Cálculo 20. Semestre B-2015

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

4. Curvas paramétricas y Coordenadas Polares

Problema 1 — Trazar la curva que representa cada par de ecuaciones paramétricas, indicando su orientación de la curva. Además, elimine el parámetro y dar la ecuación rectangular correspondiente que tenga la misma gráfica.

1. $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$, $t \in [-1, 5]$.

   Sol: $y = 2x + 1$, $x \in [-2, 4]$

2. $\begin{cases} x = 3t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$, $t \in [-2, 3]$.

   Sol: $y = \frac{x^2}{9} - 1$, $x \in [-6, 9]$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 5 - t \end{cases}$, $t \in [0, \infty)$.

   Sol: $y = 5 - x^2$, $x \in [0, \infty)$

4. $\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t^4 + 1 \end{cases}$, $t \in [0, \infty)$.

   Sol: $y = \frac{x^2}{4} + 1$, $x \in [0, \infty)$

5. $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{3t} \end{cases}$, $t \in [0, \ln(2)]$.

   Sol: $y = x^3$, $x \in [1, 2]$

6. $\begin{cases} x = -e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$, $t \in [0, \infty)$.

   Sol: $y = -\frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, -1]$

7. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^4 + 3t^2 - 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

   Sol: $y = x^2 + 3x - 1$, $x \in [0, \infty)$

8. $\begin{cases} x = t^3 + t + 4 \\ y = -2t^3 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

   Sol: $y = -2x + 8$, $x \in \mathbb{R}$

9. $\begin{cases} x = 3 + 2\operatorname{sen}(t) \\ y = 4 + \operatorname{sen}(t) \end{cases}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

   Sol: $y = \frac{1}{2}(x + 5)$, $x \in [1, 5]$

10. $\begin{cases} x = 4\cos(t) \\ y = 4\operatorname{sen}(t) \end{cases}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

    Sol: $x^2 + y^2 = 16$, $x \in [0, 4]$, $y \in [-4, 4]$

11. $\begin{cases} x = 8\cos(t) \\ y = 8\operatorname{sen}(t) \end{cases}$, $t \in [0, \pi]$.

    Sol: $x^2 + y^2 = 64$, $x \in [-8, 8]$, $y \in [0, 8]$

12. $\begin{cases} x = -\cos(2t) \\ y = \operatorname{sen}(t) \end{cases}$, $t \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

    Sol: $2y^2 = x + 1$, $x \in [-1, 0]$, $y \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

13. $\begin{cases} x = \operatorname{tg}(t) \\ y = \sec(t) \end{cases}$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

    Sol: $y^2 - x^2 = 1$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in [1, \infty)$

14. $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$, $t \in [-2, 2]$.

    Sol: $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - 1$, $x \in [-7, 9]$

15. $\begin{cases} x = 3\cos^2(t) \\ y = 2\operatorname{sen}^2(t) \end{cases}$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

    Sol: $y = 2 - \frac{2}{3}x$, $x \in [0, 3]$

16. $\begin{cases} x = \sec^2(t) \\ y = \operatorname{tg}^2(t) \end{cases}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2})$.

    Sol: $y = x - 1$, $x \in [1, \infty)$

Problema 2 — Hallar la $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ sin eliminar el parámetro. Además, halle la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

1. $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t - 2 \end{cases}, t = 3.$

2. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}, t = 1.$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 3t - 1 \end{cases}, t = 1.$

4. $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}, t = 1.$

5. $\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = t \end{cases}, t = \frac{\pi}{4}.$

6. $\begin{cases} x = 2\sec(t) \\ y = 2\operatorname{tg}(t) \end{cases}, t = -\frac{\pi}{6}.$

7. $\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \operatorname{sen}^3(t) \end{cases}, t = \frac{\pi}{4}.$

8. $\begin{cases} x = t - \operatorname{sen}(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}, t = \pi.$

Problema 3 — Para cada una de las siguientes ecuaciones paramétricas. Hallar los valores del parámetro para los cuales la curva es cóncava hacia arriba. Además, hallar los valores del parámetro para los cuales la curva es cóncava hacia abajo.

1. $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} + 1 \\ y = t^3 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

2. $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = t^2 - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

3. $\begin{cases} x = 2\operatorname{ctg}(t) \\ y = 2\operatorname{sen}^2(t) \end{cases}, t \in (0, \pi).$

Problema 4 — Para cada una de las siguientes ecuaciones paramétricas. Hallar los puntos en la gráfica donde la recta tangente es horizontal. Además, hallar los puntos en la gráfica donde la recta tangente es vertical.

1. $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t^3 - 12t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

2. $\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

3. $\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\operatorname{sen}(2t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$

Problema 5 — Grafique el punto con las coordenadas polares indicadas.

1. $(3, \pi)$

2. $(2, -\frac{\pi}{2})$

3. $(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2})$

4. $(-1, \frac{\pi}{6})$

5. $(-4, -\frac{\pi}{6})$

6. $(\frac{2}{3}, \frac{7\pi}{4})$

7. $(3, \frac{\pi}{4})$

8. $(-2, -\frac{3\pi}{2})$

9. $(2, 3\pi)$

Problema 6 — Para cada uno de los puntos anteriores, encuentre coordenadas polares alternas que satisfagan

1. $r > 0$, $\theta < 0$
2. $r > 0$, $\theta > 2\pi$
3. $r < 0$, $\theta > 0$
4. $r < 0$, $\theta < 0$

Problema 7 — Encuentre las coordenadas polares de los puntos cuyas coordenadas cartesianas son las siguientes.

1. $(-2\sqrt{3}, -2)$
2. $(1, \sqrt{3})$
3. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
4. $(0, -4)$
5. $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$
6. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
7. $(1, -1)$
8. $(-1, 1)$
9. $(2\sqrt{3}, -2)$
10. $(\sqrt{15}, -\sqrt{5})$
11. $(1, -\sqrt{3})$
12. $(-1, -\sqrt{3})$

Problema 8 — Dibuje la región sobre el plano que consiste en los puntos (r, θ) cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones indicadas.

1. $2 \leqslant r < 4$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$
2. $2 < r \leqslant 4$,
3. $0 \leqslant r \leqslant 2$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$
4. $r \geqslant 0$, $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}$
5. $-1 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$
6. $-2 \leqslant r < 4$, $\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \pi$

Problema 9 — Encuentre una ecuación polar que tenga la mis gráfica que la ecuación rectangular dada

1. $y = 5$

   Solución: $r = 5\csc(\theta)$
2. $x + 1 = 0$

   Solución: $r = -\sec(\theta)$
3. $\sqrt{3}y = x$

   Solución: $\theta = \frac{\pi}{6}$
4. $y = \sqrt{3}x$

   Solución: $\theta = \frac{\pi}{3}$
5. $3x + 8y + 6 = 0$

   Solución: $r = \frac{-6}{3\cos(\theta)+8\operatorname{sen}(\theta)}$
6. $y^2 = -4x + 4$

   Solución: $r = \frac{2}{1+\cos(\theta)}$
7. $x^2 - 12y - 36 = 0$

   Solución: $r = \frac{-6}{1+\operatorname{sen}(\theta)}$
8. $x^2 + y^2 = 36$

   Solución: $r = 6$

Problema 10 — Encuentre una ecuación rectangular que tenga la mis gráfica que la ecuación polar dada

1. $r = 2\sec(\theta)$
2. $r\cos(\theta) = -4$
3. $r = 6\operatorname{sen}(2\theta)$
4. $2r = \operatorname{tg}(\theta)$
5. $r^2 = 4\operatorname{sen}(2\theta)$
6. $r^2\cos(2\theta) = 16$

7. $r + 5\,\text{sen}(\theta) = 0$

8. $r = 2 + \cos(\theta)$

Problema 11 — Identifique por nombre la gráfica de la ecuación polar dada. Después trace la gráfica de la ecuación.

1. $r = 6$

2. $r = -1$

3. $\theta = \frac{\pi}{3}$

4. $\theta = \frac{5\pi}{6}$

5. $r = 1 + \cos(\theta)$

6. $r = 5 - 5\,\text{sen}(\theta)$

7. $r = 2 + 2\,\text{sen}(\theta)$

8. $2r = 1 - \cos(\theta)$

9. $r = \text{sen}(2\theta)$

10. $r = 3\,\text{sen}(4\theta)$

11. $r = 3\cos(3\theta)$

12. $r = 2\,\text{sen}(3\theta)$

13. $r = \cos(5\theta)$

14. $r = 2\,\text{sen}(9\theta)$

15. $r = 6\cos(\theta)$

16. $r = -2\cos(\theta)$

17. $r = -3\,\text{sen}(\theta)$

18. $r = 5\,\text{sen}(\theta)$

19. $r^2 = 4\,\text{sen}(2\theta)$

20. $r^2 = 4\cos(2\theta)$

21. $r^2 = -9\,\text{sen}(2\theta)$

Problema 12 — Encuentre los puntos de intersección de las gráficas del par de ecuaciones polares indicadas

1. $r = 2$, $r = 4\,\text{sen}(\theta)$

2. $r = \text{sen}(\theta)$, $r = \text{sen}(2\theta)$

3. $r = 1 - \cos(\theta)$, $r = 1 + \cos(\theta)$

4. $r = 3 - 3\cos(\theta)$, $r = 3\cos(\theta)$

Problema 13 — Encuentre la pendiente de la recta tangente en el valor indicado de θ.

1. $r = \theta$; $\theta = \frac{\pi}{2}$

2. $r = \frac{1}{\theta}$; $\theta = 3$

3. $r = 4 - 2\,\text{sen}(\theta)$; $\theta = \frac{\pi}{3}$

4. $r = 1 - \cos(\theta)$; $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Problema 14 — Determine los puntos sobre la gráfica de la ecuación dada en los cuales la recta tangente es horizontal y los puntos en los que la recta es vertical.

1. $r = 2 + 2\cos(\theta)$

2. $r = 1 - \text{sen}(\theta)$

Problema 15 — Encuentre la ecuación polar de cada recta tangente a la gráfica polar en el origen.

1. $r = -2\,\text{sen}(\theta)$

2. $r = 3\cos(\theta)$

3. $r = 1 + \sqrt{2}\,\text{sen}(\theta)$

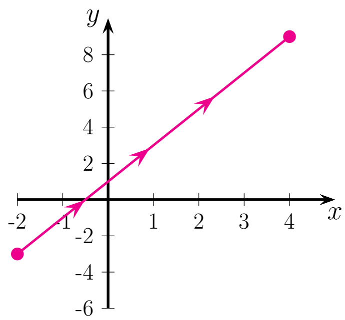
4. $r = 1 - 2\,\text{sen}(\theta)$

5. $r = 2\,\text{sen}(5\theta)$

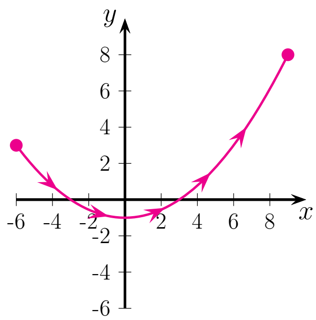
6. $r = 2\,\text{sen}(2\theta)$

Gráfica de los ejercicios del problema 1

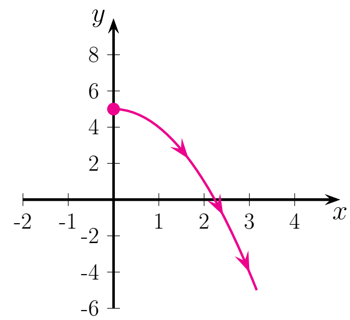
(1)



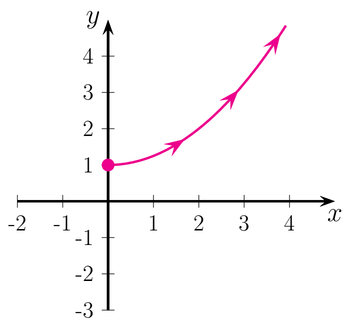
(2)



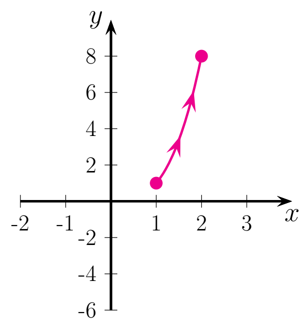
(3)



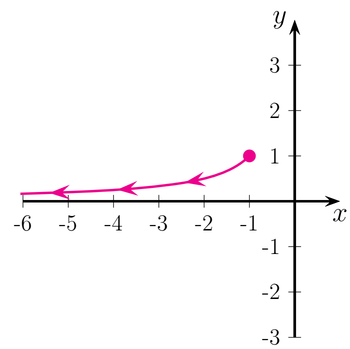
(4)



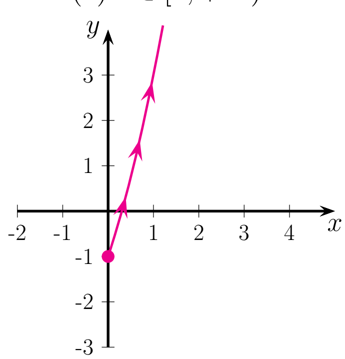
(5)



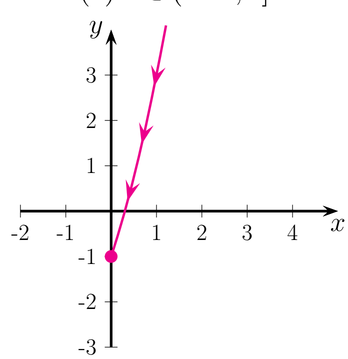
(6)



(7) $t \in [0, +\infty)$



(7) $t \in (-\infty, 0]$



(8)