

Formulación Matemática del Modelo Viscoplastico de Perzyna

Mathematical formulation of the Model Viscoplastic of Perzyna

Silvio H. Rojas Gutiérrez y Belén León A.
Postgrado de Ingeniería Vial, Departamento de Vías
Universidad de Los Andes,
Mérida, 5101,
silviorojas@ula.ve

Resumen

En este artículo, se presenta un análisis del comportamiento viscoplastico de los suelos, haciéndose la derivación matemática requerida para la estimación de las deformaciones viscoplasticas en un elemento, a partir de las funciones de fluencia y de potencial plástico, obtenidas con los criterios de resistencia de Mohr-Coulomb y Druker-Prager para el caso tridimensional y de deformación plana.

Palabras claves: Modelo, viscoplastico, fluencia, deformaciones, esfuerzo

Abstract

In this article, an analysis of the behavior viscoplastic of the soils is presented, there being done the mathematical derivation needed for the estimation of the deformations viscoplastics in an element, starting from the functions of yield and from plastic potential, obtained with the criteria of resistance of Mohr-Coulomb and Druker-Prager, for the three-dimensional case and from plane strain.

Key words: Model, viscoplastic, yield, deformations, stress

1. Introducción

El modelo más simple para el estudio del comportamiento de los suelos es el elástico, en el cual se cumple la Ley de Hooke, donde las deformaciones que sufre el material son reversibles y proporcionales a los esfuerzos y donde éstos últimos son menores a la resistencia del material. El estudio de este modelo es básico, para el inicio de las estimaciones de esfuerzos y deformaciones a través de otros modelos. Sin embargo, también se sabe que el modelo elastoplástico está asociado con deformaciones irreversibles, y por lo general en este caso, se habla de plasticidad perfectamente (Chen, 1995), definida a través una superficie de fluencia fija que es limitada por parámetros máximos de resistencia o esfuerzos máximos, y teniendo en cuenta que la misma no está afectada por deformaciones plásticas.

En este artículo, se aplica la formulación de Perzyna (1966) junto con lo presentado por Wittke (1990) y Chen (1975), desarrollando las expresiones matemáticas en forma matricial, para la estimación de las deformaciones viscoplasticas y de esfuerzos, cuando un elemento de la masa de suelo está bajo las cargas de su propio cuerpo y externas. El estudio parte de la ley de resistencia al corte de

Mohr-Coulomb escrita en términos de esfuerzos principales, que luego con la ayuda de los esfuerzos desviadores permite encontrar la función de fluencia y del potencial plástico en flujo asociado, se escribe en términos de las invariante de esfuerzos y de los parámetros de resistencia (c, ϕ) . Igualmente se hace con el criterio de resistencia de Druker-Prager, la cual esencialmente es derivada de la ley de resistencia de Mohr-Coulomb. A partir de las funciones de fluencia y de potencial plástico, se desarrolla la formulación de Perzyna (1966), para luego llegar a expresiones matemáticas, correspondientes a las deformaciones viscoplasticas en el caso tridimensional y de deformación plana.

En este modelo, el fenómeno de fluencia se caracteriza porque las deformaciones no son solamente función del estado de tensiones, sino también del tiempo, y además de una deformación instantánea, el material sufre deformaciones de fluencia (deformaciones viscoplasticas), que generalmente aumentan con la duración de las fuerzas actuantes. Se debe tener presente que en el comportamiento viscoplastico, la viscosidad es una propiedad del material que solamente se activa en el momento que se excede la resistencia última del suelo y donde éste comienza a deformarse a un esfuerzo constante con el tiempo.

La estimación de las deformaciones y esfuerzos se llevó a cabo en esta investigación, aplicando la técnica de elementos finitos, a un elemento de suelo conformado por cuatro triángulos, presentándose los resultados de cuatro iteraciones que permiten ilustrar el modelo desarrollado.

2.- Formulación viscoplástica considerando el criterio de resistencia de Coulomb

2.1. Caso Tridimensional – Coulomb.

Comenzaremos haciendo la formulación de este modelo, presentado la fig. 1 y fig. 2, las cuales ayudarán a comprender la formulación matemática, aquí planteada. En la primera se muestra los distintos criterios de plasticidad perfecta, y en los cuales se apoya el modelo viscoplástico, y en la fig. 2, se ilustra la representación del suelo idealizado a través del modelo de plasticidad perfecta indicándose puntos de esfuerzos que en esta investigación se consideran, pueden presentarse en el comportamiento viscoplástico.

Perzyna (1960), define la variación de las deformaciones viscoplásticas en el tiempo, como un tensor dependiente de la viscosidad, así como también de la resistencia máxima del suelo proporcionada por la denominada función de fluencia y de la variación del potencial plástico respecto al tensor de esfuerzos. Su modelo se expresa matemáticamente tal como se indica:

$$\dot{\mathcal{E}}_{ij}^{vp} = \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1)$$

donde:

η : Viscosidad del material, durante la deformación viscoplástica y corresponde a la viscosidad del amortiguador en un modelo matemático representativo del sistema

F : Función de fluencia del material (kg/cm^2)

Q : Potencial plástico equivalente a una función de fluencia (kg/cm^2)

σ_{ij} : Tensor de esfuerzos (kg/cm^2)

$\dot{\mathcal{E}}_{ij}^{vp}$: Vector de variación de las deformaciones viscoplásticas respecto al tiempo (1/seg)

ij: Son los subíndices que indican la orientación de las deformaciones y de los esfuerzos en el sistema de referencia¹.

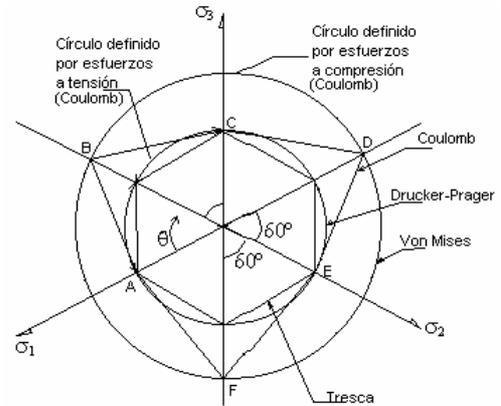


Fig. 1.- Secciones de la superficie de fluencia en el plano $\pi (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)$

Se debe tener presente que la viscosidad es distinta de las propiedades de amortiguamiento proporcionadas la rigidez del material y donde estas últimas retardan las deformaciones, antes de superar la resistencia última, donde a partir de ese momento las deformaciones son dependientes del tiempo e irreversibles.



Fig. 2.- Relación esfuerzo-deformación de un suelo real y de un suelo idealizado.

Para explicar el concepto de función de fluencia, consideremos a hora el criterio de falla de Coulomb, en términos de esfuerzos principales correspondiente a una representación bidimensional de Mohr-Coulomb:

$$\tau_f = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \cdot \text{sen} \phi - c \cdot \text{cos} \phi \quad (2)$$

donde:

τ_f : Envolvente de resistencia al cortante en el diagrama (q vs p)

σ_1 : Esfuerzo principal mayor

σ_3 : Esfuerzo principal menor

σ_2 : Esfuerzo principal intermedio

c: Cohesión del material

¹ Cuando la deformación o los esfuerzos sean normales a los ejes de referencia, se utilizará un solo subíndice indicando dicha normalidad.

ϕ : Fricción del material

En esta expresión los esfuerzos principales (σ_1, σ_3) son positivos cuando actúan a tensión y cuando $\sigma_1 > \sigma_3$ (ver fig1. criterio de Coulomb).

La función de fluencia "F", en términos de esfuerzos principales se expresará como:

$$F = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \cdot \text{sen}\phi - c \cdot \cos\phi \quad (3)$$

De la ecuación (3), se determina que las deformaciones viscoplásticas son por tanto solamente posibles cuando $F > 0$, ya que $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)$ es el desviador, el cual al superar la resistencia máxima del suelo, produce dichas deformaciones.

El vector de variación de las deformaciones viscoplásticas, por tanto está restringido por la siguiente condición:

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}^{vp}}{\partial t} \right\} = \left\{ \dot{\mathcal{E}}^{vp} \right\} = \begin{cases} 0 & F \leq 0 \\ \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \right\} & F > 0 \end{cases} \quad (4)$$

La ec. 4, indica que si el desviador no supera la envolvente de resistencia ($F \leq 0$), no existirán deformaciones viscoplásticas. Si lo contrario ocurre ($F > 0$), se estimarán las deformaciones viscoplásticas, según la formulación de Perzyna (1960).

Usando el sistema de coordenadas cartesianas (X, Y, Z) y desarrollando la ec. 4, para el caso tridimensional (ver Wittke, 1990), resulta:

$$\left\{ \dot{\mathcal{E}}_x^{vp} \dot{\mathcal{E}}_y^{vp} \dot{\mathcal{E}}_z^{vp} \dot{\mathcal{Y}}_{xy}^{vp} \dot{\mathcal{Y}}_{yz}^{vp} \dot{\mathcal{Y}}_{zx}^{vp} \right\}^T = \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_z} \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} \frac{\partial Q}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial Q}{\partial \tau_{zx}} \right\}^T \quad (5)$$

En el desarrollo matemático, se considerará el caso de la ley de flujo asociada, es decir cuando la función de fluencia "F" se considera igual al potencial plástico "Q", por tanto $\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$.

La aplicación de la ec. 1, para el caso de esfuerzos principales, genera el vector de deformaciones principales, expresado según:

$$\left\{ \dot{\mathcal{E}}_1^{vp} \dot{\mathcal{E}}_2^{vp} \dot{\mathcal{E}}_3^{vp} \right\}^T = \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \frac{\partial F}{\partial \sigma_2} \frac{\partial F}{\partial \sigma_3} \right\}^T \quad (6)$$

La ec. 6 aplicada a la ec. 3 cuando $F > 0$, permite estimar las deformaciones viscoplásticas principales tal como se indica:

$$\left\{ \dot{\mathcal{E}}_1^{vp} \dot{\mathcal{E}}_2^{vp} \dot{\mathcal{E}}_3^{vp} \right\} = \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot (1 + \text{sen}\phi) \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot (1 - \text{sen}\phi) \end{array} \right\} \quad (7)$$

Por tanto tomando en cuenta los tres ejes principales de referencia, la variación de deformación volumétrica, se expresa como:

$$\dot{\mathcal{E}}_V^{vp} = \dot{\mathcal{E}}_1^{vp} + \dot{\mathcal{E}}_2^{vp} + \dot{\mathcal{E}}_3^{vp} \quad (8)$$

Sustituyendo (7) en (8), queda:

$$\dot{\mathcal{E}}_V^{vp} = \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (1 + \text{sen}\phi) - \frac{1}{2} \cdot (1 - \text{sen}\phi) \right] = \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot \text{sen}\phi \quad (9)$$

A fin de contrastar la tasa de deformación volumétrica con los resultados experimentales, Q puede requerir ser evaluado para un ángulo $\psi \neq \phi$ ($\psi < \phi$), que corresponda a la regla de flujo no asociada y normalmente se usa la misma función para el estado de esfuerzos, pero el ángulo de fricción ϕ se reemplaza por el ángulo de dilatancia ψ , obteniéndose:

$$Q = \frac{\sigma_1}{2} \cdot (1 + \text{sen}\psi) - \frac{\sigma_3}{2} \cdot (1 - \text{sen}\psi) - c \cdot \cos\psi \quad (10)$$

y la deformación volumétrica viscoplástica estará expresada por:

$$\dot{\mathcal{E}}_V^{vp} = \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot \text{sen}\psi \quad (11)$$

Cuando el esfuerzo cortante alcanza la función de fluencia, la ec. 3, puede ser escrita como:

$$\frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) = -\frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) \cdot \text{sen}\phi + c \cdot \cos\phi \quad (12)$$

En términos de los desviadores de esfuerzos S_1, S_2 y del esfuerzo promedio σ_m , la ec. 12 queda:

$$\frac{1}{2} \cdot (S_1 - S_3) = -\frac{1}{2} \cdot (S_1 + S_3) \cdot \text{sen} \phi - \sigma_m \cdot \text{sen} \phi + c \cdot \text{cos} \phi \quad (13)$$

donde:

$$S_1 = \sigma_1 - \sigma_m \quad (14)$$

$$S_3 = \sigma_3 - \sigma_m \quad (15)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (16)$$

Esta ecuación escrita en función de un ángulo θ definido en la fig. 1, y nuevamente mostrado en el espacio, tal como se ilustra en la fig. 3, la cual tiene como sistema de referencia los esfuerzos principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. En esta fig. se indica el eje isotrópico y el ángulo θ medido desde el plano triaxial a una línea BA perpendicular al eje isotrópico.

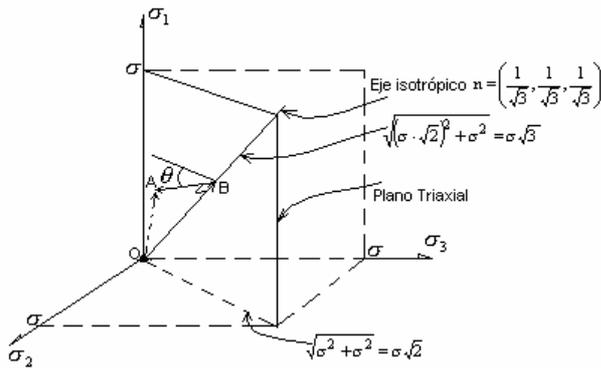


Fig. 3. Definición del estado de esfuerzos en los puntos A y B.

Con la ayuda de la fig. 3, se escriben los siguientes vectores de esfuerzos:

El vector \overrightarrow{OB} , se puede expresar en función de

$$\overrightarrow{OB} = (\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m) \quad (17)$$

y los vectores \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{BA} , están dados por:

$$\overrightarrow{OA} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (18)$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - (\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m) = [(\sigma_1 - \sigma_m); (\sigma_2 - \sigma_m); (\sigma_3 - \sigma_m)] \quad (19)$$

La longitud del vector \overrightarrow{BA} , estará dada por:

$$l = BA = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \quad (20)$$

Esta última expresión puede ser escrita en función de la segunda invariante de esfuerzos " J_2 ":

$$BA = \sqrt{2 \cdot J_2} \quad (21)$$

donde, J_2 viene determinada por:

$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2] \quad (22)$$

La fig. 4a, muestra la proyección del vector de esfuerzos \overrightarrow{BA} en el plano π , junto con la proyección de los ejes σ_1, σ_2 y σ_3 . En este plano los ejes σ_1', σ_2' y σ_3' son las proyecciones de los ejes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y $B'A'$ es

la proyección del vector \overrightarrow{BA} . En La fig. 4b, se ilustra la proyección del eje σ_1 el plano π , indicándose el vector unitario $n_i^{(1)}$ a lo largo del eje σ_1' con las componentes:

$$n_i^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2; -1; -1) \quad (23)$$

El segmento $B'C'$ se expresa como:

$$B'C' = \overrightarrow{BA} \cdot n_i^{(1)} = \overrightarrow{B'A'} \cdot n_i^{(1)} \quad (24)$$

desarrollando la expresión anterior, se tiene:

$$B'C' = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2 \cdot S_1 - S_2 - S_3) \quad (25)$$

También de la fig. 4, $B'C'$ se expresa como:

$$B'C' = BA \cdot \text{cos} \theta = B'A' \cdot \text{cos} \theta \quad (26)$$

Sí se tiene presente que:

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0 \quad (27)$$

Al sustituir la ecuación (27) en la ecuación (25), resulta:

$$B'C' = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot S_1 \quad (28)$$

Igualando la ec. 26 y 28:

$$BA \cdot \text{cos} \theta = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot S_1 \quad (29)$$

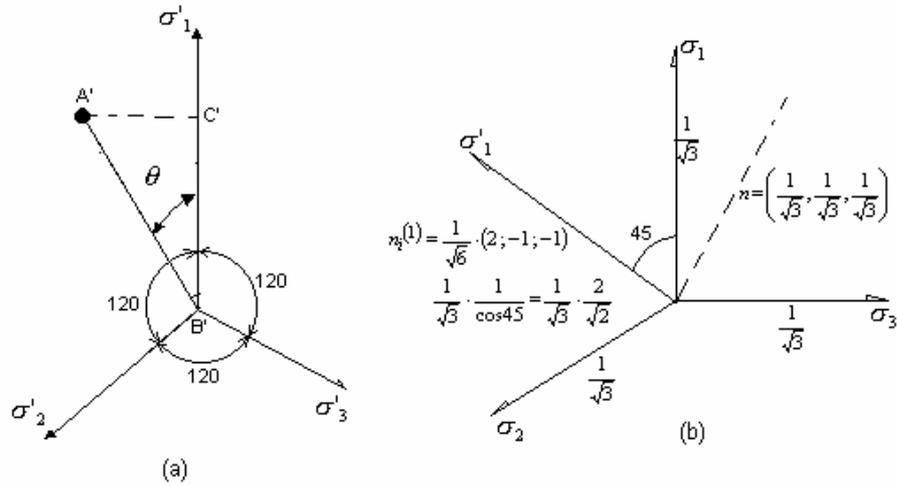


Fig. 4. (a) Estado de esfuerzos en el plano π con $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. (b) Ubicación del eje σ'_1 en espacio de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Remplazando la ecuación (21) en la ecuación (29), se obtiene:

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{S_1}{\sqrt{J_2}} \quad (30)$$

Aplicando la siguiente identidad trigonométrica (ver Chen, 1975):

$$\cos 3\theta = 4 \cdot \cos^3 \theta - 3 \cdot \cos \theta \quad (31)$$

que al sustituir la ec. 30 en (31) queda:

$$\cos 3\theta = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{S_1}{\sqrt{J_2}}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{S_1}{\sqrt{J_2}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot J_2^{\frac{3}{2}}} \cdot (S_1^3 - S_1 \cdot J_2) \quad (32)$$

La segunda invariante de los desviadores de esfuerzos, puede expresarse como:

$$J_2 = -(S_1 \cdot S_2 + S_2 \cdot S_3 + S_3 \cdot S_1) \quad (33)$$

Sustituyendo la ec. 33 en la ec. 32, se determina:

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot J_2^{\frac{3}{2}}} \cdot [S_1^3 + S_1^2 \cdot (S_2 + S_3) + S_1 \cdot S_2 \cdot S_3] \quad (34)$$

Haciendo uso de la tercera invariante y además sabiendo que $S_2 + S_3 = -S_1$, la ecuación (34), se escribe:

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{\frac{3}{2}}} \quad (35)$$

donde el ángulo θ , estará determinado por:

$$\theta = \frac{1}{3} \cdot \cos^{-1} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (36)$$

Esta expresión θ es dada para el rango en el cual el ángulo varía entre $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ según la fig. 1 y de acuerdo al criterio de Coulomb, con la condición de que $(\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$. Para otras condiciones de esfuerzos tal como $\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$, el ángulo θ debe ahora ser medido a partir del eje σ_3 y la misma ec. 38 puede ser aplicada.

Tomando en cuenta la fig. 4a, y la ec. 30, los esfuerzos desviadores pueden ser escritos, como:

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{J_2} \cdot \cos \theta \quad (37.a)$$

$$S_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{J_2} \cdot \cos \left(\theta - \frac{2}{3} \pi \right) \quad (37.b)$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{J_2} \cdot \cos \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \quad (37.c)$$

Sustituyendo la ec. 37 en la ec. 13, la función de fluencia resulta:

$$F = \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cdot \left[\cos \theta \cdot (1 + \sin \phi) - (1 - \sin \phi) \cdot \cos \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \right] + \sigma_m \cdot \sin \phi - c \cdot \cos \phi \quad (38)$$

Desarrollando el coseno de: $\frac{\partial \theta}{\partial J_2} = \frac{1}{2 \cdot J_2} \cdot \frac{1}{\tan(3 \cdot \theta)}$ (46)

$$\cos(\theta + 120) = -\frac{1}{2} \cdot \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \theta, \text{ F y Q resulta igual a:}$$

$$F = \frac{\sqrt{J_2}}{2} \cdot \left[(1 - \sin \phi) \cdot \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (3 + \sin \phi) \cdot \cos \theta \right] + \sigma_m \cdot \text{sen} \phi - c \cdot \cos \phi$$
 (39)

Para flujo asociado ($\psi = \phi$), se define el potencial plástico Q igual a F , y se escribe como:

$$Q = \frac{\sqrt{J_2}}{2} \cdot \left[(1 - \sin \phi) \cdot \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (3 + \sin \phi) \cdot \cos \theta \right] + \sigma_m \cdot \text{sen} \phi - c \cdot \cos \phi$$
 (40)

Ahora se aplicará la ec. 5 en el espacio tridimensional de esfuerzos ($\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$), para lo cual se plantea, el siguiente desarrollo (ver Wittke, 1990):

Aplicando $\left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}$ a la ecuación (40), se tiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_m} \cdot \frac{\partial \sigma_m}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial Q}{\partial J_2} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial Q}{\partial J_3} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}}$$
 (41)

La solución de esta ecuación, en el espacio de esfuerzos ($\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$), se hará teniendo presente que:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$
 (42.a)

$$S_x = \sigma_x - \sigma_m$$
 (42.b)

$$S_y = \sigma_y - \sigma_m$$
 (42.c)

$$S_z = \sigma_z - \sigma_m$$
 (42.d)

Por tanto:

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_m} = \text{sen} \phi$$
 (43)

$$\frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} = \left\{ \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_z} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \tau_{xy}} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \tau_{yz}} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \tau_{zx}} \right\}^T =$$
 (44)

$$\left\{ \frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{1}{3} \ 0 \ 0 \ 0 \right\}^T \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{J_2}} \cdot \left[(1 - \sin \phi) \cdot \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (3 + \sin \phi) \cos \theta \right] + \sqrt{J_2} \cdot \left[(1 - \sin \phi) \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (3 + \sin \phi) \sin \theta \right] \frac{\partial \theta}{\partial J_2} \right\}$$
 (45)

donde:

Sustituyendo la ec. 46 en la ec. 45, se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial J_2} = \frac{1}{4 \sqrt{J_2}} \cdot \left[(1 - \sin \phi) \cdot \left(\sin \theta + \frac{\cos \theta}{\tan(3 \cdot \theta)} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (3 + \sin \phi) \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta}{\tan(3 \cdot \theta)} \right) \right]$$
 (47)

Conociendo que la segunda invariante J_2 de esfuerzos desviadores, se escribe como:

$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot \left[(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2 \right]$$
 (48)

Ahora se tiene que:

$$\frac{\partial J_2}{\partial \{\sigma\}} = \{ S_x S_y S_z \ 2 S_{xy} \ 2 S_{yz} \ 2 S_{zx} \}^T$$
 (49)

El término $\frac{\partial Q}{\partial J_3}$ se expresará:

$$\frac{\partial Q}{\partial J_3} = \frac{\sqrt{J_2}}{2} \cdot \left[(1 - \text{sen} \phi) \cdot \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} (3 + \text{sen} \phi) \cdot \text{sen} \theta \right] \cdot \frac{\partial \theta}{\partial J_3}$$
 (50)

donde:

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin(3\theta)} \cdot \frac{\cos(3\theta)}{J_3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{J_3} \cdot \frac{1}{\tan(3\theta)}$$
 (51)

La sustitución de la ec. 51 en la ec. 50, da como resultado:

$$\frac{\partial Q}{\partial J_3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{J_3} \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{3} (3 + \sin \phi) \cdot \frac{\sin \theta}{\tan(3\theta)} - (1 - \sin \phi) \cdot \frac{\cos \theta}{\tan(3\theta)} \right]$$
 (52)

Si la tercera invariante se escribe en función de los desviadores:

$$J_3 = S_x \cdot S_y \cdot S_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - S_x \cdot \tau_{yz}^2 - S_y \cdot \tau_{xz}^2 - S_z \cdot \tau_{xy}^2$$
 (53)

Ahora para $\frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}}$, queda:

$$\frac{\partial J_3}{\partial \{\sigma\}} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \cdot [2 \cdot S_y \cdot S_x - S_x \cdot (S_z + S_y) - 2 \cdot \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yx}^2] \\ \frac{1}{3} \cdot [2 \cdot S_x \cdot S_z - S_y \cdot (S_z + S_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 - 2 \cdot \tau_{xz}^2] \\ \frac{1}{3} \cdot [2 \cdot S_x \cdot S_y - S_z \cdot (S_x + S_y) + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 - 2 \cdot \tau_{xy}^2] \\ 2 \cdot (S_{yz} \cdot S_{zx} - S_z \cdot S_{xy}) \\ 2 \cdot (S_{xy} \cdot S_{zx} - S_x \cdot S_{yz}) \\ 2 \cdot (S_{xy} \cdot S_{yz} - S_y \cdot S_{xz}) \end{Bmatrix} \quad (54)$$

La expresión definitiva para el cálculo de la variación del vector de deformación viscoplástica, definido en la ec. 5 en el caso tridimensional de esfuerzos:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x^{vp} \\ \dot{\epsilon}_y^{vp} \\ \dot{\epsilon}_z^{vp} \\ \dot{\gamma}_{xy}^{vp} \\ \dot{\gamma}_{yz}^{vp} \\ \dot{\gamma}_{zx}^{vp} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot \left\{ \begin{matrix} \text{sen}\phi \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{4 \cdot \sqrt{J_2}} \cdot \begin{Bmatrix} (1 - \text{sen}\phi) \cdot \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\tan 3\theta} \right) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (3 + \sin\phi) \\ (\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\tan 3\theta}) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ 2 \cdot S_{xy} \\ 2 \cdot S_{yz} \\ 2 \cdot S_{xz} \end{Bmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{J_3} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (3 + \sin\phi) \\ \frac{\sin\theta}{\tan 3\theta} \\ \frac{\cos\theta}{\tan 3\theta} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \cdot [2 \cdot S_y \cdot S_x - S_x \cdot (S_z + S_y) - 2 \cdot \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yx}^2] \\ \frac{1}{3} \cdot [2 \cdot S_x \cdot S_z - S_y \cdot (S_z + S_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 - 2 \cdot \tau_{xz}^2] \\ \frac{1}{3} \cdot [2 \cdot S_x \cdot S_y - S_z \cdot (S_x + S_y) + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 - 2 \cdot \tau_{xy}^2] \\ 2 \cdot (S_{yz} \cdot S_{zx} - S_z \cdot S_{xy}) \\ 2 \cdot (S_{xy} \cdot S_{zx} - S_x \cdot S_{yz}) \\ 2 \cdot (S_{xy} \cdot S_{yz} - S_y \cdot S_{xz}) \end{Bmatrix} \quad (55)$$

El tensor de esfuerzos se estimará a partir de la relación existente entre esfuerzos deformaciones, tal como se indica a continuación:

$$\{\sigma_{ij}\} = [D]^{vp} \cdot \{\epsilon_{ij}^{vp}\} \quad (56)$$

Donde el tensor de esfuerzos $\{\sigma_{ij}\}$ y el vector $\{\epsilon_{ij}\}$ de deformaciones, se expresa:

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz}\}^T \quad (57)$$

$$\{\epsilon^{vp}\}^T = \{\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \epsilon_{xy} \epsilon_{yz} \epsilon_{xz}\}^T \quad (58)$$

La matriz de propiedades viscoplásticas $[D]^{vp}$ se estimará a partir de (Etse G and Willam K, 1999) :

$$[D]^{vp} = \frac{[D]}{\left\{ [D] + \frac{\Delta t}{\eta} \cdot [D] \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma} + F \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) \right\}} \quad (59)$$

donde:

[D]: Matriz de propiedades elásticas del suelo.

Δt : Intervalo de tiempo para el cual se estima el incremento de las deformaciones viscoplásticas.

η : Viscosidad del material.

$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}$: Variación de la función de fluencia respecto a los esfuerzos.

$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}$: Variación de la función potencial respecto a los esfuerzos.

La matriz de propiedades elásticas para el caso tridimensional, viene dada por:

$$D = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot \begin{Bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot \nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot \nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2 \cdot \nu}{2} \end{Bmatrix} \quad (60)$$

donde:

E, ν : Módulo de elasticidad del material y coeficiente de poisson.

2.2- Deformación plana - Coulomb

Veamos como se modifican las expresiones anteriores en la determinación de las deformaciones viscoplásticas,

para el caso de **deformación plana**, cuando se aplica Mohr-Coulomb. En este caso la expresión de la función potencial de fluencia Q , sigue siendo la misma dada por la ec. 40. También la ec. 42.a, sigue manteniéndose ya que los tres esfuerzos están presentes en deformación plana.

En el caso de deformación plana, la relación de esfuerzos y deformaciones se establece a través de:

$$\{\sigma_x \sigma_z \tau_{xz} \sigma_y\} = [D]^{vp} \cdot \{\varepsilon_x^{vp} \varepsilon_z^{vp} \gamma_{xz}^{vp} \varepsilon_y^{vp}\} \quad (61)$$

Donde, la matriz de propiedades viscoplásticas $[D]^{vp}$ se estima a través de la ec. 59, mientras que la matriz de propiedades elásticas se calcula a través de:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \\ \nu & \nu & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

En este caso la segunda y tercera invariante de desviadores de esfuerzos J_2 y J_3 , se expresa (Chen (1975)):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{vp} \\ \varepsilon_z^{vp} \\ \gamma_{xz}^{vp} \\ \varepsilon_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\eta} F \left\{ \sin \phi \cdot \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{Bmatrix} + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{J_2}} \cdot \begin{Bmatrix} (1-\sin \phi) \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\tan(3\theta)} + \frac{\cos \theta}{\tan(3\theta)} \right) \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (3 + \sin \phi) \\ \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta}{\tan(3\theta)} \right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_x \\ S_z \\ 2S_{xz} \\ S_y \end{Bmatrix} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{J_3} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} (3 + \sin \phi) \cdot \frac{\sin \theta}{\tan(3\theta)} \\ -(1-\sin \phi) \cdot \frac{\cos \theta}{\tan(3\theta)} \end{Bmatrix} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \right\} \quad (67)$$

3.- Formulación viscoplástica considerando el criterio de resistencia de Druker-Prager

3.1- Caso tridimensional – Druker-Prager

La función de fluencia de Drucker-Prager representada en el plano, se muestra en la figura 5.3, en el espacio bidimensional definido por el sistema de referencia Q vs. P . En este criterio también se considera que los esfuerzos son positivos cuando actúan a tensión.

La envolvente de resistencia indicada en la fig. 5, se expresa entonces de acuerdo a:

$$Q = \sqrt{2} \cdot k - \sqrt{6} \cdot \alpha \cdot P \quad (68)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + \tau_{xz}^2 \quad (63)$$

$$J_3 = S_x \cdot S_y \cdot S_z - S_y \cdot \tau_{xz}^2 \quad (64)$$

Por tanto:

$$\left\{ \frac{\partial J_2}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T = \{S_x S_z \ 2S_{xz} \ S_y\}^T \quad (65)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_z} \\ \frac{\partial J_3}{\partial \tau_{xz}} \\ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} [2S_y S_x - S_x (S_z + S_y) + \tau_{xz}^2] \\ \frac{1}{3} [2S_x S_y - S_z (S_x + S_y) + \tau_{xz}^2] \\ -2S_y \tau_{xz} \\ \frac{1}{3} [2S_x S_z - S_y (S_z + S_x) - 2\tau_{xz}^2] \end{Bmatrix} \quad (66)$$

Luego, la estimación de las variaciones de las deformaciones viscoplásticas, se hará a través de :

Veamos la relación de los parámetros “Q” y “P” con las invariantes de esfuerzos. Para Ello se estudiará el criterio de Von Mises extendido, el cual inicialmente se expresa en función de la primera invariante de esfuerzos (I_1) y de la segunda invariante de esfuerzos desviadores (J_2), escribiéndose como:

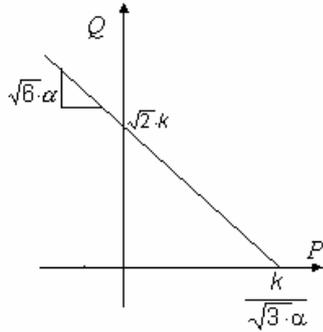


Figura 5.- Envoltente de resistencia de Drucker-Prager.

$$\alpha \cdot I_1 + \sqrt{J_2} = K \quad (69)$$

Por correlación de la ec. 69 y 68, se determina:

$$Q = \sqrt{2} \sqrt{J_2} \quad (70)$$

$$P = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \quad (71)$$

Las expresiones de los parámetros α y K , se encuentra según el siguiente procedimiento: La función de fluencia de Coulomb, de la ec. 39, puede ser escrita como:

$$I_1 \cdot \sin \phi + \frac{1}{2} [3(1 - \sin \phi) \sin \theta + \sqrt{3}(3 + \sin \phi) \cos \theta] \quad (72)$$

$$\sqrt{J_2} - 3 \cdot C \cdot \cos \phi = 0$$

Para el caso de esfuerzos a compresión (**falla por corte**) y haciendo uso de la fig. 1, se evaluará la ec. 72, para $\theta = 60^\circ$, resultando:

$$\frac{2 \cdot \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \cdot I_1 + \sqrt{J_2} = \frac{6 \cdot C \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (73)$$

Por tanto por correlación con la ec. 69 se tiene que:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (74)$$

$$K = \frac{6 \cdot C \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (75)$$

Para el caso de esfuerzos a tensión (**falla a tensión**), a partir de la fig. 1, evaluando la ec.72, para $\theta = 0^\circ$, resulta:

$$\frac{2 \cdot \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \cdot I_1 + \sqrt{J_2} = \frac{6 \cdot C \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad (76)$$

Por tanto, para el caso de falla por tensión, las expresiones de “ α ” y “ K ”, se expresaran como:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad (77)$$

$$K = \frac{6 \cdot C \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad (78)$$

Para el caso de **falla por corte**, la ec. 73 puede ser escrita como:

$$\sqrt{2} \sqrt{J_2} = \sqrt{2} \left(\frac{6 \cdot C \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \right) - \sqrt{6} \left(\frac{2 \cdot \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \right) \cdot \frac{I_1}{\sqrt{3}} \quad (79)$$

La función de fluencia según este criterio se expresa se acuerdo:

$$F = \frac{(3 - \sin \phi)}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt{J_2} - c \cdot \cos \phi + \sigma_m \cdot \sin \phi \quad (80)$$

La función del potencial plástico Q , para flujo asociado en este caso ($\psi = \phi$), será:

$$Q = \frac{(3 - \sin \phi)}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \sqrt{J_2} - c \cdot \cos \phi + \sigma_m \cdot \sin \phi \quad (81)$$

Para la determinación de las deformaciones viscoplásticas, la ec. 41 resulta ahora:

$$\frac{\partial Q}{\partial \{\sigma\}} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_m} \cdot \frac{\sigma_m}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial Q}{\partial J_2} \cdot \frac{J_2}{\partial \{\sigma\}} \quad (82)$$

La ec. 43, 44 y 49, se mantienen igual y solamente debemos encontrar $\frac{\partial Q}{\partial J_2}$, que en este caso resulta:

$$\frac{\partial Q}{\partial J_2} = \frac{(3 - \sin \phi)}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{J_2}} \quad (83)$$

Finalmente, la estimación de las variaciones del vector de deformación plástica, se hará a través de:

$$\dot{\mathcal{E}}^{vp} = \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot \left\{ \sin \phi \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_m} + \frac{(3 - \sin \phi)}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{J_2}} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} \right\} \quad (84)$$

3.2- Caso de deformación plana – Drucker-Prager

El caso de **deformación plana** es desarrollado por Chen (1975) para el modelo de plasticidad perfecta. En este trabajo presentaremos parte de su estudio y luego lo ajustaremos al modelo viscoplástico.

En teoría de plasticidad, la dirección del incremento de deformación plástica es definido por la función potencial plástica “ Q ”, en la forma:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (85)$$

donde:

$d\varepsilon_{ij}^p$: Incremento de deformación plástica

Q: Función potencial plástica

σ_{ij} : Estado de esfuerzos

$d\lambda$: Escalar positivo de proporcionalidad

El potencial plástico, por tanto se expresa como:

$$Q = \alpha \cdot I_1 + \sqrt{J_2} - K \quad (86)$$

Ahora se aplica la ec. 85, resultando:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \left(\alpha \cdot \delta_{ij} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{J_2}} \cdot S_{ij} \right) \quad (87)$$

donde:

δ_{ij} : Delta de Kronecker, donde para $i=j$, $\delta_{ij}=1$ y para $i \neq j$, $\delta_{ij}=0$.

S_{ij} : Esfuerzos desviadores

En el sistema de referencia (x,y,z) y con la condición de que en la dirección "y" no existe deformación, se tiene:

$$d\varepsilon_{yy}^p = d\gamma_{yx}^p = d\gamma_{yz}^p = 0$$

Si la condición anterior se aplica a la ec. 87 junto con la definición de δ_{ij} , se tendrá que los esfuerzos desviadores podrán expresarse:

$$S_{yy} = -2 \cdot \alpha \sqrt{J_2} \quad (88.a)$$

$$\tau_{yx} = 0 \quad (88.b)$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad (88.c)$$

Permitamos utilizar un solo subíndice en la simbología de los esfuerzos normales y desviadores. Por tanto la primera invariante I_1 de esfuerzos puede ser escrita como:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_x + \sigma_z + (\sigma_y - \sigma_m) + \sigma_m = \sigma_x + \sigma_z + S_y + \frac{I_1}{3} \quad (89)$$

Sustituyendo la ec. 88.a en la ec. 89 resulta:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_z - 2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{J_2} + \frac{I_1}{3} \quad (90)$$

Ordenando:

$$I_1 = \frac{3}{2}(\sigma_x + \sigma_z) - 3 \cdot \alpha \cdot \sqrt{J_2} \quad (91)$$

Los desviadores de esfuerzos S_x , S_z , se expresarán ahora como:

$$S_x = \sigma_x - \frac{I_1}{3} = \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \alpha \cdot \sqrt{J_2} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right) + \alpha \cdot \sqrt{J_2} \quad (92)$$

$$S_z = \sigma_z - \frac{I_1}{3} = \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \alpha \cdot \sqrt{J_2} = \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right) + \alpha \cdot \sqrt{J_2} \quad (93)$$

Elevando los desviadores al cuadrado y sumando, se tendrá:

$$\frac{1}{2}(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) = \left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right)^2 + 3 \cdot \alpha^2 \cdot J_2 \quad (94)$$

Sustituyendo la ec. 94 en la ec. 63, se encuentra:

$$J_2 = \frac{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2}{1 - 3 \cdot \alpha^2} \quad (95)$$

Ahora ajustaremos la ec. 87, correspondiente al modelo de plasticidad perfecta al modelo viscoplástico, lo cual se hace relacionando la ec. 1 con la ec. 85. Por tanto la ec. 1, se puede escribir como:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^{vp}}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (96)$$

La ec. 96 escrita en términos de incrementos, se expresa:

$$d\varepsilon_{ij}^{vp} = \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot dt \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (97)$$

donde:

$d\varepsilon_{ij}^{vp}$: Incremento de las deformaciones viscoplásticas.

dt: Incremento de tiempo

Todos los demás términos ya han sido descritos. Ahora simplemente la ec. 87, aplicada al modelo viscoplástico, se transforma en:

$$d\varepsilon_{ij}^{vp} = \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot dt \left(\alpha \cdot \delta_{ij} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{J_2}} \cdot S_{ij} \right) \quad (98)$$

A partir de esta última ecuación, el desarrollo es el mismo ya hecho anteriormente, y que comprende desde la ec. 88 hasta la ec. 95. Por tanto se continuará en la búsqueda de la expresión de la función de fluencia de Drukre-Prager, para deformación plana. Sustituyendo la ec.91 en la ec. 69, resulta:

$$3 \cdot \alpha \cdot \left(\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \right) + (1 - 3 \cdot \alpha^2) \sqrt{J_2} = K \quad (99)$$

Remplazando la ec. 95 en la ec. 99, se tiene:

$$\left[\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2 \right]^{1/2} = - \left(\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \right) \left(\frac{3 \cdot \alpha}{\sqrt{1 - 3 \cdot \alpha^2}} \right) + \frac{K}{\sqrt{1 - 3 \cdot \alpha^2}} \quad (100)$$

El término de la izquierda de la ec. 12 es igual al término de la izquierda de la ec. 100 (radio del círculo de Mohr), por tanto ambas ecuaciones pueden ser correlacionadas, resultando las siguientes expresiones que relacionan los parámetros (c, φ) con los parámetros (α, K):

$$\frac{K}{\sqrt{1 - 3 \cdot \alpha^2}} = C \cdot \cos \phi \quad (101)$$

$$\frac{3 \cdot \alpha}{\sqrt{1 - 3 \cdot \alpha^2}} = \sin \phi \quad (102)$$

De la ec. 101 y 102, se obtiene:

$$\alpha = \frac{\sin \phi}{\sqrt{9 + 3 \cdot (\sin \phi)^2}} \quad (103)$$

$$K = \frac{3 \cdot C \cdot \cos \phi}{\sqrt{9 + 3 \cdot (\sin \phi)^2}} \quad (104)$$

Sustituyendo la ec. 103 y 104 en la ec. 69 y tomado en cuenta la relación entre I₁ y σ_m, se obtiene:

$$\sigma_m \cdot \sin \phi + \frac{\sqrt{9 + 3 \cdot (\sin \phi)^2}}{3} \sqrt{J_2} = C \cdot \cos \phi \quad (105)$$

La función de fluencia "F", por tanto estará determinada por:

$$F = \frac{\sqrt{9 + 3 \cdot (\sin \phi)^2}}{3} \sqrt{J_2} + \sigma_m \cdot \sin \phi - C \cdot \cos \phi \quad (106)$$

Para flujo asociado, el potencial plástico Q, viene dado por la misma expresión de F, y por tanto:

$$Q = \frac{\sqrt{9 + 3 \cdot (\sin \phi)^2}}{3} \sqrt{J_2} + \sigma_m \cdot \sin \phi - C \cdot \cos \phi \quad (107)$$

La estimación de las variaciones del vector de deformación plástica, quedará como:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_x^{vp} \\ \dot{\epsilon}_z^{vp} \\ \dot{\gamma}_{xz}^{vp} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\eta} \cdot F \cdot \begin{bmatrix} \sin \phi \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{9 + 3 \cdot (\sin \phi)^2}}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{J_2}} \cdot \begin{Bmatrix} S_x \\ S_z \\ \tau_{xz} \\ S_y \end{Bmatrix} \quad (108)$$

La determinación del vector de esfuerzos, se hace tal como se indicó cuando se estudió el criterio de Coulomb.

4.- Ejercicio

En el siguiente ejercicio corresponde al caso de deformación plana de Druker-Prager. Para ello en la fig. 6, se presenta un trapecio con puntos de apoyo restringidos en algunas direcciones y con cargas aplicadas en sus lados en la dirección de "x" y "z", y donde se consideran que los esfuerzos que actúen a compresión son negativos. Para explicar el proceso iterativo, el trapecio se divide en cuatro triángulos. La estimación de las deformaciones y esfuerzos se llevó a cabo aplicando la técnica de elementos finitos. Solamente se presentará los resultados de las cuatro primeras iteraciones para cada elemento, para mostrar la variación de la función de fluencia en cada elemento por los incrementos de las deformaciones viscoplásticas en el tiempo.

Datos:

Las cargas de borde para ele ejemplo son:

$$\begin{aligned} q_{x1} &= -15 \text{ ton/m}^2 & q_{x2} &= 0 \text{ ton/m}^2 & q_{z2} &= 0 \text{ ton/m}^2 \\ q_{x3} &= 0 \text{ ton/m}^2 & q_{z3} &= 0 \text{ ton/m}^2 & & \\ q_{x4} &= -15 \text{ ton/m}^2 & q_{x5} &= 0 \text{ ton/m}^2 & q_{z5} &= 5 \\ & & & & & \text{ton/m}^2 \\ q_{x6} &= 0 \text{ ton/m}^2 & q_{z6} &= -15 \text{ ton/m}^2 & & \end{aligned}$$

Coordenadas (x;z) de los nodos del trapecio:

$$\begin{aligned} \text{Pto 1} &(0; -2) & \text{Pto 2} &(0; 2) & \text{Pto 3} &(3; - \\ & & & & & 1.7) \\ \text{Pto 4} &(3; 1.7) & \text{Pto 5} &(5; -1) & \text{Pto 6} &(5; 1) \end{aligned}$$

Otros datos necesarios en el cálculo:

Módulo de elasticidad del material (E) = 8000 ton/m²

Coefficiente de Poisson (ν) = 0.35

Peso unitario o del material (γ = 2 ton/m³)

Parámetros de resistencia (c, φ) : c = 3.6 ton/m² y φ = 35°

Espesor considerado en el elemento = 0.312 m

Viscosidad física del material (η) = 1000 ton.seg/m²

Incremento de tiempo (Δt) = 5 seg.

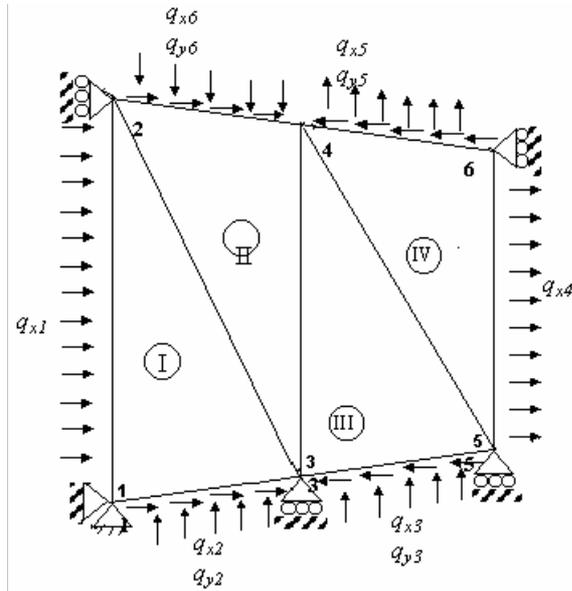


Figura 6. Figura conformada por cuatro triángulos, donde se muestran los puntos de apoyo y cargas actuantes en la misma.

Tabla 1.- Fuerzas externas y desplazamientos en los nodos.

Elemento	Nodo	Fuerzas externas (ton)		Desplazamientos (m)	
		Fx	Fz	δz (m)	δz (m)
1	1	-9.36	-1.24	0.00	0.00
	2	-9.36	-1.24	0.00	-0.00782
	3	0	-1.24	0.00319	0.00
2	2	0	-8.11		
	3	0	-1.06		
	4	0	-8.11	$5.8 \times 10(-4)$	-0.00328
3	3	0	-0.70		
	4	0	-0.70		
	5	0	-0.70	0.00362	0.00
4	4	0	1.23		
	5	0	-0.41		
	6	0	1.23	0.00	0.00121

RESULTADOS:

1. La tabla 1, muestra la concentración de las fuerzas externas en los nodos de los elementos y cálculo de los desplazamientos en los nodos. Aquí se indica la componente de la fuerza en la dirección de los ejes de referencia "x" y "z" (F_x, F_z), así como también de la componente de sus desplazamientos en ambas direcciones.

2. En la tabla 2, se muestra el proceso iterativo para la estimación de esfuerzos y deformaciones viscoplasticas, donde se aprecia la variación de la función de fluencia en cada elemento. El cálculo se ha hecho para los tiempos de 5, 10, 15 y 20 seg. Se ve como a medida que incrementa el tiempo existe una redistribución de los esfuerzos de cada elemento a los elementos más cercanos, y por tanto aumentando o disminuyendo las deformaciones en cada uno de ellos.

Tabla 2.- Esfuerzos y deformaciones.

Elemto	Esfuerzos (ton/m2)				Función de fluencia	Deformaciones viscoplasticas		
	σ_x	σ_z	τ_{xz}	σ_y		ϵ_x	ϵ_z	γ_{xz}
Primer paso iterativo t= 5 seg								
1	0.122	-17.761	0.5790	-6.174	0.871	0.003	-9.23x(-4)	2.81x(-4)
2	-5.142	-11.571	1.931	-5.85	-4.074	0.00	0.00	0.00
3	-0.458	-9.049	-1.264	-3.328	-1.280	0.00	0.00	0.00
4	-7.719	1.367	1.923	-2.223	0.081	-7.05x(-5)	3.03x(-4)	1.58x(-4)
Segundo paso iterativo t = 10 seg								
1	2.191	-2.244	0.219	-4.8(-4)	-0.817	0.00	0.00	0.00
2	0.059	-25.387	16.474	-8.865	10.52	-0.015	0.003	-0.01
3	-0.016	-25.427	-27.210	-8.905	19.703	0.049	0.007	-0.089
4	-2.488	3.346	1.041	0.012	0.312	-3.58x(-4)	0.001	6.83x(-4)
Tercer paso iterativo t = 15 seg								
1	1.035	-23.976	2.315	-0.212	3.108	0.016	-0.004	0.003
2	-2.121	-5.417	-4.893	-0.008	-0.03	0.00	0.00	0.00
3	4.706	-2.741	0.033	0.001	1.256	0.054	0.006	-0.089
4	-2.37	0.704	4.733	-0.02	1.468	6.13x(-4)	0.005	0.008

Cuarto paso iterativo t = 20 seg								
1	21.032	-13.38	1.311	0.071	16.42	0.08	-0.053	0.009
2	-15.687	-29.073	9.533	-15.666	10.84	-0.021	-0.017	0.009
3	-0.831	-0.021	-0.968	-4.5x-4	28.368	0.141	0.095	-0.094
4	-8.298	14.937	6.209	0.08	-12.877	0.00	0.00	0.00

5.- Conclusiones

- Se ha hecho un desarrollo de las expresiones matemáticas necesarias para llevar a cabo un análisis a través del modelo viscoplastico de Perzyna (1966), ayudados con la derivación de Wittke (1990) y Chen (1975).
- Se presenta las ecuaciones 55, 57 y 60 para el análisis en tres dimensiones y las ecuaciones 62, 67 y 108 para deformación plana.
- Se hace una aplicación del modelo en deformación plana, donde se usa la técnica de elementos finitos y aplicando el criterio de fluencia de Drukre-Prager.
- En el ejercicio resuelto, se aprecia como existe una redistribución de los esfuerzos a lo largo del tiempo, lo que se refleja en el valor de la función de fluencia en cada uno de los elementos, haciéndose algunas veces positiva y otras veces negativa, indicando la presencia de deformaciones o no de deformaciones viscoplasticas en los elementos.
- La existencia o no de deformaciones viscoplasticas en cualquier elemento, se debe a una redistribución de los esfuerzos en los elementos cercanos.
- Para las estimaciones que se han realizado, se aprecia que en general existe un aumento de las deformaciones viscoplasticas en el tiempo, correspondiéndose con la teoría del modelo viscoplastico, sin embargo en este ejemplo no existe una tendencia a la disminución de

esas deformaciones, lo cual es factible en materiales donde el proceso de repteo no se estabiliza.

- La metodología que se ha presentado, es importante para el ingeniero geotécnico, ya que se analiza la deformación de cualquier suelo a través de modelos donde se tiene presente el tiempo, como variable determinante en la estabilización de las deformaciones.

6.- Referencias

- (1) Cetin S. and Werner S., (1970), "Deformation and stability of viscoelastic soil media", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, November, 1970.
- (2) Chen W., (1975), "Limit analysis and soil plasticity", Elsevier, Amsterdam.
- (3) Etse G. and Willam K (1999), "Failure Analysis of elastoviscoplastic material models", Journal of Engineering Mechanics, January.
- (4) Perzyna P., (1966), "Fundamental Problems in viscoplasticity", Adv. Appl. Mech. 9.
- (5) Wittke W., (1990), "Rock mechanics", Springer – Verlag.
- (6) Soydemir C. y Schmid W., (1970), "Deformation and stability of viscoelastic soil media". Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, Vol 96, No. SM6, November, pp. 2081-2098.