INGENIERÍA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES MÉRIDA VENEZUELA

Escuela Básica de INGENIERIA

Cálculo 30. Semestre A-2016

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

2. Límites y continuidad de funciones reales de varias variables.

Problema 1 — Mediante la definición de límite demostrar los siguientes ejercicios

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (3x+4y) = 10$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} (5x-2y) = 7$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} (3y-2x) = 7$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} (x^2+2x-y) = 4$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+y^2) = 2$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (2x^2-y^2) = -1$

Problema 2 — Usar el álgebra de los límites o los teoremas de continuidad para hallar el límite indicado. En caso de presentar una forma indeterminada aplicar proceso algebraico para eliminar la indeterminación o un cambio de variable.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}}{x+1} = 1$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(4,1)} \dfrac{y}{\sqrt{x+5y}} = \dfrac{1}{3}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ln(2))} e^{x-y} = -\dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},0)} \dfrac{\cos(y)+1}{y-\operatorname{sen}(x)} = -2$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = 0$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y} = \dfrac{2}{5}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3-2x^2y+3y^2x-2y^3}{x^2+y^2} = 0$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x^2y-xy+x^2-x}{y+1} = 2$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2+2} = 0$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{2x}+e^{2y}}{\operatorname{sen}(x)+\cos(y)} = 2$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{(x-1)^4-y^4}{(x-1)^2+y^2} = 0$

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{(x^3-1)(y^4-16)}{(x-1)(y^2-4)} = 24$

13. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\sqrt{xy-1}+x^3y^3-1}{\sqrt{x^2y^2-1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2y)}{xy} = 2$

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(e^{2x}-1)(e^{y}-1)}{xy} = 2$

16. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}\operatorname{sen}(xy)}{xy} = 1$

17. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(xy)}{3x^2y^2+x^2y^3} = \dfrac{1}{6}$

18. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\operatorname{arc\,tg}(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = 1$

19. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\operatorname{arc\,tg}(x^2-y^2)}{x-y} = 2$

20. $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,2)} \dfrac{\ln(43+7xy)}{\operatorname{arc\,tg}(3xy+18)} = \dfrac{7}{3}$

Problema 3 — Para cada una de las siguientes funciones, demostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \dfrac{2x^5y}{x^4+3y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{x^4+2y^2}$
4. $f(x,y) = \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}}$
5. $f(x,y) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}}$
6. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+2y^2}}$
7. $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{(x^2+3y^2)^3}}$
8. $f(x,y) = \dfrac{x^7y^6-x^4y^{10}}{\sqrt{(x^4+y^6)^5}}$
9. $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$

Problema 4 — Use coordenadas polares para hallar el límite, si este existe.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3y^2}{x^2+y^2}$
7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{7x^2y^2}{2x^2+2y^2}$
8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^4}{x^4+y^4}$
9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

Problema 5 — Para cada una de las funciones siguientes, demuestre que el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^3+y^3}$
3. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{y^4+x^2}$
4. $f(x,y) = \dfrac{2xy^4}{x^5+6y^5}$
5. $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}$
6. $f(x,y) = \dfrac{x^4y}{x^8+y^2}$
7. $f(x,y) = \dfrac{8x^3y^2}{x^9+y^3}$
8. $f(x,y) = \dfrac{y^3x}{y^6+x^2}$
9. $f(x,y) = \dfrac{2xy^3}{x^2+8y^6}$
10. $f(x,y) = \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$
11. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[3]{x}y^3}{x^{12}+y^4}$
12. $f(x,y) = \dfrac{x^3}{xy+y}$

Problema 6 — Pruebe que los siguientes límites no existe.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x^2-4x+4}{xy-2y-x+2}$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{2x^2-y^2-4x+2y+1}{x^2+2y^2-2x-4y+3}$

Problema 7 — Hallar la región de continuidad de la función dada.

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

4. $f(x,y) = \dfrac{2x+3y^5}{x^2+y^2+1}$

5. $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(y)}$

6. $f(x,y) = \dfrac{2x+3y^5}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

7. $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(y-x^2)}{y-x^2}$

8. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-9)$

9. $f(x,y) = \sqrt{\ln(x^2-y)-1}$

Problema 8 — Diga en dónde la función dada es continua, justificando en cada caso su repuesta con los resultados generales sobre continuidad.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+3y^4}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^3y^3}{x^4+7y^4}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-3y^4}{x^4+5y^4}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Problema 9 — En los ejercicios siguientes se da una función $z = f(x,y)$ que no está definida en $(0,0)$. ¿Es posible definir el valor $f(0,0)$ de tal modo que la función f sea continua en ese punto?

1. $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^4+y^4}$

2. $f(x,y) = \dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4}$

3. $f(x,y) = \dfrac{5x^2y^2}{x^3+y^6}$

4. $f(x,y) = \dfrac{3x^2y^8}{x^8+y^8}$

5. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

6. $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

7. $f(x,y) = \dfrac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

8. $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

9. $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

10. $f(x,y) = \dfrac{5\operatorname{sen}(xy^2)}{x^2y^2+xy^2}$

11. $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$

12. $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(x-y)}{|x|+|y|}$

13. $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$

14. $f(x,y) = \dfrac{x^4y^3}{x^8+y^4}$

Problema 10 — Considere la siguiente función $z = f(x,y)$ que no está definida en $(-1,0)$. ¿Es posible definir el valor $f(-1,0)$ de tal modo que la función f sea continua en ese punto?

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(x^2+2x+y^2+1)}{((x+1)^2+y^2)^2}$$

Problema 11 — Considere la siguiente función $z = f(x,y)$ que no está definida en $(0,1)$. ¿Es posible definir el valor $f(0,1)$ de tal modo que la función f sea continua en ese punto?

$$f(x,y) = \frac{xy^2 - 2xy + x}{x^2 + 2y^2 - 4y + 2}$$

Problema 12 — Considere la siguiente función $z = f(x,y)$ que no está definida en $(0,0)$. ¿Es posible definir el valor $f(0,0)$ de tal modo que la función f sea continua en ese punto?

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{|x| + |y|}$$

Problema 13 — Considere la siguiente función $z = f(x,y)$ que no está definida en $(0,0)$. ¿Es posible definir el valor $f(0,0)$ de tal modo que la función f sea continua en ese punto?

$$f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2}\right)$$

Problema 14 — Considere la siguiente función $z = f(x,y)$ que no está definida en $(2,0)$. ¿Es posible definir el valor $f(2,0)$ de tal modo que la función f sea continua en ese punto?

$$f(x,y) = \frac{(x-2)^3 y^3}{(2-x)^4 + y^8}$$