Cálculo 30. Semestre A-2016

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

1. Cuádricas y Cilindros. Funciones de Varias Variables

Problema 1 — En los siguientes ejercicios dar un bosquejo de la gráfica de la ecuación indicada.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
2. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 16$
3. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$
4. $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 4$

Problema 2 — En los siguientes ejercicios encuentre el centro y el radio de la esfera con ecuación dada.

1. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 4z - 7 = 0$
2. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4x - 12z + 9 = 0$
3. $x^2 + y^2 + z^2 - 16z = 0$
4. $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 0$

Problema 3 — En los siguientes ejercicios encuentre la ecuación canónica de una esfera que satisface las condiciones dadas.

1. Centro $(-1, 4, 6)$; radio $\sqrt{3}$.
   Solución: $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 3$
2. Centro $(0, -3, 0)$; diámetro $\frac{5}{2}$.
   Solución: $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = \frac{25}{16}$
3. Centro $(1, 1, 4)$; tangente al plano XY.
   Solución: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 16$
4. Centro $(5, 2, -2)$; tangente al plano YZ.
   Solución: $(x-5)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$
5. Centro sobre el eje Y positivo; radio 2; tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.
   Solución: $x^2 + (y-8)^2 + z^2 = 4$
6. Centro sobre la recta $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 6t$, $t > 0$, a una distancia de 21 unidades del origen; radio 5.
   Solución: $(x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-18)^2 = 25$
7. Considere los siguientes planos $6x - 3y - 2z - 35 = 0$ y $6x - 3y - 2z + 63 = 0$, que son tangente a una esfera, sabiendo que el punto $P(5, -1, -1)$ es el punto de contacto de uno de ellos.
   Solución: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 49$
8. El radio de la esfera es 3 y es tangente al plano $x + 2y + 2z = -3$ en el punto $P(1, 1, -3)$.
   Solución: $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$; $x^2 + (y+1)^2 + (z+5)^2 = 9$

Problema 4 — Identifique que tipo de superficie representa la ecuación dada, y que traza resulta al intersectar la superficie con los planos dados. Además, dar un bosquejo de la superficie con sus trazas indicadas.

1. Superficie: $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Planos: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

2. Superficie: $12x^2 + 3y^2 = 4z$. Planos: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$

3. Superficie: $-16x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$. Planos: $x = 0$, $y = 0$, $z = -4$, $z = 4$

4. Superficie: $12x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 12$. Planos: $x = 0$, $y = 0$, $z = -3$, $z = 0$, $z = 3$

5. Superficie: $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 1$. Planos: $x = 0$, $y = 0$, $z = 3$, $z = -3$

6. Superficie: $3x^2 + 12z^2 = 4y$. Planos: $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$

7. Superficie: $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$. Planos: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

8. Superficie: $16x^2 - y^2 + 16z^2 = 0$. Planos: $x = 0$, $y = -4$, $y = 4$, $z = 0$

9. Superficie: $y^2 - 2x^2 - 2z^2 = 1$. Planos: $x = 0$, $y = 3$, $y = -3$, $z = 0$

10. Superficie: $y^2 + z^2 = x$. Planos: $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $z = 0$

11. Superficie: $144x^2 + 64z^2 - 27y^2 = 144$ Planos: $x = 0$, $y = -4$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$

12. Superficie: $4x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 4z + 8 = 0$. Planos: $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$

13. Superficie: $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 - 144x - 96y - 72z + 288 = 0$ Planos: $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$

14. Superficie: $4x^2 + y^2 - 24x - 6y - z + 45 = 0$. Planos: $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 4$

15. Superficie: $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y - 9z + 72 = 0$. Planos: $x = 2$, $y = 3$, $z = 0$, $z = 4$

16. Superficie: $-16x^2 - 4y^2 + z^2 + 128x - 256 = 0$. Planos: $x = 4$, $y = 0$, $z = -4$, $z = 4$

17. Superficie: $-36x^2 - 9y^2 + 4z^2 + 36y - 36 = 0$. Planos: $x = 0$, $y = 2$, $z = -3$, $z = 3$

18. Superficie: $-36x^2 + 36y^2 - 9z^2 + 288x - 576 = 0$. Planos: $x = 4$, $y = -3$, $y = 3$, $z = 0$

Problema 5 — Dar un bosquejo de la gráfica de la ecuación indicada en el espacio bidimensional y tridimensional para cada uno de los siguientes ejercicios

1. $x + y = 2$

2. $3z + 2y = 6$

3. $x^2 - y = 0$

4. $x - 4y^2 = 0$

5. $y^2 + z = 6$

6. $y^2 - z - 1 = 0$

7. $x^2 + y^2 = 4$

8. $x^2 + 4z^2 = 16$

9. $4x^2 + y^2 = 36$

10. $z - e^y = 0$

11. $y^2 - z^2 = 16$

12. $xy = 1$

13. $y = \sqrt[3]{x}$

14. $z - \operatorname{sen}(y) = 0$

15. $z - \sqrt{y} = 0$

Problema 6 — Dar un bosquejo de la gráfica en el plano para cada uno de los conjuntos dados:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 3\}$

2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 1 \geqslant y\}$

3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant x^2\}$

4. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant y^2\}$

5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \sqrt{x}\}$

6. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9\}$

7. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$

8. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$

9. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 > 9\}$

10. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 - 9x^2 \geqslant 36\}$

11. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \ln(y) > 4\}$

12. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + e^y > 4\}$

Problema 7 — Dar un bosquejo de la gráfica en el plano para cada uno de los conjuntos dados:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x < 4,\, 2 < y \leqslant 5\}$

2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 3,\, x + y > -3\}$

3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \leqslant 3,\, x + y < -3\}$

4. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, y < 2 - x\}$

5. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\, y \leqslant 0,\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

6. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 0,\, y \geqslant 0,\, y \geqslant x^2\}$

Problema 8 — Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 + xy^3$. Hallar:

1. $f(0, 0)$

2. $f(-1, 1)$

3. $f(2, 3)$

4. $f(1, -2)$

5. $f(1 + h, 0)$

6. $f(1 + h, 1)$

7. $f(1, 1 - h)$

8. $f(2, 2 - h)$

Problema 9 — Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x^2 + y^2$.

1. Halle: $f(1, 0)$, $f(0, 1)$ y $f(1, 1)$.

2. ¿Cuáles puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ son tales que $f(x, y) = 0$?

3. ¿Cuáles puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ son tales que $f(x, y) = 4$?

4. ¿Cual es la imagen o las imágenes de la función f en los puntos (x, y) del circulo $x^2 + y^2 = 1$?

Problema 10 — Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x + y$.

1. Halle: $f(2, 3)$, $f(x, 1)$, $f(1, y)$ y $f(x^{-1}, y^{-1})$

2. ¿Cuáles puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ son tales que $f(x, y) = 3$?

3. ¿Cual es la imagen o las imágenes de la función f en los puntos (x, y) de la recta $y = x$?

4. ¿Cual es la imagen o las imágenes de la función f en los puntos (x, y) de la recta $y = -x$?

Problema 11 — Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = 3x^2 - 4xy + 5y^2$, calcular:

1. $f(1,0)$, $f(0,1)$, $f(-2,1)$, $f(1+h,0)$, $f(0,1-k)$, $f(x,x)$ y $f(-y,y)$.

2. Simplificar para $h \neq 0$ la expresión $\dfrac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$

3. Simplificar para $k \neq 0$ la expresión $\dfrac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$

Problema 12 — Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+xy}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. ¿Cuáles puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ son tales que $f(x,y) = 0$?

2. Simplificar para $h \neq 0$ la expresión $\dfrac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$

3. Simplificar para $k \neq 0$ la expresión $\dfrac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$

Problema 13 — Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. ¿Cuáles puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ son tales que $f(x,y) = 0$?

2. Simplificar para $h \neq 0$ la expresión $\dfrac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$

3. Simplificar para $k \neq 0$ la expresión $\dfrac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$

Problema 14 — Describa las curvas de nivel de las funciones indicadas. Realice una gráfica mostrando algunas de estas curvas.

1. $f(x,y) = |x| - y$

2. $f(x,y) = x - |y|$

3. $f(x,y) = |x - y|$

4. $f(x,y) = \sqrt{xy}$

5. $f(x,y) = \frac{x}{y}$

6. $f(x,y) = x - y + 2$

7. $f(x,y) = x^2 + 4y^2$

8. $f(x,y) = xy$

9. $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$

10. $f(x,y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}$

11. $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

12. $f(x,y) = \ln(y - x^2)$

Problema 15 — Para cada una de las siguientes funciones dibujar la curva de nivel $f(x,y)=k$, para el valor de k indicado.

1. $f(x,y)=\begin{cases} x^3, & \text{si } y\geqslant 0,\\ y^2-x^2, & \text{si } y<0.\end{cases}$
   $k=0,\ k=1,\ k=4.$

2. $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{si } x\geqslant 0,\\ y^2-x^2, & \text{si } x<0.\end{cases}$
   $k=0,\ k=1,\ k=4.$

3. $f(x,y)=\begin{cases} y+|x|, & \text{si } x\geqslant 0,\\ |x|-y, & \text{si } x<0.\end{cases}$
   $k=1,\ k=2,\ k=3\ k=4.$

4. $f(x,y)=\begin{cases} y+|x|, & \text{si } y\geqslant 0,\\ |x|-y, & \text{si } y<0.\end{cases}$
   $k=1,\ k=2,\ k=3\ k=4.$

Problema 16 — Describa las superficie de nivel de las funciones indicadas.

1. $f(x,y,z)=4x^2+4y^2+9z^2$
2. $f(x,y,z)=x^2+y^2$
3. $f(x,y,z)=x-z^2$
4. $f(x,y,z))=\sqrt{4x^2+4y^2-z}$
5. $f(x,y,z)=\sqrt{9x^2+4y^2}+6z$
6. $f(x,y,z)=\ln\left(\frac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

Problema 17 — Hallar el dominio natural de la función $z=f(x,y)$ dada y haga un esquema en el que se represente este dominio en el plano XY.

1. $f(x,y)=\sqrt{xy}$
2. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{xy}}$
3. $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$
4. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}$
5. $f(x,y)=\sqrt{x}\sqrt{y}$
6. $f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{y}}$
7. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
8. $f(x,y)=\ln(1+2x^2+4y^2)$
9. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{\ln(1+2x^2+4y^2)}}$
10. $f(x,y)=\sqrt{\ln(1+y+x)}$
11. $f(x,y)=\ln(y\ln(1+x+y))$
12. $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-5y^4}$
13. $f(x,y)=\arccos(x+y)$
14. $f(x,y)=\operatorname{arc\,sen}(x^2+y)$
15. $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+x^2}{1+y^2}\right)$
16. $f(x,y)=\sqrt{\operatorname{senh}(2x+y)}$
17. $f(x,y)=\sqrt{\cosh(2x+y)}$
18. $f(x,y)=\sqrt{\operatorname{sen}(\pi(x^2+y^2))}$
19. $f(x,y)=\sqrt{y\cos(x)}$
20. $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$
21. $f(x,y)=\ln(x+y-1)$
22. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$
23. $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2-y}}$
24. $f(x,y)=\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$
25. $f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2-x}}$
26. $f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-x}}{y}$

27. $f(x,y) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{y-1}{x}\right)$

28. $f(x,y) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{y}{x}\right)$

29. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

30. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

31. $f(x,y) = \ln(1 - y^2 - x)$

32. $f(x,y) = \sqrt{\frac{y^2-2x+2}{x}}$

33. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+y^2}}$

34. $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{xy}$

Problema 18 — Esbozar la gráfica de f

1. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

2. $f(x,y) = 4 - x^2 - 4y^2$

3. $f(x,y) = x^2 - y^2 - 1$

4. $f(x,y) = \frac{1}{6}\sqrt{9x^2 + 4y^2}$

5. $f(x,y) = 6 - 2x - 3y$

6. $f(x,y) = \sqrt{72 - 4x^2 - 9y^2}$

7. $f(x,y) = \sqrt{y^2 - 4x^2 - 16}$

8. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 + 25}$

Cálculo 30. Semestre A-2016

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

2. Límites y continuidad de funciones reales de varias variables.

Problema 1 — Mediante la definición de límite demostrar los siguientes ejercicios

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (3x+4y) = 10$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} (5x-2y) = 7$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} (3y-2x) = 7$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} (x^2+2x-y) = 4$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x^2+y^2) = 2$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (2x^2-y^2) = -1$

Problema 2 — Usar el álgebra de los límites o los teoremas de continuidad para hallar el límite indicado. En caso de presentar una forma indeterminada aplicar proceso algebraico para eliminar la indeterminación o un cambio de variable.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}}{x+1} = 1$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(4,1)} \dfrac{y}{\sqrt{x+5y}} = \dfrac{1}{3}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ln(2))} e^{x-y} = -\dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},0)} \dfrac{\cos(y)+1}{y-\operatorname{sen}(x)} = -2$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = 0$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy-y}{x^2-x+2xy-2y} = \dfrac{2}{5}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3-2x^2y+3y^2x-2y^3}{x^2+y^2} = 0$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x^2y-xy+x^2-x}{y+1} = 2$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2+2} = 0$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{2x}+e^{2y}}{\operatorname{sen}(x)+\cos(y)} = 2$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{(x-1)^4-y^4}{(x-1)^2+y^2} = 0$

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{(x^3-1)(y^4-16)}{(x-1)(y^2-4)} = 24$

13. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\sqrt{xy-1}+x^3y^3-1}{\sqrt{x^2y^2-1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2y)}{xy} = 2$

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(e^{2x}-1)(e^{y}-1)}{xy} = 2$

16. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}\operatorname{sen}(xy)}{xy} = 1$

17. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(xy)}{3x^2y^2+x^2y^3} = \dfrac{1}{6}$

18. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\operatorname{arc\,tg}(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = 1$

19. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{\operatorname{arc\,tg}(x^2-y^2)}{x-y} = 2$

20. $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,2)} \dfrac{\ln(43+7xy)}{\operatorname{arc\,tg}(3xy+18)} = \dfrac{7}{3}$

Problema 3 — Para cada una de las siguientes funciones, demostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \dfrac{2x^5y}{x^4+3y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{x^4+2y^2}$
4. $f(x,y) = \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}}$
5. $f(x,y) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}}$
6. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+2y^2}}$
7. $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{(x^2+3y^2)^3}}$
8. $f(x,y) = \dfrac{x^7y^6-x^4y^{10}}{\sqrt{(x^4+y^6)^5}}$
9. $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$

Problema 4 — Use coordenadas polares para hallar el límite, si este existe.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}$
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3y^2}{x^2+y^2}$
7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{7x^2y^2}{2x^2+2y^2}$
8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^4}{x^4+y^4}$
9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

Problema 5 — Para cada una de las funciones siguientes, demuestre que el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^3+y^3}$
3. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{y^4+x^2}$
4. $f(x,y) = \dfrac{2xy^4}{x^5+6y^5}$
5. $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4}$
6. $f(x,y) = \dfrac{x^4y}{x^8+y^2}$
7. $f(x,y) = \dfrac{8x^3y^2}{x^9+y^3}$
8. $f(x,y) = \dfrac{y^3x}{y^6+x^2}$
9. $f(x,y) = \dfrac{2xy^3}{x^2+8y^6}$
10. $f(x,y) = \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$
11. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[3]{x}y^3}{x^{12}+y^4}$
12. $f(x,y) = \dfrac{x^3}{xy+y}$

Problema 6 — Pruebe que los siguientes límites no existe.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x^2-4x+4}{xy-2y-x+2}$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{2x^2-y^2-4x+2y+1}{x^2+2y^2-2x-4y+3}$

Problema 7 — Hallar la región de continuidad de la función dada.

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

4. $f(x,y) = \dfrac{2x+3y^5}{x^2+y^2+1}$

5. $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(y)}$

6. $f(x,y) = \dfrac{2x+3y^5}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

7. $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(y-x^2)}{y-x^2}$

8. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-9)$

9. $f(x,y) = \sqrt{\ln(x^2-y)-1}$

Problema 8 — Diga en dónde la función dada es continua, justificando en cada caso su repuesta con los resultados generales sobre continuidad.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+3y^4}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^3y^3}{x^4+7y^4}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-3y^4}{x^4+5y^4}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Problema 9 — En los ejercicios siguientes se da una función $z = f(x,y)$ que no está definida en $(0,0)$. ¿Es posible definir el valor $f(0,0)$ de tal modo que la función f sea continua en ese punto?

1. $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^4+y^4}$

2. $f(x,y) = \dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4}$

3. $f(x,y) = \dfrac{5x^2y^2}{x^3+y^6}$

4. $f(x,y) = \dfrac{3x^2y^8}{x^8+y^8}$

5. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

6. $f(x,y) = \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

7. $f(x,y) = \dfrac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

8. $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

9. $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

10. $f(x,y) = \dfrac{5\operatorname{sen}(xy^2)}{x^2y^2+xy^2}$

11. $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$

12. $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(x-y)}{|x|+|y|}$

13. $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$

14. $f(x,y) = \dfrac{x^4y^3}{x^8+y^4}$

Problema 10 — Considere la siguiente función $z = f(x,y)$ que no está definida en $(-1,0)$. ¿Es posible definir el valor $f(-1,0)$ de tal modo que la función f sea continua en ese punto?

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(x^2+2x+y^2+1)}{((x+1)^2+y^2)^2}$$

Problema 11 — Considere la siguiente función $z = f(x, y)$ que no está definida en $(0, 1)$. ¿Es posible definir el valor $f(0, 1)$ de tal modo que la función f sea continua en ese punto?

$$f(x, y) = \frac{xy^2 - 2xy + x}{x^2 + 2y^2 - 4y + 2}$$

Problema 12 — Considere la siguiente función $z = f(x, y)$ que no está definida en $(0, 0)$. ¿Es posible definir el valor $f(0, 0)$ de tal modo que la función f sea continua en ese punto?

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x - y)}{|x| + |y|}$$

Problema 13 — Considere la siguiente función $z = f(x, y)$ que no está definida en $(0, 0)$. ¿Es posible definir el valor $f(0, 0)$ de tal modo que la función f sea continua en ese punto?

$$f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2}\right)$$

Problema 14 — Considere la siguiente función $z = f(x, y)$ que no está definida en $(2, 0)$. ¿Es posible definir el valor $f(2, 0)$ de tal modo que la función f sea continua en ese punto?

$$f(x, y) = \frac{(x - 2)^3 y^3}{(2 - x)^4 + y^8}$$

Cálculo 30. Semestre A-2016

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

3. Derivadas Parciales. Derivadas Direccionales. Funciones Diferenciables

Problema 1 — Hallar por definición las derivadas parciales de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = x^4y^5$
2. $f(x,y) = 3y^2\operatorname{sen}(x^2) - \operatorname{tg}^2(x)$
3. $f(x,y) = \ln\left(\frac{y}{x}\right) + 3\ln\left(\frac{x}{y}\right)$
4. $f(x,y,z) = \sqrt{xy\operatorname{sen}(z)}$

Problema 2 — Obtenga todas las derivadas parciales de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = (4x^2y^4 - 3x^2 + 8y^3)^3$
2. $f(x,y) = \operatorname{arc sen}(\frac{y}{x}) + \operatorname{arc cos}(\frac{x}{y})$
3. $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$
4. $f(x,y) = x + y + xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
5. $f(x,y) = x^y + y^x$
6. $f(x,y) = x^x + y^y + x^yy^x$
7. $f(x,y) = (2x+3y)^x + (2x+3y)^y$
8. $f(x,y) = \frac{1}{\ln^2(1+x^2+y^2)}$
9. $f(x,y) = (2y)^x + 2^y$
10. $f(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$
11. $f(x,y) = \arccos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$
12. $f(x,y) = \operatorname{arc tg}((2x + 3\operatorname{sen}(x))^y)$

Problema 3 — Demuestre las siguientes afirmaciones, para la función indicada.

1. Si $z = \dfrac{xy}{x+y}$, verificar que: $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$
2. Si $z = \operatorname{arc sen}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$, verificar que: $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$
3. Si $z = \ln(x^2+xy+y^2)$, verificar que: $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$
4. Si $w = \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}$, verificar que: $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$
5. Si $w = \dfrac{z}{xy+yz+xz}$, verificar que: $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z} = -w$
6. Si $w = \dfrac{z}{x}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, verificar que: $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$

7. Si $w = \dfrac{z}{(x^2+y^2)^{1/3}}$, verificar que: $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{w}{3}$

8. Si $w = xz^2 + yx^2 + zy^2$, verificar que: $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = (x+y+z)^2$

9. Si $z = (x-y)\ln(x+y)$, verificar que: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

10. Si $z = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, verificar que: $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$

11. Si $z = ye^x + xe^y$, verificar que: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$

Problema 4 — En los siguientes ejercicios, hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, si existen.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solución: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solución: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^3-y^3)}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solución: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$

4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solución: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Problema 5 — Para cada una de las funciones dadas en el problema 4, hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Problema 6 — Resolver los siguientes ejercicios.

1. Hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1)$, si existen, de la siguiente función.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy^2}{x+y}, & \text{si} \quad x+y \neq 0 \\ 1, & \text{si} \quad x+y = 0 \end{cases}$$

Solución: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1)$ No existe.

2. Hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, si existen, de la siguiente función.

$$f(x,y) = \begin{cases} e^x + e^y + \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 2, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 1$.

3. Hallar $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, si existen, de la siguiente función.

$$f(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ No existe

4. Hallar $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, si existen, de la siguiente función.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$

Problema 7 — En los siguientes ejercicios, hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie con el plano, en el punto indicado.

1. Superficie $z = x^2 + 8y^2$, plano $y = 1$, punto $(2,1,12)$

Solución: $x = 2 + t$, $y = 1$, $z = 12 + 4t$.

2. Superficie $z = x^2 + 8y^2$, plano $x = 2$, punto $(2,1,12)$

Solución: $x = 2$, $y = 1 + t$, $z = 12 + 16t$.

3. Superficie $z = 2 - \dfrac{x^2}{2} - y$, plano $y = 1$, punto $(1,1,\frac{1}{2})$

Solución: $x = 1 + t$, $y = 1$, $z = \frac{1}{2} - t$.

4. Superficie $z = 2 - \dfrac{x^2}{2} - y$, plano $x = 1$, punto $(1,1,\frac{1}{2})$

Solución: $x = 1$, $y = 1 + t$, $z = \frac{1}{2} - t$.

5. Superficie $z = \sqrt{36 - 5x^2 - 7y^2}$, plano $y = 1$, punto $(2,1,3)$

Solución: $x = 2 + t$, $y = 1$, $z = 3 - \frac{10}{3}t$.

6. Superficie $z = \sqrt{36 - 5x^2 - 7y^2}$, plano $x = 2$, punto $(2, 1, 3)$

Solución: $x = 2$, $y = 1 + t$, $z = 3 - \frac{7}{3}t$.

Problema 8 — Una abeja volaba ascendiendo a lo largo de una curva que es la intersección de $z = x^4 + xy^3 + 12$ con con el plano $x = 1$. En el punto $(1, -2, 5)$, se fue por la recta tangente. ¿Dónde pegó la abeja en el plano XZ? Solución: El punto $(1, 0, 29)$.

Problema 9 — Halle la derivada direccional de $f(x, y)$ en la dirección del vector $\mathbf{v}$ por definición en el punto indicado P.

1. $f(x, y) = xy^2$; $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P(1, 2)$ Resp. $D_v f(P) = 4\sqrt{2}$

2. $f(x, y) = \sqrt{xy}$; $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P(2, 1)$ Resp. $D_v f(P) = \frac{\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}}$

3. $f(x, y) = x^2 e^{-2y}$; $\mathbf{v} = (-1, 0)$, $P(2, 0)$ Resp. $D_v f(P) = -4$

Problema 10 — Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = 5x^2y^3$ en el punto $P = (1, 1)$

1. en la dirección del vector que va de P al origen.

Solución: $-\frac{25}{\sqrt{2}}$.

2. en la dirección del vector tangente al círculo $x^2 + y^2 = 2$ en P.

Solución: $D_u f(P) = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $u = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$; $D_v f(P) = -\frac{5}{\sqrt{2}}$, $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

3. en la dirección del vector P.

Solución: $\frac{25}{\sqrt{2}}$.

Problema 11 — Pruebe que las siguientes funciones son diferenciables en el punto indicado, aplicando la definición.

1. $f(x, y) = 3x^2 + 9y^2$, $P = (1, 2)$

2. $f(x, y) = 4x^2y^3$, $P = (1, 1)$

3. $f(x, y) = x^2 + xy$, $P(1, 1)$

4. $f(x, y) = x^3 + yx + 1$, $P = (2, 1)$

5. $f(x, y) = 5x^2 - 10y + y^3$, $P = (0, 0)$

6. $f(x, y) = (x + y)\sqrt{x^2 + y^2}$, $P = (0, 0)$

Problema 12 — Pruebe que las siguientes funciones son diferenciables en el origen. Aplicando que las parciales son continuas en el origen.

1. $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^6 - 2y^4}{x^2 + y^2}, & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Cálculo 30. Semestre A-2016

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

4. Plano Tangente. Diferenciales. Gradiente. Regla de la cadena

Problema 1 — Hallar el plano tangente y la recta normal al gráfico de la función dada en el punto indicado.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$, $P = (2,3,2)$
Solución: $3x + 2y - 3z = 6$, $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{2/3} = \dfrac{z-1}{-1}$

2. $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2-1}$, $P = (2,-1,1)$
Solución: $2x - y - 4z = 1$, $\dfrac{x-2}{1/2} = \dfrac{y+1}{-1/4} = \dfrac{z-1}{-1}$

3. $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$, $P = \left(2,2,\frac{\pi}{4}\right)$
Solución: $-x + y - 4z + \pi = 0$, $\dfrac{x-2}{-1/4} = \dfrac{y-2}{1/4} = \dfrac{z-\pi/4}{-1}$

4. $f(x,y) = 2e^{-x}\operatorname{sen}(y)$, $P = \left(0,\frac{\pi}{6},1\right)$
Solución: $-x + \sqrt{3}y - z + 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi = 0$, $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-\pi/6}{\sqrt{3}} = \dfrac{z-1}{-1}$

5. $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $P = (4,1,3)$
Solución: $x + 2y - 4z + 6 = 0$, $\dfrac{x-4}{1/4} = \dfrac{y-1}{1/2} = \dfrac{z-3}{-1}$

Problema 2 — Hallar el punto de la superficie $z = xy - 3x + 2y - 5$ en el cual el plano tangente es paralelo al plano XY. Solución: $(-2,3,1)$

Problema 3 — Hallar los puntos de la superficie $z = 8x^3 - 12xy + y^3 + 1$ en los cuales el plano tangente es paralelo al plano XY. Solución: $(0,0,1)$, $(1,2,-7)$

Problema 4 — Hallar los puntos de la superficie $z = xy(1-x-y)$ en los cuales el plano tangente es paralelo al plano XY.
Solución: $(0,0,0)$; $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{27}\right)$; $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$.

Problema 5 — Hallar el punto del paraboloide $z = 3x^2 + y^2$ en el cual el plano tangente es paralelo al plano $12x - 6y - 3z = 1$. Hallar el plano tangente.
Solución: $\left(\frac{2}{3},-1,\frac{7}{3}\right)$, $12x - 6y - 3z = 7$

Problema 6 — Hallar el punto del paraboloide $z = x^2 + 2y^2 - 7$ en el cual el plano tangente es paralelo al plano $6x - 8y - z = 10$. Hallar el plano tangente.
Solución: $(3,-2,10)$, $6x - 8y - z = 24$

Problema 7 — Hallar el punto del paraboloide $z = 4 - 2x^2 - 5y^2$ en el cual el plano tangente es perpendicular a la recta $x = 1 - 2t$, $y = 4 - 5t$, $z = 3 + t$. Hallar el plano tangente.
Solución: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$, $8x + 20y - 4y = -23$

Problema 8 — Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ que sea paralelo al plano $3x + 8y - 5z = 10$.
Solución: $60x + 160y - 100z = 63$

Problema 9 — Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + xy$ que sea perpendicular a los planos $x + y - z = 3$ y $2x - y + z = 4$.
Solución: $-y - z + 1 = 0$

Problema 10 — Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = 3x^2 - 8xy + 5y^2$ en el punto en que la recta normal tenga por vector paralelo a $v = (-1, 0, 2)$.
Solución: $8x - 16z = -5$

Problema 11 — Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2 - 4x$ que sea perpendicular a la recta $x = 3 + 4t$, $y = -2t$, $z = 1 + t$, $t \in \mathbb{R}$.
Solución: $-4x + 2y - z = 1$

Problema 12 — Aplique diferenciales para calcular aproximadamente el valor de la expresión dada.

1. $\sqrt{(2{,}13)(1{,}98)}$

2. $\ln((3{,}1)^2 - 8)$

3. $\ln(\sqrt{4{,}15} + \sqrt{9{,}08} - 4)$

4. $\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{0{,}9} + 0{,}01)$

5. $\sqrt{(8{,}02)^2 + (14{,}97)^2}$

6. $\ln(\sqrt{25{,}4} - \sqrt{16{,}16})$

Problema 13 — Los catetos de un triángulo rectángulo mide 8 cm y 6 cm. El cateto más largo se encoge $\frac{1}{4}$ cm y el más corto se alarga $\frac{1}{6}$ cm. Usar diferenciales para aproximar la variación de la hipotenusa.
Solución: Se encoge $\frac{1}{10}$ cm.

Problema 14 — El volumen de un cono circular recto de radio r y altura h está dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Si el radio crece de 6 a 6,05 cm y la altura decrece de 18 a 17,96 cm. Usando diferenciales estimar el cambio del volumen de cono.
Solución $\Delta V \approx 3{,}12\pi$

Problema 15 — Se tiene un sector circular de radio 30 cm y ángulo central de $\frac{\pi}{3}$. Si al ángulo central lo incrementamos un grado, estimar en cuanto debemos disminuir el radio si queremos que el área se mantenga.
Solución 0,25 cm.

Problema 16 — Se miden los catetos de triángulo rectángulo obteniendo 8 cm y 6 cm con un error de a lo más de 0,2 cm en cada medición. Usar diferenciales para estimar el máximo error al calcular:

(a) La hipotenusa. Solución: $\frac{7}{25}$ cm

(b) El área. Solución: $\frac{7}{5}$ cm

Problema 17 — Se miden la base y altura de un rectángulo y resultan ser de 10 cm y 15 cm, respectivamente, con un error posible de hasta 0,1 cm en cada medición. Use diferenciales para estimar el error máximo resultante en el cálculo del área del rectángulo.

Problema 18 — Se mide el radio r de la base de un cilindro circular recto, así como su altura h, y resultan ser de 3 cm y 9 cm, respectivamente. Hay un error posible de 1 mm en cada medición. Use diferenciales para estimar el máximo error posible en el cálculo de lo siguiente:

(a) Volumen del cilindro.

(b) Superficie total del cilindro.

Problema 19 — Hallar el gradiente de la función en el punto indicado.

1. $f(x,y) = 3x + 5y^2$, $P = (2,1)$
   Solución: $\nabla f(P) = \langle 3, 10 \rangle$
2. $f(x,y) = 2xe^{x/y}$, $P = (0,2)$
   Solución: $\nabla f(P) = \langle 2, 0 \rangle$
3. $f(x,y) = \ln(x^2 - y)$, $P = (2,3)$
   Solución: $\nabla f(P) = \langle 4, 1 \rangle$
4. $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$, $P = (3,-4)$
   Solución: $\nabla f(P) = \operatorname{sen}(25)\,\langle -6, 8 \rangle$
5. $f(x,y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2})$, $P = (1,2)$
   Solución: $\nabla f(P) = \left\langle \frac{2}{15}, \frac{4}{15} \right\rangle$
6. $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)$, $P = (4,-2)$.
   Solución: $\nabla f(P) = \left\langle -\frac{1}{16}, -\frac{1}{4} \right\rangle$

Problema 20 — Hallar la derivada direccional de la función dada, en el punto P y en la dirección del vector $\mathbf{v}$.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, $P = (1,2)$, $\mathbf{v} = \langle 2, 3 \rangle$ Solución: $2\sqrt{13}$
2. $f(x,y) = e^y \operatorname{sen}(x)$, $P = (0,0)$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1 \rangle$ Solución: $\frac{2}{5}\sqrt{5}$
3. $f(x,y) = \operatorname{sen}(2x)\cos(y)$, $P = (\pi,0)$, $\mathbf{v} = \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ Solución: $\frac{2}{5}\sqrt{5}$
4. $f(x,y) = (x-1)y^2e^{xy}$, $P = (0,1)$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$ Solución: $-\frac{4}{5}\sqrt{5}$

Problema 21 — Hallar la derivada direccional de la función dada, en el punto P y en la dirección del vector unitario que forma con el eje X un ángulo θ.

1. $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y)$, $P = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ Solución: 0
2. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) + e^{2xy}$, $P = (0,1)$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ Solución: $\sqrt{3} + \frac{1}{2}$
3. $f(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$, $P = (1,2)$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ Solución: $\frac{9\sqrt{13}}{2}$

Problema 22 — Hallar el vector unitario u en la dirección en que la función crece y decrece más rápidamente en el punto P.

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $P(-1,1)$
2. $f(x,y) = x^2y + e^{xy}\operatorname{sen}(y)$, $P = (1,0)$
3. $f(x,y,z) = \frac{x}{y} - yz$, $P = (4,1,1)$
4. $f(x,y,z) = xe^y + z^2$, $P = \left(1, \ln(2), \frac{1}{2}\right)$

Problema 23 — La temperatura en grados Celsius en la superficie de una placa metálica es $T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$, donde x y y se miden en centímetros. ¿En qué dirección a partir de $(2,3)$ aumenta más rápido la temperatura? ¿Cuál es la tasa o ritmo de crecimiento?
Solución: La dirección de máximo incremento está dada por $\langle -16, -6\rangle$ y su tasa de incremento es $\sqrt{292}$

Problema 24 — La temperatura en el punto (x,y) de una placa metálica es $T(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Hallar la dirección de mayor incremento de calor en el punto $(3,4)$.
Solución: La dirección de máximo incremento de calor es $\left\langle \frac{7}{625}, -\frac{12}{625}\right\rangle$

Problema 25 — La derivada direccional de una función $z = f(x,y)$ en el punto $P = (1,3)$ y en la dirección de P a $Q = (2,4)$ es $\sqrt{2}$; y en la dirección del vector unitario que forma un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ con el eje X positivo es $-2 + 3\sqrt{3}$. Hallar $\nabla f(1,3)$.
Solución: $\nabla f(1,3) = \langle 6, -4\rangle$

Problema 26 — Sea $P_0(1,2)$, $P_1(2,3)$, $P_2(1,0)$ y $P_3(4,6)$ puntos de $\mathbb{R}^2$. La derivada direccional de una función $z = f(x,y)$ en el punto P_0, en la dirección del vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ es $2\sqrt{2}$, y en la dirección del vector $\overrightarrow{P_0P_2}$ es -3. Calcular la derivada direccional en $P_0(1,2)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{P_0P_3}$.
Solución: 3

Problema 27 — La derivada direccional de $f(x,y)$ en $P_0(1,2)$ en la dirección del vector $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es $2\sqrt{2}$, y en la de $-2\mathbf{j}$ es -3. ¿Cuál es la derivada direccional de f en P_0 en la dirección del vector $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$?
Solución: $\sqrt{5}$

Problema 28 — ¿Cuál es el valor del ángulo θ para el cual la derivada direccional de $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ en el punto $P = (1,2)$ es mínimo, y cuál es éste valor mínimo?
Solución: $\theta = \operatorname{arc\,tg}(2)$, la derivada direccional es $-\frac{1}{2}$

Problema 29 — Hallar el plano tangente a la superficie en el punto P indicado.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $P = (2,1,1)$.
Solución: $2x + y + z = 6$

2. $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 35$, $P = (-1,-2,3)$.
Solución: $x + 8y - 6z + 35 = 0$

3. $2x^2 + 2y^2 - z = 21$, $P = (-2,3,5)$.
Solución: $-8x + 12y - z = 47$

4. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 1$, $P = (-1,1,1)$.
Solución: $x - y - z + 3 = 0$

Problema 30 — Hallar los puntos de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ donde los planos tangentes son paralelos al plano $8x + 6y + 10z - 3 = 0$.
Solución: $P = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$ y $Q = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right)$

Problema 31 — Hallar los planos tangentes a la superficie $6x^2 + 4y^2 + z^2 = 14$ donde los planos tangentes son paralelos al plano $3x + 2y + z - 5 = 0$.
Solución: $P = (1,1,2)$ y $Q = (-1,-1,-2)$

Problema 32 — Hallar los puntos de la superficie $2x^2 + y^2 + z^2 - xy = 7$ donde los planos tangentes son paralelos al plano YZ.
Solución: $P = (1,2,0)$ y $Q = (-1,-2,0)$

Problema 33 — Determine la esfera que tenga por planos tangente a los planos $x+y+z=5$, $x+y+z=-3$, sabiendo que el punto $(1,2,2)$ es uno de los puntos de contactos.
Solución: $3x^2+3y^2+3z^2+2x-4y-4z-13=0$

Problema 34 — Para cada uno de los ejercicios hallar las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto dado.

1. Superficie: $x^2+y^2=4$, $z=x^2+y^2$. Punto $(\sqrt{2},\sqrt{2},4)$.
Solución: $x=\sqrt{2}-2\sqrt{2}t$, $y=\sqrt{2}+2\sqrt{2}t$, $z=4$, $t\in\mathbb{R}$.

2. Superficie: $xyz=1$, $x^2+2y^2+3z^2=6$. Punto $(1,1,1)$.
Solución: $x=1+2t$, $y=1-4t$, $z=1+2t$, $t\in\mathbb{R}$.

3. Superficie: $x^2+2y+2z=4$, $y=1$. Punto $(1,1,\frac{1}{2})$
Solución: $x=1-2t$, $y=1$, $z=\frac{1}{2}+2t$, $t\in\mathbb{R}$.

4. Superficie: $x^3+3x^2y^2+y^3+4xy-z^2=0$, $x^2+y^2+z^2=11$. Punto $(1,1,3)$
Solución: $x=1+90t$, $y=1-90t$, $z=3$, $t\in\mathbb{R}$.

Problema 35 — Encuentre $\frac{dw}{dt}$ usando la regla de la cadena. Exprese su repuesta final en términos de t.

1. $w=x^2y^3$; $x=t^3$, $y=t^2$

2. $w=x^2y-y^2x$; $x=\cos(t)$, $y=\operatorname{sen}(t)$

3. $w=e^x\operatorname{sen}(x)+e^y\operatorname{sen}(x)$; $x=3t$, $y=2t$

4. $w=\ln\left(\frac{x}{y}\right)$; $x=\operatorname{tg}(t)$, $y=\sec^2(t)$

5. $w=\operatorname{sen}(xyz^2)$; $x=t^3$, $y=t$, $z=t$

6. $w=xy+yz+xz$; $x=t^2$, $y=1-t^2$, $z=1-t$.

Problema 36 — Encuentre $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$ mediante la regla de cadena. Exprese su repuesta final en términos de s y t.

1. $w=x^2y$; $x=st$, $y=s-t$

2. $w=x^2-y\ln(x)$; $x=\frac{s}{t}$, $y=s^2t$

3. $w=e^{x^2+y^2}$; $x=s\operatorname{sen}(t)$, $y=t\operatorname{sen}(s)$

4. $w=\ln(x+y)-\ln(x-y)$, $x=te^s$, $y=e^{st}$

Problema 37 — Demuestre las siguientes afirmaciones.

1. Sea f diferenciable, $w=f(u)$, $u=x+2y+3z$. Probar que: $\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=6\dfrac{\partial w}{\partial u}$

2. Sea f diferenciable, $w=f(x-y,y-z,z-x)$. Probar que: $\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$

3. Sea f diferenciable, $w=f(x,y)$ donde $x=u+v$ y $y=u-v$. Demuestre que:

(a) $\dfrac{\partial w}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2$ **(b)** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

4. Sea f diferenciable, $w = f(x,y)$ donde $x = 2u + v$ y $y = u - v$. Demuestre que:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

5. Sea f diferenciable, $w = f(x,y)$ donde $x = e^u \cos(v)$ y $y = e^u \operatorname{sen}(v)$. Demuestre que:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = e^{2u}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$$

6. Sea f diferenciable, $w = f(x,y)$ donde $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\operatorname{sen}(\theta)$. Demuestre que:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

INGENIERÍA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES MÉRIDA VENEZUELA

Escuela Básica de INGENIERIA

Cálculo 30. Semestre A-2016

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

5. Funciones implícitas. Polinomio de Taylor

Problema 1 — En los ejercicios siguientes, se da el nivel cero de una cierta función $F(x,y)$, Compruebe que esta función satisface las hipótesis del teorema de la función implícita en el punto indicado (perteneciente al nivel cero de F). Obtenga la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto indicado.

1. $F(x,y) = x^2y + 3x^2 - 2y^2 - 2y = 0$, $\mathbf{p} = (1,1)$ Solución: $f'(1) = \frac{8}{5}$
2. $F(x,y) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + 2y - \pi = 0$, $\mathbf{p} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ Solución: $f'(0) = -\frac{1}{2}$
3. $F(x,y) = y\ln(x^2+y^2) - 2xy = 0$, $\mathbf{p} = (0,1)$ Solución: $f'(0) = 1$
4. $F(x,y) = xe^x + ye^y - 2xy = 0$, $\mathbf{p} = (0,0)$ Solución: $f'(0) = -1$
5. $F(x,y) = x^y + y^x - 2xy = 0$, $\mathbf{p} = (2,2)$ Solución: $f'(0) = -1$

Problema 2 — En los ejercicios siguiente, se da el nivel cero de una cierta función $F(x_1, x_2, y) = 0$. Compruebe que éste define implícitamente una función $y = f(x_1, y_1)$ en una vecindad del punto $\mathbf{p}$ dado perteneciente al nivel cero de F. Obtenga las derivadas parciales de la función f en $\mathbf{p}$.

1. $F(x_1,x_2,y) = x_1\operatorname{sen}^2(x_2) + x_1 - 3x_2 + y = 0$, $\mathbf{p} = (0,0,0)$

   Solución: $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}(\mathbf{p}) = -1$; $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}(\mathbf{p}) = 3$

2. $F(x_1,x_2,y) = x_1\ln(1+x_2) + ye^{4y} = 0$, $\mathbf{p} = (0,0,0)$

   Solución: $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}(\mathbf{p}) = 0$; $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}(\mathbf{p}) = 0$

3. $F(x_1,x_2,y) = y\operatorname{arc\,tg}(1-y^2) + 3x_1 + 5y - 8x_2^3 = 0$, $\mathbf{p} = (1,1,1)$

   Solución: $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}(\mathbf{p}) = -1$; $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}(\mathbf{p}) = 8$

4. $F(x_1,x_2,y) = x_1(x_2e^y) + 5y - 2 = 0$, $\mathbf{p} = (1,1,0)$

   Solución: $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}(\mathbf{p}) = -\dfrac{1}{6}$; $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}(\mathbf{p}) = -\dfrac{1}{6}$

5. $F(x_1,x_2,y) = x_1x_2ye^y\ln(y) - 3x_1 + 3x_2 = 0$, $\mathbf{p} = (1,1,1)$.

   Solución: $\dfrac{\partial y}{\partial x_1}(\mathbf{p}) = 3e^{-1}$; $\dfrac{\partial y}{\partial x_2}(\mathbf{p}) = -3e^{-1}$

Problema 3 — El sistema $u - v = x + y$, $u + v = x - y$ define funciones implícitas $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, las cuales se pueden hacer explícitas. Obtenga las derivadas parciales de estas funciones. Compruebe que

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$$

Problema 4 — Considere las funciones $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ definidas implícitamente por las expresiones

$$e^u + e^v = x + ye, \quad ue^u + ve^v = xye$$

calcule las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$, para $u = 0$, $v = 1$, $x = 1$, $y = 1$.

Solución: $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 2 - e$; $\frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = e$; $\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = 1 - \frac{1}{e}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}(1,1) = 0$.

Problema 5 — Considere las expresiones

$$uv - 3x + 2y = 0, \quad u^4 - v^4 = x^2 - y^2$$

Habiendo verificado que éstas definen funciones $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ en los alrededores del punto $(u,v,x,y) = (1,1,1,1)$, determine las ecuaciones de los planos tangentes a las superficies $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ en $\mathbf{p}$.

Solución: $\frac{7}{4}(x-1) - \frac{5}{4}(y-1) - (u-1) = 0$; $\frac{5}{4}(x-1) - \frac{3}{4}(y-1) - (v-1) = 0$

Problema 6 — Suponga que la función $z = f(x,y)$ es definida implícitamente por $x\,\mathrm{tg}(y) - ze^z = 0$ y es diferenciable en el punto $(0, \frac{\pi}{4})$, además $f(0, \frac{\pi}{4}) = 0$. Hallar la derivada direccional de la función $z = f(x,y)$ en la dirección del vector $u = \langle 2, 1\rangle$.
Solución: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Problema 7 — Hallar la dirección de mayor crecimiento de la función $z = f(x,y)$ dada implícitamente por $\mathrm{arc\,tg}(x+y+z) + 3xyz + z = 0$ en el origen de coordenadas.
Solución: La dirección de mayor crecimiento es $\left\langle -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$.

Problema 8 — Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 en el punto $(0,0)$ de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = e^x \cos(y)$

Solución: $P_3(x,y) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{xy^2}{2}$

2. $f(x,y) = e^{x+y^2}$

Solución: $P_3(x,y) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + y^2 + \dfrac{x^3}{6} + xy^2$

3. $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$

Solución: $P_3(x,y) = y + xy - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2y}{2} - \dfrac{xy^2}{3} + \dfrac{y^3}{3}$

4. $f(x,y) = x^4 + xy^2 - 2y^2$

Solución: $P_3(x,y) = xy - 2y^2 + xy^2 + \dfrac{y^3}{3}$

Cálculo 30. Semestre A-2016

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

6. Máximos y Mínimos de Funciones de Varias Variables. Multiplicadores de Lagrange

Problema 1 — Hallar los extremos relativos de las siguientes funciones.

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$
Solución: Mínimo local en $(4,-2)$.

2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 27x - 12y$
Solución: Máximo local en $(-3,-2)$; Mínimo local en $(3,2)$ y Punto silla en $(3,-2)$ y $(-3,2)$.

3. $f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 - 2xy - 10y - 2x$
Solución: Mínimo local en (1,3).

4. $f(x,y) = x + y^2 - e^x$
Solución: Punto silla en $(0,0)$.

5. $f(x,y) = 1 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$
Solución: Máximo absoluto en $(0,0)$.

6. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 9x^2 - 3y^2 + 15x - 9y$
Solución: Punto silla en $(-5,3)$ y $(-1,-1)$; Máximo local en $(-5,-1)$ y Mínimo local en $(-1,3)$.

7. $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 + 1$
Solución: Máximo local en $(1,1)$ y $(-1,-1)$; Punto silla en $(0,0)$.

8. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 15xy$
Solución: Mínimo local en $(5,5)$; Punto silla en $(0,0)$.

9. $f(x,y) = xy - \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{y} + 8$
Solución: Mínimo local en $(-1,-2)$.

10. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$
Solución: Mínimo absoluto en $(0,0)$.

11. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,x^2 - 3\,y^2 - 9\,y$
Solución: Punto silla en $(0,3)$ y $(2,-1)$; Máximo local en $(0,-1)$ y Mínimo local en $(2,3)$.

12. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} - (x^2+y^2)$
Solución: Máximo absoluto en $(0,0)$.

Problema 2 — Hallar tres números positivos x, y y z que satisfagan las condiciones dadas.

1. La suma es 36 y su producto es máximo.
Solución: $x = 12$, $y = 12$, $z = 12$.

2. La suma es 30 y su producto es máximo.
Solución: $x = 10$, $y = 10$, $z = 10$.

3. La suma es 32 y $P = xy^2z$ es máxima.
Solución: $x = 8$, $y = 16$, $z = 8$.

4. La suma es 30 y la suma de los cuadrados es mínima.
Solución: $x = 10$, $y = 10$, $z = 10$.

Problema 3 — En el plano XY hallar el punto tal que la suma de los cuadrados de las distancias que miden entre las tres rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ y el punto buscado sea el menor posible.
Solución: $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$

Problema 4 — Hallar las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo que tiene tres de sus caras en los planos coordenados. Uno de sus vértices es el origen y el vértice opuesto esta en el plano

1. $6x + 4y + 3z = 24$. Solución: $x = \frac{4}{3}$, $y = 2$, $z = \frac{8}{3}$.

2. $4x + 6y + z = 12$. Solución: $x = 1$, $y = \frac{2}{3}$, $z = 4$.

Problema 5 — Hallar los puntos de la superficie $y^2 - xz = 9$ que están más cerca del origen.
Solución: $(0,3,0)$ y $(0,-3,0)$

Problema 6 — Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ en el rectángulo limitado por las rectas, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.
Solución: Máximo en $(1,2)$; Mínimo en $(1,0)$.

Problema 7 — Determine el máximo y el mínimo absoluto de la función

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

en la región $0 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 2$.
Solución: Máximo en $(0,2)$; Mínimo en $(1,1)$.

Problema 8 — Hallar los valores máximo y mínimos de la función $f(x,y) = xy(4 - x - y)$, en el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.
Solución: Mínimo en $(3,3)$; Máximo en $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Problema 9 — Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie

$$x + y + z + xy - x^2 - y^2 = 0,$$

en el punto de la función representada por dicha superficie tenga un valor extremo. ¿Qué clase de extremo es?
Solución: Mínimo en $(1, 1)$. Plano tangente $z = -1$.

Problema 10 — Hallar los valores máximo y mínimos de la función $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + x - y$, en el triángulo limitado por las rectas $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.
Solución: Mínimo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; Máximo en $(1, 1)$.

Problema 11 — Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = xy + x + y$ en el rectángulo limitado por las rectas, $x = 1$, $y = 2$, $x = 2$, $y = 3$.
Solución: Máximo en $(2, 3)$; Mínimo en $(1, 2)$.

Problema 12 — Hallar los valores máximo y mínimos de la función $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x$, en el triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y = 12$.
Solución: Mínimo en $\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$; Máximo en $(0, 4)$.

Problema 13 — Sean las rectas:

$$L_1 : x - 2 = \frac{y}{2} = z \quad L_2 : x = y - 1 = z$$

1. Hallar el punto P_1 de L_1 y el punto P_2 de L_2 tales que la distancia de P_1 a P_2 sea mínima.
   Solución: $P_1 = (4, 4, 2)$ y $P_2 = (3, 4, 3)$.

2. Hallar la distancia de P_1 a P_2.
   Solución: $d(P_1, P_2) = \sqrt{2}$.

Multiplicadores de Lagrange

Problema 14 — Hallar los extremos de $f(x, y) = xy$ sujeta a $x^2 + y^2 = 8$.
Solución: Máximo en $(2, 2)$ y $(-2, -2)$. Mínimo en $(-2, 2)$ y $(2, -2)$.

Problema 15 — Hallar los extremos de $f(x, y) = 8x - 2y$ sujeta a $2x^2 + 3y^2 = 75$.
Solución: Máximo en $(6, -1)$. Mínimo en $(-6, 1)$.

Problema 16 — Hallar los extremos de $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 1$ sujeta a $x^2 + y^2 - 4y = 0$.
Solución: Máximo en $(0, 4)$. Mínimo en $(0, 0)$.

Problema 17 — Hallar los extremos de $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 5$ sujeta a $x^2 + y^2 - 2y = 0$.
Solución: Máximo en $(0, 2)$. Mínimo en $(0, 0)$.

Problema 18 — Hallar los extremos de $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ sujeta a $x^2 + y^2 - 4y = 0$.
Solución: Máximo en $(0, 0)$. Mínimo en $(0, 4)$.

Problema 19 — Hallar los extremos de $f(x, y) = e^{xy}$ sujeta a $x^2 + y^2 = 8$.
Solución: Máximo en $(2, 2)$ y $(-2, -2)$. Mínimo en $(-2, 2)$ y $(2, -2)$.

Problema 20 — Se tiene una parábola $y = \dfrac{x^2}{2}$ y la recta $L : y - x + 4 = 0$.

1. Hallar el punto P_0 de la parábola que está a una distancia mínima de la recta L.
2. Hallar el punto Q de la recta L que está más cerca del punto P_0. de la parábola.

Solución: $P_0(1, \frac{1}{2})$ y $Q(\frac{11}{4}, -\frac{5}{4})$.

Problema 21 — Se tiene una elipse $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ y la recta $L : y + x - 5 = 0$.

1. Hallar el punto P_0 de la elipse que está a una distancia mínima de la recta L.
2. Hallar el punto Q de la recta L que está más cerca del punto P_0. de la elipse.

Solución: $P_0(2, 1)$ y $Q(3, 2)$.

Problema 22 — Un disco circular tiene la forma de una región acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 1$. Si T es la temperatura (en grados Celsius) en cualquier punto (x, y) del disco y $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$. Encuentre los puntos más calientes y mas fríos del disco.
Solución: Los puntos mas calientes de la placa circular son $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. El punto más frío es $(0, 1)$.

Problema 23 — Considere el hexágono con vértices $(0, \pm 1)$ y $(\pm x, \pm y)$ inscrito en la circunferencias unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Demuestre que su área es máxima cuando es un hexágono regular con lados iguales.

INGENIERÍA UNIVERSIDAD DE LOS ANDES MÉRIDA VENEZUELA

Escuela Básica de INGENIERIA

Cálculo 30. Semestre A-2016

Prof. José Prieto
Correo: prieto@ula.ve

7. Integrales Dobles y Triples

Problema 1 — Evaluar la integral doble dada.

1. $\iint\limits_R f(x,y)dA, \quad f(x,y) = (x+y)e^{x+y}, \quad R = [0,1]\times[0,2].$

   Solución: $e^3 + e - 2$

2. $\iint\limits_R f(n,m)dA, \quad f(n,m) = 4\,n\,m\,e^{n^2+m^2}, \quad R = [0,1]\times[0,\sqrt{2}].$

   Solución: $e^3 - e^2 - e + 1$

3. $\iint\limits_R f(x,y)dA, \quad f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+1}, \quad R = [0,1]\times[1,3].$

   Solución: $4\ln(2)$

4. $\iint\limits_R f(x,y)dA, \quad f(x,y) = x\cos(x+y), \quad R = [0,\pi/6]\times[0,\pi/2].$

   Solución: $(1+\sqrt{3})\dfrac{\pi}{12} + (\sqrt{3}-3)\dfrac{1}{2}$

Problema 2 — Evaluar la integral iterada dada.

1. $\displaystyle\int_0^3\int_{-1}^1 (x^2+xy+y^2)\,dx\,dy = 20$
2. $\displaystyle\int_0^\pi\int_0^1 x\cos(y)\,dx\,dy = 0$
3. $\displaystyle\int_0^{\ln(3)}\int_0^{\ln(2)} e^{x+y}\,dx\,dy = 2$
4. $\displaystyle\int_2^3\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy = \ln\left(\frac{16}{15}\right)$
5. $\displaystyle\int_0^\pi\int_1^4 |x-2|\sin(y)\,dx\,dy = 5$
6. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 |x-y|\,dx\,dy = \frac{1}{3}$
7. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-1}^1 |x+y|\,dx\,dy = \frac{8}{3}$
8. $\displaystyle\int_0^3\int_{-1}^1 |y-x^2|\,dx\,dy = \frac{37}{5}$

Problema 3 — Para cada uno de los siguientes problemas, cambie el orden de integración.

1. $\displaystyle\int_0^9\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx.$ Solución: $\displaystyle\int_0^3\int_{y^2}^9 f(x,y)\,dx\,dy$

2. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x} f(x,y)\,dy\,dx.$ Solución: $\displaystyle\int_0^1 \int_{y}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx\,dy$

3. $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$ Solución: $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

4. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy.$ Solución: $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$

5. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$ Solución: $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

6. $\displaystyle\int_1^2 \int_{x}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx.$ Solución: $\displaystyle\int_1^2 \int_{1}^{y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^4 \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$

7. $\displaystyle\int_0^1 \int_{0}^{\arccos(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$ Solución: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\cos(x)} f(x,y)\,dy\,dx$

8. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y)\,dx\,dy.$ Solución: $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,dy\,dx$

Problema 4 — Evaluar la integral doble dada, invirtiendo el orden de integración.

1. $\displaystyle\int_0^a \int_x^a \frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}\,dy\,dx = \frac{\sqrt{2}-1}{2}a^2$

2. $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^4 y\sin(x^2)\,dx\,dy = \frac{1}{4}(1-\cos(16))$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^x \frac{\sin(x)}{4-\sin^2(y)}\,dy\,dx = \frac{\ln(3)}{4}$

4. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{y/x}\,dx\,dy = \frac{1}{2}$

Problema 5 — Calcular la integral doble $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dA$, donde D es la región acotada por las rectas $x=2$, $y=x$ y la hipérbola $xy=1$. Solución: $\dfrac{9}{4}$

Problema 6 — Evaluar la integral doble $\displaystyle\iint_D (x^{1/2}-y^2)\,dA$, donde D está limitada por las curvas $y=x^2$, y $x=y^4$. Solución: $\dfrac{1}{7}$

Problema 7 — Calcular la integral doble $\displaystyle\iint_D (2x-y)\,dA$, donde D está limitada por las curvas $y=|x-1|$, $y=4-|x|$. Solución: $-\dfrac{15}{2}$

Problema 8 — Hallar el área de las siguientes regiones.

1. Región D encerrada por las curvas $y=x^2$, $y^2=x$. Solución: $\dfrac{1}{3}$

2. Región D limitada por las curvas $y = x^2 - x$, $y = \sin(\pi x)$. Solución: $\dfrac{12+\pi}{6\pi}$

3. Región limitada por las curvas $x = y^2 - 2y$, $x + y = 0$. Solución: $\dfrac{1}{6}$

4. Región en el primer cuadrante acotado por las parábolas $x^2 = 4y$, $x^2 = 8 - 4y$. Solución: $\dfrac{16}{3}$

5. Región D encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ y $b > 0$. Solución: $ab\pi$

6. Región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leqslant 4x - x^2, \quad y^2 \geqslant 2x\}$. Solución: $2\pi - \dfrac{16}{3}$

7. Región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leqslant 4x - x^2, \quad y^2 \leqslant 2x\}$. Solución: $2\pi + \dfrac{16}{3}$

8. Región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant x^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 2\}$. Solución: $\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$

9. Región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant x^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 2\}$. Solución: $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}$

Problema 9 — Hallar el volumen de los siguientes sólido.

1. Sólido situado debajo del paraboloide elíptico $z = 4x^2 + y^2$ y sobre el rectángulo $R = [0, 2] \times [0, 3]$ Solución: 50

2. Sólido situado debajo de la superficie $z = 4x^3 + 3x^2 y$ y sobre el rectángulo $R = [1, 2] \times [0, 4]$ Solución: 116

3. Sólido limitado superiormente por el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ e inferiormente por el plano XY. Solución: $4\sqrt{2}\pi$

4. Sólido limitado por los planos coordenados, los planos $x = 4$ e $y = 4$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$. Solución: $\dfrac{560}{3}$

5. Sólido limitado por los planos coordenados y el plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$. Solución: $\dfrac{abc}{6}$

6. Sólido bajo el plano $2x + 7y - z = 0$ y sobre la región del plano XY encerrada por las curvas $y = x$, $y = x^3$. Solución: $\dfrac{14}{15}$

7. Sólido encerrado por el plano $x + y + z = 2$, el cilindro parabólico $y = x^2$ circular y el plano XY. Solución: $\dfrac{81}{20}$

8. Sólido encerrado por el plano $x + y + z = 3$, el cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$ y el plano XY. Solución: 3π

9. Sólido en el primer octante encerrado por los planos coordenados, el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el cilindro $y = 1 - x^2$ Solución: $\dfrac{50}{21}$

Problema 10 — Para cada uno de los siguiente problemas realizar el cambio a coordenada polares.

1. Calcular la integral doble $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dA$, donde D es la cuarta parte del círculo $x^2+y^2 \leqslant 1$, que se encuentra en el primer cuadrante. Solución: $\dfrac{\pi}{6}$

2. Calcular la integral doble $\iint\limits_D \sqrt{16-x^2-y^2}dA$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 4y\}$ Solución: $\dfrac{64\pi}{3}$

3. Calcular la integral doble $\iint\limits_D y\,dA$, donde D es la región encerrada por el cardioide $r = 1+\cos(\theta)$ y sobre el eje X. Solución: $\dfrac{4}{3}$

4. Calcular la integral doble $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,dA$, donde D es la región en el primer cuadrante acotado por la circunferencia $x^2+y^2 = a^2$ y los ejes coordenados. Solución: $\dfrac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})$

5. Hallar el volumen de la región en el espacio limitado superiormente por el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$, dentro del cilindro $x^2+y^2 = 1$ y sobre el eje X. Solución: $\dfrac{2\pi}{3}$

6. Hallar el área de la región plana D ubicada en el interior del círculo $r = 3\cos(\theta)$ y en el exterior del cardioide $r = 1+\cos(\theta)$. Solución: π

7. Hallar el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2+y^2 = 16$, el plano XY y el plano $z = 4-x$. Solución: $32\pi - \frac{128}{3}$

8. Hallar el volumen del sólido bajo el paraboloide $z = x^2+y^2$, dentro del cilindro $x^2+y^2 = 4$ y sobre el plano XY. Solución: 8π

9. Hallar el volumen del sólido dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 25$ y dentro del cilindro $x^2+y^2 = 16$. Solución: $\dfrac{196}{3}\pi$

10. Una región R en la parte superior del eje X esta limitada por la izquierda por la recta $y = -x$ y por la derecha por la curva $3(x^2+y^2)^{1/2} - 3x = x^2+y^2$. Solución: $\frac{27\pi}{4} + 9\sqrt{2}$

Problema 11 — Para cada uno de los siguientes problemas aplicar un cambio de variable.

1. Calcular la integral doble $\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dA$, donde D la región triangular del plano XY limitado por $x = 0$, $y = 0$, $x+y = 1$. Solución: $\dfrac{e-e^{-1}}{4}$

2. Calcular la integral doble $\iint_D \cos\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right) dA$, donde D la región del plano XY limitado por las rectas $x+y=1$, $x+y=4$, $x=0$, $y=0$. Solución: $\dfrac{15\,\text{sen}(1)}{2}$

3. Calcular la integral doble $\iint_D \dfrac{(2x-y)^2}{1-4x+y}\, dA$, donde D es la región en el plano XY, limitada por las rectas, $y=2x$, $y=12+4x$, $y=4x$, $y+2=2x$ Solución: $\dfrac{4}{3}\ln(13)$

4. Calcular la integral doble $\iint_D (x+y)^2 e^{x-y}\, dA$, donde D es la región en el plano XY, limitada por las rectas, $x+y=1$, $x+y=3$, $2-y=2$, $y-x=0$ Solución: $\dfrac{15e^3-3e-26}{6}$

5. Calcular la integral doble $\iint_D \dfrac{y-2x}{y+2x}\, dA$, donde D es la región en el plano XY, limitada por las rectas, $y=2x$, $y=2x+2$, $y=2-2x$, $y=6-2x$ Solución: $\dfrac{\ln(3)}{2}$

6. Calcular la integral doble $\iint_D \dfrac{x-y}{\sqrt{13+x^2-y^2}}\, dA$, donde D es la región en el plano XY, limitada por el cuadrilátero de vértices $(2,0)$, $(4,2)$, $(2,4)$ y $(0,2)$. Solución: $\dfrac{205-51\sqrt{17}}{9}$

7. Calcular $\iint_D \sqrt{4x^2+y^2}\, dA$, utilizando el siguiente cambio de variable $x=u\,v$, $y=u^2-v^2$ donde D es la imagen de la región $R=\{(u,v) : 1 \leqslant u \leqslant 2, -1 \leqslant v \leqslant 1\}$ Solución: $\dfrac{1432}{45}$

8. Hallar el área de la región D del primer cuadrante encerrado por las rectas $y=2x$, $2y=x$ y las hipérbolas $xy=1$, $xy=3$. Solución: $2\ln(2)$

9. Hallar el área de la región D del primer cuadrante encerrado por las parábolas $y=x^2$, $y=\dfrac{1}{4}x^2$, $y^2=5x$, $y^2=x$. Solución: 4

10. Calcular la integral doble $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}\, dy dx.$ Solución: $\dfrac{e-1}{2}$

11. Calcular la integral doble $\iint_D \dfrac{y^2\cos(xy)}{x}\, dA$, donde D es la región limitada por las parábolas, $y=x^2$, $x=y^2$, $4y=x^2$, $4x=y^2$
Solución: $\dfrac{1}{12}\left(5\cos(4)-\cos(16)-4\cos(1)\right)$

Integrales Triples

Problema 12 — Para cada uno de los siguientes ejercicios hallar el valor de la integral triple

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dV$$

1. $f(x,y,z) = x + y + z$; $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.
   Solución: 18
2. $f(x,y,z) = xy\,\text{sen}(z)$; $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi, 0 \leqslant z \leqslant \pi\}$.
   Solución: $\dfrac{\pi^4}{2}$
3. $f(x,y,z) = xyz$; $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2, -2 \leqslant z \leqslant 6\}$.
   Solución: 128
4. $f(x,y,z) = x + y + z$; $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2, -2 \leqslant z \leqslant 6\}$.
   Solución: 256
5. $f(x,y,z) = x^2$; D es el sólido limitado por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.
   Solución: $\dfrac{1}{60}$
6. $f(x,y,z) = xyz$; D es el sólido limitado por los planos $y = 0$, $y = 2$, $x = -1$, $x = 0$, $z = 0$ y la superficie $z = 1 - x^2$.
   Solución: $-\dfrac{1}{6}$
7. $f(x,y,z) = 2y + z$; D es el sólido limitado por los planos $y = -2$, $y = 2$, $x = -1$, $x = 1$, $z = 0$ y la superficie $z = 4 - y^2$.
   Solución: $\dfrac{512}{15}$
8. $f(x,y,z) = x + y$; D es el sólido limitado por las superficies $z = 2 - x^2$, $z = x^2$ y los planos $y = 0$, $y = 3$.
   Solución: 12

Problema 13 — Dibuje el sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones dadas. Después encuentre su volumen por medio de integrales triples.

1. $2x + 3y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Solución: 6
2. $z = y$, $y = x^2$, $y = 4$, $z = 0$. Solución: $\dfrac{128}{5}$
3. $y + z = 4$, $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $z = 0$. Solución: $\dfrac{128}{5}$
4. $z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$. Solución: $\dfrac{1}{6}$

5. $z = 10 - x^2 - y^2$, $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 0$. Solución: $\dfrac{332}{105}$

6. $x = z^2$, $x = 8 - z^2$, $y = -1$, $y = -3$. Solución: $\dfrac{256}{3}$

7. $z = x^2$, $y + z = 4$, $y = 0$. Solución: $\dfrac{256}{15}$

8. $z = 1 - y^2$, $z = y^2 - 1$, $x + z = 1$, $x = 0$. Solución: $\dfrac{8}{3}$

9. $y = z^2$, $z = y^2$, $x + y + z = 2$, $x = 0$. Solución: $\dfrac{11}{30}$

10. $y = 4 - x^2 - z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = 2$. Solución: $\dfrac{16}{3}$

Problema 14 — En los problemas siguientes cambiar a coordenada cilíndricas o esféricas para evaluar la integral dada.

1. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3}\sqrt{x^2+y^2}\,dzdydx$ Solución: $\frac{27}{2}\pi$

2. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{0}^{a} z\sqrt{x^2+y^2}\,dzdydx$ Solución: $\frac{8}{9}a^2$

3. $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{z}}\,dzdydx$ Solución: $\frac{8}{5}a^{5/2}\pi$

4. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,dzdydx$ Solución: $\frac{2}{3}\pi$

5. $\displaystyle\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dzdydx$ Solución: $\frac{1}{40}a^5$

Problema 15 — En los problemas siguientes aplicar coordenada cilíndricas o esféricas.

1. Hallar el volumen de la región que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Solución: $\dfrac{32}{3}\pi - 4\sqrt{3}\pi$

2. Hallar el volumen de la región que se encuentre en el interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y dentro del cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Solución: $\dfrac{16}{3}\pi$

3. Hallar el volumen de la región limitada por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$. Solución: $\dfrac{81}{2}\pi$

4. Hallar el volumen de la región limitada por los paraboloide $z = x^2 + y^2$ y $z = 12 - 2x^2 - 2y^2$. Solución: 32π

5. Hallar el volumen de la región limitada por arriba por la esfera $x^2+y^2+z^2=2$ y por abajo por el paraboloide $z=x^2+y^2$. Solución: $\frac{4}{3}\sqrt{2}\pi-\frac{7}{6}\pi$

Problema 16 — En los problemas siguientes aplicar cambio de variable.

1. Calcular $\iiint\limits_E \left(\frac{2x-y}{2}+\frac{z}{3}\right) dV$, donde

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leqslant z\leqslant 3, 0\leqslant y\leqslant 4, \frac{y}{2}\leqslant x\leqslant \frac{y}{2}+1\}$$

Sugerencia: Realizar el cambio $u=\frac{2x-y}{2}$, $v=\frac{y}{2}$, $w=\frac{z}{3}$. Solución: 12

2. Hallar el volumen del elipsoide que tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Solución: $\frac{4}{3}abc\pi$

3. Calcular $\iiint\limits_E x^2 dV$, donde

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -1\leqslant x-z\leqslant 1, 0\leqslant y+z\leqslant 2, 0\leqslant x+z\leqslant 1\}$$

Solución: $\frac{1}{3}$

4. Calcular $\iiint\limits_E (x+y+z)(x+y-z)(x-y-z)dV$, donde E es el tetraedro limitado por los planos $x+y+z=0$, $x+y-z=0$, $x-y-z=0$ y $2x-y=1$.
Solución: $\frac{1}{18}$