

# EL CALCULO VARIACIONAL EN LA ESTABILIDAD DE TALUDES

## VARIATIONAL CALCULATION OF BANKS STABILITY

Silvio Rojas y Roberto Ucar  
Universidad de Los Andes – Facultad de Ingeniería – Escuela de Civil  
Departamento de Vías Telf. 0274-2402877  
Mérida, 5101, Venezuela  
[\\*silviorojas@ula.ve](mailto:*silviorojas@ula.ve)

### Resumen

En este artículo, se desarrolla un método numérico que permite resolver el problema de análisis de estabilidad de taludes, el cual está basado en el concepto de equilibrio límite, el cálculo variacional y la ley de resistencia del corte de Mohr-Coulomb. Una función para el esfuerzo  $\sigma_n$  es derivado para todas las dovelas. Además, las fuerzas sísmicas, cargas puntuales y distribuidas son tomadas en cuenta. Este tópico es muy relevante, ya que se hace una definición matemática, a fin de permitirle al ingeniero geotécnico, tener una visión diferente del estudio de estabilidad de taludes. La contribución de este estudio es el uso de las herramientas existentes de los análisis numéricos. Finalmente los resultados del programa elaborado que aplica para este método con el uso del computador son presentados.

**Palabras Claves:** Factor de seguridad, estabilidad de taludes, análisis de estabilidad, análisis numérico.

### Abstract

In this article, we develop a numeric method that lets solve the stability analysis, which is based on the limiting equilibrium concept, the variation calculus and Mohr-Coulomb shear strength law. A function to the  $\sigma_n$  stress is derived to all slices. Furthermore, the seismic forces, punctual and distributed loads, are taken into account.

This topic is very relevant, since we make a mathematical statement in order to let the geomechanic engineer have a different vision of the slope stability study.

The contribution of this study is the use of the existing tools of the numeric analysis. Finally the results of the elaborated program that applies for this method by computer use are presented.

**Key Words:** Security factor, banks stability, stability analysis, numeric analysis.

### INTRODUCCION

Esta investigación es una generalización y extensión del análisis de Leshchinsky y Huang (1992) quienes utilizan la técnica del cálculo variacional con la finalidad de encontrar el mínimo factor de seguridad, para una determinada superficie de deslizamiento y la distribución de esfuerzos normales.

Una vez que el mínimo factor de seguridad y la función de los esfuerzos normales han sido determinados, el problema se vuelve estáticamente determinado. Se puede entonces subdividir la masa potencialmente deslizante en dovelas sin recurrir a suposiciones.

Las fuerzas internas entre dovelas son controladas por la ecuación matemática de la distribución de esfuerzos, por consiguiente esta ecuación está restringida a funciones

razonables que determinan las fuerzas que se generan entre dovelas. Esto hace que la aplicación del método variacional tenga tanta validez como algunos otros métodos rigurosos tales como Janbu (1954), Morgenstern y Price (19659, con la ventaja de que su aplicación se vuelve tan simple como el método de Bishop (1955), con la diferencia que el mismo no satisface todas las ecuaciones de equilibrio.

La determinación de la función de esfuerzos normales, hace que la evaluación de las fuerzas internas entre dovelas no son necesarias para obtener el mínimo factor de seguridad y por consiguiente, esto hace que el método sea mucho más atractivo.

El método presentado es válido para el caso de suelos homogéneos, con una determinada presión de poros, cargas externas y fuerzas sísmicas.

El procedimiento de cálculo variacional puede parecer un proceso de minimización difícil y por lo tanto posiblemente intimidada al usuario, sin embargo el mínimo factor de seguridad es logrado matemáticamente con gran rapidez, al compararse con procedimientos más laboriosos tales como el de Janbu (1954), Morgenstern y Price (1965) o Spencer (19667).

## FORMULACION MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

La figura 1, representa el problema planteado en el cálculo del factor de seguridad, observándose todos los parámetros involucrados, en la cual  $y_f(x)$  = superficie de falla,  $y_t(x)$  = superficie del talud,  $h_n(x)$  = nivel freático,  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  = líneas de estratificación.

La figura No. 2, muestra las diferentes fuerzas que pueden actuar en la cara del talud  $y_f(x)$  y en la superficie potencial de falla  $y_t(x)$  en un diferencial  $\Delta l_i$ , donde  $\sigma'_i$  = esfuerzo efectivo del material,  $\Delta W_i$  = peso de la masa de suelo en una longitud  $\Delta l_i$ ,  $\mu_i$  = presión de poros,  $\gamma_i$  = peso unitario promedio,  $\alpha_i$  = ángulo de inclinación de la base de la dovela con la horizontal,  $\Delta x_i$  = proyección horizontal de la base de la dovela,  $q_x(x)$  = carga horizontal distribuida,  $q_y(x)$  = carga vertical distribuida,  $P_x, P_y$  = cargas externas puntuales en dirección horizontal y vertical,  $x_p, y_p$  = puntos de aplicación de las cargas puntuales,  $k_h, k_v$  = coeficientes sísmicos horizontal y vertical.

Al integrar dentro del entorno de la superficie potencial de deslizamiento y teniendo en cuenta la dirección horizontal, vertical y la condición de momento en el punto "O" resultan las tres ecuaciones de equilibrio:

➤ Sumatoria de fuerzas horizontales

$$\int_{x_B}^{x_A} \left\{ c + (\sigma - \mu)\psi - FS \left[ \sigma \cdot y'_f + k_h \gamma (y_t - y_f) \right] \right\} dx + \int_{x_{15}}^{x_{20}} (FS \cdot q_x \cdot y'_t) dx - FS \cdot P_x = 0 \quad (1)$$

➤ Sumatoria de fuerzas verticales

$$\int_{x_B}^{x_A} \left\{ c + (\sigma - \mu)\psi - FS \left[ \sigma \cdot -\gamma (y_t - y_f) (1 + k_v) \right] \right\} dx + \int_{x_5}^{x_{10}} (FS \cdot q_y) dx - FS \cdot P_y = 0 \quad (2)$$

➤ Sumatoria de momentos

$$\int_{x_B}^{x_A} \left\{ \left[ c + (\sigma - \mu)\psi \right] (y_f - x y'_f) - FS \cdot \sigma (y_f \cdot y'_f + x) \right\} dx + FS \left[ \int_{x_B}^{x_A} \gamma (y_t - y_f) (1 + k_v) x - 0,5 \cdot k_h \cdot \gamma (y_t^2 - y_f^2) \right] + \int_{x_{15}}^{x_{20}} FS (q_x \cdot y_t \cdot y'_t) dx + \int_{x_5}^{x_{10}} FS (q_y \cdot x) dx + FS (P_y \cdot x_p - P_x \cdot y_p) = 0 \quad (3)$$

En la expresión  $y'_t = \alpha$  = pendiente de la superficie de falla y  $\psi$  = tangente del ángulo de fricción interno de la masa de suelo.

Los subíndices ( $i = 5, i = 10, i = 15, i = 20$ ) corresponden a puntos arbitrarios en la cara del talud; los subíndices "A" y "B" representan la intersección de la superficie potencial de falla  $y_f(x)$  con la superficie del talud  $y_t(x)$ ;  $y'_t$  = pendiente del talud.

Baker y Gaber (1978), demuestran que la solución del problema formulado se puede obtener a través del funcional auxiliar G, sujeto a satisfacer las ecuaciones de equilibrio (1, 2, 3) y el cual se expresa como:

$$G = H + \lambda_1 \cdot V + \lambda_2 \cdot M \quad (4)$$

donde:

H = suma de fuerzas horizontales

V = suma de fuerzas verticales

M = suma de momentos

$\lambda_1, \lambda_2$  = multiplicadores de Lagrange

Sustituyendo las ecuaciones 1, 2, 3 en la ecuación 4 se tiene:

$$G = \int_{x_B}^{x_A} \left\{ \begin{aligned} & [c + (\sigma - \mu)\psi] - FS[\sigma \cdot y'_f + k_h \cdot \gamma(y_t - y_f) - q_x] \cdot y'_t \\ & + \lambda_1 \{ y'_f [c + (\sigma - \mu)\psi] - FS[\gamma(y_t - y_f)(1 + k_v) + q_y - \sigma] \} \\ & + \lambda_2 \left\{ (y_f - x \cdot y'_f) [c + (\sigma - \mu)\psi] - FS \left[ \begin{aligned} & \sigma(y_f \cdot y'_f + x) - q_x \cdot y_t \cdot y'_t - q_y \cdot x \\ & - \gamma(y_t - y_f)(1 + k_v)x + 0,5 \cdot k_h \cdot \gamma(y_t^2 - y_f^2) \end{aligned} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \\ + FS[\lambda_2(P_y \cdot x_p - P_x \cdot y_p) - \lambda_1 \cdot P_y - P_x] \left( \frac{dx}{dx} \right) \quad (5)$$

La ecuación 4, se puede escribir de la forma:

$$G = \int g dx \quad (6)$$

donde g viene dada por la siguiente expresión:

$$g = \left\{ \begin{aligned} & [c + (\sigma - \mu)\psi] - FS[\sigma \cdot y'_f + k_h \cdot \gamma(y_t - y_f) - q_x \cdot y'_t] \\ & + \lambda_1 \{ y'_f [c + (\sigma - \mu)\psi] - FS[\gamma(y_t - y_f)(1 + k_v) + q_y - \sigma] \} \\ & + \lambda_2 \left\{ (y_f - x \cdot y'_f) [c + (\sigma - \mu)\psi] - FS \left[ \begin{aligned} & \sigma(y_f \cdot y'_f + x) - q_x \cdot y_t \cdot y'_t - q_y \cdot x \\ & - \gamma(y_t - y_f)(1 + k_v)x + 0,5 \cdot k_h \cdot \gamma(y_t^2 - y_f^2) \end{aligned} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \\ + FS[\lambda_2(P_y \cdot x_p - P_x \cdot y_p) - \lambda_1 \cdot P_y - P_x] \left( \frac{1}{dx} \right) \quad (7)$$

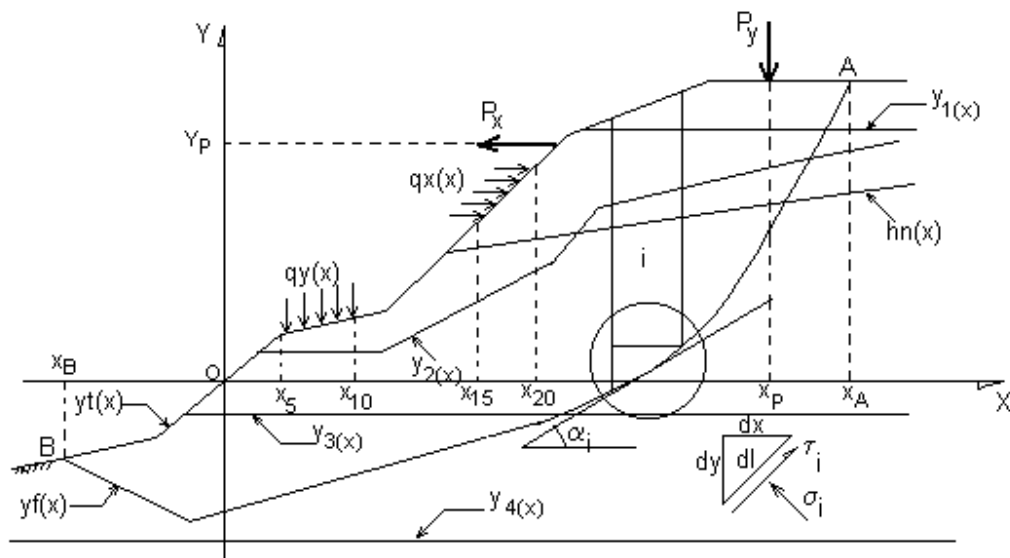


Figura Nº 1.- Estabilidad del problema básico.

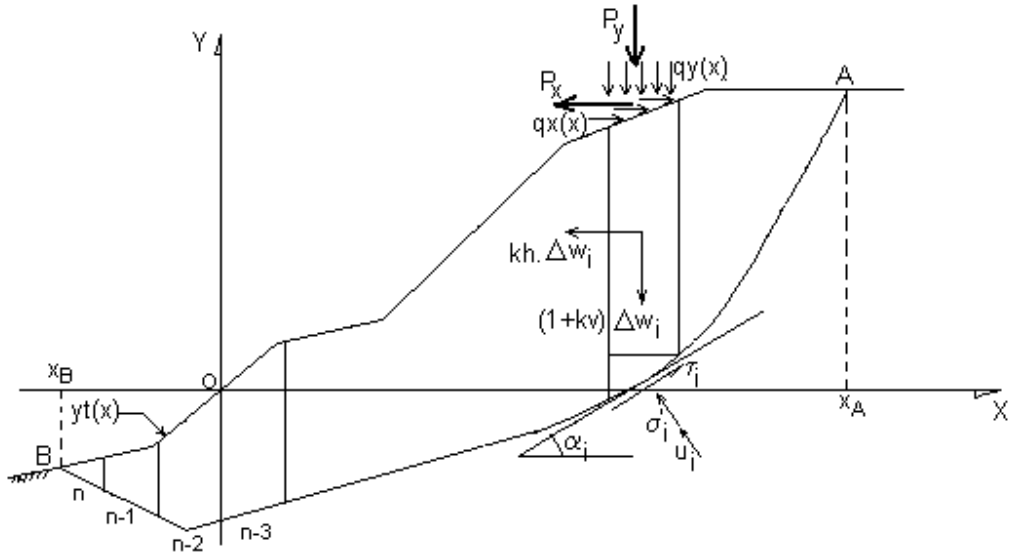


Figura Nº 2.- Esfuerzos actuando en un diferencial de área de la masa de suelo comprendida entre la superficie del talud y la superficie potencial de falla.

La función  $y_f(x)$  y  $\sigma(x)$  que satisface las tres ecuaciones de equilibrio (1), (2), (3), tienen que satisfacer la ecuación diferencial de Euler que se expresa de la forma:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right) - \frac{\partial y}{\partial \sigma} = 0 \quad (8.1)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial y'_f} \right) - \frac{\partial y}{\partial y_f} = 0 \quad (8.2)$$

Leshchinsky y Huang (1992)<sup>1</sup>, aplicando la ecuación (8,2), obtuvieron la expresión:

$$\begin{aligned} & [(x_{0i} - x_c) \psi_i + (y_{f0i} - y_c) FS] \sigma'_i + 2 \psi_i (y_{f0i} + y_c) \\ & + 2c_i - (x_{0i} - x_c) [\psi_i \cdot \mu'_i + (1 + k_v) \gamma_i \cdot FS] \\ & + FS \cdot k_h \cdot \gamma_{0i} (y_{f0i} + y_c) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

La ecuación 9, es aplicada a "n" dovelas de la figura No. 2, donde  $x_{0i}$ ,  $y_{f0i}$  = abscisa y ordenada en el centro de cada dovela en la superficie potencial de falla.

$\sigma'_i$  = variación del esfuerzo normal en la dirección "x"  
 $\mu'_i$  = variación de la presión de poros.

$$x_c = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad y_c = \frac{1}{\kappa_2}$$

Leshchinsky y Huang (1992), proponen que  $\mu'_i$  y  $\sigma'_i$  se calcule a partir de las siguientes expresiones:

$$\mu'_i = \frac{\Delta \mu_i}{\Delta x_i} \quad (10)$$

donde  $\Delta \mu_i$  = variación de la presión de poros en el ancho  $\Delta x_i$  de la dovela. Si  $i \leq (n-1)$  aplicar:

$$\sigma'_1 = \frac{h_1^2 \cdot \sigma_{i-1} + (h_{i-1}^2 - h_1^2) \sigma_i - h_{i-1}^2 \cdot \sigma_{i+1}}{h_i \cdot h_{i-1} (h_i + h_{i-1})} \quad (11)$$

donde:

$$h_i = \frac{(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}{2} \quad (12)$$

$$h_{i-1} = \frac{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}{2} \quad (13)$$

Para  $i = 1$ , se tiene:

$$h_0 = \frac{\Delta x_i}{2} \quad \sigma_{i-1} = \sigma_0$$

Siendo:

$\sigma_0$  = esfuerzo en el extremo superior de la intersección de la superficie del talud  $y_t(x)$  con la superficie potencial de falla  $y_f(x)$ .

Sustituyendo la ecuación (11) en la ecuación (9), resulta:

<sup>1</sup> En su trabajo no tomaron en cuenta el sismo.

$$\frac{a_i}{b_i} h_{i-1} \cdot \sigma_{i+1} - \left[ \frac{a_i}{b_i} (h_{i-1}^2 - h_i^2) + 2\psi \right] \sigma_i - \frac{a_i}{b_i} h_i^2 \cdot \sigma_{i-1} + 2\psi \cdot \mu_i + (x_{0i} - x_c) [\psi_i \cdot \mu'_i + (1 + k_v) \gamma_i \cdot FS] - 2c_i - FS \cdot k_h \cdot \gamma_i (y_{f0i} + y_c) = 0 \quad (14)$$

donde:

$$a_i = [(x_{0i} - x_c)\psi_i + (y_{f0i} - y_c)FS] \quad (15)$$

$$b_i = h_i \cdot h_{i-1}(h_i - h_{i-1}) \quad (16)$$

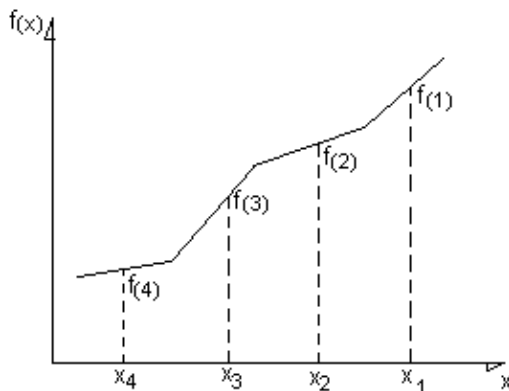


Figura Nº 3.- Función f(x) de Lagrange a objeto de conocer la variación de  $\sigma_{(x)}$  en la última dovela

Cuando  $I = n$ , Leshchinsky y Huang (1992), propone que  $\sigma'_n$  se calcule a partir de la siguiente ecuación:

$$\sigma'_n = 4 \frac{(\sigma_{n-1} - \sigma_n)}{\Delta x_{n-1} - \Delta x_n} - \sigma'_{n-1} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_n = & \frac{\sigma_{n-3}}{(x_{0(n-3)} - x_{0(n-2)})(x_{0(n-3)} - x_{0(n-1)})(x_{0(n-3)} - x_{0n})} (x_0 - x_{0(n-2)})(x_{0n} - x_{0(n-1)}) \\ & + \frac{\sigma_{n-2}}{(x_{0(n-2)} - x_{0(n-3)})(x_{0(n-2)} - x_{0(n-1)})(x_{0(n-2)} - x_{0n})} (x_0 - x_{0(n-3)})(x_{0n} - x_{0(n-1)}) \\ & + \frac{\sigma_{n-1}}{(x_{0(n-1)} - x_{0(n-3)})(x_{0(n-1)} - x_{0(n-2)})(x_{0(n-1)} - x_{0n})} (x_0 - x_{0(n-3)})(x_{0n} - x_{0(n-2)}) \\ & + \frac{\sigma_n}{(x_{0n} - x_{0(n-3)})(x_{0n} - x_{0(n-2)})(x_{0n} - x_{(n-1)})} \left\{ \left[ (x_{0n} - x_{0(n-2)} + (x_0 - x_{0(n-3)})) (x_{0n} - x_{0(n-3)}) \right] \right. \\ & \left. + (x_{0n} - x_{0(n-3)})(x_{0n} - x_{0(n-2)}) \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

Sin embargo, cuando el ancho de dovela es el mismo ( $\Delta x_{n-1} = \Delta x_n$ ) resulta una indeterminación, además si el problema se resuelve de forma matricial, haciendo ( $\Delta x_{n-1} \neq \Delta x_n$ ), el miembro correspondiente a esta posición genera un valor exageradamente alto y el cual se compensa con el cálculo global.

Este trabajo presenta un método que permite encontrar el valor de  $\sigma'_n$ , aplicando el polinomio de interpolación de Lagrange el cual a continuación se explica.

### METODO NUMERICO PARA ENCONTRAR LA EXPRESIÓN DE $\sigma_n$ .

Considerando la superficie representada en la figura No. 3 la cual muestra el valor de la función f(x) en puntos específicos.

Aplicando un polinomio de Lagrange de tercer grado, a los puntos representados en la figura No. 3, se tiene:

$$\begin{aligned} f_3(x) = & \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} f_1 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} f_2 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} f_3 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} f_4 \quad (18) \end{aligned}$$

Derivando la ecuación (18) y evaluando dicha función derivada para la última dovela indicada en la figura No. 2, resulta:

Llevando a cabo el cambio de variable para la ecuación (19), se tiene:

$$\sigma'_n = \frac{bl_1}{al_1} \sigma_{n-3} + \frac{bl_2}{al_2} \sigma_{n-2} + \frac{bl_3}{al_3} \sigma_{n-1} + \frac{bl_4}{al_4} \sigma_n \quad (20)$$

Donde:

$$al_1 = (x_{0(n-3)} - x_{0(n-2)}) (x_{0(n-3)} - x_{0(n-1)}) (x_{0(n-3)} - x_{0n}) \quad (20.1)$$

$$bl_1 = (x_{0n} - x_{0(n-2)}) (x_{0n} - x_{0(n-1)}) \quad (20.2)$$

$$al_2 = (x_{0(n-2)} - x_{0(n-3)}) (x_{0(n-2)} - x_{0(n-1)}) (x_{0(n-2)} - x_{0n}) \quad (20.3)$$

$$bl_2 = (x_{0n} - x_{0(n-3)}) (x_{0n} - x_{0(n-1)}) \quad (20.4)$$

$$al_3 = (x_{0(n-1)} - x_{0(n-3)}) (x_{0(n-1)} - x_{0(n-2)}) (x_{0(n-1)} - x_{0n}) \quad (20.5)$$

$$bl_3 = (x_{0n} - x_{0(n-3)}) (x_{0n} - x_{0(n-2)}) \quad (20.6)$$

$$al_4 = (x_{0n} - x_{0(n-3)}) (x_{0n} - x_{0(n-2)}) (x_{0n} - x_{0(n-1)}) \quad (20.7)$$

$$bl_4 = [(x_{0n} - x_{0(n-2)}) (x_{0n} - x_{0(n-3)})] (x_{0n} - x_{0(n-1)}) + (x_{0n} - x_{0(n-3)}) (x_{0n} - x_{0(n-2)}) \quad (20.8)$$

Reemplazando la ecuación (20) en la ecuación (9) y agrupando términos, para la última dovela se tiene:

$$a_n \left\{ \frac{bl_1}{al_1} \sigma_{n-3} + \frac{bl_2}{al_2} \sigma_{n-2} + \frac{bl_3}{al_3} \sigma_{n-1} \right\} + \left\{ an \frac{bl_4}{al_4} + 2\psi_n \right\} \sigma_n - 2\psi \cdot \mu_n + 2c_n - (x_{0n} - x_c) \cdot [\psi_n \cdot \mu'_n + (1+k_v) \gamma_n \cdot FS] + FS \cdot k_h \cdot \gamma_n (y_{f0n} + y_c) = 0 \quad (21)$$

Donde:

$$a_n = (x_{0n} - x_c) \psi_n + (y_{f0n} - y_c) FS \quad (21.1)$$

## METODO ITERATIVO DE NEWTON

La solución al problema formulado consiste en resolver el conjunto de ecuaciones no lineales dadas por las

expresiones de equilibrio (1), (2) y (3) en combinación con las ecuaciones (14) y (20), donde las incógnitas son ( $x_c$ ,  $y_c$ , FS) y los esfuerzos normales  $\sigma_i$  en un punto determinado de la superficie potencial de falla.

El planteamiento de Newton, es obtener la convergencia de dos funciones  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$ , desarrollando ambas funciones como una serie de Taylor, alrededor del punto  $(x_1, y_1)$  el cual es cercano a la raíz, se obtiene:

$$\frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial x} \Delta x_1 + \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y} \Delta y_1 = -f(x_1, y_1) \quad (22.1)$$

$$\frac{\partial g(x_1, y_1)}{\partial x} \Delta x_1 + \frac{\partial g(x_1, y_1)}{\partial y} \Delta y_1 = -g(x_1, y_1) \quad (22.2)$$

Un punto más próximo a la raíz, será:

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 \quad (22.3)$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 \quad (22.4)$$

Este planteamiento se aplica a continuación:

Las ecuaciones de equilibrio (1), (2), (3), escritas como diferencias finitas se expresan a continuación:

$$H(x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \sum_{i=1}^n \{c_i + (\sigma_i - \mu_i) \psi_i - FS [\sigma_i \cdot y_{fi} + k_h \cdot \gamma_i (y_f - y_{f0i}) - q_x \cdot y'_{ii}] \Delta x_i - FS \cdot P_x \quad (23)$$

$$V(x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \sum_{i=1}^n \{c_i + (\sigma_i - \mu_i) \psi_i\} y_{fi} -$$

$$FS [\gamma_i (y_{ii} - y_{f0i}) (1+k_v) - \sigma_i + q_y] \Delta x_i - FS \cdot P_y \quad (24)$$

$$M(x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \sum_{i=1}^n \{c_i + (\sigma_i - \mu_i) (y_{f0i} - x_{0i} \cdot y'_{fi}) - FS [\sigma_i (y_{f0i} \cdot y'_{fi} + x_{0i}) - \gamma_i (y_{ii} - y_{f0i}) (1+k_v) x_{0i} - q_x \cdot y_{ii} \cdot y'_{ii} + 0,5 \cdot k_h \cdot \gamma_i (y_{ii}^2 - y_{f0i}^2) - q_y \cdot x_{0i}] \Delta x_i\} + FS (P_y \cdot x_p - P_x \cdot y_p) \quad (25)$$

La ecuación (14) se puede escribir como:

$$f_1(x_c, y_c, FS, \sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}) = \frac{a_i}{b_i} h_{i-1} - \left[ \frac{a_i}{b_i} (h_{i-1}^2 - h_i^2) + 2\psi_i \right] \sigma_i - \frac{a_i}{b_i} h_i^2 \cdot \sigma_{i-1} + \{2\psi_i \cdot \mu_i + (x_{0i} - x_c) [\psi_i \cdot \mu'_i + (1+k_v) \gamma_i \cdot FS] - 2c_i - FS \cdot k_h \cdot \gamma_i (y_{f0i} + y_c)\} \quad (26)$$

La ecuación (21) se expresa:

$$f_2(x_c, y_c, FS, \sigma_{n-3}, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}) = a_n \left( \frac{bl_1}{al_1} \sigma_{n-3} + \frac{bl_2}{al_2} \sigma_{n-2} + \frac{bl_3}{al_3} \sigma_{n-1} \right) + \left( a_n \frac{bl_3}{al_3} + 2\psi_n \right) \sigma_n - 2\psi_n \cdot \mu_n + 2c_n \quad (27)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial f_1}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial f_1}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2 = -f_1(x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2) \quad (28.1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial f_1}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial f_1}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} \Delta \sigma_3 = -f_1(x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (28.2)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial f_1}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial f_1}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2 = \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} \Delta \sigma_3 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_4} \Delta \sigma_4 = -f(x_c, y_c, FS, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \quad (28.3)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial f_1}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial f_1}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} \Delta \sigma_3 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_4} \Delta \sigma_4 + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_5} \Delta \sigma_5 = -f(x_c, y_c, FS, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \quad (28.4)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial f_2}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial f_2}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{n-3}} \Delta \sigma_{n-3} + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{n-2}} \Delta \sigma_{n-2} + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{n-1}} \Delta \sigma_{n-1} + \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_n} \Delta \sigma_n = -f_2(x_c, y_c, FS, \sigma_{n-3}, \sigma_{n-2}, \sigma_{n-1}, \sigma_n) \quad (28.n)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial H}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial H}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial H}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial H}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2$$

$$+ \dots + \frac{\partial H}{\partial \sigma_n} \Delta \sigma_n = -H(x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (28.n+1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial V}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial V}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial V}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial V}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial \sigma_n} \Delta \sigma_n = -V(x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (28.n+2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x_c} \Delta x_c + \frac{\partial M}{\partial y_c} \Delta y_c + \frac{\partial M}{\partial FS} \Delta FS + \frac{\partial M}{\partial \sigma_1} \Delta \sigma_1 + \frac{\partial M}{\partial \sigma_2} \Delta \sigma_2 + \dots + \frac{\partial M}{\partial \sigma_n} \Delta \sigma_n = -M(x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (28.n+3)$$

Para valores iniciales de  $\sigma_0, x_c, y_c, FS$ , se calcula  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$  correspondiente a cada dovola de la figura No. 2 a través de las ecuaciones (14) y (21) resueltas matricialmente y donde cada valor de  $\sigma_i$  debe cumplir con la ley e Coulomb ( $\sigma_i < c_i/\tan\phi_i$ ). Si no se cumple con esta condición variar  $\sigma_0, x_c, y_c, FS$  y repetir el cálculo.

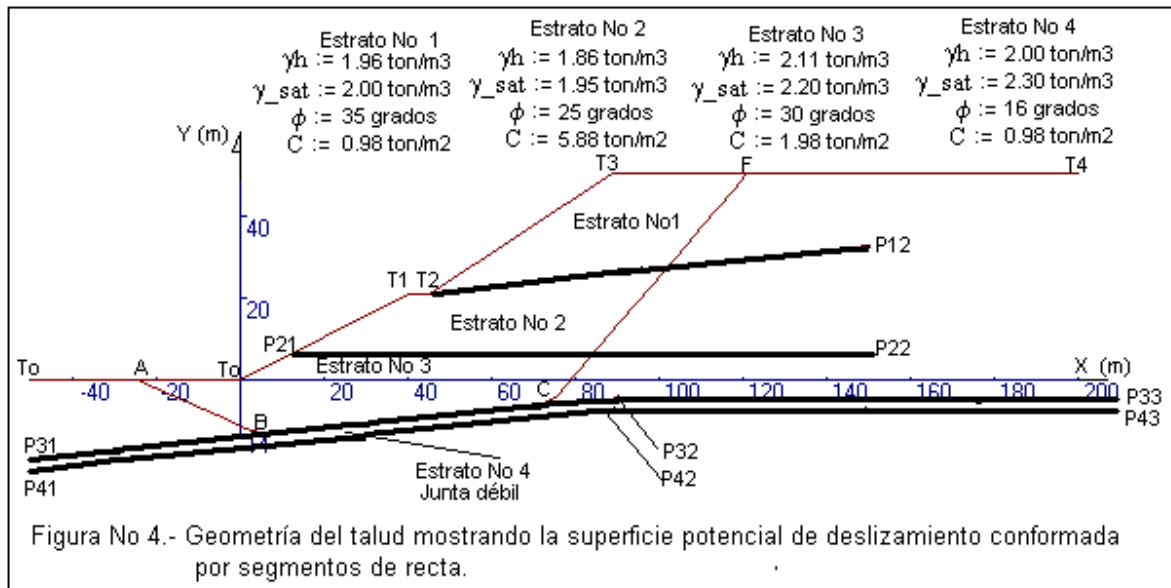
Para los valores de  $\sigma_0, x_c, y_c, FS, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ , se evalúa la ecuación (28) y resolviendo se obtienen  $\Delta x_c, \Delta y_c, \Delta FS, \Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$  hasta lograr la convergencia.

## APLICACIÓN PRACTICA

El siguiente ejemplo es tomado del artículo de Leshchinsky y Huang (1992), cuyas dimensiones se obtuvieron según la escala gráfica presentada en dicho artículo.

El resultado obtenido a través del programa FS.EXE y el presentado por Leshchinsky y Huang [3], fueron los siguientes:

Método	$\sigma_0$ (ton/m <sup>2</sup> )	FS	
FS.EXE	-1,40	1.084	
	-0,70	1.086	
	0,00	1.087	
Leshchinsky	y	-1,40	1.061
Huang [3]		0,00	1.066



Los resultados del programa FS.EXE, se presentan en el Apéndice III.

## CONCLUSIONES

En el estudio llevado a cabo se ha desarrollado un programa totalmente original asistido por el ordenador, utilizando como herramienta de trabajo el cálculo numérico y el procedimiento propuesto por Leshchinsky y Huang (1992), con la gran ventaja que se puede analizar la estabilidad de taludes con geometría irregular y con la presencia de estratos que tienen diferentes inclinaciones y propiedades geomecánicas, además de la presencia del nivel freático, la sobrecarga y el efecto sísmico.

Es importante destacar que el método numérico desarrollado en el presente trabajo conlleva a calcular con mayor precisión el esfuerzo normal  $\sigma_n$  actuando en la última dovela y por ende el resto de los esfuerzos  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , ...,  $\sigma_{n-1}$ , que conforman el sistema matricial.

## APÉNDICE I – REFERENCIAS

1. LESHCHINSKY, D. and HUANG, C. (1992), "Generalized Slope Stability Analysis: Interpretation, Modification and Comparison", Journal of Geotechnical Engineering, Vol. 118, No. 10, 1192, pp. 1559-1576.

2. JANBU, N., (1954), "Slope Stability Analysis of Slopes with Dimensionless Parameters", Ph.D. Thesis, Cambridge, Massachusetts, Harvard University, 81 p.
3. MORGENSTERN, N.R., and PRICE, V.E., (1965), "The Analysis of the Stability of General Slip Surfaces", Geotechnique, 15 pp, 79-73.
4. BISHOP, A.W., (1955), "The Use of Slipse Circle in the Stability Analysis of Slopes", Geotechnique, Vol. 10, No. 4, pp 129-150.
5. SPENCER, E., (1967), "A Method of Analysis oh the Stability of Embankments Assuming Parallel Inter-Slice Forces", Geotchnique, Vol. 17, No. 1, pp. 11-26.
6. BAKER, R. and GABER, M., (1978), "Theoretical Analysis of the Stability of Slopes", Geotecnique 28, No. 4, pp 395-411.

## APENDICE II. NOTATION

- $a_i$ : Parámetro de cálculo utilizado en el análisis vectorial
- $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ : Parámetros de cálculo utilizados en el análisis variacional.
- $b_i$ : Parámetro de cálculo utilizado en el análisis variacional
- $b_{ii}$ : Parámetro de cálculo utilizado en el análisis variacional
- $c_i$ : Cohesión del material en la base de la dovela
- FS: Factor de seguridad
- $h_i$ : Parámetro de cálculo utilizado en el análisis variacional



$P_x$ :	Carga puntual aplicada en dirección horizontal sobre la superficie del talud
$P_y$ :	Carga puntual aplicada en dirección vertical sobre la superficie del talud
$q_x(x)$ :	Carga externa horizontal, distribuida en la superficie del talud
$q_y(x)$ :	Carga externa vertical, distribuida en la superficie del talud
$\mu_i$ :	Presión de poroso en el centro de la dovela
$\mu'_i$ :	Derivada en la presión de poros respecto al eje de las abscisas
$x_{oi}$ :	Abscisa en el centro de cada dovela
$x_c$ :	Parámetro dependiente de los multiplicadores de Lagrange ( $x_c = \lambda_1/\lambda_2$ )
$y_c$ :	Parámetro dependiente de los multiplicadores de Lagrange ( $y_c = 1/\lambda_2$ )
$y_{foi}$ :	Ordenada de la superficie de falla en el centro de cada dovela
$y_{ti}$ :	Ordenada de la superficie del talud
$\gamma_i$ :	Peso unitario promedio del suelo
$\Delta FS$ :	Variación del factor de seguridad
$\Delta x_c$ :	Variación del parámetro $x$
$\Delta x_i$ :	Proyección horizontal de la base de cada dovela
$\Delta y_c$ :	Variación del parámetro $y_c$
$\Delta \sigma_i$ :	Variación del esfuerzo normal $\sigma_i$
$\lambda_1, \lambda_2$ :	Multiplicadores de Lagrange
$\sigma_i$ :	Esfuerzo normal en el centro de la dovela
$\sigma'_i$ :	Derivada del esfuerzo normal con respecto al eje de las abscisas
$\sigma_0$ :	Esfuerzo inicial normal en el punto de intersección de la cresta del talud con la superficie de falla
$\tau_i$ :	Esfuerzo tangencial en la base de la dovela
$\psi_i$ :	Tangente del ángulo de fricción interna

### APÉNDICE III. RESULTADOS DEL PROGRAMA

#### Coordenadas de la superficie potencial de deslizamiento

Punto	x (m)	y (m)
F	121,11	50,91
C	74,11	-6,36
B	5,26	-13,64
A	-24,21	0,00

#### Coordenadas de la superficie del talud

Punto	x (m)	y (m)
T4	200,00	50,91
T3	89,09	50,91

T2	45,09	20,91
T1	40,00	20,91
T0	0,00	0,00
-T0	-50,00	0,00

Estrato No.	Punto	x (m)	y (m)
1	T2	45,00	20,91
1	P12	150,00	32,95
2	P21	11,50	6,01
2	P22	150,00	6,01
3	P31	-50,00	-19,48
3	P32	91,00	-4,57
3	P33	200,00	-4,57
4	P41	-50,00	-22,00
4	P42	91,00	-7,09
4	P43	200,00	-7,09

#### Coordenadas del nivel freático

Punto	x (m)	y (m)
P12	150,00	32,95
T2	45,09	20,91

#### Coefficientes sísmicos

kh	kv
0,00	0,00
0,00	0,00

#### Cargas distribuidas

$x_0, y_0$ : Coordenadas iniciales de aplicación de carga  
 $x_f, y_f$ : Coordenadas finales de aplicación de carga  
 $q_h$ : Carga distribuida horizontal  
 $q_v$ : Carga distribuida vertical

$x_0$ (m)	$y_0$ (m)	$x_f$ (m)	$y_f$ (m)	$q_h$ (Ton/m <sup>2</sup> )	$q_v$ (Ton/m <sup>2</sup> )
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

#### Características de los estratos

$c, \phi$ : Cohesión y fricción del material  
 $\tau_n$ : Peso unitario natural  
 $\tau_s$ : Peso unitario saturado  
D/U: Condición del material (D = drenado, U = no drenado)

Estrato No.	c (Ton/m <sup>2</sup> )	$\phi$ (grados)	$\tau_n$ (Ton/m <sup>3</sup> )	$\tau_s$ (Ton/m <sup>3</sup> )	(D/U)
1	0,98	35,00	1,96	2,00	D
2	5,88	25,00	1,86	1,95	D
3	1,98	30,00	2,11	2,20	D
4	0,98	16,00	2,00	2,30	D

**Parámetros iniciales de cálculo**

$\mu_1, \mu_2$ : Multiplicadores de Lagrange  
 $x_c$ :  $\mu_1, \mu_2$   
 $y_c$ :  $1/\mu_2$   
 FS: Factor de seguridad  
 $\sigma_0$ : sigma inicial en el punto de intersección entre la superficie analizada y la cresta del talud  
 ND: número de dovelas iniciales consideradas

$x_c$	$y_c$	FS	$\sigma_0$	ND
30,00	165,00	1.000	0,00	20

**Parámetros finales de cálculo:**

$\mu_1, \mu_2$ : Multiplicadores de Lagrange  
 $x_c$ :  $\mu_1/\mu_2$   
 $y_c$ :  $1/\mu_2$   
 FS: Factor de seguridad  
 $\sigma_0$ : Sigma inicial en el punto de intersección entre la superficie analizada y la cresta del talud  
 ND: número de dovelas iniciales consideradas

$x_c$ ( $\mu_1, \mu_2$ )	$y_c$ ( $1/\mu^2$ )	FS	$\sigma_0$ (Ton/m <sup>2</sup> )
32,63	155,29	1,087	0,00

**Características geométricas y geomecánicas de las dovelas:**

$D_i$ : Dovela  
 $\delta_x$ : Ancho de dovela  
 $x_0, y_0$ : Abscisa y ordenada con respecto al centro de la dovela  
 $y_f$ : Ordenada del talud en el centro de la dovela  
 $u$ : Presión de poros en la base de la dovela  
 $c, \phi$ : Cohesión y fricción del material en la base de la dovela  
 $\gamma$ : Peso unitario promedio  
 $\sigma$ : Esfuerzo normal en la base de la dovela  
 $\sigma'$ : Esfuerzo normal efectivo en la base de la dovela  
 $\tau$ : Resistencia al corte movilizada

$D_i$	$\delta_x$ (m)	$x_0$ (m)	$y_t$ (m)	$y_0$ (m)	$m$ (Ton/m <sup>2</sup> )	$\phi$ (°)	$c$ (Ton/m <sup>2</sup> )	$\tau$ (Ton/m <sup>3</sup> )	$\sigma$ (Ton/m <sup>2</sup> )	$\sigma'$ (Ton/m <sup>2</sup> )	$\tau$ (Ton/m <sup>2</sup> )
1	7,27	117,48	30,91	46,48	0,00	35,00	0,98	1,96	12,49	12,49	8,94
2	7,27	110,21	50,91	37,63	0,00	35,00	0,98	1,96	25,07	25,07	17,05
3	4,74	104,21	50,91	30,32	0,00	35,00	0,98	1,96	35,38	35,38	23,69
4	7,27	98,21	50,91	23,00	4,01	25,00	5,88	1,96	39,44	35,44	20,61
5	7,27	90,94	50,91	14,14	12,02	25,00	5,88	1,96	43,55	31,52	18,93
6	3,04	85,78	48,66	7,87	17,72	25,00	5,88	1,96	44,10	26,38	16,72
7	7,27	80,63	4,514	1,58	23,41	30,00	1,98	1,98	47,40	23,99	14,56
8	2,88	75,55	41,68	-4,60	29,01	30,00	1,98	2,01	47,31	19,31	11,54
9	7,27	70,48	38,22	-6,74	30,57	16,00	0,98	2,02	50,35	19,78	6,12
10	7,27	63,21	33,27	-7,51	30,50	16,00	0,98	2,04	54,89	24,39	7,33
11	7,27	55,95	28,31	-8,28	30,44	16,00	0,98	2,05	54,99	24,55	7,38
12	7,27	48,68	23,36	-9,05	30,37	16,00	0,98	2,07	58,08	27,71	8,21
13	7,27	41,42	20,91	-9,82	30,73	16,00	0,98	2,08	58,46	25,94	7,74
14	7,27	34,15	17,83	-10,59	28,44	16,00	0,98	2,10	56,66	30,02	8,82
15	7,27	26,88	14,05	-11,35	25,41	16,00	0,98	2,12	55,54	30,13	8,85
16	7,27	19,62	10,26	-12,12	22,38	16,00	0,98	2,15	55,91	33,54	9,75
17	7,27	12,35	6,46	-12,89	19,35	16,00	0,98	2,19	51,48	32,13	9,38
18	3,47	6,99	3,63	-13,46	17,11	16,00	0,98	2,20	49,71	32,60	9,50
19	7,27	1,62	0,85	-11,96	12,80	30,00	1,98	2,20	46,72	33,92	19,83
20	7,27	-5,65	0,00	-8,59	8,59	30,00	1,98	2,20	41,87	33,27	19,49
21	7,27	-12,91	0,00	-5,23	5,23	30,00	1,98	2,20	36,33	31,10	18,33
22	7,27	-20,18	0,00	-1,87	1,87	30,00	1,98	2,20	30,25	28,38	16,09
23	0,40	-24,01	0,00	-0,09	0,09	30,00	1,98	2,20	26,80	26,71	16,01

