

# Influencia de la Grieta de Tensión en el Empuje Activo

Silvio Humberto Rojas Gutiérrez y Stefano Pozzobon  
Facultad de Ingeniería, ULA,  
Mérida, 5101, Venezuela  
[silviorojas@ula.ve](mailto:silviorojas@ula.ve)

## Resumen

Se desarrollaran algunas expresiones de empuje activo para suelos arcillosos, en condición no drenada y drenada, considerando las condiciones de equilibrio de fuerzas horizontales y verticales, y donde debe respetarse la ley de resistencia de Mohr-Coulomb. En esta metodología se plantea la dependencia del empuje activo de la profundidad de la grieta de tensión, determinándose la inclinación del plano de falla que genera la mínima profundidad de la grieta, para un valor máximo de empuje activo.

**Palabras claves:** empuje, grieta, arcilla, drenada, falla.

## Abstrat

Some expressions of active push for argillaceous soils are developed, in drained and undrained conditions, considering the conditions of horizontal and vertical equilibrium of forces, and where the law of strength of Mohr-Coulomb be respected. In this methodology the dependency of the active thrust of the depth of the stress cracking considers, determining itself the inclination of the plane of fault that generated the minimum depth the crack, for a maximum value of active thrust.

**Keywords:** thrust, cracks, clay, drained, fails, active.

## Introducción

El estado activo de Rankine permite encontrar la expresión de empuje activo a partir de la envolvente de Mohr-Coulomb, donde se relacionan los esfuerzos principales ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ ) con los parámetros de resistencia ( $C'$ ,  $\phi'$ ), a través de la relación:

$$\sigma_3 = \sigma_1 \cdot Ka - 2C' \cdot Ka^{1/2} \quad (1)$$

$$Ka = \tan\left(45 - \frac{\phi'}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Donde:

Ka: Coeficiente de empuje activo

C': Cohesión del material

$\phi'$ : Fricción interna del material

Gran parte de los ingenieros utilizan esta expresión sencilla, para hallar el empuje activo en el trasdós del muro, adicionándole las cargas externas las cuales también serán afectadas por el coeficiente Ka. Rankine también presenta coeficientes de empuje activo y pasivo, donde toma en cuenta la inclinación del terreno ( $i$ ) y la inclinación del paramento del trasdós ( $\beta$ ). Igualmente la teoría de Coulomb, quien originalmente presenta el análisis del

equilibrio de fuerzas horizontales y verticales, en sus expresiones para los coeficientes de empuje activo y pasivo, además de considerar las inclinaciones del terreno ( $i$ ) y del parámetro ( $\beta$ ), también toma en cuenta el cortante que existe entre el suelo y el paramento, es decir la resistencia al corte en ese contacto. Desarrollos claros y amplios de estas teorías son presentadas por Lamber y Whitman (1990) y Peter y Reid (1993). En este trabajo se trata de mostrar herramientas matemáticas elementales, que también pueden resolver el problema de empuje activo.

## Planteamiento

### Arcillas no drenadas

La figura 1, presenta una cuña de material, definida por un plano de falla que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal causando un empuje sobre el muro. Esta cuña debe permanecer en equilibrio, bajo las fuerzas presentes en la misma.

W: Peso de la cuña que empuja al muro

T: Fuerza tangencial resistente al corte que actúa en la superficie de falla.

N: Fuerza normal a la superficie de falla.

X: Fuerza de resistencia al cortante que se genera en el contacto entre el muro y suelo.

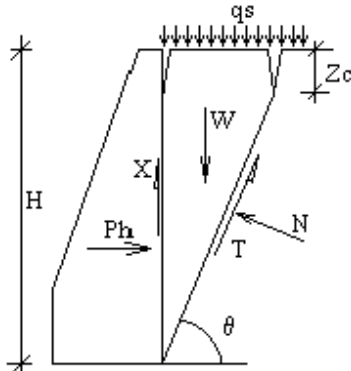


Fig. 1.- Fuerzas presentes en la cuña activa, en arcilla saturada.

La simbología de la figura, indica:

- Ph: Empuje horizontal generado por la cuña del muro.  
qs: Sobrecarga que actúa en la superficie del terreno.  
Zc: Profundidad de la grieta de tensión.  
H: Altura del muro.  
θ: Ángulo del plano de falla.

Como se sabe en el diseño de un muro, se debe considerar que la resistencia al corte disponible, es movilizadada completamente, por lo cual se tiene que:

$$T = Cu \cdot \frac{H - Zc}{\text{sen}(\theta)} \quad (1)$$

$$X = Cw (H - Zc) \quad (2)$$

Donde:

Cw: Resistencia al corte existente entre el paramento del muro y el suelo.

Cu: Resistencia no drenada del material.

El peso de la cuña se expresa como:

$$W = \frac{1}{2} \gamma_{sat} \cdot (H^2 - Zc^2) \cdot \cot \text{an}(\theta)$$

Donde:

$\gamma_{sat}$ : Peso unitario saturado del suelo que conforma la cuña

Por sumatoria de fuerzas horizontales y verticales, se encuentra:

$$Ph - N \cdot \text{sen} \theta + T \cdot \text{cos} \theta = 0 \quad (3)$$

$$W - X - T \cdot \text{sen} \theta - N \cdot \text{cos} \theta = 0 \quad (4)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3) y (4), se obtiene:

$$N \cdot \text{sen}(\theta) = Ph + Cu \cdot (H - Zc) \cdot \cot \text{an} \theta \quad (5)$$

$$N \cdot \text{cos} \theta = \frac{1}{2} \gamma_{sat} (H^2 - Zc^2) \cdot \cot \text{an}(\theta) - Cu(H - Zc) \cdot \left(1 + \frac{Cw}{Cu}\right) + qs \cdot (H - Zc) \cdot \cot \text{an} \theta \quad (6)$$

Combinando (5) y (6), se obtiene la expresión de la fuerza de empuje:

$$Ph = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{sat} \cdot (H^2 - Zc^2) - Cu(H - Zc) \cdot \left[ \left(1 + \frac{Cw}{Cu}\right) \cdot \tan \theta + \cot \text{an} \theta \right] + qs \cdot (H - Zc) \quad (7)$$

El empuje máximo correspondiente al empuje activo, se obtiene para  $\frac{d}{d\theta} Ph = 0$ , y donde resulta, que:

$$\tan(\theta) = \left( \frac{1}{1 + \frac{Cw}{Cu}} \right)^{1/2} \quad (8)$$

La sustitución de (8) en (7), permite hallar:

$$Ph_a = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{sat} (H^2 - Zc^2) - 2 \cdot Cu \cdot (H - Zc) \cdot \left(1 + \frac{Cw}{Cu}\right)^{1/2} + qs \cdot (H - Zc) \quad (9)$$

Siendo  $Ph_a$ , el mínimo empuje horizontal sobre el muro, que produce la falla en el suelo detrás del paramento, generándose el plano de falla indicado en la Figura 1.

La variación en el paramento, del esfuerzo horizontal con la profundidad "z", se puede hallar a partir de la ecuación (8), escribiendo:

$$Ph = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{sat} (z^2 - Zc^2) - 2Cu(z - Zc) \cdot \left(1 + \frac{Cw}{Cu}\right)^{1/2} + qs \cdot (z - Zc) \quad (10)$$

Derivando la ecuación (10) respecto "z", se obtiene:

$$\sigma_h = \frac{d}{dz} Ph \quad (11)$$

$$\sigma_h = \gamma_{sat} \cdot z - 2Cu \left(1 + \frac{Cw}{Cu}\right)^{1/2} \quad (12)$$

La profundidad crítica ( $Z_c$ ) de la grieta de tensión, resultará para un valor de  $\sigma_h = 0$ , donde el suelo no produce ningún empuje horizontal en el paramento. Para esta condición resulta:

$$Z_c = \frac{2 \cdot Cu \cdot \left(1 + \frac{Cw}{Cu}\right)^{1/2} - qs}{\gamma_{sat}} \quad (13)$$

Se observa como la sobrecarga ( $qs$ ), tiene un gran influencia en el valor de  $Z_c$ , pudiendo no existir dicha profundidad, cuando:

$$qs \geq 2 \cdot Cu \cdot \left(1 + \frac{Cw}{Cu}\right)^{1/2}$$

Lamber y Whitman (1990), respecto a las grietas de tensión, expresan: “Las grietas de tensión están asociadas con la deformación horizontal inherente al estado de presión lateral activa. No existe un problema en el caso de empuje pasivo, debido a que existe una compresión horizontal .... Si el nivel freático se encuentra realmente en la superficie del relleno, es muy poco probable que se puedan observar en la realidad grietas de tensión, pero de todos modos .... sirva para considerar el hecho de que el relleno no puede resistir tensiones horizontales”. Estos autores indican además: “En la grieta de tensión la presión horizontal es nula. La grieta se mantiene completamente abierta y la presión horizontal efectiva es igual a la tensión capilar. La profundidad de la grieta de tensión se obtiene considerando  $\sigma_h = 0$  (movilización total de la resistencia por fricción). Por debajo de la grieta es necesaria una presión horizontal aunque se movilice completamente la fricción”.

La aplicación de la ecuación (12), permite dibujar los siguientes diagramas de esfuerzos:

Si los esfuerzos en el paramento, lo representamos a partir de la ecuación (9), se obtiene la figura 3. Aparentemente el empuje final sobre el muro, difiere, si se calcula por ambas distribuciones, mostradas en las figuras 2 y 3.

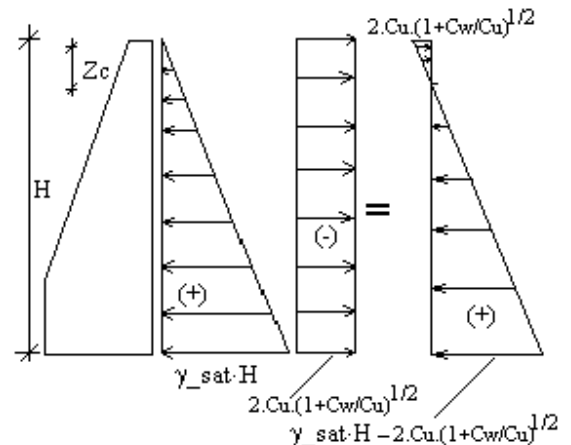


Fig. 2.- Primera representación de los esfuerzos sobre el paramento del muro en arcilla saturada no drenada.

### Arcillas drenadas – Nivel freático coincide con la superficie del terreno

Si se considera que no existe exceso de presión de poros, es decir se tiene una condición a largo plazo, significa entonces que este suelo debe ser tratado en condición drenada. La figura 1 nos sirve para hacer el planteamiento, es decir la simbología de representación de las fuerzas sobre la cuña, es la misma que para el caso de arcillas no drenadas, lógicamente con expresiones distintas, tal como se indica:

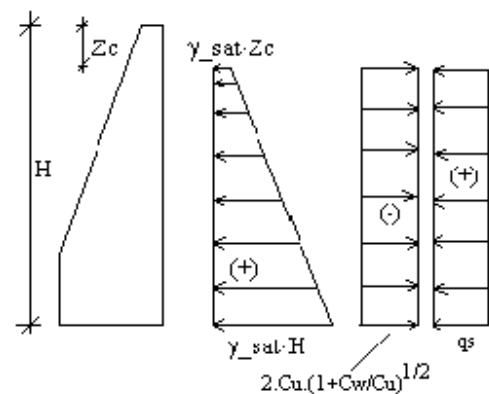


Fig. 3.- Segunda representación de los esfuerzos sobre el paramento del muro en arcilla saturada no drenada.

$$T = C' \cdot \frac{H - Zc}{\text{sen } \theta} + N' \cdot \tan \phi \quad (14)$$

$$X = Cw \cdot (H - Zc) + Ph' \cdot \tan \phi_w \quad (15)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{sat} \cdot (H^2 - Z_c^2) \cdot \cotan\theta \quad (16)$$

$$Ph' = Ph - Ua \quad (17)$$

$$Ua = \frac{1}{2} \cdot \gamma_w \cdot H^2 \quad (18)$$

Donde:

$\phi', C'$ : Fricción efectiva y cohesión efectiva, del material que conforma la cuña.

$\phi_w', C_w$ : Fricción y cohesión que se genera entre el paramento del muro y el suelo.

Ph: Empuje horizontal total sobre el paramento del muro.

Ph': Empuje horizontal total efectivo

Ua: Empuje de agua sobre el paramento.

$\gamma_w$ : peso unitario del agua.

Por sumatoria de fuerzas horizontales:

$$(Ph - N' \cdot \sen\theta + T \cdot \cos\theta) - U \cdot \sen\theta = 0 \quad (19)$$

Donde:

N': Fuerza normal efectiva que actúa en el plano de falla.

U: Empuje de agua que actúa en el plano de falla.

Esta fuerza se expresa:

$$U = \frac{1}{2} \gamma_w \cdot \frac{H^2}{\sen\theta} \quad (20)$$

Las ecuaciones (18) y (20) se relacionan, a través:

$$Ua = U \cdot \sen\theta \quad (21)$$

Ahora, si la ecuación (14) se reemplaza en la ecuación (19), se obtiene:

$$N' \cdot (\sen\theta - \tan\phi \cdot \cos\theta) = Ph + C' \cdot (H - Z_c) \cdot \cotan\theta - U \cdot \sen\theta \quad (22)$$

Por sumatoria de fuerzas verticales:

$$W + q_s \cdot (H - Z_c) \cdot \cotan\theta - X - T \cdot \sen\theta - N' \cdot \cos\theta - U \cdot \cos\theta = 0 \quad (23)$$

Sustituyendo la ecuación (14) y (15) en (23), con previo reemplazo de la ecuación (17) en (15), se obtiene:

$$N' \cdot (\cos\theta + \tan\phi' \cdot \sen\theta) = W + q_s \cdot (H - Z_c) \cdot \cotan\theta - (Ph - U) \cdot \tan\phi_w - C' \cdot \left(1 + \frac{C_w}{C'}\right) - U \cdot \cos\theta \quad (24)$$

Por relación entre las ecuaciones (22) y (24), se tiene:

$$\frac{N' \cdot (\sen\theta - \tan\phi \cdot \cos\theta)}{N' \cdot (\cos\theta + \tan\phi' \cdot \sen\theta)} = \frac{Ph + C' \cdot (H - Z_c) \cdot \cotan\theta - U \cdot \sen\theta}{(W + q_s \cdot (H - Z_c) \cdot \cotan\theta - Ph \cdot \tan\phi_w - C' \cdot (H - Z_c) \cdot \left(1 + \frac{C_w}{C'}\right) - U \cdot (\cos\theta - \tan\phi_w))} \quad (25)$$

Esta última ecuación se puede expresar como:

$$\tan(\theta - \phi') = \frac{Ph + C' \cdot (H - Z_c) \cdot \cotan\theta - U \cdot \sen\theta}{(W + q_s \cdot (H - Z_c) \cdot \cotan\theta - Ph \cdot \tan\phi_w - C' \cdot (H - Z_c) \cdot \left(1 + \frac{C_w}{C'}\right) - U \cdot (\cos\theta - \tan\phi_w))} \quad (26)$$

Despejando el empuje horizontal, total y reagrupando términos se escribe:

$$Ph = \left[ \frac{1}{2} \gamma_{sat} (H^2 - Z_c^2) + q_s (H - Z_c) \right] \cdot \left[ \frac{\cotan\theta \cdot \tan(\theta - \phi')}{(1 + \tan\phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] - C' (H - Z_c) \cdot \left[ \frac{\left(1 + \frac{C_w}{C'}\right) \cdot \tan(\theta - \phi') + \cotan\theta}{(1 + \tan\phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] - U \cdot \left[ \frac{(\cos\theta - \sen\theta \cdot \tan\phi_w) \cdot \tan(\theta - \phi') - \sen\theta}{(1 + \tan\phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] \quad (27)$$

Sustituyendo el empuje de agua (U), se obtiene:

$$Ph = \left[ \frac{1}{2} \gamma_{sat} (H^2 - Z_c^2) + q_s (H - Z_c) \right] \cdot \left[ \frac{\cotan\theta \cdot \tan(\theta - \phi')}{(1 + \tan\phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] - C' (Z - Z_c) \cdot \left[ \frac{\left(1 + \frac{C_w}{C'}\right) \cdot \tan(\theta - \phi') + \cotan\theta}{(1 + \tan\phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] - \frac{1}{2} \gamma_w \frac{H^2}{\sen\theta} \left[ \frac{\cos\theta - \sen\theta \cdot \tan\phi_w \tan(\theta - \phi') - \sen\theta}{(1 + \tan\phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] \quad (28)$$

El empuje para determinada profundidad, viene dado por:

$$Ph = \left[ \frac{1}{2} \gamma_{sat} (z^2 - Z_c^2) + qs(z - Z_c) \right] \cdot \left[ \frac{\cot an\theta \cdot \tan(\theta - \phi')}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] - C' (z - Z_c) \cdot \left[ \frac{\left( 1 + \frac{C_w}{C'} \right) \cdot \tan(\theta - \phi') + \cot an\theta}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] - \frac{1}{2} \gamma_w \frac{z^2}{sen\theta} \left[ \frac{(\cos \theta - sen\theta \cdot \tan \phi_w) \cdot \tan(\theta - \phi') - sen\theta}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] \quad (29)$$

Derivando el empuje horizontal, respecto a la profundidad "z", se obtiene la expresión  $\sigma h$  del esfuerzo horizontal:

$$\sigma h = \frac{d}{dz} Ph \quad (30)$$

El resultado de la aplicación de la ecuación (30), es el siguiente:

$$\sigma h = (\gamma_{sat} \cdot z + qs) \cdot \left[ \frac{\cot an\theta \cdot \tan(\theta - \phi')}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] - C' \cdot \left[ \frac{\left( 1 + \frac{C_w}{C'} \right) \cdot \tan(\theta - \phi') + \cot an\theta}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] - \gamma_w \cdot z \cdot \left[ \frac{(\cos \theta - sen\theta \cdot \tan \phi_w) \cdot \tan(\theta - \phi') - sen\theta}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi')) \cdot sen\theta} \right] \quad (31)$$

Para un valor de  $\sigma h = 0$ , se logra obtener la expresión de la profundidad de la grieta ( $Z_c$ ) de tensión:

$$Z_c = \frac{C' \cdot \left[ \left( 1 + \frac{C_w}{C'} \right) \cdot \tan(\theta - \phi') + \cot an\theta \right] - qs \cdot \left[ \frac{\cot an\theta \cdot \tan(\theta - \phi')}{1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi')} \right]}{\gamma_{sat} \cdot \left[ \frac{\cot an\theta \cdot \tan(\theta - \phi')}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] - \gamma_w \cdot \left[ \frac{(\cos \theta - sen\theta \cdot \tan \phi_w) \cdot \tan(\theta - \phi') - sen\theta}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi')) - sen\theta} \right]} \quad (32)$$

Como se observa la profundidad de la grieta de tensión en este caso, no es tan sencilla como la determinada por la ecuación (13), sino que ahora ya depende del ángulo

$\theta$ , cuyo valor no se conoce. En este sentido la relación física entre la profundidad de la grieta de tensión ( $Z_c$ ) y el empuje horizontal  $Ph$ , está en: ¿Cuál es el valor máximo del empuje horizontal (empuje activo  $Ph_a$ ), para un valor mínimo de la grieta de tensión?. Esta condición se puede determinar, escribiendo  $Z_c$  como una función de  $\theta$ , por lo cual se expresa:

$$Z_c(\theta) = f(\theta) \quad (33)$$

El ploteo de esta función, produce un mínimo para determinado ángulo  $\theta_a$ , que define la mínima grieta de tensión, por lo cual la expresión del empuje activo, puede expresarse como:

$$Ph = \left[ \frac{1}{2} \gamma_{sat} \cdot (H^2 - Z_c^2) + qs(H - Z_c) \right] \left[ \frac{\cot an\theta_a \cdot \tan(\theta_a - \phi')}{1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta_a - \phi')} \right] - C'(H - Z_c) \cdot \left[ \frac{\left( 1 + \frac{C_w}{C'} \right) \cdot \tan(\theta_a - \phi') + \cot an\theta_a}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta_a - \phi'))} \right] - \frac{1}{2} \gamma_w \cdot H^2 \left[ \frac{(\cos \theta_a - sen\theta_a \cdot \tan \phi_w) \cdot \tan(\theta_a - \phi') - sen\theta_a}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta_a - \phi')) \cdot sen\theta_a} \right] \quad (34)$$

Esta última ecuación se puede expresar, a través de algunas constantes de empuje activo, tal como se indica a continuación:

$$Ph_a = \left[ \frac{1}{2} \gamma_{sat} (H^2 - Z_c^2) + qs(H - Z_c) \right] \cdot Ka1 - C'(H - Z_c) \cdot Ka2 + \frac{1}{2} \gamma_w \cdot H^2 \cdot Ka3 \quad (35)$$

Donde:

$$Ka1 = \left[ \frac{\cot an\theta_a \cdot \tan(\theta_a - \phi')}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta_a - \phi'))} \right] \quad (35.1)$$

$$Ka2 = \left[ \frac{\left( 1 + \frac{C_w}{C'} \right) \cdot \tan(\theta_a - \phi') + \cot an\theta_a}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta_a - \phi'))} \right] \quad (35.2)$$

$$Ka3 = - \left[ \frac{(\cos \theta_a - sen\theta_a \cdot \tan \phi_w) \cdot \tan(\theta_a - \phi') - sen\theta_a}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta_a - \phi')) \cdot sen\theta_a} \right] \quad (35.3)$$

Aquí  $Ka1$  y  $Ka3$ , se pueden llamar constantes de empuje activo, sin embargo se sugiere que  $Ka2$  debe ser constante de resistencia activa. De la ecuación 35, se observa que todos los esfuerzos en el paramento se concentran por debajo de la grieta de tensión, excepto el empuje del agua.

#### Arcilla en condición drenada – Nivel freático a cierta profundidad

A continuación se estudia el caso de empuje en una arcilla en condición drenada, pero con el nivel freático a determinada profundidad, tal como se muestra en la figura 4. Aquí se considera que en la zona saturada y no saturada de la cuña activa, los parámetros de resistencia ( $C'$ ,  $\phi'$ ) en el plano de falla y ( $C_w$ ,  $\phi_w$ ) en el paramento, son los mismos en ambas zonas.

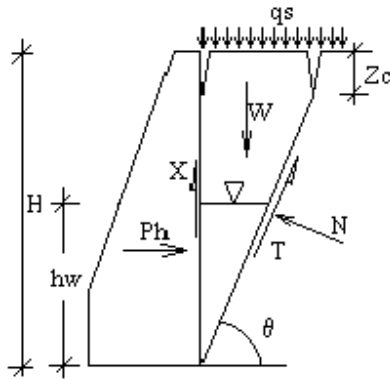


Fig. 4.- Fuerzas presentes en la cuña activa, en arcilla drenada, con el nivel freático a cierta altura

En este caso haciendo el planteamiento de las ecuaciones para determinar el empuje horizontal sobre el muro, se llega a la misma ecuación 26, tomando en cuenta que la expresión del peso de la cuña viene dado por:

$$W = \left[ \frac{1}{2} \gamma \cdot \left( H^2 - Z_c^2 + \frac{1}{2} h_w^2 (\gamma_{sat} - \gamma) \right) \right] \cdot \cot \alpha n \theta \quad (36)$$

Sustituyendo la ecuación (36) en (26) y despejando el empuje horizontal ( $Ph$ ), resulta:

$$Ph = \left[ \frac{1}{2} \gamma \left( H^2 - Z_c^2 \right) + \frac{1}{2} h_w^2 (\gamma_{sat} - \gamma) + q_s \cdot (H - Z_c) \right] \cdot Ka1 - C' (H - Z_c) Ka2 - \frac{1}{2} \gamma_w \cdot h_w^2 \cdot Ka3 \quad (37)$$

Donde las expresiones de las constantes de empuje, son las mismas anteriores tomando en cuenta que  $\theta_a$  no ha sido determinado y por consiguiente en esas ecuaciones debe sustituirse por  $\theta$ .

Si se considera que la altura del nivel freático ( $h_w$ ), no varía y que la expresión del empuje horizontal para determinada profundidad “ $z$ ”, será:

$$Ph = \left[ \frac{1}{2} \gamma \left( z^2 - Z_c^2 \right) + \frac{1}{2} h_w^2 (\gamma_{sat} - \gamma) + q_s \cdot (z - Z_c) \right] \cdot Ka1 - C' (z - Z_c) Ka2 + \frac{1}{2} \gamma_w \cdot h_w^2 \cdot Ka3 \quad (38)$$

El empuje horizontal, se expresará por:

$$\sigma_h = (\gamma \cdot z + q_s) \cdot Ka1 - C' \cdot Ka2 \quad (39)$$

La profundidad de la grieta de tracción a partir de la ecuación (39), se expresa como:

$$Z_c = \frac{C' \cdot \left[ \left( 1 + \frac{C_w}{C'} \right) \cdot \tan(\theta - \phi') + \cot \alpha n \theta \right]}{\gamma \cdot \cot \alpha n \theta \cdot \tan(\theta - \phi')} - \frac{q_s}{\gamma} \quad (40)$$

Recordemos que la solución del problema, está en determinar el ángulo  $\theta_a$ , que permitirá evaluar las constantes  $Ka1$ ,  $Ka2$  y  $Ka3$ , para determinar el mínimo empuje activo sobre el paramento del muro. Esta metodología se ilustra con el ejemplo presentado al final del artículo.

#### Arcilla drenada – Superficie del terreno inclinada – Nivel freático coincidiendo con la superficie.

La figura 5, ilustra un muro de sostenimiento de un suelo arcilloso con la superficie del suelo inclinada en un ángulo  $\alpha$  respecto a la horizontal, y con grietas de tensión. Para el análisis de este caso se sigue la misma metodología presentada anteriormente, tal como se indica a continuación:

Se observa que la cuña de suelo se ha dividido en tres áreas de pesos por metro lineal  $W1$ ,  $W2$  y  $W3$ , y cuyas expresiones son las siguientes:

$$W1 = \frac{1}{2} \gamma_{sat} \cdot y \cdot L \quad (41)$$

$$W2 = \gamma_{sat} \cdot (Z_c - y) \cdot L \quad (42)$$

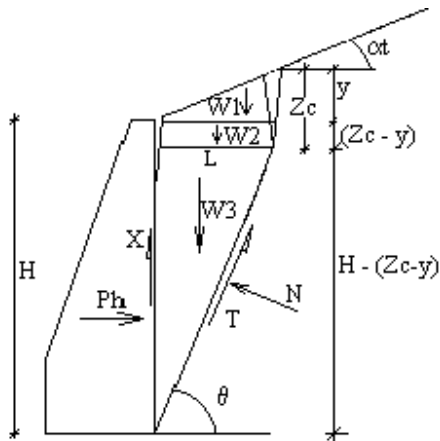


Fig. 5.- Fuerzas presentes en la cuña activa, en arcilla saturada con superficie inclinada.

$$W3 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot (H - (Zc - y)) \cdot \gamma_{sat} \quad (43)$$

De la figura 5, se determinan las expresiones de “L” y de “y”, obteniéndose:

$$L = \left[ \frac{(H - Zc) \cdot \cotan \theta}{\cotan \alpha - \cotan \theta} \right] \cdot \cotan \alpha \quad (44.1)$$

$$y = \frac{(H - Zc) \cdot \cotan \theta}{\cotan \alpha - \cotan \theta} \quad (44.2)$$

Sustituyendo la ecuación (44) en las ecuaciones (41), (42) y (43), las expresiones de los pesos se convierten en:

$$W1 = \frac{1}{2} \gamma_{sat} \cdot \left[ \frac{(H - Zc) \cdot \cotan \theta}{\cotan \alpha - \cotan \theta} \right]^2 \cdot \cotan \alpha \quad (45)$$

$$W2 = \gamma_{sat} \cdot \left[ Zc - \frac{(H - Zc) \cdot \cotan \theta}{\cotan \alpha - \cotan \theta} \right] \cdot \left[ H - Zc + \frac{(H - Zc) \cdot \cotan \theta}{\cotan \alpha - \cotan \theta} \right] \cdot \cotan \theta \quad (46)$$

$$W3 = \frac{1}{2} \gamma_{sat} \left[ H - Zc + \frac{(H - Zc) \cdot \cotan \theta}{\cotan \alpha - \cotan \theta} \right]^2 \cdot \cotan \theta \quad (47)$$

Las expresiones (14) y (15) se mantienen, sin embargo la presión de poros se estimará a través del diagrama mostrado en la figura 6, donde se considera que en la grieta de tracción existe un empuje de agua.

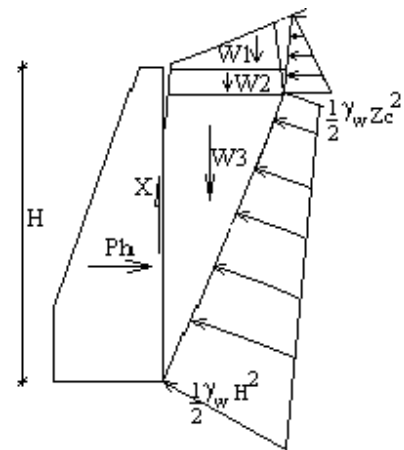


Fig. 6.- Diagrama de presión de poros, a lo largo del plano de falla y la grieta de tensión.

La fuerza que genera la presión de poros en el plano de falla y la grieta de tensión, pueden estimarse a través de las siguientes expresiones:

$$U = \frac{1}{4} \gamma_w \cdot \frac{Z_c^2 + H^2}{\sen(\theta)} \quad (48)$$

$$E_w = \frac{1}{2} \gamma_w \cdot Z_c^2 \quad (49)$$

En este caso el empuje horizontal Ph, en el trasdós del muro se determina a través de:

$$Ph = \left[ \frac{1}{2} \gamma_{sat} \cdot \left[ \frac{(H - Zc) \cdot \cotan \theta}{\cotan \alpha - \cotan \theta} \right]^2 \cdot \cotan \alpha + \gamma_{sat} \left[ Zc - \frac{(H - Zc) \cdot \cotan \theta}{\cotan \alpha - \cotan \theta} \right] \cdot \left[ H - Zc + \frac{(H - Zc) \cdot \cotan \theta}{\cotan \alpha - \cotan \theta} \right] \cdot \cotan \theta + \frac{1}{2} \gamma_{sat} \left[ H - Zc + \frac{(H - Zc) \cdot \cotan \theta}{\cotan \alpha - \cotan \theta} \right]^2 \cdot \cotan \theta \right] \cdot \frac{\tan(\theta - \phi')}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} + qs \left[ H - Zc + \frac{(H - Zc) \cdot \cotan \theta}{\cotan \alpha - \cotan \theta} \right] \cdot \frac{\cotan \theta \cdot \tan(\theta - \phi')}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} - C'(H - Zc).$$

$$\left[ \frac{\left(1 + \frac{C_w}{C'}\right) \cdot \tan(\theta - \phi') + \cot \alpha \tan \theta}{1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi')} \right] - C' \left[ \frac{(H - Z_c) \cot \alpha \tan \theta}{\cot \alpha \tan \theta - \cot \alpha \tan \theta} \right] \cdot \frac{1}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \quad (50)$$

$$\left( \frac{\tan(\theta - \phi') + \cot \alpha \tan \theta}{1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi')} \right) - \frac{1}{4} \gamma_w (Z_c^2 + H^2).$$

$$\left[ \frac{(\cos \theta - \tan \phi_w) \cdot \tan(\theta - \phi') - \text{sen} \theta}{\text{sen} \theta \cdot (1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] + \frac{1}{2} \gamma_w \cdot Z_c^2.$$

$$Z_c = \frac{C' \left[ \left(1 + \frac{C_w}{C'}\right) \cdot \tan(\theta - \phi') + \cot \alpha \tan \theta + \left( \frac{\cot \alpha \tan \theta}{\cot \alpha \tan \theta - \cot \alpha \tan \theta} \right) \cdot (\tan(\theta - \phi') + \cot \alpha \tan \theta) \right] - qs \left( 1 + \frac{\cot \alpha \tan \theta}{\cot \alpha \tan \theta - \cot \alpha \tan \theta} \right) \cdot \cot \alpha \tan \theta \cdot \tan(\theta - \phi')}{\tan(\theta - \phi') \cdot \left[ \gamma_{sat} \cdot \cot \alpha \tan \theta \cdot \left( 1 + \frac{\cot \alpha \tan \theta}{\cot \alpha \tan \theta - \cot \alpha \tan \theta} \right) - \frac{1}{2} \gamma_w \left[ \frac{(\cos \theta - \tan \phi_w) \cdot \tan(\theta - \phi') - \text{sen} \theta}{\text{sen} \theta \cdot \tan(\theta - \phi')} \right] \right]} \quad (51)$$

El ángulo  $\theta$  que produce el valor mínimo de la grieta de tensión ( $\theta_a$ ), será sustituido en la ecuación (50), lo cual permite determinar el empuje activo  $Pha$ , en el trasdós del muro.

Los diagramas de esfuerzos en el trasdós del muro, se pueden encontrar simplificando la ecuación (50) en distintos términos, lo cual permite mostrar los coeficientes de empujes que existen en este caso:

$$Pha = \frac{1}{2} \gamma_{sat} \cdot H^2 \cdot Ka1 - \frac{1}{2} \gamma_{sat} \cdot Z_c^2 \cdot Ka1 + qs(H - Z_c)Ka1 - C'(H - Z_c) \cdot Ka2 + \frac{1}{2} \gamma_w \cdot Z_c^2 \cdot Ka3 + \frac{1}{2} \gamma_w \cdot H^2 \cdot Ka4 \quad (52)$$

Donde los coeficientes de empuje activo, se expresan a través de las siguientes ecuaciones:

$$Ka1 = \left( 1 + \frac{\cot \alpha \tan \theta}{\cot \alpha \tan \alpha - \cot \alpha \tan \theta} \right) \cdot \left( \frac{\cot \alpha \tan \theta \cdot \tan(\theta - \phi')}{1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi')} \right) \quad (52.1)$$

De la ecuación (50), se determina que la profundidad de la grieta de tensión, se puede expresar como:

$$Ka2 = \frac{\left(1 + \frac{C_w}{C'}\right) \cdot \tan(\theta - \phi') + \frac{1}{\tan(\theta)}}{(1 + \tan(\phi_w) \cdot \tan(\theta - \phi'))} +$$

$$\left[ \frac{\frac{1}{\tan(\theta)}}{\frac{1}{\tan(\alpha)} - \frac{1}{\tan(\theta)}} \right] \cdot \left( \frac{\tan(\theta - \phi') + \frac{1}{\tan(\theta)}}{1 + \tan(\phi_w) \cdot \tan(\theta - \phi')} \right) \quad (52.2)$$

$$Ka3 = - \left[ \frac{(\cos \theta - \tan \phi_w) \cdot \tan(\theta - \phi') - \text{sen} \theta}{2 \text{sen} \theta \cdot (1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} - \frac{1}{(1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] \quad (52.3)$$

$$Ka4 = - \left[ \frac{(\cos \theta - \tan \phi_w) \cdot \tan(\theta - \phi') - \text{sen} \theta}{2 \text{sen} \theta \cdot (1 + \tan \phi_w \cdot \tan(\theta - \phi'))} \right] \quad (52.4)$$

De acuerdo a la ecuación (52) del empuje activo, el diagrama de presiones efectivo sobre el trasdós será el representado en la figura 7, donde se observa que todos los esfuerzos se distribuyen en el trasdós del muro, excepto nuevamente el empuje del agua.

En la ecuación (52), se puede decir que las constantes activas de empuje son  $Ka1$ ,  $Ka3$ ,  $Ka4$  y que la constante de resistencia activa es  $Ka2$ .

Si en este caso analizamos la condición a corto plazo, las ecuaciones (51) y (52), se convierten en las siguientes expresiones:



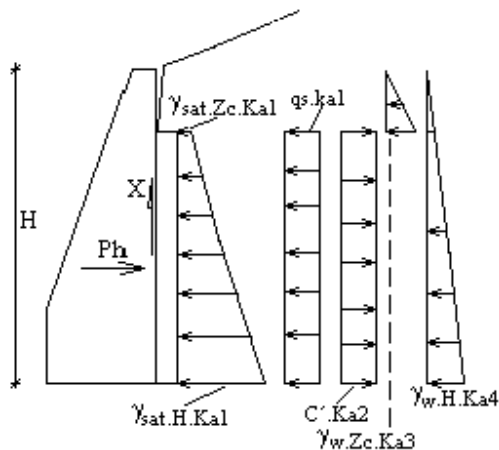


Fig. 7.- Esfuerzos en el paramento del muro, para arcilla saturada con superficie inclinada.

$$Z_c = \frac{Cu \left[ \left( 1 + \frac{C_w}{Cu} \right) \cdot \tan(\theta) + \cot \alpha \tan \theta + \left( \frac{\cot \alpha \tan \theta}{\cot \alpha \tan \alpha - \cot \alpha \tan \theta} \right) \cdot (\tan(\theta - \phi') + \cot \alpha \tan \theta) \right] + qs \cdot \left( 1 + \frac{\cot \alpha \tan \theta}{\cot \alpha \tan \alpha - \cot \alpha \tan \theta} \right)}{\left[ \gamma_{sat} \cdot \left( 1 + \frac{\cot \alpha \tan \theta}{\cot \alpha \tan \alpha - \cot \alpha \tan \theta} \right) \right]} \quad (53)$$

$$Pha = \frac{1}{2} \gamma_{sat} \cdot H^2 \cdot Ka1 - \frac{1}{2} \gamma_{sat} \cdot Z_c^2 \cdot Ka1 + qs(H - Z_c) \cdot Ka1 - C'(H - Z_c) \cdot Ka2 \quad (54)$$

$$Ka1 = \left( 1 + \frac{\cot \alpha \tan \theta}{\cot \alpha \tan \alpha - \cot \alpha \tan \theta} \right) \quad (54.1)$$

$$Ka2 = \left[ \left( 1 + \frac{C_w}{Cu} \right) \cdot \tan(\theta) + \cot \alpha \tan \theta \right] + \left( \frac{\cot \alpha \tan \theta}{\cot \alpha \tan \alpha - \cot \alpha \tan \theta} \right) \cdot (\tan(\theta) + \cot \alpha \tan \theta) \quad (54.2)$$

La representación de la ecuación (54) en diagramas de esfuerzos resulta algo similar a lo mostrado en la figura 7, con la diferencia que aquí existe una constante de empuje activo (ka1) y solamente existe una constante de resistencia activa (ka2).

### Aplicación Práctica

Los dos siguientes ejercicios permitirán ver con claridad la aplicación algunas de las ecuaciones desarrolladas anteriormente.

#### Ejercicio No. 1

El siguiente ejemplo es presentado por Peter y Reid (1993), en su capítulo de Muros, donde estudian el empuje activo sobre el espaldón del muro que retiene una arcilla preconsolidada saturada. A continuación se presentan los datos y desarrollo del problema.

Un muro de gravedad de 10 m de altura, con el espaldón vertical, retiene una arcilla preconsolidada saturada, que llega hasta el tope del muro, como se muestra en la figura 8. Calcular las componentes horizontal y vertical del empuje activo sobre el espaldón del muro, inmediatamente después de la construcción y un largo tiempo después, dado que las propiedades de la arcilla son:

Condición a corto plazo:

$$\gamma_{sat} = 1,96 \text{ ton/m}^3$$

$$Cu = 5,6 \text{ ton/m}^2$$

$$C_w = 4,2 \text{ ton/m}^2$$

A largo plazo:

$$\phi' = 24$$

$$\phi_w' = 18$$

$$C' = 1,2 \text{ ton/m}^2$$

$$C_w' = 0,9 \text{ ton/m}^2$$

$$\gamma = \gamma_{sat}$$

Suponer para la situación a largo plazo, que el efecto del flujo de filtración estacionario hacia el drenaje vertical, es equivalente a un nivel estático en el plano medio del muro.

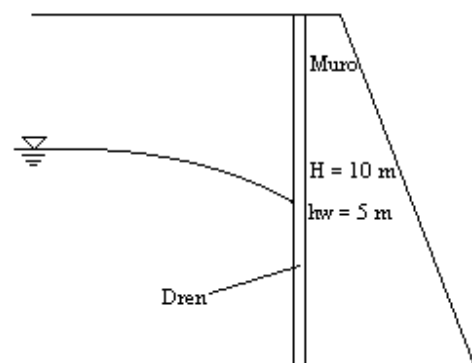


Fig. 8.- Esquema del muro, presentando un nivel del agua en el espaldón para la condición a largo plazo de 5m y para la condición no drenada el nivel freático en la superficie.

Solución:

Para el caso fin de la construcción

Al final de la construcción no se ha producido disipación del exceso de presión intersticial, entonces la arcilla está en estado no drenado y el empuje activo inmediato sobre el muro se determina con un análisis de esfuerzos totales.

Considerando que debido a que la arcilla se encuentra en tensión cerca de la superficie del suelo, detrás del muro, se desarrollan fisuras en el suelo, hasta una profundidad  $Z_c$ .

Aplicando la ecuación (13), se determina la profundidad de la grieta de tensión.

$$Z_c = 7.559 \text{ m}$$

A partir de la ecuación (9) el empuje activo resulta:

$$P_{ha} = 5.838 \text{ ton/m}$$

De acuerdo a la figura 3, no existen esfuerzos horizontales totales a lo largo de la grieta de tensión, sin embargo, si no existe un drenaje y la superficie del terreno no está pavimentada, la grieta de tensión detrás del muro, puede llenarse con agua de lluvias, y producir un empuje hidrostático adicional sobre el muro, que en este caso será igual a:

$$\frac{1}{2} \gamma_w \cdot Z_c^2 = 28.571 \text{ ton/m}$$

Este empuje, es sustancialmente superior al empuje de la arcilla a corto plazo. Esto indica la importancia de proporcionar un sistema de drenaje adecuado en todo tipo de muro de contención.

Solución:

A largo plazo:

Para estas condiciones se alcanzará el equilibrio en todos los puntos de la arcilla retenida y no existirá exceso de presión. El análisis se debe hacer en esfuerzos efectivos.

Peter Reid (1993), resuelve el problema a través de su ecuación presentada en su libro, la cual se expresa:

$$P_{ha} = \left[ \frac{1}{2} \gamma_{sat} (H^2 - Z_c^2) + q_s (H - Z_c) \right] \cdot K_{a1} - C' (H - Z_c) \cdot K_{a2} \quad (55)$$

$$K_{a1} = \left[ \frac{\cos\left(\phi' \cdot \frac{\pi}{180}\right)}{1 + \operatorname{sen}\left(\phi' \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \left[ 1 + \frac{\tan\left(\phi_w' \cdot \frac{\pi}{180}\right)}{\tan\left(\phi' \cdot \frac{\pi}{180}\right)} \right]^{1/2}} \right]^2 \quad (55.1)$$

$$K_{a1} = 0.354$$

$$K_{a2} = \frac{\cos\left(\phi' \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \left[ 2 \left( 1 + \frac{C_w'}{C'} \right)^{1/2} + \left( 2 + \frac{C_w'}{C'} \right) \cdot \operatorname{sen}\left(\phi' \cdot \frac{\pi}{180}\right) \right]}{\left[ 1 + \operatorname{sen}\left(\phi' \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \left[ 1 + \frac{\tan\left(\phi_w' \cdot \frac{\pi}{180}\right)}{\tan\left(\phi' \cdot \frac{\pi}{180}\right)} \right]^{1/2} \right]^2} \quad (55.2)$$

$$K_{a2} = 1.46$$

Aplicando la ecuación (11) a la ecuación (55) se obtiene:

Para  $\sigma_h = 0$ , resulta la profundidad de la grieta de tensión:

$$Z_c = \frac{C' K_{a2} - q_s \cdot K_{a1}}{\gamma_{sat} \cdot K_{a1}} \quad (56)$$

$$Z_c = 2.523$$

Sustituyendo en(55) el empuje activo es:

$$P_{ha} = 19.408 \text{ ton/m}$$

Aplicando las expresiones presentadas en este artículo, para la condición a largo plazo, se tiene:

El ploteo de la ecuación (40), que relaciona la profundidad de la grieta con el ángulo  $\theta$ , permite definir la figura 9, en la cual se observa que la función presenta un mínimo cuyo valor es el que define la profundidad de la grieta en nuestro problema.

Este valor es igual al obtenido por Peter y Reid (1993).

$$Z_c = 2.523 \text{ m}$$

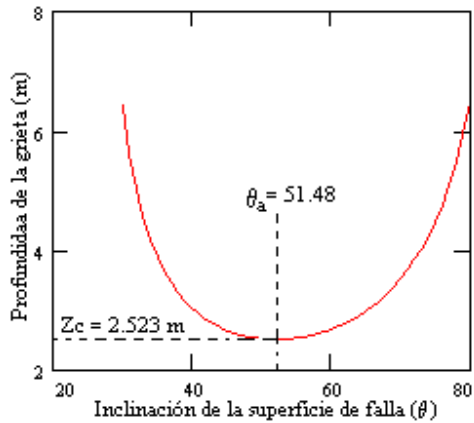


Fig. 9.- Relación entre la profundidad de la grieta y el plano de falla detrás del paramento, observándose la profundidad mínima de la grieta.

Una vez obtenido el valor de  $Z_c$ , se evalúa la ecuación 37, con lo cual se obtiene un empuje activo igual a:

$$Ph_a = 27,48 \text{ ton/m}$$

Donde los valores de los coeficientes de empuje y de resistencia, correspondiente a las ecuaciones (35.1), (35.2) y (35.3), son  $Ka_1 = 0,754$ ,  $Ka_2 = 1,46$  y  $Ka_3 = 0,648$

La representación de este empuje se presenta en la figura 10.

Si las ecuaciones 35.1, 35.2, 35.3 y la ecuación 40 se sustituyen en la ecuación 37, quedando esta última en función del ángulo  $\theta$ , entonces se podrá representar la variación del empuje  $Ph$  respecto al ángulo  $\theta$  (inclinación del plano de falla). En este problema, esta relación se presenta en la figura 11, donde se observa que la curva presenta un máximo, para determinado ángulo  $\theta$ , cuyo valor coincide con el correspondiente al determinado por la profundidad mínima de la grieta  $\theta = 51,89^\circ$ .

La presión de poros en el espaldón del muro será significativa entre este valor y está determinada por la ecuación (18), para una altura del N.F de 5 m resultando  $U=12.5$  ton/m. Significa entonces, que aún existiendo un dren en el espaldón, existe un empuje de agua, determinado por el nivel estático del agua en el dren.

La fuerza de resistencia cortante entre el dren y el relleno, será:

$$X = C_w \cdot (H - Z_c) + (Ph_a - U) \cdot \tan\left(\phi_w \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

$$X = 11.597 \text{ ton/m}$$

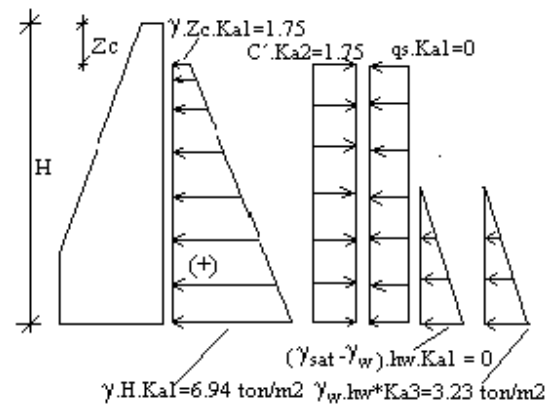


Fig. 10.- Distribución de los esfuerzos, para la condición a largo plazo.

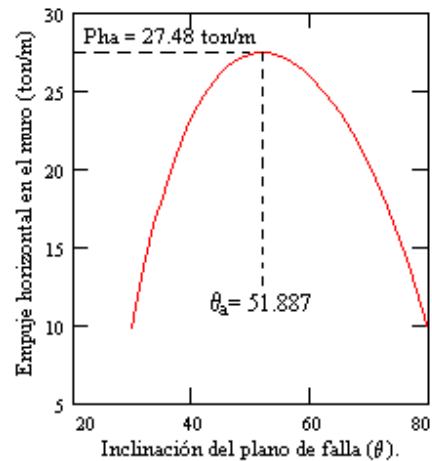


Fig. 11.- Relación entre el empuje horizontal y la inclinación del plano de falla, presentándose un máximo para el empuje.

## Ejercicio No. 2:

### Datos:

Muro de 5,40 m de altura, en concreto normal. Las propiedades del suelo de fundaciones son:

$$\gamma_{\text{suelo}} = 1.8 \text{ ton/m}^3 \quad \phi' = 32^\circ \quad C' = 0$$

El suelo retenido tiene una inclinación  $\alpha t = 10^\circ$  y el nivel freático coincide con la superficie.

$$\begin{array}{lll} \gamma_{\text{sat}} = 1.8 & C' = 0 & \phi' = 26.(\pi/180) \\ \alpha t = 10.(\pi/180) & q_s = 0 & \phi_w = 0 \\ H = 5.4 & C_w = 0 & \gamma_w = 1 \end{array}$$

Solución:

Este suelo puede ser tratado como una arcilla normalmente consolidada a largo plazo, y donde la aplicación de la ecuación (51) con estos datos determina un valor de la profundidad de la grieta de tensión igual a cero ( $Z_c = 0$ ).

Como  $Z_c = 0$ , entonces trabajaremos con la derivación del empuje horizontal, para encontrar su máximo valor en determinado ángulo  $\theta$ , a partir de la ecuación (59). La evaluación de esta ecuación para distintos valores de  $\theta$  permite obtener la figura 12, donde se encuentra que el valor de empuje activo máximo es de 16,11 ton/m, para una inclinación del plano de falla, igual a  $\theta = 52,60^\circ$ .

El diagrama de presiones se puede obtener a partir de la figura 7, la cual para este problema será el mostrado en la figura 13.

Aplicando la expresión de Rankine:

$$K_a = \cos(\alpha) \cdot \frac{\cos(\alpha) - (\cos(\alpha)^2 - \cos(\phi)^2)^{1/2}}{\cos(\alpha) + (\cos(\alpha)^2 - \cos(\phi)^2)^{1/2}}$$

$$K_a = 0.413$$

$$P_{ha} = \frac{1}{2} \gamma_{sat} \cdot H^2 \cdot K_a$$

$$P_{ha} = 10.848 \text{ ton/m}$$

Se observa que existe una diferencia considerable entre la el último valor y el anterior.

### Conclusión

Se hace un estudio de los empujes que actúan en el trasdós de un muro, donde la distribución de esfuerzos es función no solamente de una constante de empuje activo, sino que aparecen una serie de constantes principalmente determinadas por el ángulo de inclinación del plano de falla detrás del muro. En el caso de arcillas no drenadas con superficie horizontal la definición de constantes de empuje es fácil de hallar tal como lo presenta Lamber y Whitman (1990), sin embargo, para esa misma superficie horizontal del terreno pero en la condición a largo plazo, la definición de constantes de empuje activo y de resistencia activa no es tan fácil conocer su deducción tal como se expresó en la ecuación (35).

Se ha analizado la condición a largo plazo en un muro que tiene la superficie del terreno inclinada, encontrándose tres constantes de empuje activo (ec. 52.1, 52.3, 52.4), y una constante de resistencia activa (ec. 52.2), tal como se ilustró en la figura 7.

En todos los casos vemos que los valores de las constantes, son dependientes totalmente de la profundidad de la grieta de tensión y por consiguiente del ángulo de inclinación del plano de falla, ya que la metodología aquí presentada consiste en determinar cuál es el ángulo  $\theta$  de inclinación del plano de falla que produce la profundidad mínima de la grieta de tensión para un valor máximo de empuje activo.

Se debe resaltar la presencia del empuje del agua que actúa en el plano de falla y grieta de tracción en las condiciones a largo plazo, aún estando trabajando con un peso unitario saturado del material.

Se ha determinado que en ambos ejercicios presentados, el empuje activo en la condición a largo plazo, cuando se estima a través de la metodología presentada aquí, resultó tener un valor mayor al calculado a través de las otras metodologías indicadas, en la solución de los problemas. En este sentido, es conveniente que el profesional encargado del diseño de este tipo de estructuras

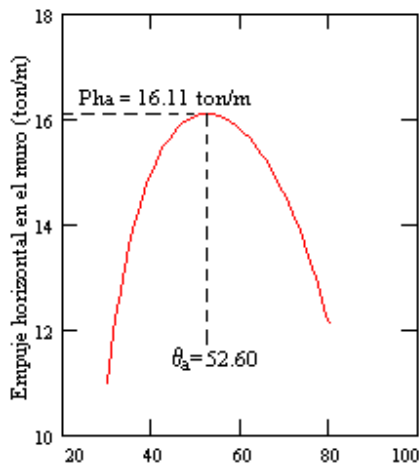


Fig. 12.- Relación entre el empuje horizontal y la inclinación del plano de falla, presentándose un máximo para el empuje.

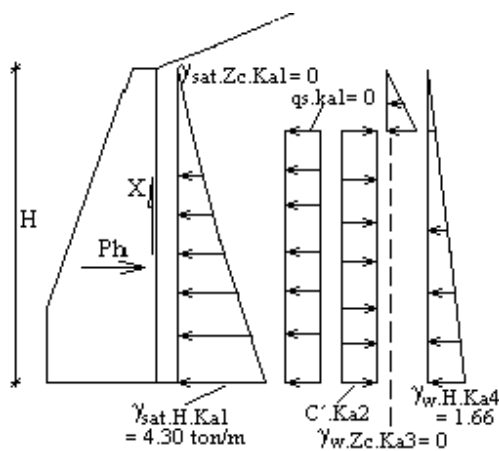


Fig. 13.- Esfuerzos en el paramento del muro, para arcilla saturada con superficie inclinada.

revise con responsabilidad, qué fuerzas va a considerar para definir la estabilidad de estas paredes de retención.

### **Agradecimiento**

Este trabajo, al igual que los anteriores han sido posible a la excelente ayuda de la Señora Magaly Varona, a ella mis más sinceras gracias.

### **Referencias**

Lambe W. Y Whitman R., (1990), Mecánica de Suelos, John Wiley & Sons, Inc., Capítulo 13.

Berry P. Y Reid D., (1993), Mecánica de Suelos, McGraw-Hill Interamericana, S.A., Capítulo 6.

Terzaghi, K. and Peck R., (1967), Soil Mechanics in Engineering Practice, 2<sup>nd</sup> edn, Wiley, New York.

Fratelli M., (1993), Suelos, Fundaciones y Muros, María Graciela Fratelli.