Capítulo 1

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

1. Determine el orden y el grado de las siguientes ecuaciones diferenciales.

   a) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = cosx$

   b) $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2(\dfrac{dy}{dx})^4 + y = 0$

   c) $yy' + 2y = 1 + x^2$

   d) $senxy''' - cosxy' = 2$

   e) $(1-y^2)dx + xdy = 0$

   f) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 + (\dfrac{d^2y}{dx^2})^2}$

   g) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sqrt[4]{x + (\dfrac{dx}{dt})^2}$

   h) $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$

   i) $y' + x = (y - xy')^{-3}$

   j) $e^{y'''} - xy'' + y = 0$

   k) $(y^{(3)})^2 - x(y'')^4 + yx = 0$

   l) $(\dfrac{d^2u}{dt^2})^3 + u^4 = 1$

2. Encuentre la ecuación diferencial asociada a cada uno de los siguientes problemas.

   a) En cada punto (x, y) del plano la pendiente de la tangente es igual al cuadrado de las abscisa del punto.

   b) Una curva está definida por la condición de que la suma de los segmentos x e y interceptados por sus tangentes en los ejes coordenados es siempre igual a 2.

   c) La familia de circunferencias de radio fijo r cuyos centros están en el eje x.

   d) El área limitada por el arco de una curva, el eje x y las dos ordenadas, una fija y una variable, es igual al doble de la longitud del arco entre las ordenadas.

   e) De todas las circunferencias del plano.

   f) De todas las líneas rectas que están a la distancia unidad del origen.

   g) En cada punto (ρ, θ) la tangente del ángulo determinado por el radio vector y la tangente es igual a $1/3$ de la tangente del ángulo vector.

h) Cien gramos de azúcar de caña que están en agua se convierten en dextrosa a una velocidad que es proporcional a la cantidad que aún no se ha convertido. Hállese la ecuación diferencial que exprese la velocidad de conversión después de t minutos.

i) El radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad Q del radio presente.

j) La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población P es proporcional a la raíz cuadrada de P.

k) La aceleración de dv/dt de un Ford Focus es proporcional a la diferencia entre 250 Km/h y la velocidad del automóvil.

l) En una ciudad con una población fija de P personas, la tasa de cambio con respecto al tiempo del número N de personas que han contraído cierta enfermedad contagiosa es proporcional al producto del número de quienes están enfermas y el número de las que no lo están.

3. Determine si existen soluciones únicas para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a) $y' = 3 + 2y$; $y(1) = 0$.

b) $y' = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; $y(0) = 0$.

c) $y' = ycscx$; $y(0) = 1$.

d) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4}}$; $y(3) = 2$

4. Discuta la existencia y unicidad de una solución al problema de valor inicial

$$y' = P(x)y + Q(x)y^n, \qquad y(x_0) = y_0.$$

5. Verifique que la función indicada es solución de la ecuación diferencial dada.

a) $x^2y'' - xy' + 2y = 0$; $y = xcos(lnx)$, $x > 0$.

b) $y'' + y' - 12y = 0$; $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-4x}$.

c) $y' + 2xy = 1$; $y = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt + C_1e^{-x^2}$.

d) $xy' - 2y = 0$; $y = -x^2$ si $x < 0$, $y = x^2$ si $x \geq 0$.

e) $(y')^2 = 9xy$; $y = 0$ si $x < 0$, $y = x^3$ si $x \geq 0$.

f) $(\dfrac{dy}{dx})^3 + 2x\dfrac{dy}{dx} = 2y + 1$; $x = -\dfrac{3}{2}t^2$, $y = -t^3 - 1/2$.

g) $y = xy' + (y')^2 - lny'$; $x = -2t + 1/t$, $y = -t^2 - lnt + 1$.

6. Determine una region en el plano XY en la cual la ecuación diferencial dada tenga una solución única por cada punto (x_0, y_0) de la región.

   a) $\dfrac{dy}{dx} = y^{2/3}$.
   b) $(4 - y^2)y' = x^2$.
   c) $\dfrac{dy}{dx} = x^3 cosy$.
   d) $(y - x)y' = y + x$.
   e) $\dfrac{dy}{dx} = (x - 1)e^{y/(x-1)}$.

7. Compruebe que la familia uniparamétrica de soluciones de $y = xy' + (y')^2$ es $y = Cx + C^2$. Determine un valor de k tal que $y = kx^2$ sea una solución singular de la ecuación diferencial dada.

8. Compruebe que una familia uniparamétrica de soluciones de $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$ es $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$. Demuestre que la relación $x^2 + y^2 = 1$ define una solución singular de la ecuación en el intervalo $-1 < x < 1$.

9. Encuentre la solución de la ecuación diferencial dada utilizando el método de separación de variables. (En algunos casos tendrá que usar un cambio de variable apropiado).

   a) $\dfrac{dy}{dx} = cos(2x)$.
   b) $dx - x^2 dy = 0$.
   c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{x^2}$.
   d) $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$.
   e) $e^x y \dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$.
   f) $(4y + yx^2)dy - (2x + xy^2)dx = 0$.
   g) $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = y^2 dx$.
   h) $2\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{y} = 2\dfrac{x}{y}$.
   i) $(e^y + 1)^2 e^{-y} dx + (e^x + 1)^3 e^{-x} dy = 0$.
   j) $\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx} = (1 + x^2)^{-1/2}(1 + y^2)^{1/2}$.

k) $\dfrac{dy}{dx} = (x+y+1)^2.$

l) $\dfrac{dy}{dx} = tan(x+y).$

m) $\dfrac{dy}{dx} = 2+\sqrt{y-2x+3}.$

n) $\dfrac{dy}{dx} = 1+e^{y-x+5}.$

ñ) $ydx + (x^3y^2 + x^3)dy = 0.$

o) $x^3e^{2x^2+3y^2}dx - y^3e^{-x^2-2y^2}dy = 0.$

p) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y^2 - x^4}{4xy}.$

q) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-xy}{2x^2y}.$

r) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2+3xy^2}{4x^2y}.$

s) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-xy^2}{x+x^2y}.$

t) $y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0.$

u) $(y-xy^2)dx - (x+x^2y)dy = 0.$

v) $y' = (y-4x)^2$

w) $(2+2x^2y^{1/2})ydx + (x^2y^{1/2}+2)xdy = 0.$

x) $(e^{-y}+1)senxdx = (1+cosx)dy;\ y(0) = 0.$

y) $\dfrac{dx}{dy} = 4(x^2+1);\ x(\pi/4) = 1.$

10. La pendiente de una familia de curvas en cualquier punto (x, y) está dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x+xy^2}{2y+x^2y}.$$

Halle la ecuación del miembro de la familia que pasa por $(2, 1)$.

11. Muestre que la ecuación diferencial no separable

$$[F(x) + yG(xy)]dx + xG(xy)dy = 0$$

se convierte en separable al cambiar la variable dependiente de y a v de acuerdo a la transformación $v = xy$.

12. Use el ejercicio anterior para resolver $(x^2 + ysen(xy))dx + xsen(xy)dy = 0$.

13. Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas y reducibles a homogéneas.

    a) $y' = \dfrac{y}{x} - 1$.
    b) $y' = -\dfrac{x+y}{x}$.
    c) $(x - y)ydx - x^2dy = 0$.
    d) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$; $y(4) = 0$.
    e) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$.
    f) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$.
    g) $(4x^2 + 3xy + y^2)dx + (4y^2 + 3xy + x^2)dy = 0$.
    h) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$; $y(2) = 1$.
    i) $x^2y' = 3(x^2 + y^2)tg^{-1}(y/x) + xy$.
    j) $xsen(y/x)\dfrac{dx}{dy} = ysen(y/x) + x$.
    k) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$.
    l) $(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$.
    m) $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$.
    n) $y' = \dfrac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$.
    ñ) $(2x - 2y)dx + (y - 1)dy = 0$.
    o) $(1 + 2e^{y/x}dx + 2e^{x/y}(1 - x/y)dy = 0$.
    p) $(x - 2seny + 3)dx + (2x - 4seny - 3)cosydy = 0$.
    q) $(2x + 3y + 4)dx = (4x + 6y + 1)dy$.
    r) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$.

14. Probar que una recta que pase por el origen interseca a todas las curvas integrales de una ecuación homogénea con el mismo ángulo.

15. Suponga que $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es una ecuación homogénea. Pruebe que las sustituciones $x = rcos\theta$, $y = rsen\theta$ reducen la ecuación a una de variables separables.

16. Utilice el cambio anterior para resolver $x^2(xdx + ydy) + y(xdy - ydx) = 0$.

17. Resuelva $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^5 + 3x^2y^2}{2x^3y - 2y^3}$ haciendo $x = u^p$, $y = v^q$ y escoja las constates p y q apropiadamente.

18. En los siguientes problemas determine si la ecuación diferencial es exacta. Si es exacta resuélvala.

   a) $(2x + 4)dx + (3y - 1)dy = 0$.
   b) $(2y - \frac{1}{x} + cos(3x))\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3ysen(3x) = 0$.
   c) $(1 + lnx + \frac{y}{x})dx = (1 - lnx)dy$.
   d) $(e^y + 2xycoshx)y' + xy^2senhx + y^2coshx = 0$.
   e) $(2ysenxcosx - y + 2y^2e^{xy^2})dx = (x - sen^2x - 4xye^{xy^2})dy$.
   f) $(\frac{3y^2 - x^2}{y^5})\frac{dy}{dx} + \frac{x}{2y^4} = 0$; $y(1) = 1$.
   g) $\frac{dx}{dy} = \frac{xsen^2y}{sen(2x) - tany}$; $y(\pi) = \pi/4$.
   h) $(x^2 + 2ye^{2x})y' + 2xy + 2y^2e^{2x} = 0$; $y(0) = 1$.
   i) $(x + tan^{-1}y)dx + \frac{x + y}{1 + y^2}dy = 0$.
   j) $\frac{2x^{5/2} - 3y^{5/3}}{2x^{5/2}y^{2/3}}dx + \frac{3y^{5/3} - 2x^{5/2}}{3x^{3/2}y^{5/3}}dy = 0$.
   k) $(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1)dx + (x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y)dy = 0$.

19. Demuestre que toda ecuación separable de primer orden también es exacta.

20. Determine la ecuación más general $N(x, y)$ tal que $(ysenx + x^2y - xsecy)dx + N(x, y)dy = 0$ sea exacta y obtenga su solución.

21. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones hallando un factor integrante.

   a) $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$.
   b) $xdy + ydx + 3x^3y^4dy = 0$.
   c) $(ylny - 2xy)dx + (x + y)dy = 0$.
   d) $(x + 2)senydx + xcosydy = 0$.
   e) $(xcosy - yseny)dy + (xseny + ycosy)dx = 0$.

f) $\frac{y}{x}dx + (y^3 - lnx)dy = 0.$

g) $(2ysenx - cos^3x)dx + cosxdy = 0.$

h) $(y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0.$

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}.$

j) $y(2xy + 1)dx + x(1 + 2xy - x^3y^3)dy = 0.$

k) $(xy - 2y^2)dx - (x^2 - 3xy)dy = 0.$

l) $2ydx + x(x^2y - 1)dy = 0.$

22. Resuelva $(2y^2 + 4x^2y)dx + (4xy + 3x^3)dy = 0$ dado que existe un factor integrante de la forma x^py^p, donde p y q son constantes.

23. Seleccionar entre las siguientes ecuaciones las que son lineales y las que son de Bernoulli, establecer la variable dependiente y resolverlas.

a) $\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x.$

b) $\frac{dy}{dx} = y + xy^2.$

c) $xdy - 2ydx = (x - 2)e^xdx.$

d) $\frac{di}{dt} = 6i + 10sen(2t).$

e) $\frac{dy}{dx} + y = y^2e^x.$

f) $xdy + ydx = x^3y^6dx.$

g) $y(1 + y^2)dx = 2(1 - 2xy^2)dy.$

h) $yy' - xy^2 + x = 0.$

i) $(2 + y^2)dx - (xy + 2y + y^3)dy = 0.$

j) $2\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y} + x^3cosy = 0.$

k) $x^2cosy\frac{dy}{dx} = 2xseny - 1.$ Ayuda: $seny = z.$

l) $(xy^3 - y^3 - x^2e^x)dx + 3xy^2dy = 0.$ Ayuda: $y^3 = vx.$

m) $\frac{dy}{dx} + x(x + y) = x^3(x + y)^3 - 1.$

n) $x^2\frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4$; $y(1) = 1/2.$

ñ) $y^{1/2}\dfrac{dy}{dx} + y^{3/2} = 1$; $y(0) = 4$.

o) $xy(1 + xy^2)\dfrac{dy}{dx} = 1$; $y(1) = 0$.

p) $(1 + y^2)dx = (\sqrt{1 + y^2}seny - xy)dy$.

q) $f(y)^2\dfrac{dx}{dy} + 3f(y)f'(y)x = f'(y)$.

24. Muestre que la ecuación diferencial lineal $y' + Py = Qylny$ done P y Q son funciones de x, puede resolverse al hacer $lny = u$. Utilice este resultado para resolver $xy' = 2x^2 + ylny$ y $x\dfrac{dy}{dx} - 4x^2y + 2ylny = 0$.

25. Una solución de $y'sen(2x) = 2y + 2cosx$ permanece acotada cuando $x \to \pi/2$. Hallarla.

26. Encuentre la solución a las siguientes ecuaciones de Clairaut y Lagrange.

a) $y = 2xy' + y'^2$.

b) $y = x(1 + y') + y'^2$.

c) $y = xy' + y' - y'^2$.

d) $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$.

e) $y = -\dfrac{1}{2}y'(2x + y')$.

f) $y = y'tanx - y'^2sec^2x$.

g) $y = xy' + 1 - lny'$.

h) $y = xy' + y'^{-2}$.

i) $xy' - y = e^{y'}$.

j) $y = x\dfrac{dy}{dx} - (\dfrac{dy}{dx})^3$.

27. Una manera alternativa de definir la ecuación de Clairaut es decir que es cualquier ecuación de la forma $F(y - xy', y') = 0$.

a) Compruebe que una familia de soluciones de la última ecuación es $F(y - Cx, C) = 0$.

b) Use el resultado de la parte (a) para resolver $(xy' - y)^3 = y'^2 + 5$.

28. Determine la solución a las siguientes ecuaciones de segundo orden reducibles a primer orden.

a) $y'' = \frac{1}{x}$.

b) $y'' = -\frac{1}{2y^3}$.

c) $y'' = 1 - y'^2$.

d) $xy'' + y' = 0$.

e) $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.

f) $x^2y'' + xy' = 1$.

g) $yy'' = y^2y' + y'^2$.

h) $(x + 1)y'' - (x + 2)y' + x + 2 = 0$.

i) $y' + \frac{1}{4}(y'')^2 = xy''$.

j) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$; $y = 0$, $y' = 1$, para $x = 0$.

k) $yy'' + y'^2 = y'^3$; $y = 1$, $y' = 3$, para $x = 0$.

l) $yy'' + y'^2 - y'^3 lny = 0$.

m) $y'y^2 + yy'' - y'^2 = 0$; $y = 1$, $y' = 2$, para $x = 1$.

n) $y' = x(y'')^2 + (y'')^2$.

ñ) $yy'y'' = y'^3 + (y'')^2$.

29. Obtenga las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dada.

(a) $y = Cx$.	(b) $y = Cx^2$.	(c) $y = \frac{x}{1 + Cx}$.
(d) $x^2 + y^2 = 2Cx$.	(e) $y^3 + 3x^2y = C$.	(f) $Cx^2 + y^2 = 1$.
(g) $4y + x^2 + 1 + Ce^{2y} = 0$	(h) $y = ln(tanx + C)$.	(i) $x^{1/3} + y^{1/3} = C$.
(j) $y^2 = 2x^2(1 - Cx)$.	(k) $y^2 \frac{x^3}{C - x}$.	

30. Encuentre el miembro de la familia de trayectorias ortogonales que pasan por el punto indicado.

(a) $x^2 + Cy^2 = 1$; $(2, 1)$. (b) $x^2 + Cy + y^2$; $(3, -1)$ (c) $y = Ctan(2x) + 1$; $(3, -1)$.

31. Encuentre la constante a para que las familias $y^3 = C_1x$ y $x^2 + ay^2 = C_2^2$ sean ortogonales.

32. Muestre que la familia de parábolas $y^2 = 4Cx + 4C^2$ es "así mismo ortogonal". Grafique algunos miembros.

33. En cálculo se demuestra que para una gráfica en coordenadas polares

$$r\frac{d\theta}{dr} = tan\phi \qquad (*)$$

donde ϕ es el ángulo positivo (medido en sentido opuesto al de las agujas del reloj) formado por el radio vector y la recta tangente al la curva.

a) Demostrar que dos curvas polares $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$ (C_1 y C_2) son ortogonales en un punto de intersección si y solo si

$$(tan\phi_1)_{C_1}(tan\phi_2)_{C_2} = -1$$

b) Utilice (a) y (*) para mostrar que si una ecuación diferencial de una familia de curvas en coordenadas polares (r, θ) está dada por

$$\frac{dr}{d\theta} = F(r, \theta)$$

entonces una ecuación diferencial para la familia de trayectorias ortogonales es

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{F(r, \theta)}$$

34. Obtenga las trayectorias ortogonales de las curvas cuyas ecuaciones polares se dan.

(a) $r = Ccos\theta$. (b) $r = C(sec\theta + tan\theta)$. (c) $r^2 = Csen(2\theta)$.
(d) $r = Ce^{\theta}$. (e) $r = C(1 - cos\theta)$.

35. **APLICACIONES**

a) Si la población de un país se duplica en 50 años, ¿en cuántos años será el triple suponiendo que la velocidad de aumento sea proporcional al número de habitantes?.

b) En cierto cultivo de bacterias la velocidad de aumento es proporcional al número presente. a) Si se ha hallado que el número se duplica en 4 horas , ¿qué número se debe esperar al cabo de 12 horas?. b) Si hay 10^4 al cabo de 3 horas y $4{,}10^4$ al cabo de 15 horas, ¿cuántos habría en un principio?.

c) Según la ley de Newton de enfriamiento, la velocidad a que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del ambiente. Si la temperatura del ambiente es 30^0 y la sustancia se enfría de 100^0 a 70^0 en 15 minutos, ¿cuándo será 40^0 la temperatura de la sustancia?.

d) Cierto producto químico se disuelve en el agua a una velocidad proporcional al producto de la cantidad aún no disuelta y la diferencia entre la concentración en una solución saturada y la concentración en la solución real. Se sabe que en 100g de una solución saturada están disueltos 50g de la sustancia. Si se agitan 30g del producto químico con 100g de agua, en 2 horas se disuelven 10g. ¿Cuántos gramos se disolverán en 5 horas?.

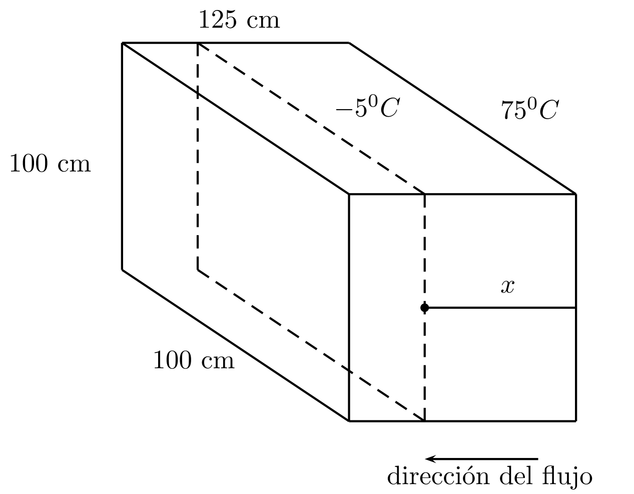
e) Un tanque de 1000 lts. está lleno con salmuera que contiene 60Kg de sal disuelta. Entra agua en el tanque a una velocidad de 2lts. por minuto y la mezcla, conservada uniforme mediante agitación, sale a la misma velocidad. ¿Cuánta sal queda en el tanque después de una hora?.

f) Se ha comprobado que hay una concentración de 0.2 % de CO_2 en una galería subterránea de 150x50x12 dm, por lo que se trata de renovar esta atmósfera con aire del exterior, cuya concentración de CO_2 es del 0.005 %, mediante ventiladores a una velocidad de 9000 dm^3/min. Hállese el porcentaje de CO_2 después de 20 minutos.

g) Bajo ciertas condiciones la cantidad constante Q calorías/segundo de calor que pasa a través de una pared está dada por

$$Q = -kA\frac{dT}{dx}$$

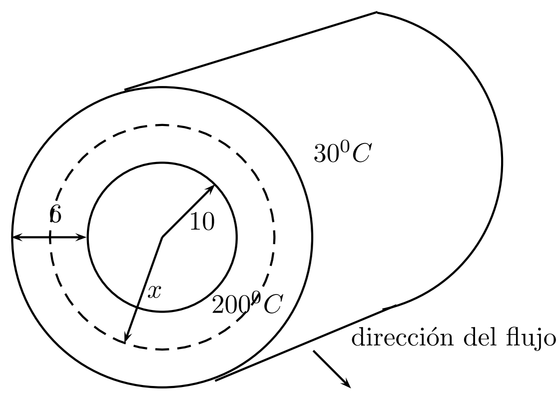
donde
k: es la conductividad del material.
A (cm^2): es la superficie de una cara de la pared perpendicular a la dirección del flujo.
T : es la temperatura a x (cm) de esa cara, de forma que T disminuye cuando x aumenta.
Hallar el número de calorías por hora del calor que pasa a través de 1 m^2 de la pared de una habitación frigorífica de 125 cm de espesor y $k = 0{,}0025$, si la temperatura de la cara interior es de -5^0C y la de la cara exterior es de 75^0C.



h) Un conducto de vapor de 10 cm de diámetro está protegido por un recubrimiento de 6 cm de espesor para el que $k = 0{,}0003$.

1) Hallar la perdida de calor por hora a través de una longitud de un metro de la tubería si su superficie esta a 200^0C y la superficie exterior del recubrimiento está a 30^0C.
2) Hallar la temperatura a una distancia $x > 10\ cm$ del centro de la tubería.

Ayuda: Use el ejercicio anterior.



i) Dos sustancias químicas A y B se combinan para formar un compuesto C. La reacción que resulta entre las dos sustancias químicas es tal que por cada gramo de A se usan 4 gramos de B. Se observan que se forman 30 gramos del compuesto C en 10 minutos. Determine la cantidad de C en un instante cualquiera si la rapidez de la reacción es proporcional a las cantidades A y B restantes y si en un principio hay 50 gramos de A

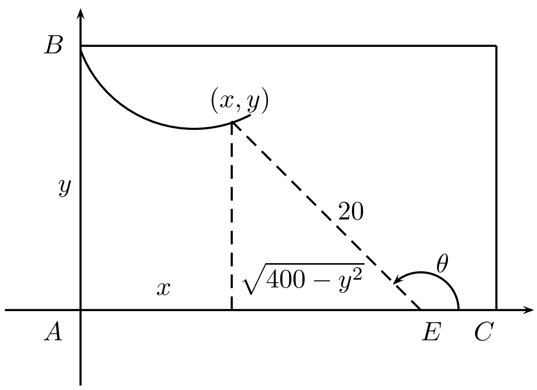
y 32 gramos de B. ¿Qué cantidad de compuesto C hay después de 15 minutos?. Interprete la solución cuando $t \to \infty$.

j) La ecuación diferencial de un circuito que contiene una resistencia R, capacidad C y f.e.m. $e = Esen(wt)$ es

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{de}{dt}.$$

Suponiendo constantes R, C, E, w, hallar la corriente i en el instante t.

k) Un muchacho que está en la esquina A de un embalse rectangular, tiene en el esquina adyacente B una barca atada al extremo de una cuerda de 20 metros de longitud. El muchacho se desplaza hacia C caminando por el borde del embalse y manteniendo tensa la cuerda. Hállese la situación del muchacho y de la barca cuando ésta se encuentra a 12 metros de AC.



l) Un muchacho se mueve en una línea recta de modo que su velocidad excede en 2 a su distancia respecto de un punto fijo de la recta. Si $v = 5$ cuando $t = 0$, hallar la ecuación del movimiento.

m) Hallar el tiempo necesario para que una cantidad de dinero aumente al doble, al 5 % por año, interés compuesto continuo. Sugerencia: $dx/dt = 0{,}05x$, donde x es la suma al cabo de t años.

n) Una pared de ladrillo (k=0.0012) tiene un espesor de 30 cm. Si el parámetro interior esta a 20^0C y el exterior a 0^0C, hallar la temperatura en la pared como una función de la distancia exterior y la pérdida de calor por día a través de un metro cuadrado.

ñ) Un tanque contiene 100 Dl de salmuera obtenida disolviendo 80 kilogramos del sal en agua. Se introduce en el tanque agua pura a una velocidad de 4 Dl/min y la mezcla, conservada homogénea mediante agitación, sale a la misma velocidad, yendo a parar a un segundo tanque que contiene al principio 100 Dl de agua pura. Agitando se mantiene homogénea la mezcla que sale de este segundo tanque a la misma velocidad ya citada. Hallar la cantidad de sal en el segundo tanque al cabo de una hora.

o) Un embudo de 10 cm de diámetro en la parte superior y 1 cm de diámetro en la parte inferior tiene una altura de 24 cm. Si se llena de agua, hallar el tiempo que se tarda en vaciar.

p) El químico C se produce de una reacción que involucra los químicos A y B. La tasa de producción de C varía con el producto de las cantidades instantáneas de A y B presentes. La formación requiere 3 libras de A por cada 2 libras de B. Si inicialmente están presentes 60 libras de cada químico A y B y se forman 15 libras de C en 1 hora, encontrar:

1) La cantidad de C en cualquier tiempo.
2) La cantidad de C después de 2 horas
3) La máxima cantidad de C que se puede formar.

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior

1. En los siguientes problemas, se dan una ecuaciones diferencial homogénea de segundo orden, dos funciones y_1 y y_2. Primero verifique que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial. Luego determine una solución particular de la forma $y = C_1y_1 + C_2y_2$ que satisfaga las condiciones iniciales y de frontera dadas. dadas.

   a) $y'' - y = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.

   b) $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

   c) $y'' + 2y' + y = 0$; $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^x$; $y(0) = 2$, $y(0) = -1$.

2. Demuestre que $y = x^3$ es una solución de $yy'' = 6x^4$ pero que si $c^2 \neq 1$, entonces $y = cx^3$ no es una solución. ¿Qué puede concluir usted acerca de este resultado?.

3. Determine si los pares de funciones en los problemas a continuación son linealmente independientes o linealmente dependientes en la recta real.

   a) $f(x) = \pi$, $g(x) = cos^2x + sen^2x$

   b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2|x|$

   c) $f(x) = xe^x$, $g(x) = |x|e^x$

   d) $f(x) = e^{-4x}$, $g(x) = e^{4x}$

   e) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = x^2 - 1$

   f) $f(x) = sen^2x$, $g(x) = cos^2x$, $h(x) = 2$

   g) $f(x) = senx + cosx$, $g(x) = 3senx - 2cosx$, $h(x) = 4cosx$

   h) $f(x) = arctanx$, $g(x) = arctan(2x)$, $h(x) = arctan(\dfrac{3x}{1-2x^2})$

4. Determine las soluciones de las siguientes ecuaciones

   a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

   b) $y'' + 5y' = 0$

   c) $2y'' - y' - y = 0$

   d) $4y'' + 4y' + y = 0$

   e) $6y'' - 7y' - 20y = 0$

   f) $y'' + y' - 6y = 0$

   g) $y'' - 6y' + 25y = 0$

h) $2y'' - 4y' + 8y = 0$

i) $2y'' + y' - y = 0$

j) $y'' + 4y' + 5y = 0$

k) $y'' + y' = 0$

l) $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(1) = e^2$, $y'(0) = 3e^2$

m) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$

n) $y'' + 8y' - 9y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$

ñ) $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 0$, $y(3) = 0$

o) $y'' + \pi^2 y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$

5. Hallar y_2 y las solución general de las siguientes ecuaciones, a partir de la solución y_1 dada

a) $y'' + y = 0$, $y_1 = sen(x)$

b) $y'' - y = 0$, $y_1 = e^x$

c) $xy'' + 3y' = 0$, $y_1 = 1$

d) $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, $y_1 = x^2$

e) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$

6. Hallar la solución general de $y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$

7. comprobar que $y_1 = e^x$ es solución de $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$ y hallar la solución general.

8. Hallar la solución general de $y'' - f(x)y' + [f(x) - 1]y = 0$

9. Sea y_1 una solución de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$. Suponga que otra solución de la ecuación es de la forma $y_2 = vy_1$. Pruebe que $v' = (y_2/y_1)' = W(y_1, y_2)/y_1^2$ y use la fórmula de Abel para mostrar que

$$v = \int \frac{1}{y^2} exp\left[\int P(x)dx\right] dx$$

10. Escriba la identidad de Abel para las ecuaciones siguientes

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$

b) $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$

c) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

11. Pruebe que la solución general de $y'' + py' + qy = 0$ tiende a cero cuando $x \to \infty$ si y sólo si p y q son ambos positivos.

12. Muestre que la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ se puede transformar en $u'' + f(x)u = 0$ haciendo $y = u(x)v(x)$ y escogiendo $v(x)$ apropiadamente. Luego, resuelva $y'' + 4xy' + (3 + 4x^2)y = 0$.

13. La ecuación $x^2y''+pxy'+qy = 0$ donde p y q son constantes, se llama "Ecuación de Euler-Cauchy". Probar que el cambio e^z la transforma en una ecuación coeficientes constantes y aplicar esta técnica para hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

    a) $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$

    b) $2x^2y'' + 10xy' + 8y = 0$

    c) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$

    d) $4x^2y'' - 3y = 0$

    e) $x^2y'' + xy' - 16y = 0$

    f) $x^2y''2xy' + 3y = 0$

14. Escriba cada una de las siguientes ecuaciones en "notación de operadores"

    a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^3$

    b) $3y^{(4)} - 5y^{(3)} + y = e^{-x} + senx$

    c) $\dfrac{d^2s}{dt^2} = -\beta\dfrac{ds}{dt} - w^2s$

    d) $x^2y'' - 2xy' = y + 1$

15. si $y = x^3 - 3x^2 + 2e^{-x}$ y $z = sen(2x) + 3cos(2x)$, evalúe:

    a) $(D^2 + 3D + 1)y$

    b) $(2D^3 - D^2 - 4)z$

    c) $(D^2 + 2D)(y + z)$

    d) $(x^2D^2 + 3xD - 2)(2y - 3z)$

16. Resolver:

    a) $(D^2 + 2D - 15)y = 0$

    b) $(D^2 + 6D+))y = 0$

    c) $(D^4 - 6D^3 + 12D^2 - 8D)y = 0$

d) $(D^2 - 4D + 13)y = 0$

e) $(D^3 - D^2 + 9D - 9)y = 0$

f) $(D^4 + 4D^2)y = 0$

g) $(D^6 + 9D^4 + 24D^2 + 16)y = 0$

h) $(D^4 - 8D^2 + 16)y = 0$

17. Determine las solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $9y''' + 12y'' + 4y' = 0$

b) $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$

c) $y^{(4)} = 16y$

d) $5y^{(4)} + 3y^{(3)} = 0$

e) $3y''' + 2y'' = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

f) $y''' + 10y'' + 25y' = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 5$

18. Determine una solución general de:

a) $y'' - 2iy' + 3y = 0$

b) $y'' - iy' + 6y = 0$

19. La ecuación diferencial $y'' + (sgn(x))y = 0$ tiene una función coeficiente discontinua $sgn(x) = 1$ si $x > 0$ y $sgn(x) - 1$ si $x < 0$.

Demuestre que sin embargo la ecuación tiene dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ y $y_2(x)$, definidas para toda x tal que:

a) Cada una satisface la ecuación en cada punto $x \neq 0$

b) Cada una tiene una derivada continua en $x = 0$

c) $y_1(0) = y_2'(0) = 1$ y $y_2(0) = y_1'(0) = 0$.

(**Ayuda:** Cada y_i está definida por medio de una fórmula para $x < 0$ y por medio de otra para $x \geq 0$

20. Resolver utilizando el método de los coeficientes indeterminados

a) $(D^2 + 2)y = e^x + 2$

b) $(D^2 - 1)y = e^x sen(2x)$

c) $(D^2 + 2D + 2)y = x^2 + senx$

d) $(D^3 + 3D^2 + 2D)y = x^2 + 4x + 8$

e) $(D^2+1)y = -2senx + 4xcosx$

f) $(D^3 - D^2 - 4D + 4)y = 2x^2 - 4x - 1 + 2x^2e^{2x} + 5xe^{2x} + e^{2x}$

g) $y''' + 2y' + y = 2x^2e^{-2x} + 3e^{2x}$

h) $y''' + y'' = 9x^2 - 2x + 1$

i) $y''' - 2y' + y = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$

j) $(D^3 + D)y = x + senx + cosx$

k) $\dfrac{d^2I}{dt^2} + 9I = 12cos(3t)$, $I(0) = 4$, $I'(0) = 0$

l) $(D^4 - 1)y = coshx$

m) $(D^2 + 1)y = xsenx$

n) $y'' - y = e^x(2 + 3xcos(2x))$

ñ) $\dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{ds}{dt} = t + e^{-t}$, $s(0) = 0$. $s'(0) = 0$

o) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}(1 + cos(2x))$

p) $y'' + 4y = cos(x)cos(2x)cos(3x)$

21. Consideremos la ecuación homogénea $P(D)y = 0$, de orden n.

 a) Si un polinomio $Q(r)$ es un factor del polinomio auxiliar $P(r)$, probar que cualquier solución de la ecuación diferencial $Q(D)y = 0$ es también solución de la ecuación diferencial $P(D)y = 0$

 b) Si r_1 es una raíz de multiplicidad k de la ecuación auxiliar $P(r) = 0$, demostrar que toda solución de $(D - r_1)^k y = 0$ es también solución de $P(D)y = 0$.

22. Si a es una constante y u es diferenciable, pruebe lo siguiente: $(D-a)(e^{ax}u) = e^{ax}Du$, $(D-a)^2(e^{ax}u) = e^{ax}D^2u$, $(D-a)^3(e^{ax}u) = e^{ax}D^3u$

23. Determine si el operador $(xD-1)(D+4)$ es igual al operador $(D+4)(xD-1)$.

24. Determine la solución general de las siguientes ecuaciones utilizando el método de variación de parámetros.

 a) $y'' + y = tanx$

 b) $y'' + y = secx$

 c) $y'' + y = cscx$

 d) $y'' + 2y' + y = e^{-x}/x$

 e) $y'' - 2y = 4x^2e^{x^3}$

f) $y'' + y = \dfrac{1}{cos(2x)\sqrt{cos(2x)}}$

g) $y'' + 3y' + 2y = (1 + e^x)^{-1}$

h) $y'' - 2y' + y = e^x arctanx$

i) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

j) $4y'' - 4y' + y = e^x\sqrt{1 - x^2}$

k) $(D^2 - 1)y = (1 + e^{-x})^{-2}$

l) $(D^2 - 1)y = e^{-x}sen(e^{-x}) + cos(e^{-x})$

m) $(D^2 + 5D + 6)y = e^{-2x}sec^2x(1 + 2tanx)$

25. Si la solución complementaria de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ es $Au_1(x) + Bu_2(x)$ muestre que su solución general es

$$y = C_1u(x) + C_2u_2(x) + u_2(x)\int \frac{R(x)u_1(x)}{W(u_1, u_2)}dx - u_1(x)\int \frac{R(x)u_2(x)}{W(u_1, u_2)}dx$$

26. Determine la solución general de las siguientes ecuaciones de Cauchy-Euler-Lengendre.

a) $x^2y'' - 3xy' + 4y = x + x^2ln(x)$

b) $x^3y''' + 2x^2y'' = x + sen(ln(x))$

c) $x^3y''' + xy' - y = 3x^4$

d) $(x + 1)^2y'' + (x + 1)y' - y = ln(x + 1)^2 + x - 1$

e) $(2x + 1)^2y'' - 2(2x + 1)y' - 12y = 6x$

f) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 3 + lnx^3$

g) $(x - 1)^2y'' - 2(x - 1)y' - 4y = 0$