Análisis para la representación gráfica de funciones

Elaborado por el Profesor José Antonio Prieto

(01) *Dominio de la función*

$Dom f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ está definida}\}$

(02) *Puntos de corte con los ejes*

Con el eje $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$: todos los puntos $(c, 0)$, donde c es solución de la ecuación $f(x) = 0$

Con el eje $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$: el punto $(0, f(0))$, si $0 \in Dom f$

(03) *Puntos críticos de primer orden*

Todos los puntos $(c, f(c))$, donde $c \in Dom f$ y:

(a) c es solución de la ecuación $f'(x) = 0$, o
(b) $f'(c)$ no existe

(04) *Crecimiento*

f **crece** en todos los intervalos $I \subseteq Dom f$ que son solución de la inecuación $f'(x) > 0$

f **decrece** en todos los intervalos $I \subseteq Dom f$ que son solución de la inecuación $f'(x) < 0$

f es **constante** en todos los intervalos $I \subseteq Dom f$ que son solución de la ecuación $f'(x) = 0$

(05) *Clasificación de los puntos críticos de primer orden*

Si $(c, f(c))$ es punto crítico de primer orden de f, entonces:

$(c, f(c))$ es máximo de f, si f crece a la izquierda de c y decrece a la derecha de c.

$(c, f(c))$ es mínimo de f, si f decrece a la izquierda de c y crece a la derecha de c.

Si no hay cambio en el crecimiento de la función a los lados de c, $f(c)$ no es un valor extremo de f.

(06) *Puntos críticos de segundo orden*

Todos los puntos $(c, f(c))$, donde $c \in Dom f$ y:

(a) c es solución de la ecuación $f''(x) = 0$, o
(b) $f''(c)$ no existe

(07) *Concavidad*

f es **cóncava hacia arriba** (o **convexa**) en todos los intervalos $I \subseteq Dom f$ que son solución de la inecuación $f''(x) > 0$.

f es **cóncava hacia abajo** (o **cóncava**) en todos los intervalos $I \subseteq Dom f$ que son solución de la inecuación $f''(x) < 0$.

f es **rectilínea** en todos los intervalos $I \subseteq Dom f$ que son solución de la ecuación $f''(x) = 0$.

(08) *Clasificación de los puntos críticos de segundo orden*

Si $(c, f(c))$ es un punto crítico de segundo orden de f, entonces:

$(c, f(c))$ es un punto de inflexión, si la concavidad cambia a los lados de c.

Si no hay cambio de concavidad de la función a los lados de $(c, f(c))$ no es punto de inflexión.

(09) *Comportamiento en el infinito*

(a) Si $(a, +\infty) \subset Dom f$ para algún $a \in \mathbb{R}$, calculamos $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(i) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$, entonces la recta $y = k$, es la ***asíntota horizontal*** en la dirección positiva del eje $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$.

(ii) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ (crece indefinidamente en la dirección positiva del eje $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, si da $+\infty$; y decrece indefinidamente en la dirección positiva del eje $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, si da $-\infty$), calculamos $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

(1) Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$, calculamos $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$.

(A) Si $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = b$, entonces la recta $y = mx + b$ es ***asíntota oblicua*** en la dirección positiva del eje $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$.

(B) Si $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \infty$, no tenemos asíntotas horizontal ni oblicuas en la dirección positiva del eje $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$.

(2) Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, no tenemos asíntotas horizontal ni oblicuas en la dirección positiva del eje $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$.

(b) Si $(-\infty, a) \subset Dom f$ para algún $a \in \mathbb{R}$, calculamos $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(i) Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$, entonces la recta $y = k$, es la ***asíntota horizontal*** en la dirección negativa del eje $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$.

(ii) Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (crece indefinidamente en la dirección negativa del eje $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, si da $+\infty$; y decrece indefinidamente en la dirección negativa del eje $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$, si da $-\infty$), calculamos $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

(1) Si $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = m$, calculamos $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx)$.

(A) Si $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = b$, entonces la recta $y = mx + b$ es ***asíntota oblicua*** en la dirección negativa del eje $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$.

(B) Si $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \infty$, no tenemos asíntotas horizontal ni oblicuas en la dirección negativa del eje $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$.

(2) Si $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, no tenemos asíntotas horizontal ni oblicuas en la dirección negativa del eje $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$.

(10) *Comportamiento en las discontinuidades*

(a) Si c es una discontinuidad aislada de f, calculamos $\lim_{x\to c^+} f(x)$ y $\lim_{x\to c^-} f(x)$.

(i) Si $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$, entonces la recta $x = c$ es **asíntota vertical**.

(ii) Si $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \infty$ y $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \infty$, no hay asíntota vertical en c.

(b) Si c es un extremo derecho de un intervalo de $Dom f$ y $c \notin Dom f$, calculamos $\lim_{x\to c^-} f(x)$.

(i) Si $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$, entonces la recta $x = c$ es **asíntota vertical**.

(ii) Si $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \infty$, no hay asíntota vertical en c.

(c) Si c es un extremo izquierdo de un intervalo de $Dom f$ y $c \notin Dom f$, calculamos $\lim_{x\to c^+} f(x)$.

(i) Si $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$, entonces la recta $x = c$ es **asíntota vertical**.

(ii) Si $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \infty$, no hay asíntota vertical en c.