Completar cuadrados en Cuatro pasos. Ejemplos y Ejercicios.

El objetivo es aprender a completar cuadrados. Para esto, es necesario conocer los productos notables:

$$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2 \qquad y \qquad (x-a)^2 = x^2-2ax+a^2.$$

El segundo miembro de estas ecuaciones se conoce como trinomio cuadrado perfecto, ya que es el resultado de desarrollar el cuadrado de una suma. Vamos a querer transformar expresiones del tipo

$$x^2+Bx, \quad x^2+Bx+C \qquad y \qquad Ax^2+Bx+C$$

de forma tal que incluyan un trinomio cuadrado perfecto y por lo tanto, un producto notable.

Caso i: Comencemos con una expresión del tipo x^2+Bx, con B distinto de cero.

Para que esta expresión forme parte de un trinomio cuadrado perfecto, se debe cumplir que el término Bx sea el doble del primero por el segundo sumando de un producto de la forma $(x+D)^2$.

Es decir, como

$$(x+D)^2= x^2+2Dx+D^2$$

y solo tenemos x^2+Bx, se debe cumplir que 2D=B. Por lo tanto, D=B/2. Así, el producto que nos interesa es $\left(x+\frac{B}{2}\right)^2$.

Pero

$$\left(x+\frac{B}{2}\right)^2 = x^2+\frac{2B}{2}x+\left(\frac{B}{2}\right)^2 = [x^2+Bx] + \left(\frac{B}{2}\right)^2.$$

Observe que el término $\left(\frac{B}{2}\right)^2$ no aparece en la expresión x^2+Bx. Sin embargo, como el 0 es el neutro aditivo de los números reales, podemos escribir

$$x^2+Bx = x^2+Bx+0.$$

Siendo $\left(\frac{B}{2}\right)^2$ un número real, podemos escribir $0 = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2$, con lo cual

$$x^2+Bx = x^2+Bx+\left(\frac{B}{2}\right)^2-\left(\frac{B}{2}\right)^2.$$

En este punto, hemos generado el trinomio cuadrado perfecto que requeríamos: $x^2+Bx+\left(\frac{B}{2}\right)^2$. Aunque en la expresión queda el término $-\left(\frac{B}{2}\right)^2$. Sin embargo, esto no nos molesta, pues formará parte de la completación de cuadrados. Luego, podemos escribir

$$x^2 + Bx = x^2 + Bx + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2.$$

Sabiendo que $\left(x + \frac{B}{2}\right)^2 = x^2 + Bx + \left(\frac{B}{2}\right)^2$. Se sigue que

$$x^2 + Bx = \left(x + \frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2$$

siendo esta es la completación de cuadrados buscada.

En resumen, podemos seguir los siguientes pasos para completar cuadrados en una expresión de la forma $x^2 + Bx$:

1. Identificar el coeficiente de la variable x, que en este caso la hemos llamado B,
2. Tomar la mitad de esta coeficiente, es decir $\frac{B}{2}$,
3. Escribir el producto notable encontrado $\left(x + \frac{B}{2}\right)^2$
4. Restar el cuadrado de $\frac{B}{2}$ en la expresión: $x^2 + Bx = \left(x + \frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2$.

Caso ii: Si la expresión es del tipo $x^2 + Bx + C,\ \ B \neq 0,\ \ C \neq 0$. En esta situación, seguimos los pasos 1-4 del caso i y al final sumamos el número C.

Observe que en los casos i y ii, el coeficiente de x^2 es 1. Luego, si el coeficiente de x^2 es distinto de 1, se tiene el tercer caso:

Caso iii: Si la expresión es del tipo $Ax^2 + Bx + C,\ \ A \neq 1,\ \ B \neq 0$.

En este caso, es necesario primero sacar el factor común A de los sumandos que contienen la variable x:

$$A\left[x^2 + \frac{B}{A}x\right] + C.$$

Después seguimos los pasos 1 a 4 para la expresión que está dentro de los corchetes, para obtener:

$$A\left[x^2 + \frac{B}{A}x\right] + C = A\left[\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 - \left(\frac{B}{2A}\right)^2\right] + C.$$

Ahora, aplicando la propiedad distributiva, se obtiene

$$A\left[\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 - \left(\frac{B}{2A}\right)^2\right] + C = A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 - A\left(\frac{B}{2A}\right)^2 + C.$$

Por lo tanto, la completación de cuadrados queda:

$$Ax^2 + Bx + C = A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 - A\left(\frac{B}{2A}\right)^2 + C.$$

Ejemplos: Hacer completación de cuadrados en las siguientes expresiones:

1. $x^2 + x$
   Siguiendo los pasos indicados tenemos:
   - El coeficiente de x es 1.
   - La mitad de 1 es ½ .
   - El producto que nos interesa es $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.
   - La completación queda como $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

   Por lo tanto $x^2 + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

2. $x^2 - 3x$
   Siguiendo los pasos indicados tenemos:
   - El coeficiente de x es -3.
   - La mitad de 1 es -3/2.
   - El producto que nos interesa es $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$.
   - La completación queda como $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

   Por lo tanto $x^2 - 3x = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

3. $x^2 + \frac{1}{2}x$
   Siguiendo los pasos indicados tenemos:
   - El coeficiente de x es 1/2.
   - La mitad de 1/2 es 1/4.
   - El producto que nos interesa es $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2$.
   - La completación queda como $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$.

   Por lo tanto $x^2 + \frac{1}{2}x = \left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$.

4. $x^2 + \sqrt{2}x$
   Siguiendo los pasos indicados tenemos:
   - El coeficiente de x es $\sqrt{2}$.
   - La mitad de $\sqrt{2}$ es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   - El producto que nos interesa es $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.
   - La completación queda como $\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$.

   Por lo tanto $x^2 + \sqrt{2}x = \left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$. Observación: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

5. $x^2 + 2x - 1$
   Siguiendo los pasos indicados tenemos: $x^2 + 2x - 1 = [x^2 + 2x] - 1$:

- El coeficiente de x es 2.
- La mitad de 2 es 1.
- El producto que nos interesa es $(x+1)^2$.
- La completación queda como $(x+1)^2-(1)^2=(x+1)^2-1$.

Por lo tanto

$$x^2+2x-1=[x^2+2x]-1=[(x+1)^2-1]-1=(x+1)^2-1-1=(x+1)^2-2.$$

$$x^2+2x-1=(x+1)^2-2.$$

6. x^2-4x-3
   Siguiendo los pasos indicados tenemos: $x^2-4x-3=[x^2-4x]-3$
   - El coeficiente de x es -4.
   - La mitad de -4 es -2.
   - El producto que nos interesa es $(x-2)^2$.
   - La completación queda como $(x-2)^2-(2)^2=(x-2)^2-4$.

   Por lo tanto

$$x^2-4x-3=[x^2-4x]-3=[(x-2)^2-4]-3=(x-2)^2-4-3=(x-2)^2-7.$$

$$x^2-4x-3=(x-2)^2-7.$$

7. $2x^2+8x+5$
   Siguiendo los pasos indicados tenemos: $2x^2+8x+5=[2x^2+8x]+5$
   - Primero sacamos factor común: $2x^2+8x+5=2[x^2+4x]+5$ y completamos cuadrados en la expresión $[x^2+4x]$
   - El coeficiente de x es 4.
   - La mitad de 4 es 2.
   - El producto que nos interesa es $(x+2)^2$.
   - La completación queda como $(x+2)^2-(2)^2=(x+2)^2-4$.

   Por lo tanto

$$2x^2+8x+5=2[x^2+4x]+5=2[(x+2)^2-4]+5=2(x+2)^2-8+5=2(x-2)^2-3.$$

$$2x^2+8x+5=2(x-2)^2-3.$$

8. $-3x^2-7x-1$
   Siguiendo los pasos indicados tenemos: $-3x^2-7x-1=[-3x^2-7x]-1$
   - Primero sacamos factor común: $-3x^2-7x-1=-3\left[x^2+\frac{7}{3}x\right]-1$ y completamos cuadrados en la expresión $\left[x^2+\frac{7}{3}x\right]$
   - El coeficiente de x es 7/3.
   - La mitad de 7/3 es 7/6.
   - El producto que nos interesa es $\left(x+\frac{7}{6}\right)^2$.
   - La completación queda como $\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\left(x+\frac{7}{6}\right)^2-\frac{49}{36}$.

Por lo tanto

$$-3x^2 - 7x - 1 = -3\left[x^2 + \frac{7}{3}x\right] - 1 = -3\left[\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36}\right] - 1 = -3\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{3(49)}{36} - 1$$

$$= -3\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{49 - 12}{12} = -3\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{37}{12}.$$

$$-3x^2 - 7x - 1 = -3\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{37}{12}.$$

Ejercicios: Completar cuadrados en las siguientes expresiones:

1. $x^2 + 4x$
2. $x^2 - 4x$
3. $x^2 + 20x$
4. $x^2 + 18x$
5. $x^2 + 2x - 3$
6. $x^2 - 5x + 2$
7. $x^2 + 8x + 1$
8. $x^2 - 7x - \frac{2}{3}$
9. $2x^2 + x + 1$
10. $3x^2 + 21x - 2$
11. $4x^2 + 12x + 2$
12. $-x^2 + 5x - 1$
13. $-3x^2 + 6x - 2$
14. $-4x^2 - 8x$
15. $-5x^2 + 25x - 10$
16. $-x^2 + x + 1$
17. $x^2 - 2x + y^2 + 8y$
18. $2x^2 - 4x - y^2 + y$
19. $-x^2 + 2x + y^2 - 8y$
20. $x^2 - x + 3y^2 + 8y - 2$
21. $9x^2 - 2x + 9y^2 + 8y - 3$
22. $x^2 - 2x + 8y$