INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
MÉRIDA VENEZUELA

Escuela Básica de INGENIERIA

Cálculo 30. Semestre A-2016

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

8. Cálculo Vectorial

Problema 1 — Hallar el dominio de las siguientes funciones vectoriales

1. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(t+1), \sqrt{t^2+2t-8} \right\rangle$ Solución: $[2, +\infty)$

2. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{|t|}, \dfrac{t+\operatorname{sen}(t)}{t-\operatorname{sen}(t)}, \dfrac{\operatorname{sen}(3t)-\operatorname{sen}(t)}{\ln(t+1)} \right\rangle$ Solución: $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

3. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \dfrac{1-t}{1+t^2}, (t+2)^{-3/2}, (t-4)^{-1} \right\rangle$ Solución: $\mathbb{R} \backslash \{-2, 4\}$

4. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(1+t), \sqrt{t}, \dfrac{2t}{1-t^2} \right\rangle$ Solución: $[0, 1) \cup (1, +\infty)$

5. $\mathbf{r}(t) = \left\langle e^t, \sqrt{6-2t}, \sqrt{3t-t^2} \right\rangle$ Solución: $[0, 3]$

6. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{arc\,sen}(t), \cos(t), \ln(2t-1) \rangle$ Solución: $\left(\frac{1}{2}, 3\right]$

Problema 2 — Para cada uno de los siguientes ejercicios hallar el límite de la función vectorial.

1. $\displaystyle \lim_{t \to 0} \left\langle t, \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} \right\rangle = \langle 0, 1 \rangle$

2. $\displaystyle \lim_{t \to 0} \left\langle \frac{1-\sqrt{1+t}}{1-t}, \frac{t}{t+1}, 1 \right\rangle = \langle 0, 0, 1 \rangle$

3. $\displaystyle \lim_{t \to 3} \left\langle \frac{t^2-2t-3}{t-3}, \frac{t^2-5t+6}{t-3} \right\rangle = \langle 4, 1 \rangle$

4. $\displaystyle \lim_{t \to 0} \left\langle \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}, \frac{\cos(t)-1}{2t}, e^{t^2} \right\rangle = \langle 1, 0, 1 \rangle$

5. $\displaystyle \lim_{t \to 0} \left\langle \left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{t}}, \frac{t^3-t}{t}, \frac{\sqrt{1-t}-\sqrt{1+t}}{t} \right\rangle = \left\langle e^{-1}, -1, -1 \right\rangle$

6. $\displaystyle \lim_{t \to 0} \left\langle \frac{\cos(t)-\sqrt{1-t}}{t}, \frac{e^{2t}-e^t}{\operatorname{sen}(2t)-\operatorname{sen}(t)}, \frac{\operatorname{sen}(3t)-\operatorname{sen}(t)}{\ln(t+1)} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, 1, 2 \right\rangle$

7. $\displaystyle \lim_{t \to 0} \left\langle \frac{1-\cos(\operatorname{sen}(t))}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}(t))}, \frac{\cos(t)-\cos(\operatorname{sen}(t))}{t^2}, \frac{1}{t+\pi} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{\pi} \right\rangle$

Problema 3 — Analizar la continuidad de las siguientes funciones vectoriales

1. $\mathbf{f}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i} + \dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}\mathbf{j}, & \text{si} \quad t \neq 0, \\ \mathbf{j}, & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$

2. $\mathbf{f}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2-1}{t-1}\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, & \text{si} \quad t \neq 0, \\ 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$

3. $\mathbf{f}(t) = \begin{cases} t^2 - e\mathbf{i} + \dfrac{1-\cos(t)}{t}\mathbf{j}, & \text{si} \quad t \leqslant 0, \\ -(1+t)^{1/t}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{1-t}-\sqrt{1+t}}{t^2}\mathbf{j}, & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 2\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}, & \text{si} \quad t \geqslant 1. \end{cases}$

Problema 4 — Hallar la triada móvil $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ de la curva dada, para el valor de t indicado. Además, hallar el plano osculador. El plano normal y el plano rectificador, para el valor de t indicado.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, 2t \rangle$, $t = 1$.

Solución: $\mathbf{T}(1) = \dfrac{1}{3}\langle 1, 2, 2 \rangle$; $\mathbf{N}(1) = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}\langle -2, 5, -4 \rangle$; $\mathbf{B}(1) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\langle -2, 0, 1 \rangle$.
Plano osculador: $-2x + z = 1$; Plano normal: $x + 2y + 2z = 7$;
Plano rectificador: $-2x + 5y - 4z = -5$.

2. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t\cos(t), e^t\operatorname{sen}(t), e^t \rangle$, $t = 0$.

Solución: $\mathbf{T}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\langle 1, 1, 1 \rangle$; $\mathbf{N}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle -1, 1, 0 \rangle$; $\mathbf{B}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\langle -1, -1, 2 \rangle$.
Plano osculador: $-x - y + 2z = 1$; Plano normal: $x + y + z = 2$;
Plano rectificador: $-x + y = -1$.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t \rangle$, $t = 0$.

Solución: $\mathbf{T}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 0, 1 \rangle$; $\mathbf{N}(0) = \langle 0, 1, 0 \rangle$; $\mathbf{B}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle -1, 0, 1 \rangle$.
Plano osculador: $-x + z = 0$; Plano normal: $x + z = 0$;
Plano rectificador: $y = 0$.

4. $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos(t), 3\operatorname{sen}(t), t \rangle$, $t = 0$.

Solución: $\mathbf{T}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\langle 0, 3, 1 \rangle$; $\mathbf{N}(0) = \langle -1, 0, 0 \rangle$; $\mathbf{B}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\langle 0, -1, 3 \rangle$.
Plano osculador: $-y + 3z = 0$; Plano normal: $3y + z = 0$;
Plano rectificador: $x = 3$.

Problema 5 — Hallar la longitud de la curva en el intervalo indicado.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 3t \rangle$, $[0, 4]$.
   Solución: $4\sqrt{10}$.
2. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2 \rangle$, $[0, 4]$.
   Solución: $2\sqrt{65} + \frac{1}{4}\ln(\sqrt{65} + 8)$.
3. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$, $[0, 2]$.
   Solución: $\frac{1}{27}(40\sqrt{10} - 8)$.
4. $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos^3(t), a\,\mathrm{sen}^3(t) \rangle$, $[0, 2\pi]$.
   Solución: $6a$.
5. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\,\mathrm{sen}(t), 5t, 2\cos(t) \rangle$, $[0, \pi]$.
   Solución: $\sqrt{29}\pi$.
6. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos(t) + t\,\mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}(t) - t\cos(t), t^2 \rangle$, $[0, \frac{\pi}{2}]$. Solución: $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$.

Problema 6 — Hallar la curvatura K de la curva dada.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3 \rangle$ Solución: $K = \dfrac{6}{|t|\sqrt{(4 + 9t^2)^3}}$
2. $\mathbf{r}(t) = \left\langle 2t, t^2, -\dfrac{t^3}{3} \right\rangle$ Solución: $K = \dfrac{2}{(t^2 + 2)^2}$
3. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos(t), \mathrm{sen}(t), t \rangle$ Solución: $K = \dfrac{1}{2}$
4. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{3} \right\rangle$ Solución: $K = \sqrt{\dfrac{t^4 + t^2 + 1}{(t^4 + 4t^2 + 1)^3}}$
5. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, t^2, \dfrac{t^2}{2} \right\rangle$ Solución: $K = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{(1 + 5t^2)^3}}$
6. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{2t}\cos(t), e^{2t}\,\mathrm{sen}(t) \rangle$ Solución: $K = \dfrac{\sqrt{5}}{9e^{2t}}$

Problema 7 — Para cada uno de los siguientes ejercicios, dibujar varios vectores representando el campo vectorial.

1. $\mathbf{F}(x, y) = \langle 1, 1 \rangle$
2. $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2, 0 \rangle$
3. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y \rangle$
4. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, x \rangle$
5. $\mathbf{F}(x, y) = \langle -x, y \rangle$
6. $\mathbf{F}(x, y) = \langle 4x, y \rangle$

Problema 8 — Para cada uno de los siguientes ejercicios, investigar si el campo de vectores es conservativo. Si lo es, calcular una función potencial para él.

1. $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2 \rangle$
2. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{1}{y^2} \langle y, -2x \rangle$
3. $\mathbf{F}(x, y) = xe^{x^2 y} \langle 2y, x \rangle$
4. $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy^3, 3y^2x^2 \rangle$
5. $\mathbf{F}(x, y) = \left\langle \dfrac{2y}{x}, -\dfrac{x^2}{y^2} \right\rangle$
6. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \langle \cos(y), \mathrm{sen}(y) \rangle$

Problema 9 — Para cada uno de los siguientes ejercicios, calcular el rotacional del campo vectorial en el punto P dado.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle xyz, xyz, xyz \rangle$; $P(2, 1, 3)$. Solución: $\text{rot}\mathbf{F}(P) = \langle 4, -1, -3 \rangle$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = \left\langle x^2 z, -2xz, yz \right\rangle$; $P(2, -1, 3)$. Solución: $\text{rot}\mathbf{F}(P) = \langle 7, 4, -6 \rangle$
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \langle \text{sen}(y), -\cos(y), 0 \rangle$; $P(0, 0, 1)$. Solución: $\text{rot}\mathbf{F}(P) = \langle 0, 0, -2 \rangle$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xyz} \langle 1, 1, 1 \rangle$; $P(3, 2, 0)$. Solución: $\text{rot}\mathbf{F}(P) = \langle -6, 6, 0 \rangle$

Problema 10 — Para cada uno de los siguientes ejercicios, investigar si el campo de vectores es conservativo. Si lo es, calcular una función potencial para él.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = \left\langle xy^2 z^2, x^2 yz^2, x^2 y^2 z \right\rangle$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = \left\langle y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2 \right\rangle$
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle \text{sen}(z), \text{sen}(x), \text{sen}(y) \rangle$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle ye^z, ze^x, xe^y \rangle$