



# Ejercicios de derivadas e integrales

Este material puede descargarse desde <http://www.uv.es/~montes/biologia/matcero.pdf>

---

Departament d'Estadística i Investigació Operativa  
Universitat de València



# Derivadas

## Reglas de derivación

<b>Suma</b>	$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
<b>Producto</b>	$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$ $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
<b>Cociente</b>	$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
<b>Regla de la cadena</b>	$\frac{d}{dx} \{f[g(x)]\} = f'[g(x)]g'(x)$ $\frac{d}{dx} \{f[g[h(x)]]\} = f'(g[h(x)])g'[h(x)]h'(x)$
<b>Potencia</b>	$\frac{d}{dx}(x^k) = kx^{k-1}$ $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -\frac{1}{x^2}$ $\frac{d}{dx}[f(x)^k] = kf(x)^{k-1}f'(x)$ $\frac{d}{dx}[\sqrt{f(x)}] = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ $\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{f(x)} \right] = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$

## Reglas de derivación (continuación)

<b>Trigonométricas</b>	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ $\frac{d}{dx}(\tan x) = 1 + \tan^2 x$	$\frac{d}{dx}[\sin f(x)] = \cos f(x)f'(x)$ $\frac{d}{dx}[\cos f(x)] = -\sin f(x)f'(x)$ $\frac{d}{dx}[\tan f(x)] = [1 + \tan^2 f(x)]f'(x)$
<b>Funciones de arco</b>	$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}[\arcsin f(x)] = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$ $\frac{d}{dx}[\arccos f(x)] = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$ $\frac{d}{dx}[\arctan f(x)] = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$
<b>Exponenciales</b>	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$	$\frac{d}{dx}(e^{f(x)}) = e^{f(x)}f'(x)$ $\frac{d}{dx}(a^{f(x)}) = a^{f(x)} \ln a f'(x)$
<b>Logarítmicas</b>	$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ $\frac{d}{dx}(\lg_a x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}$	$\frac{d}{dx}(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ $\frac{d}{dx}(\lg_a f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} \frac{1}{\ln a}$

## Ejercicios de derivadas

1. Determinar las tangentes de los ángulos que forman con el eje positivo de las  $x$  las líneas tangentes a la curva  $y = x^3$  cuando  $x = 1/2$  y  $x = -1$ , construir la gráfica y representar las líneas tangentes.

**Solución.-** a)  $3/4$ , b)  $3$ .

2. Determinar las tangentes de los ángulos que forman con el eje positivo de las  $x$  las líneas tangentes a la curva  $y = 1/x$  cuando  $x = 1/2$  y  $x = 1$ , construir la gráfica y representar las líneas tangentes.

**Solución.-** a)  $-4$ , b)  $-1$ .

3. Hallar la derivada de la función  $y = x^4 + 3x^2 - 6$ .

**Solución.-**  $y' = 4x^3 + 6x$ .

4. Hallar la derivada de la función  $y = 6x^3 - x^2$ .

**Solución.-**  $y' = 18x^2 - 2x$ .

5. Hallar la derivada de la función  $y = \frac{x^5}{a+b} - \frac{x^2}{a-b}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{5x^4}{a+b} - \frac{2x}{a-b}$ .

6. Hallar la derivada de la función  $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{3x^2 - 2x}{5}$ .

7. Hallar la derivada de la función  $y = 2ax^3 - \frac{x^2}{b} + c$ .

**Solución.-**  $y' = 6ax^2 - \frac{2x}{b}$ .

8. Hallar la derivada de la función  $y = 6x^{\frac{7}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}} + 2x$ .

**Solución.-**  $y' = 21x^{\frac{5}{2}} + 10x^{\frac{3}{2}} + 2$ .

9. Hallar la derivada de la función  $y = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2}$ .

10. Hallar la derivada de la función  $y = \frac{(x+1)^3}{x^{\frac{3}{2}}}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{3(x+1)^2(x-1)}{2x^{\frac{5}{2}}}$ .

11. Hallar la derivada de la función  $y = \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

12. Hallar la derivada de la función  $y = \frac{ax^2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{b}{x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{5}{3}ax^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}bx^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}x^{-\frac{7}{6}}$ .

13. Hallar la derivada de la función  $y = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$ .

**Solución.-**  $y' = 4x(1 + 3x + 10x^3)$ .

14. Hallar la derivada de la función  $y = x(2x - 1)(3x + 2)$ .

**Solución.-**  $y' = 2(9x^2 + x - 1)$ .

15. Hallar la derivada de la función  $y = (2x - 1)(x^2 - 6x + 3)$ .

**Solución.-**  $y' = 6x^2 - 26x + 12$ .

16. Hallar la derivada de la función  $y = \frac{2x^4}{b^2 - x^2}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{4x^3(2b^2 - x^2)}{(b^2 - x^2)^2}$ .

17. Hallar la derivada de la función  $y = \frac{a-x}{a+x}$ .

**Solución.-**  $y' = -\frac{2a}{(a+x)^2}$ .

18. Hallar la derivada de la función  $f(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$ .

**Solución.-**  $f'(t) = \frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}$ .

19. Hallar la derivada de la función  $f(s) = \frac{(s+4)^2}{s+3}$ .

**Solución.-**  $f'(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$ .

20. Hallar la derivada de la función  $y = \frac{x^3+1}{x^2-x-2}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{x^4-2x^3-6x^2-2x+1}{(x^2-x-2)^2}$ .

21. Hallar la derivada de la función  $y = (2x^2 - 3)^2$ .

**Solución.-**  $y' = 8x(2x^2 - 3)$ .

22. Hallar la derivada de la función  $y = (x^2 + a^2)^5$ .

**Solución.-**  $y' = 10x(x^2 + a^2)^4$ .

23. Hallar la derivada de la función  $y = \sqrt{x^2 + a^2}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ .

24. Hallar la derivada de la función  $y = (a+x)\sqrt{a-x}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$ .

25. Hallar la derivada de la función  $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ .

26. Hallar la derivada de la función  $y = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{1+4x^2}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

27. Hallar la derivada de la función  $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$ .

28. Hallar la derivada de la función  $y = (1 + \sqrt[3]{x})^3$ .

**Solución.-**  $y' = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$ .

29. Hallar la derivada de la función  $y = \sin^2 x$ .

**Solución.-**  $y' = \sin 2x$ .

30. Hallar la derivada de la función  $y = 2 \sin x + \cos 3x$ .

**Solución.-**  $y' = 2 \cos x - 3 \sin 3x$ .

31. Hallar la derivada de la función  $y = \tan(ax + b)$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$ .

32. Hallar la derivada de la función  $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{1}{1+\cos x}$ .

33. Hallar la derivada de la función  $y = \sin 2x \cos 3x$ .

**Solución.-**  $y' = 2 \cos 2x \cos 3x - 3 \sin 2x \sin 3x$ .

34. Hallar la derivada de la función  $y = \cot^2 5x$ .

**Solución.-**  $y' = -10 \cot 5x \operatorname{csc}^2 5x$ .

35. Hallar la derivada de la función  $f(t) = t \sin t + \cos t$ .

**Solución.-**  $f'(t) = t \cos t$ .

36. Hallar la derivada de la función  $f(t) = \sin^3 t \cos t$ .

**Solución.-**  $f'(t) = \sin^2 t(3 \cos^2 t - \sin^2 t)$ .

37. Hallar la derivada de la función  $y = a\sqrt{\cos 2x}$ .

**Solución.-**  $y' = -\frac{a \sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$ .

38. Hallar la derivada de la función  $y = \frac{1}{2} \tan^2 x$ .

**Solución.-**  $y' = \tan x \sec^2 x$ .

39. Hallar la derivada de la función  $y = \ln \cos x$ .

**Solución.-**  $y' = -\tan x$ .

40. Hallar la derivada de la función  $y = \ln \tan x$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{2}{\sin 2x}$ .

41. Hallar la derivada de la función  $y = \ln \sin^2 x$ .

**Solución.-**  $y' = 2 \cot x$ .

42. Hallar la derivada de la función  $y = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$ .

**Solución.-**  $y' = \sin x + \cos x$ .

43. Hallar la derivada de la función  $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{1}{\cos x}$ .

44. Hallar la derivada de la función  $f(x) = \sin(\ln x)$ .

**Solución.-**  $f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$ .

45. Hallar la derivada de la función  $f(x) = \tan(\ln x)$ .

**Solución.-**  $f'(x) = \frac{\sec^2(\ln x)}{x}$ .

46. Hallar la derivada de la función  $f(x) = \sin(\cos x)$ .

**Solución.-**  $f'(x) = -\sin x \cos(\cos x)$ .

47. Hallar la derivada de la función  $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{2}{1-x^2}$ .

48. Hallar la derivada de la función  $y = \log_3(x^2 - \sin x)$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x) \ln 3}$ .

49. Hallar la derivada de la función  $y = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{4x}{1-x^4}$ .

50. Hallar la derivada de la función  $y = \ln(x^2 + x)$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{2x+1}{x^2+x}$ .

51. Hallar la derivada de la función  $y = \ln(x^3 - 2x + 5)$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$ .

52. Hallar la derivada de la función  $y = x \ln x$ .

**Solución.-**  $y' = \ln x + 1$ .

53. Hallar la derivada de la función  $y = \ln^3 x$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{3 \ln^2 x}{x}$ .

54. Hallar la derivada de la función  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ .

55. Hallar la derivada de la función  $y = \ln(\ln x)$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{1}{x \ln x}$ .

56. Hallar la derivada de la función  $y = e^{(4x+5)}$ .

**Solución.-**  $y' = 4e^{(4x+5)}$ .

57. Hallar la derivada de la función  $y = a^{x^2}$ .

**Solución.-**  $y' = 2xa^{x^2} \ln a$ .

58. Hallar la derivada de la función  $y = 7^{(x^2+2x)}$ .

**Solución.-**  $y' = 2(x+1)7^{(x^2+2x)} \ln 7$ .

59. Hallar la derivada de la función  $y = e^x(1-x^2)$ .

**Solución.-**  $y' = e^x(1-2x-x^2)$ .

60. Hallar la derivada de la función  $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ .

**Solución.-**  $y' = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ .



61. Hallar la derivada de la función  $y = e^{\sin x}$ .

**Solución.-**  $y' = e^{\sin x} \cos x$ .

62. Hallar la derivada de la función  $y = a^{\tan nx}$ .

**Solución.-**  $y' = na^{\tan nx} \sec^2 nx \ln a$ .

63. Hallar la derivada de la función  $y = e^{\cos x} \sin x$ .

**Solución.-**  $y' = e^{\cos x} (\cos x - \sin^2 x)$ .

64. Hallar la derivada de la función  $y = e^x \ln(\sin x)$ .

**Solución.-**  $y' = e^x (\cot x + \ln(\sin x))$ .

65. Hallar la derivada de la función  $y = x^{\frac{1}{x}}$ .

**Solución.-**  $y' = x^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$ .

66. Hallar la derivada de la función  $y = x^{\ln x}$ .

**Solución.-**  $y' = x^{\ln x - 1} \ln x^2$ .

67. Hallar la derivada de la función  $y = x^x$ .

**Solución.-**  $y' = x^x (1 + \ln x)$ .

68. Hallar la derivada de la función  $y = e^{x^x}$ .

**Solución.-**  $y' = e^{x^x} (1 + \ln x)x^x$ .



# Integrales

## Tabla de integrales inmediatas

$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$	$\int f(x)^p f'(x) dx = \frac{f(x)^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln  f(x)  + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int f'(x) \sin f(x) dx = -\cos f(x) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int f'(x) \cos f(x) dx = \sin f(x) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\cot f(x) + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \arctan f(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arcsin f(x) + C$

## Tabla de integrales inmediatas (continuación)

$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$	$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arccos f(x) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int f'(x)a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$

## Ejercicios de integrales indefinidas

1. Calcular la integral  $\int x^5 dx$ .

**Solución.-**  $\frac{x^6}{6} + C$ .

2. Calcular la integral  $\int (x + \sqrt{x}) dx$ .

**Solución.-**  $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$ .

3. Calcular la integral  $\int \left( \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$ .

**Solución.-**  $6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x} + C$ .

4. Calcular la integral  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$ .

5. Calcular la integral  $\int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + C$ .

6. Calcular la integral  $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$ .

7. Calcular la integral  $\int e^{5x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{5}e^{5x} + C$ .

8. Calcular la integral  $\int \cos 5x dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\sin 5x}{5} + C$ .

9. Calcular la integral  $\int \sin ax dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{\cos ax}{a} + C$ .

10. Calcular la integral  $\int \frac{\ln x}{x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$ .

11. Calcular la integral  $\int \frac{1}{\sin^2 3x} dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{\cot 3x}{3} + C$ .

12. Calcular la integral  $\int \frac{1}{\cos^2 7x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\tan 7x}{7} + C$ .

13. Calcular la integral  $\int \frac{1}{3x-7} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{3} \ln |3x-7| + C$ .

14. Calcular la integral  $\int \frac{1}{1-x} dx$ .

**Solución.-**  $-\ln |1-x| + C$ .

15. Calcular la integral  $\int \frac{1}{5-2x} dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{1}{2} \ln |5-2x| + C$ .

16. Calcular la integral  $\int \tan 2x dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$ .

17. Calcular la integral  $\int \sin^2 x \cos x dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\sin^3 x}{3} + C$ .

18. Calcular la integral  $\int \cos^3 x \sin x dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$ .

19. Calcular la integral  $\int x\sqrt{x^2+1}dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$ .

20. Calcular la integral  $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + C$ .

21. Calcular la integral  $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{1}{\sin x} + C$ .

22. Calcular la integral  $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2\cos^2 x} + C$ .

23. Calcular la integral  $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\tan^2 x}{2} + C$ .

24. Calcular la integral  $\int \frac{\cot x}{\sin^2 x}dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{\cot^2 x}{2} + C$ .

25. Calcular la integral  $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\ln^2(x+1)}{2} + C$ .

26. Calcular la integral  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x+1}}dx$ .

**Solución.-**  $\sqrt{2\sin x+1} + C$ .

27. Calcular la integral  $\int \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2(1+\cos 2x)} + C$ .

28. Calcular la integral  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$ .

**Solución.-**  $2\sqrt{1+\sin^2 x} + C$ .

29. Calcular la integral  $\int \frac{\sqrt{\tan x+1}}{\cos^2 x}dx$ .

**Solución.-**  $\frac{2}{3}\sqrt{(\tan x+1)^3} + C$ .

30. Calcular la integral  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\ln^3 x}{3} + C$ .

31. Calcular la integral  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\arcsin^2 x}{2} + C$ .

32. Calcular la integral  $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$ .

33. Calcular la integral  $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + C$ .

34. Calcular la integral  $\int e^{2x} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2} e^{2x} + C$ .

35. Calcular la integral  $\int e^{\frac{x}{2}} dx$ .

**Solución.-**  $2e^{\frac{x}{2}} + C$ .

36. Calcular la integral  $\int e^{\sin x} \cos x dx$ .

**Solución.-**  $e^{\sin x} + C$ .

37. Calcular la integral  $\int 3^x e^x dx$ .

**Solución.-**  $\frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C$ .

38. Calcular la integral  $\int e^{-3x} dx$ .

**Solución.-**  $-\frac{1}{3} e^{-3x} + C$ .

39. Calcular la integral  $\int e^{x^2+4x+3} (x+2) dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2} e^{x^2+4x+3} + C$ .

40. Calcular la integral  $\int \frac{1}{1+2x^2} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x) + C$ .

41. Calcular la integral  $\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(\sqrt{3}x) + C$ .

42. Calcular la integral  $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$ .

**Solución.-**  $\arcsin \frac{x}{3} + C$ .

43. Calcular la integral  $\int \frac{1}{4+x^2} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$ .



## Integración por partes

Recordemos la fórmula de la deriva del producto de funciones

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

que expresada bajo forma de diferencial da lugar a

$$d[u(x)v(x)] = d[u(x)]v(x) + u(x)d[v(x)].$$

De donde se obtiene,

$$u(x)d[v(x)] = d[u(x)v(x)] - v(x)d[u(x)].$$

Integrando ahora ambos miembros tendremos

$$\int u(x)d[v(x)] = u(x)v(x) - \int v(x)d[u(x)],$$

que se escribe también en forma abreviada,

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

Esta expresión es conocida como la *fórmula de la integración por partes* y es de gran utilidad para la resolución de integrales. Se aplica a la resolución de las integrales  $\int u dv$  a partir de la integral  $\int v du$  que se supone más sencilla. La aplicación de (1) exige primero identificar adecuadamente en el integrando las funciones  $u(x)$  y  $v(x)$ . Veamos un ejemplo

**Ejemplo 1** Si queremos calcular la integral

$$\int x^3 \ln x dx,$$

observemos que la integral de  $x^3$  es inmediata y que la derivada de  $\ln x$  es también muy sencilla. Así, si asignamos

$$u = \ln x \quad y \quad dv = x^3 dx,$$

tendremos

$$du = \frac{dx}{x} \quad y \quad v = \frac{x^4}{4} + C_1,$$

si integramos ahora

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln x dx &= \int \ln x \left[ d \left( \frac{x^4}{4} + C_1 \right) \right] \\ &= \left( \frac{x^4}{4} + C_1 \right) \ln x - \int \left( \frac{x^4}{4} + C_1 \right) \frac{dx}{x} \\ &= \left( \frac{x^4}{4} + C_1 \right) \ln x - \int \left( \frac{x^3}{4} + \frac{C_1}{x} \right) dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C. \end{aligned}$$

Observemos que la primera constante de integración  $C_1$  se cancela de la respuesta final ( $C_1 \ln x - C_1 \ln x$ ). Este es siempre el caso cuando integramos por partes, por ello, en la práctica, nunca incluimos una constante de integración en  $v(x)$ , simplemente tomaremos para  $v(x)$  cualquier primitiva de  $dv(x)$ .

## Algunos tipos de integrales que se resuelven por partes

$\int x^n e^x dx$ $u = x^n$ $dv = e^x dx$	$\int x^n \sin x dx$ $u = x^n$ $dv = \sin x dx$
$\int x^n \cos x dx$ $u = x^n$ $dv = \cos x dx$	$\int x^n \ln x dx$ $u = \ln x$ $dv = x^n dx$
$\int \arctan x dx$ $u = \arctan x$ $dv = dx$	$\int \arcsin x dx$ $u = \arcsin x$ $dv = dx$
$\int \ln x dx$ $u = \ln x$ $dv = dx$	

## Ejercicios de integración por partes

1. Calcular la integral  $\int x e^x dx$ .

**Solución.-**  $x e^x - e^x + C$ .

2. Calcular la integral  $\int \ln x dx$ .

**Solución.-**  $x \ln x - x + C$ .

3. Calcular la integral  $\int x^2 e^{3x} dx$ .

**Solución.-**  $e^{3x} \left( \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27} \right) + C$ .

4. Calcular la integral  $\int x^3 e^{-x} dx$ .

**Solución.-**  $-e^{-x} (x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C$ .

5. Calcular la integral  $\int x \sin x dx$ .

**Solución.-**  $-x \cos x + \sin x + C$ .

6. Calcular la integral  $\int x^2 \cos 2x dx$ .

**Solución.-**  $\frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$ .

7. Calcular la integral  $\int e^x \sin x dx$ .

**Solución.-**  $\frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + C$ .

8. Calcular la integral  $\int x^5 e^{x^3} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{e^{x^3}}{3} (x^3 - 1) + C$ .

## Ejercicios de integrales definidas y cálculo de áreas

1. Calcular la integral definida  $\int_0^1 x^4 dx$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{5}$ .

2. Calcular la integral definida  $\int_0^1 e^x dx$ .

**Solución.-**  $e - 1$ .

3. Calcular la integral definida  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ .

**Solución.-** 1.

4. Calcular la integral definida  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ .

**Solución.-**  $\frac{\pi}{4}$ .

5. Hallar el área de la figura comprendida entre la curva  $y = 4 - x^2$  y el eje  $X$ .

**Solución.-**  $10\frac{2}{3}$ .

6. Hallar el área de la figura comprendida entre las curvas  $y^2 = 9x$  e  $y = 3x$ .

**Solución.-**  $\frac{1}{2}$ .

7. Hallar el área de la figura limitada por la hipérbola equilátera  $xy = a^2$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = a$  y  $x = 2a$ .

**Solución.-**  $a^2 \ln 2$ .