

Cálculo 30. Semestre A-2016

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

1. Cuádricas y Cilindros. Funciones de Varias Variables

Problema 1 — En los siguientes ejercicios dar un bosquejo de la gráfica de la ecuación indicada.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

3. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$

2. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 16$

4. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 4$

Problema 2 — En los siguientes ejercicios encuentre el centro y el radio de la esfera con ecuación dada.

1. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 4z - 7 = 0$

3. $x^2 + y^2 + z^2 - 16z = 0$

2. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4x - 12z + 9 = 0$

4. $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 0$

Problema 3 — En los siguientes ejercicios encuentre la ecuación canónica de una esfera que satisface las condiciones dadas.

1. Centro $(-1, 4, 6)$; radio $\sqrt{3}$.

3. Centro $(1, 1, 4)$; tangente al plano XY .

Solución: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 6)^2 = 3$

Solución: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 16$

2. Centro $(0, -3, 0)$; diámetro $\frac{5}{2}$.

4. Centro $(5, 2, -2)$; tangente al plano YZ .

Solución: $x^2 + (y + 3)^2 + z^2 = \frac{25}{16}$

Solución: $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 25$

5. Centro sobre el eje Y positivo; radio 2; tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

Solución: $x^2 + (y - 8)^2 + z^2 = 4$

6. Centro sobre la recta $x = 2t, y = 3t, z = 6t, t > 0$, a una distancia de 21 unidades del origen; radio 5.

Solución: $(x - 6)^2 + (y - 9)^2 + (z - 18)^2 = 25$

7. Considere los siguientes planos $6x - 3y - 2z - 35 = 0$ y $6x - 3y - 2z + 63 = 0$, que son tangente a una esfera, sabiendo que el punto $P(5, -1, -1)$ es el punto de contacto de uno de ellos.

Solución: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 49$

8. El radio de la esfera es 3 y es tangente al plano $x + 2y + 2z = -3$ en el punto $P(1, 1, -3)$.

Solución: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9; x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 9$

Problema 4 — Identifique que tipo de superficie representa la ecuación dada, y que traza resulta al intersectar la superficie con los planos dados. Además, dar un bosquejo de la superficie con sus trazas indicadas.

1. Superficie: $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Planos: $x = 0, y = 0, z = 0$
2. Superficie: $12x^2 + 3y^2 = 4z$. Planos: $x = 0, y = 0, z = 0, z = 3$
3. Superficie: $-16x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$. Planos: $x = 0, y = 0, z = -4, z = 4$
4. Superficie: $12x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 12$. Planos: $x = 0, y = 0, z = -3, z = 0, z = 3$
5. Superficie: $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 1$. Planos: $x = 0, y = 0, z = 3, z = -3$
6. Superficie: $3x^2 + 12z^2 = 4y$. Planos: $x = 0, y = 0, y = 3, z = 0$
7. Superficie: $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$. Planos: $x = 0, y = 0, z = 0$
8. Superficie: $16x^2 - y^2 + 16z^2 = 0$. Planos: $x = 0, y = -4, y = 4, z = 0$
9. Superficie: $y^2 - 2x^2 - 2z^2 = 1$. Planos: $x = 0, y = 3, y = -3, z = 0$
10. Superficie: $y^2 + z^2 = x$. Planos: $x = 0, x = 4, y = 0, z = 0$
11. Superficie: $144x^2 + 64z^2 - 27y^2 = 144$ Planos: $x = 0, y = -4, y = 0, y = 4, z = 0$
12. Superficie: $4x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 4z + 8 = 0$. Planos: $x = 1, y = 2, z = 2$
13. Superficie: $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 - 144x - 96y - 72z + 288 = 0$ Planos: $x = 2, y = 3, z = 4$
14. Superficie: $4x^2 + y^2 - 24x - 6y - z + 45 = 0$. Planos: $x = 1, y = 2, z = 0, z = 4$
15. Superficie: $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y - 9z + 72 = 0$. Planos: $x = 2, y = 3, z = 0, z = 4$
16. Superficie: $-16x^2 - 4y^2 + z^2 + 128x - 256 = 0$. Planos: $x = 4, y = 0, z = -4, z = 4$
17. Superficie: $-36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36y - 36 = 0$. Planos: $x = 0, y = 2, z = -3, z = 3$
18. Superficie: $-36x^2 + 36y^2 - 9z^2 + 288x - 576 = 0$. Planos: $x = 4, y = -3, y = 3, z = 0$

Problema 5 — Dar un bosquejo de la gráfica de la ecuación indicada en el espacio bidimensional y tridimensional para cada uno de los siguientes ejercicios

- | | | |
|-------------------|----------------------|-----------------------------|
| 1. $x + y = 2$ | 6. $y^2 - z - 1 = 0$ | 11. $y^2 - z^2 = 16$ |
| 2. $3z + 2y = 6$ | 7. $x^2 + y^2 = 4$ | 12. $xy = 1$ |
| 3. $x^2 - y = 0$ | 8. $x^2 + 4z^2 = 16$ | 13. $y = \sqrt[3]{x}$ |
| 4. $x - 4y^2 = 0$ | 9. $4x^2 + y^2 = 36$ | 14. $z - \text{sen}(y) = 0$ |
| 5. $y^2 + z = 6$ | 10. $z - e^y = 0$ | 15. $z - \sqrt{y} = 0$ |

Problema 6 — Dar un bosquejo de la gráfica en el plano para cada uno de los conjuntos dados:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 3\}$
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 1 \geq y\}$
3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$
4. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2\}$
5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \sqrt{x}\}$
6. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$
7. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$
8. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$
9. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 9\}$
10. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 - 9x^2 \geq 36\}$
11. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \ln(y) > 4\}$
12. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + e^y > 4\}$

Problema 7 — Dar un bosquejo de la gráfica en el plano para cada uno de los conjuntos dados:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x < 4, 2 < y \leq 5\}$
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 3, x + y > -3\}$
3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \leq 3, x + y < -3\}$
4. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < 2 - x\}$
5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$
6. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0, y \geq x^2\}$

Problema 8 — Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 + xy^3$. Hallar:

1. $f(0, 0)$
2. $f(-1, 1)$
3. $f(2, 3)$
4. $f(1, -2)$
5. $f(1 + h, 0)$
6. $f(1 + h, 1)$
7. $f(1, 1 - h)$
8. $f(2, 2 - h)$

Problema 9 — Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 + y^2$.

1. Halle: $f(1, 0)$, $f(0, 1)$ y $f(1, 1)$.
2. ¿Cuáles puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ son tales que $f(x, y) = 0$?
3. ¿Cuáles puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ son tales que $f(x, y) = 4$?
4. ¿Cual es la imagen o las imágenes de la función f en los puntos (x, y) del círculo $x^2 + y^2 = 1$?

Problema 10 — Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x + y$.

1. Halle: $f(2, 3)$, $f(x, 1)$, $f(1, y)$ y $f(x^{-1}, y^{-1})$
2. ¿Cuáles puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ son tales que $f(x, y) = 3$?
3. ¿Cual es la imagen o las imágenes de la función f en los puntos (x, y) de la recta $y = x$?
4. ¿Cual es la imagen o las imágenes de la función f en los puntos (x, y) de la recta $y = -x$?

Problema 11 — Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 5y^2$, calcular:

1. $f(1, 0)$, $f(0, 1)$, $f(-2, 1)$, $f(1 + h, 0)$, $f(0, 1 - k)$, $f(x, x)$ y $f(-y, y)$.
2. Simplificar para $h \neq 0$ la expresión $\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$
3. Simplificar para $k \neq 0$ la expresión $\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$

Problema 12 — Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. ¿Cuáles puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ son tales que $f(x, y) = 0$?
2. Simplificar para $h \neq 0$ la expresión $\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$
3. Simplificar para $k \neq 0$ la expresión $\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$

Problema 13 — Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. ¿Cuáles puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ son tales que $f(x, y) = 0$?
2. Simplificar para $h \neq 0$ la expresión $\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$
3. Simplificar para $k \neq 0$ la expresión $\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$

Problema 14 — Describa las curvas de nivel de las funciones indicadas. Realice una gráfica mostrando algunas de estas curvas.

- | | |
|----------------------------|---|
| 1. $f(x, y) = x - y$ | 7. $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ |
| 2. $f(x, y) = x - y $ | 8. $f(x, y) = xy$ |
| 3. $f(x, y) = x - y $ | 9. $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ |
| 4. $f(x, y) = \sqrt{xy}$ | 10. $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x + y^2}$ |
| 5. $f(x, y) = \frac{x}{y}$ | 11. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$ |
| 6. $f(x, y) = x - y + 2$ | 12. $f(x, y) = \ln(y - x^2)$ |

Problema 15 — Para cada una de las siguientes funciones dibujar la curva de nivel $f(x, y) = k$, para el valor de k indicado.

$$1. f(x, y) = \begin{cases} x^3, & \text{si } y \geq 0, \\ y^2 - x^2, & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

$k = 0, k = 1, k = 4.$

$$2. f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{si } x \geq 0, \\ y^2 - x^2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$k = 0, k = 1, k = 4.$

$$3. f(x, y) = \begin{cases} y + |x|, & \text{si } x \geq 0, \\ |x| - y, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$k = 1, k = 2, k = 3, k = 4.$

$$4. f(x, y) = \begin{cases} y + |x|, & \text{si } y \geq 0, \\ |x| - y, & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

$k = 1, k = 2, k = 3, k = 4.$

Problema 16 — Describa las superficie de nivel de las funciones indicadas.

$$1. f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 9z^2$$

$$2. f(x, y, z) = x^2 + y^2$$

$$3. f(x, y, z) = x - z^2$$

$$4. f(x, y, z) = \sqrt{4x^2 + 4y^2 - z}$$

$$5. f(x, y, z) = \sqrt{9x^2 + 4y^2} + 6z$$

$$6. f(x, y, z) = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

Problema 17 — Hallar el dominio natural de la función $z = f(x, y)$ dada y haga un esquema en el que se represente este dominio en el plano XY .

$$1. f(x, y) = \sqrt{xy}$$

$$2. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$3. f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$4. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$5. f(x, y) = \sqrt{x}\sqrt{y}$$

$$6. f(x, y) = \sqrt{x + \sqrt{y}}$$

$$7. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$8. f(x, y) = \ln(1 + 2x^2 + 4y^2)$$

$$9. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\ln(1+2x^2+4y^2)}}$$

$$10. f(x, y) = \sqrt{\ln(1 + y + x)}$$

$$11. f(x, y) = \ln(y \ln(1 + x + y))$$

$$12. f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - 5y^4}$$

$$13. f(x, y) = \arccos(x + y)$$

$$14. f(x, y) = \arcsen(x^2 + y)$$

$$15. f(x, y) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1+x^2}{1+y^2} \right)$$

$$16. f(x, y) = \sqrt{\sinh(2x + y)}$$

$$17. f(x, y) = \sqrt{\cosh(2x + y)}$$

$$18. f(x, y) = \sqrt{\operatorname{sen}(\pi(x^2 + y^2))}$$

$$19. f(x, y) = \sqrt{y \cos(x)}$$

$$20. f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$$

$$21. f(x, y) = \ln(x + y - 1)$$

$$22. f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$$

$$23. f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}}$$

$$24. f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$$

$$25. f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 - x}}$$

$$26. f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{y}$$

27. $f(x, y) = \arcsen\left(\frac{y-1}{x}\right)$

28. $f(x, y) = \arcsen\left(\frac{y}{x}\right)$

29. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

30. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

31. $f(x, y) = \ln(1 - y^2 - x)$

32. $f(x, y) = \sqrt{\frac{y^2 - 2x + 2}{x}}$

33. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + y^2}}$

34. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{xy}$

Problema 18 — Esbozar la gráfica de f

1. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

2. $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$

3. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 1$

4. $f(x, y) = \frac{1}{6}\sqrt{9x^2 + 4y^2}$

5. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$

6. $f(x, y) = \sqrt{72 - 4x^2 - 9y^2}$

7. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - 4x^2 - 16}$

8. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 + 25}$