EJERCICIOS TEMA I

PROF. RICHARD ROSALES

1) Sea C el conjunto de matrices 2×2 de la forma:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
donde a, b, c, d son números reales y $ad - bc \neq 0$. Se define en G la multiplicación de matrices, mediante:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bw & ay+bz \\ cx+dw & cy+dz \end{pmatrix}.$$
Pruebe que G es un grupo, llamado grupo lineal de $\mathbb{R}$ y se denota por $L_2(\mathbb{R})$.

2) Sea G el conjunto de matrices 2×2 de la forma
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$. Probar que G es un grupo.
3) Demuestre que $A(S)$, el conjunto de todas las aplicaciones biyectivas de S en si mismo es un grupo.
4) Probar que el grupo $L_2(\mathbb{R})$ no es abeliano.
5) Construya todas las posibles tablas de multiplicación para un grupo de orden 4.
6) Demuestre que $(\mathbb{Z}, +)$ y $(2\mathbb{Z}, +)$, el grupo aditivo de los enteros pares, son isomorfos.
7) Demuestre que $(\mathbb{R}, +)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.
8) Sea $\psi : (\mathbb{Q}, \cdot) \to (\mathbb{Q}^+, \cdot)$, $x \to |x|$. Demuestre que ψ es un homomorfismo sobreyectivo.
9) Sea $(\mathbb{R}, \cdot)$ el grupo multiplicativo de los números reales. Describir explícitamente el núcleo del homomorfismo valor absoluto
$$x \to |x|$$
de $\mathbb{R}$ en sí mismo. Cuál es la imágen de este homomorfismo?
10) Sea $(\mathbb{C}, \cdot)$ el grupo multiplicativo de los números complejos. Cuál es el núcleo del homomorfismo valor absoluto
$$z \to |z|$$
de $\mathbb{C}$ en $(\mathbb{R}, \cdot)$?
11) Sea S el conjunto de todas las aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo, que son traslaciones. (Una T *traslación* :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación para la cual existe un vector B en $\mathbb{R}^n$ tal que $T(X) = X + B$ para todo X en $\mathbb{R}^n$) Sea G el grupo generado por los elementos de S. Entonces G se conoce como el grupo de los movimientos rígidos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que si F es

un movimiento rígido, entonces F preserva distancias, es decir, la distancia entre $F(X)$ y $F(Y)$ es la misma distancia entre X e Y para todo X, Y en $\mathbb{R}^n$.

12) Demostrar que el grupo simétrico S_3 está generado por las permutaciones
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$
13) Sea G un grupo y a un elemento de G. Definir la aplicación
$$\sigma_a : G \to G$$
por
$$\sigma_a(x) = axa^{-1}.$$
Probar que el conjunto de todas estas aplicaciones, σ_a con $a \in G$ es un grupo.
14) Sea K un campo. Pruebe que el grupo aditivo de K es isomorfo al grupo (multiplicativo) de las matrices del tipo
$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
con $a \in K$
15) Probar que un grupo de orden 4 es cíclico, o bien contiene dos elementos a, b con $a \neq b$ tales que $a^2 = b^2 = e$ y $ab = ba$.
16) Sea K un campo. Mostrar que los polinomios de $K[t]$ forman un anillo.
17) Sea R un anillo en el cual $x^2 = x$ para todo $x \in R$. Mostrar que R es conmutativo.
18) Sea $f : R \to R'$ un homomorfismo de anillos. Probar que la imagen de f es un subanillo de R'.
19) Sea $(G, *)$ un grupo abeliano. Considerar el conjunto de homomorfismos de G sobre sí mismo, denotado por $Hom(G)$. Definir dos operaciones sobre este conjunto
$$(f + g)(a) = f(a) * g(a),$$
$$(f \circ g)(a) = g(f(a)),$$
para todo $f, g \in Hom(G)$ y $a \in G$. Probar que $(Hom(G), +, \circ)$ es un anillo.
20) Sea $\mathbb{C}$ el anillo de los números complejos. Probar que la aplicación
$$\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$a + bi \to a - bi$$
es un homomorfismo de anillos.

Bibliografía.

- Algebra Lineal. *Serge Lang.* Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1976
- Algebra. *Francisco Rivero.* Universidad de Los Andes. 1996.

E-mail address: `rrra@ula.ve`