UN EJEMPLO DE COMO TRAZAR LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN EN COORDENADAS RECTANGULARES

PROF. RICHARD ROSALES R.

Para trazar la gráfica de una función en coordenadas rectangulares se deben seguir una serie de pasos, para obtener información de su comportamiento. En este ejemplo se estudia una función que es periodica. Se quiere trazar la gráfica de la función

$$f(x) = \ln(e^{\text{sen}(x)} - 1)^2.$$

1. Dominio. El dominio es el conjunto $\{x \in R : e^{\text{sen}(x)} - 1 \neq 0\}$.

$$e^{\text{sen}(x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\text{sen}(x)} = 1 \Leftrightarrow \text{sen}\, x = \ln 1 = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in Z.$$

2. f es $2\pi-$periodica.

$$f(x + 2\pi) = \ln(e^{\text{sen}(x+2\pi)} - 1)^2 = \ln(e^{\text{sen}(x)} - 1)^2 = f(x), \forall x \in Dom(f).$$

   Luego, solo es necesario estudiar la función en el conjunto $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

3. Cortes con los ejes.

   No hay corte con el eje y, pues $x = 0$ no está en el dominio.

   Cortes con el eje x: Para encontrarlos, se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$:

$$\ln(e^{\text{sen}(x)} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (e^{\text{sen}(x)} - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow |e^{\text{sen}(x)} - 1| = 1 \Leftrightarrow e^{\text{sen}(x)} - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{\text{sen}(x)} - 1 = 1 \ \vee \ e^{\text{sen}(x)} - 1 = -1$$

   $e^{\text{sen}(x)} - 1 = -1 \Leftrightarrow e^{\text{sen}(x)} = 0$, esto no ocurre nunca, pues el rango de la función exponencial es $(0, +\infty)$, luego solo existirán cortes si $e^{\text{sen}(x)} - 1 = 1$.

$$e^{\text{sen}(x)} - 1 = 1 \Leftrightarrow e^{\text{sen}(x)} = 2 \Leftrightarrow \text{sen}(x) = \ln(2) \Leftrightarrow$$

$$x = \arcsin(\ln(2)) \approx 0{,}7658 \, o \, x = \pi - \arcsin(\ln(2)) \approx 2{,}3757 \text{ (ver Figura 1)}$$

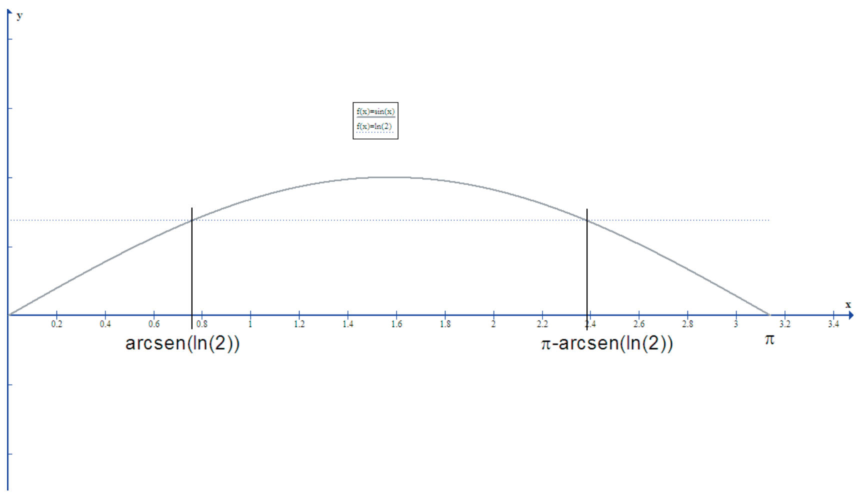

Figura 1. Corte entre sen(x) y ln(2)

Universidad de Los Andes, Escuela Básica de Ingeniería. e-mail: rrra@ula.ve; http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/rrra/.

4. Monotonía. Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica, se debe estudiar el signo de la primera derivada.
$$f'(x) = \frac{2(e^{\text{sen}(x)} - 1)e^{\text{sen}(x)} \cos(x)}{(e^{\text{sen}(x)} - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0.$$
Si $x \in (0, \pi/2]$:
$$e^{\text{sen}(x)} - 1 > 0 \wedge e^{\text{sen}(x)} > 0 \wedge \cos(x) \geq 0$$
luego $f' \geq 0$, por lo tanto f es creciente en $(0, \pi/2]$.
   Si $x \in [\pi/2, \pi)$:
$$e^{\text{sen}(x)} - 1 > 0 \wedge e^{\text{sen}(x)} > 0 \wedge \cos(x) \leq 0$$
luego $f' \leq 0$, por lo tanto f es decreciente en $[\pi/2, \pi)$.
   Si $x \in (\pi, 3\pi/2]$:
$$e^{\text{sen}(x)} - 1 < 0 \wedge e^{\text{sen}(x)} > 0 \wedge \cos(x) \leq 0$$
luego $f' \geq 0$, por lo tanto f es creciente en $(\pi, 3\pi/2]$.
   Si $x \in [3\pi/2, 2\pi)$:
$$e^{\text{sen}(x)} - 1 < 0 \wedge e^{\text{sen}(x)} > 0 \wedge \cos(x) \geq 0$$
luego $f' \leq 0$, por lo tanto f es decreciente en $[3\pi/2, 2\pi)$.
   Por el criterio de la primera derivada, se alcanza máximo en los puntos $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$ y sus valores son
$$f(\pi/2) = \ln(e - 1)^2 > 0,$$
$$f(3\pi/2) = \ln\left(\frac{1 - e}{e}\right)^2 < 0,$$
5. Concavidad. Para determinar la concavidad de la gráfica, se calcula el signo de la segunda derivada
$$f''(x) = \frac{2(e^{\text{sen}(x)} \cos^2(x) - e^{\text{sen}(x)} \text{sen}(x))(e^{\text{sen}(x)} - 1) - 2e^{\text{sen}(x)} \cos^2(x) e^{\text{sen}(x)}}{(e^{\text{sen}(x)} - 1)^2}.$$
Luego de algunos cálculos, se llega a
$$f''(x) = -2\frac{e^{\text{sen}(x)}[\text{sen}(x)(e^{\text{sen}(x)} - 1) + \cos^2(x)]}{(e^{\text{sen}(x)} - 1)^2} < 0,$$
por lo tanto f es concava hacia abajo en su dominio (no es difícil ver que $\text{sen}(x)$ y $e^{\text{sen}(x)} - 1$ tienen el mismo signo en el conjunto estudiado).
6. Asíntotas. Solo podrían existir asíntotas verticales.
$$\lim_{x \to o^+} \ln(e^{\text{sen}(x)} - 1)^2 = -\infty$$
$$\lim_{x \to \pi^-} \ln(e^{\text{sen}(x)} - 1)^2 = -\infty$$
$$\lim_{x \to \pi^+} \ln(e^{\text{sen}(x)} - 1)^2 = -\infty$$
$$\lim_{x \to 2\pi^-} \ln(e^{\text{sen}(x)} - 1)^2 = -\infty$$
Asi, existen tres asíntotas verticales (hacia abajo), $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$

Con toda la información encontrada se puede hacer la gráfica de la función en el conjunto estudiado y se reproduce a todo el dominio, aprovechando la periodicidad. La gráfica se puede observar en la Figura 2.

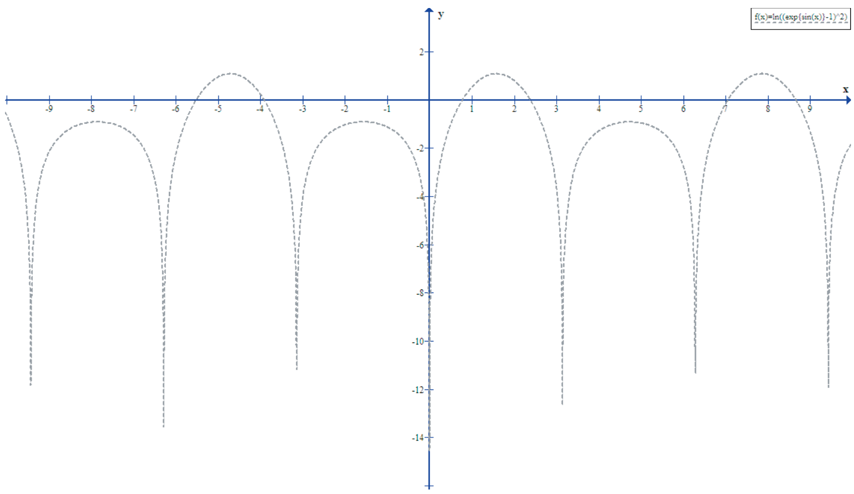

Figura 2. Gráfica de $f(x) = \ln(e^{\operatorname{sen} x} - 1)^2$