{x\sqrt[3]{x}}$

4. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$

5. $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

6. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}$

7. $f(x) = \dfrac{x^{2/3} + x^5 + 6x}{\sin(x) + \ln(x)}$

8. $f(x) = \dfrac{x^3 + \cos(x)}{\ln(x) + \sqrt{x}}$

9. $f(x) = \dfrac{2^x + e^x}{\log(x) + \operatorname{arc\,tg}(x)}$

10. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{sen}(x)}{x + x^3}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$

12. $f(x) = \dfrac{5}{e^x + x}$

Problema 5 — Para cada uno de los siguientes ejercicios hallar la función derivada.

1. $f(x) = (x^2 - 3x + 5)^3$

2. $f(x) = (3x + 1)^5$

3. $f(x) = (3x^3 - x)^{-3}$

4. $f(x) = (\sin(x) + e^x + \ln(x))^5$

5. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 1}\,\sqrt[3]{2x + 1}$

6. $f(x) = e^{x\ln(x)}$

7. $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$

8. $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(3x)}$

9. $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{sen}(x^2))$

10. $f(x) = sen^3(x^2 + x)\cos^5(x)$

11. $f(x) = \operatorname{tg}(5^x) + \operatorname{arc\,sen}^2(x + \ln(x))$

12. $f(x) = \ln(\cos(\log(x)))$

Problema 6 — Para cada uno de los siguientes ejercicios hallar la función derivada.

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + x}{3x - 4}}$

2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen}(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)}}$

3. $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg}(x)}{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2(x)}}$

4. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{\sec(x)}}$

5. $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 + x}}{1 + \sqrt{1 + x}}$

6. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{\operatorname{arccsc}(x)}{1 + x^2}}$

7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}\right)$

8. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 2}}\right)$

Problema 7 — Dada la función $f(x) = x^3 + x^2$.

1. Hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $x = 1$.

2. Hallar la recta tangente al gráfico de f en el punto donde $x = 1$.

3. Hallar la recta normal al gráfico de f en el punto donde $x = 1$.

Solución: $m = 5$; recta tangente: $y - 2 = 5(x - 1)$; recta normal: $y - 2 = -\frac{1}{5}(x - 1)$.

Problema 8 — Dada la función $f(x) = \sqrt{x - 3}$.

1. Hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $x = 12$.

2. Hallar la recta tangente al gráfico de f en el punto donde $x = 12$.

3. Hallar la recta normal al gráfico de f en el punto donde $x = 12$.

Solución: $m = \frac{1}{6}$; recta tangente: $y - 3 = \frac{1}{6}(x - 12)$; recta normal: $y - 3 = -6(x - 12)$.

Problema 9 — Para cada una de las siguientes funciones, encuentre uno o varios puntos sobre la gráfica de la función, donde la recta tangente es horizontal.

1. $f(x) = x^2 + 8x + 10$
Solución: $(-4, -6)$.

2. $f(x) = x^3 - 3x$
Solución: $(-1, 2)$ y $(1, -2)$.

3. $f(x) = x(x - 5)$
Solución: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right)$.

4. $f(x) = x^3 - x^2 + 1$
Solución: $(0, 1)$ y $\left(\frac{2}{3}, \frac{23}{27}\right)$.

Problema 10 — Para cada una de las siguientes funciones, encuentre uno o varios puntos sobre la gráfica de la función, donde la recta tangente es paralela a la recta dada.

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$; $3x - y = 1$.
Solución: $\left(3, \frac{7}{2}\right)$.

2. $f(x) = x^2 - x$; $-2x + y = 0$.
Solución: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

3. $f(x) = -x^3 + 4$; $-12x + y = 4$.
Solución: $(-2, 12)$ y $(2, -4)$.

4. $f(x) = -6\sqrt{x} + 2$; $-x + y = 2$.
Solución: $(9, -16)$.

Problema 11 — Para cada uno de los siguientes ejercicios, derivando implícitamente, hallar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$.

1. $y^2 - 2y = x$

2. $4x^2 + y^2 = 8$

3. $xy^2 - x^2 + 4$

4. $(y - 1)^2 = 4(x + 2)$

5. $3y + \cos(y) = x^2$

6. $xy = \operatorname{sen}(x + y)$

7. $x + y = \cos(xy)$

8. $x \operatorname{sen}(y) - y \cos(x) = 1$

Problema 12 — Utilizando la técnica de la derivación logarítmica hallar la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = y = x^{x^3}$
2. $f(x) = y = x^{\sqrt{x}}$, $x > 0$
3. $f(x) = y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
4. $f(x) = y = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen}(x)}$
5. $f(x) = y = (\operatorname{sen}(x))^{\cos(x)}$
6. $f(x) = y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2 - 1)}{(x + 1)^2}}$

Problema 13 — Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^{x+2}$ en $x = 1$.

Problema 14 — Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x(\ln(x))^x$ en $x = e$.

Problema 15 — Dada la función $y = x^3 + x$ que es una función inyectiva, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función inversa en $x = 1$.

Problema 16 — Encuentre una ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ que sea perpendicular a la recta $y = -3x$.

Problema 17 — Si $f(x) = \frac{x+1}{x}$, ¿cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f'' en $x = 2$?.

Problema 18 — Hallar dy.

1. $f(x) = y = e^{-3x^2}$
2. $f(x) = y = \sqrt{1 - x^2}$
3. $f(x) = y = \operatorname{arc\,tg}(x)$
4. $f(x) = x^2 + y^2 = 25$

Problema 19 — Hallar un valor aproximado de la expresión indicada.

1. $\sqrt{80}$
2. $\sqrt[4]{82}$
3. $\sqrt[3]{218}$
4. $\sqrt{1 + \sqrt[3]{8{,}2}}$
5. $\ln(1{,}07)$
6. $\cos^4\left(\dfrac{\pi}{4} + 0{,}01\right)$

Problema 20 — Resolver los siguientes problemas de razón de cambio.

1. Considere un triángulo rectángulo de catetos a y b. Si el cateto a decrece a razón de 0.5 cm/seg y el cateto b crece a razón de 2 cm/seg, determine la variación del área del triángulo cuando a mide 16 cm y b mide 12 cm.

   Solución: El área aumenta a una velocidad de 13 cm^2/seg.

2. En un instante dado la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo es de 10 pies y está aumentando a razón de $1pie/min$, y el otro cateto es de 12 pies y está disminuyendo a razón de $2pies/min$. Hallar la razón de cambio respecto al tiempo del ángulo agudo opuesto al cateto que en ese instante mide 12 pies.

   Solución: El ángulo decrece a razón de $\frac{8}{61}$ rad/seg

3. La altura de un triángulo disminuye a razón de 2 cm/min mientras que el área del mismo disminuye a razón de 3 cm^2/min. ¿A qué ritmo cambia la base del triángulo cuando la altura es igual a 20 cm y el área es de 150 cm^2?

   Solución: La base del triángulo aumenta a razón de $\frac{6}{5}$ cm/min.

4. Dos lados paralelos de un rectángulo se alargan a razón de 2 cm/seg, mientras que los otros dos lados se acortan de tal manera que la figura permanece como rectángulo de área constante igual a 50 cm^2. ¿Cuál es la variación del lado que se acorta y la del perímetro cuando la longitud del lado que aumenta es de 5 cm?

Solución: El lado y el perímetro disminuyen, ambos, a razón de 4 cm/seg.

5. Una luz está en el suelo a 45 metros de un edificio. Un hombre de 2 metros de estatura camina desde la luz hacia el edificio a razón constante de 2 metros por segundos. ¿A qué velocidad está disminuyendo su sombra sobre el edificio en el instante que el hombre está a 25 metros del edificio?

Solución: La sombra del hombre disminuye a una velocidad de $\frac{9}{20}$ m/seg.

6. Una mujer, en un muelle, tira de un bote a razón de 15 metros por minutos sirviéndose de una soga amarrada al bote al nivel del agua. Si las manos de la mujer se hallan a 4.8 metros por arriba del nivel del agua, ¿con qué rapidez el bote se aproxima al muelle cuando la cantidad de cuerda suelta es de 6 metros?

Solución: El bote se aproxima al muelle con una velocidad de 25 m/min.

7. Una mujer, de pies en un acantilado, observa con un telescopio un bote de motor, cuando el bote se aproxima a la playa que está directamente abajo de ella. Si el telescopio está 250 pies arriba del nivel del agua y si el bote se acerca a 20 pies por segundo, ¿con qué rapidez cambia el ángulo del telescopio con respecto al bote cuando éste se encuentre a 250 pies de la playa?

Solución: El ángulo disminuye a razón de $\frac{1}{25}$ radianes por minuto.

8. Una escalera de 4 metros se apoya contra una casa y su base comienza a resbalar. Cuando la base está a 3.7 metros de la casa, la base se aleja a razón de 1.5 m/seg.

(a) ¿Cuál es la razón de cambio de la distancia entre el suelo y la parte superior de la escalera sobre el muro en ese instante?

Solución: La distancia entre el suelo y la parte superior de la escalera disminuye a razón de $\frac{37\sqrt{231}}{154} m/seg \approx 3{,}65 m/seg$.

(b) ¿Cuál es la razón de cambio del área del triángulo formado por la escalera, la pared y el suelo en ese instante?

Solución: El área del triángulo decrece a una velocidad de $\frac{569\sqrt{231}}{1540} m^2/seg$.

(c) ¿Cuál es la razón de cambio del ángulo entre la escalera y el suelo en ese instante.?

Solución: El ángulo decrece a razón de $\frac{5\sqrt{231}}{77} rad/seg$.

9. Un globo despega a 500 metros de un observador y se eleva verticalmente a la velocidad de 140 metros por minuto. ¿Con qué velocidad está creciendo el ángulo de inclinación de la visual del observador en el instante en el cual el globo está exactamente a 500 metros del suelo?

Solución: El ángulo de inclinación esta creciendo a razón de $\frac{7}{50}$ radianes por minuto.

10. Las arista de un cubo variable aumentan a razón de 3 centímetros por segundo. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen del cubo cuando una arista tiene 10 centímetros de longitud?

Solución: El volumen del cubo aumenta 900 cm^3/min.

11. Considere un depósito de agua en forma de cono invertido. Cuando el depósito se descarga, su volumen disminuye a razón de $50\pi\ m^3/min$. Si la altura del cono es el triple del radio de su parte superior, ¿con qué rapidez varía el nivel del agua cuando está a 5 m del fondo del depósito?

Solución: El nivel del agua disminuye a razón de 18 m/min.

12. Un globo esférico se está expandiendo. Si su radio crece a razón de 2 centímetro por minutos, ¿con qué rapidez crece el volumen cuándo el radio es de 5 centímetros?

Solución: El volumen crece a razón de $200\pi\ cm^3/min$.

13. Un globo está siendo inflado en forma que su volumen aumente a razón de $5m^3/seg$. ¿A qué rapidez aumenta el diámetro cuando éste tiene $12m$?

Solución: El diámetro aumenta a razón de $\frac{5}{72\pi}\ m/seg$.

14. Un automóvil que se desplaza a razón de 30 $pies/seg$, se aproxima a un cruce. Cuando el auto está a 120 pies de la intersección, un camión que viaja a razón de 40 $pies/seg$, cruza la intersección. El auto y el camión se encuentran en carreteras que forman un ángulo recto entre sí. ¿Con qué rapidez se separan 2 seg después que el camión pasa dicho cruce?

Solución: El automóvil y el camión se separan con una rapidez de 14 $pies/seg$.

15. Un automóvil que se desplaza a razón de 9 m/seg, se aproxima a un cruce. Cuando el auto está a 36 metros de la intersección, un camión que viaja a razón de 12 m/seg, cruza la intersección. El auto y el camión se encuentran en carreteras que forman un ángulo recto entre sí. ¿Con qué rapidez se separan 2 seg después que el camión pasa dicho cruce?

Solución: El automóvil y el camión se separan con una rapidez de $\frac{21}{5}\ m/seg$.

16. Un aeroplano vuela hacia el norte a 640 millas por hora y pasa sobre cierto pueblo al mediodía; un segundo aeroplano que va hacia el este a 600 millas por hora está directamente encima del mismo pueblo 15 minutos más tarde. Si los aeroplanos vuelan a la misma altitud, ¿con que rapidez se separan a la $1:15 P.M.$?

Solución: Se separan con una rapidez de 872 millas por hora.