

Modelo de Comportamiento Teórico en Suelos

Model of Teoretical Behaviour in Soils

S. H. Rojas G y E. De Barcia
Facultad de Ingeniería, ULA,
Mérida, 5101, Venezuela
*silviorojas@ing.ula.ve

Resumen

En este trabajo, se desarrolla una metodología para evaluar la trayectoria de esfuerzos en ensayos drenados y no drenados, así como las deformaciones cortantes que se generan durante el corte de una muestra ensayada en el triaxial. Se desarrolla una metodología sencilla, tomando en consideración la deformación volumétrica del material, evaluando las mismas en la ecuación de energía y en la definición de potencial plástico. Finalmente para la solución del problema se aplica el método predictor – corrector de Euler, como también se presenta una solución analítica.

Palabras claves: Deformación volumétrica, deformación cortante, Trayectoria de esfuerzos.

Abstract

In this work is developed a methodology to evaluate the trajectory of stress in tests of drainage and of not drainage, like deformations cuttings who produce during the cut of one model of test in the triaxial. This simple methodology taking in consideration the volumetric deformation of the material, evaluating in the same equation of energy and in the definition of the plastic potential. Finally to the solution of the problem we applied the method of predict – corrector of Euler, such as present a solution analytical too.

Key words: Volumetric deformation, deformations cuttings, trajectory of stress

Introducción

El siguiente trabajo está hecho tomando en cuenta los fundamentos teóricos presentados por Roscoe et al (1963) en su artículo titulado “Yielding of clays in states wetter than critical”, quienes estudiaron el comportamiento del material considerando la energía interna y de disipación, que se genera en el elemento al consolidarse y distorsionarse. Usando el modelo constitutivo Cam-Clay de Roscoe et al (1963), Akira et al (1994), hicieron un análisis de la deformación finita de la pareja suelo-agua, encontrando que tres tipos de estados pueden esperarse en una arcilla después de alcanzar el estado crítico (ablandamiento, permanecer en estado de falla, que continúe endureciéndose).

El principal objetivo de este trabajo, es presentar una metodología sencilla y original, basada en las

deformaciones volumétricas que deben aplicarse en la evaluación de las distorsiones cortantes, para estimar la trayectoria de esfuerzos en ensayos drenados y no drenados, tomando en cuenta la definición de potencial plástico y la ecuación de energía. Las propiedades del material que se utilizarán aquí, serán las correspondientes a la arcilla de Weald, la cual es una arcilla marina del período cretácico, que está caracterizada por:

Límite líquido	43%
Límite plástico	18%
Índice de plasticidad	25%
Porcentaje arcilla menor de 0,002 mm	40%
Actividad	0,6
Peso específico relativo	2,74

Planteamiento de la Ecuación de la Energía

Cuando una muestra es sometida a un cambio de esfuerzos, se le transmite cierta cantidad de energía, tal como ocurre en un ensayo triaxial estándar. Esta cantidad de energía, se puede expresar como:

$$\delta E = \Delta \sigma_v \cdot \delta \varepsilon + p \cdot \delta v \quad (1)$$

donde:

$\Delta \sigma_v$: Esfuerzo desviador

p : Esfuerzo efectivo medio

$\delta \varepsilon$: Deformación cortante

δv : Deformación volumétrica

δE : Cantidad de energía que se transmite a la muestra

Se considera que una parte de esta energía, incrementa la energía interna la cual se registra en la muestra y la otra parte se disipa dentro de la misma. La primera de ellas da origen a las deformaciones elásticas de las partículas, al suprimir el sistema de esfuerzos aplicados y la segunda genera distorsiones cortantes al aplicar dicho tensor de esfuerzos, lo cual es equivalente a deformaciones plásticas.

Tomando en cuenta lo expresado anteriormente, la variación de energía transmitida al elemento puede ser expresada como la suma de las componentes elásticas y plásticas, tal como se indica:

$$\delta E = \delta u + \delta w_d \quad (2)$$

donde:

δu : Cambio de energía interna, debido solamente a los cambios de la componentes esférica "p" (eje isotrópico), y son independientes de los cambios del esfuerzo cortante.

δw_d : Parte de la energía disipada dentro del elemento.

Al igualar la ecuación (1) y (2), se obtiene:

$$\Delta \sigma_v \delta \varepsilon + p \cdot \delta v = \delta u + \delta w_d,$$

donde:

$$\delta w_d = \Delta \sigma_v \delta \varepsilon + p \delta v - \delta u \quad (3)$$

Esta expresión indica que la capacidad que tenga el suelo para almacenar energía será determinante en la distorsión que experimente cuando está supeditado a variaciones de esfuerzos.

Ecuación de la Energía Interna Recuperable

El trabajo hecho por las partículas sólidas en un elemento de suelo, cuando el mismo se descarga, puede ser expresado como:

$$U = \int_v p dv \quad (4)$$

Siendo:

U : Cambio de energía interna que ocurre en el volumen total del elemento de suelo considerado.

p : Esfuerzo efectivo medio, que produce el cambio de energía interna u.

V : Volumen total del elemento

d_v : Variación del volumen total

Luego de ciertas consideraciones, se llega:

$$U = \int_v p \cdot de \quad (5)$$

donde:

de: variación de la relación de vacíos

En la Fig. 1 (Henkel 1960); Lambe, W. y Whitman, R. (1990)), se presenta la relación de cambio de volumen vs el logaritmo de base diez del esfuerzo efectivo medio, donde se muestra la curva de consolidación de la primera fase de un ensayo del triaxial ubicada en el eje isotrópico. También en la Fig. 1, se muestran tres curvas punteadas y paralelas, las cuales se obtienen cuando luego de alcanzar determinado esfuerzo confinante $\bar{\sigma}_c$, la muestra se descarga.

La expresión matemática que representa el comportamiento del suelo en la etapa de consolidación, se expresa:

$$w = w_a - \lambda \cdot \log(p_0) \quad (6)$$

Donde:

p_0 : Valores de esfuerzos confinantes ($\bar{\sigma}_c$) en los ensayos

w_a : Contenido de humedad para un valor $p=1$

w : Contenido de humedad para determinado p

λ : Pendiente de la curva de consolidación

La ecuación 6, en términos de la relación de vacíos se escribe:

$$e = e_a - \lambda \cdot \log(p_0) \quad (7)$$

donde:

e_a : Relación de vacíos para un valor de $p=1$

e : Relación de vacíos para determinado valor de p .

Igualmente se considera que todas las curvas de expansión tienen la misma pendiente, y por similitud con la curva de consolidación, se expresa:

$$e = e_b - m \cdot \log(p) \quad (8)$$

donde:

m: Pendiente de las curvas de expansión

w_b, e_b: Relación de vacíos y contenido de humedad para un valor de p = 1

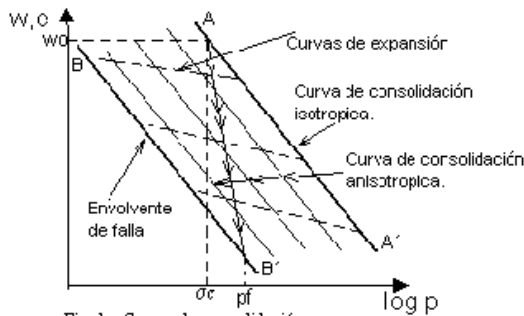


Fig. 1.- Curvas de consolidación y expansión

En este estudio, la ecuación (8) se escribe en función del logaritmo neperiano, expresándose:

$$e = e_b - \frac{m}{2.3} \cdot \ln(p) \quad (9)$$

Derivando la ecuación 9, respecto a p, resulta:

$$de = -\left(\frac{m}{2.3}\right) \left(\frac{1}{p}\right) \cdot dp \quad (10)$$

$$dp = \sigma_c - p_i \quad (11)$$

Sustituyendo la ecuación (10) en (5) e integrando desde $\bar{\sigma}_c$ hasta un valor de descarga p_i, el lado derecho de la ecuación (5), se debe escribir como una variación δu , por ser variación del esfuerzo de $\bar{\sigma}_c$ @ p_i. Por consiguiente se tiene:

$$\delta u = \left(\frac{m}{2.3}\right) [\bar{\sigma}_c - p_i] \quad (12)$$

donde:

δp : variación del esfuerzo de confinamiento, en la descarga.

Si la variación de la energía interna se expresa por unidad de volumen, la ecuación (12), debe dividirse por el volumen total $V = 1 + e$ ($V_s = 1$ y $V_v = e$)

$$\delta u = \frac{m \cdot \delta p}{2.3(1+e)} \quad (13)$$

δu : incremento de la energía recuperable, cuando el esfuerzo normal medio incrementa o decrece.

Se observa en la ecuación (13), que el **cambio de energía interna δu , es independiente de los cambios de δq** , y por consiguiente a lo largo del eje isotrópico $\delta E = \delta u$, donde δE es la cantidad de energía que se transmite al elemento, siendo éste el primer postulado de esta teoría.

Ecuación de la Energía Disipada δw

Un segundo postulado es que **toda la energía transmitida por unidad de volumen ($\Delta \sigma_v$, $\delta \epsilon$) al elemento, se disipa dentro de la muestra en un ensayo no drenado**, ya que en esta fase del ensayo no existe cambio de volumen, sin embargo ese elemento de suelo sometido a un esfuerzo desviador $\Delta \sigma_v$, presentará distorsión cortante $\delta \epsilon$. Se entiende también que en ensayos drenados, esa energía transmitida en la etapa de corte, se disipa dentro de la muestra y a través del drenaje.

Si se considera que $\Delta \sigma_v = 2 \cdot q$, donde q es el esfuerzo cortante¹, entonces las envolventes de resistencia al corte se pueden representar por la Fig. 2, para un material sin cohesión y con cohesión.

Si la energía disipada en la etapa de corte se expresa, tal como se definió anteriormente, entonces se escribe:

$$\delta w_d = \Delta \sigma_v \cdot \delta \epsilon \quad (14)$$

donde:

δw_d : Energía disipada dentro del elemento de suelo, por unidad de volumen

$\Delta \sigma_v$: Esfuerzo desviador aplicado al elemento

$\delta \epsilon$: Distorsión que se genera dentro del elemento

La expresión (14), escrita en función de q, será:

$$\delta w_d = 2 \cdot q \cdot \delta \epsilon \quad (15)$$

La energía total por unidad de volumen, disipada en la falla, se expresa.

$$\delta w_d = 2 \cdot q_w \cdot \delta \epsilon \quad (16)$$

Donde:

q_w : Máxima resistencia al corte para determinado esfuerzo efectivo p.

¹ Roscoe et al (1963) trabaja solamente con suelos sin cohesión y considera que $q = \Delta \sigma_v$

La ecuación (16), para suelos con cohesión y sin cohesión(ver fig. 2), será:

$$\delta w_d = 2 \cdot \tan \alpha_f \cdot p \cdot \delta \epsilon \tag{17}$$

$$\delta w_d = 2(a + \tan \alpha_f \cdot p) \cdot \delta \epsilon \tag{18}$$

donde:

α_f : Pendiente de la envolvente de resistencia

Las ecuaciones (17) y (18), expresan la energía que se disipa dentro del elemento, en la etapa de corte en un material con cohesión y sin cohesión. Como se puede observar esta energía disipada por unidad de volumen, es independiente de la magnitud de la deformación volumétrica.

Estimación de la Resistencia al Corte a Través de las ecuaciones de Energía

Ya disponiendo de expresiones para estimar ambas energías (δu y δw_d), se puede hacer las siguientes observaciones:

- La energía disipada durante la distorsión cortante $\delta \epsilon$, por unidad de volumen del suelo, bajo un esfuerzo efectivo p , se obtiene a partir de la ecuación (17) y (18), las cuales pueden expresarse como:

$$\frac{\delta w_d}{\delta \epsilon} = 2 \cdot p \cdot \tan \alpha_f \tag{19}$$

$$\frac{\delta w_d}{\delta \epsilon} = 2(a + \tan \alpha_f \cdot p) \tag{20}$$

Si en un punto inicial, por ejemplo punto A ó B, de las Fig. 2, ocurre un cambio de esfuerzos (δp , δq) en el elemento, entonces la energía total transmitida al elemento por unidad de volumen se expresa por la ecuación (2). El resultado de igualar las expresiones (1) y (2), es:

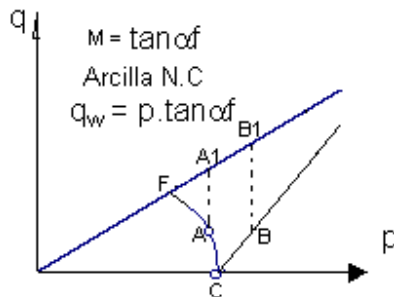
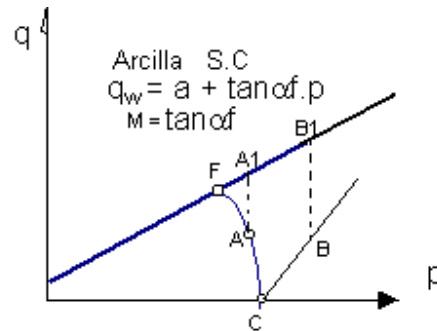


Fig. 2.- Envolvente de resistencia y trayectoria de esfuerzos.



$$\Delta \sigma_v \cdot \delta \epsilon + p \cdot \delta v = \delta u + \delta w_d \tag{21}$$

En el estado de falla la ecuación(21) cambiará a la forma:

$$\underbrace{\Delta \sigma_v \cdot \delta \epsilon + p \cdot \delta v}_{\text{En un estado cualquiera (punto A o B)}} = \underbrace{\frac{m \cdot \delta p}{2 \cdot 3(1+e)} + 2 \cdot q_w \cdot \delta \epsilon}_{\text{En la falla (punto A ó B}_i)} \tag{22}$$

En un estado cualquiera (punto A o B)

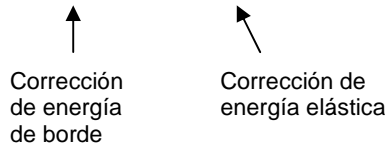
En la falla (punto A ó B_i)

Sin ningún tipo de escepticismo la ecuación (22) es una definición, la cual puede interpretarse como correcciones de un estado de esfuerzos con respecto al estado de falla. También se entiende que, cuando en la ecuación 21, se sustituye la ecuación 13, es porque se está ya considerando una variación de la presión de confinamiento $\bar{\sigma}_c$ en la etapa de corte. Esto significa que el análisis es a partir del final de la etapa de consolidación.

Como $\Delta \sigma_v = 2 \cdot q$, la ecuación 22, se escribe:

$$2 \cdot q \cdot \delta \epsilon + p \cdot \delta v = \frac{m \cdot \delta p}{2 \cdot 3(1+e)} + 2 \cdot q_w \cdot \delta \epsilon \tag{23}$$

$$q_w = q + \frac{p \cdot \delta v}{2 \cdot \delta \epsilon} - \frac{m}{4 \cdot 6(1+e)} \cdot \frac{\delta p}{\delta \epsilon} \quad (24)$$



Esta ecuación (24), es uno de los grandes aportes hechos por Roscoe et al (1963), la cual permite encontrar la resistencia al corte q_w , a partir de determinado estado de esfuerzos (q, p).

En la Fig. 3, y tomando en cuenta las expresiones anteriores, se presenta un diagrama de balance de energía, tanto para los ensayos no drenados, como drenados (Roscoe et al (1963)).

Una Ecuación para Estimar la Trayectoria de Esfuerzos en Ensayos no Drenados

En la Fig. 4, se presenta la trayectoria η_1 de esfuerzos de determinado ensayo, donde un punto ubicado en esa trayectoria queda determinado por un radio r , medido desde el origen del sistema y por el ángulo θ .

Considérese que en la Fig. 4, se dibujan distintos planos con distintas pendientes η_i , donde las flechas en cada plano indican que una muestra en su etapa de consolidación puede tener esas trayectorias y por consiguiente su etapa de consolidación será anisotrópica.

Evidencias experimentales de Roscoe et al (1963), muestran que los estados de anisotropía para la arcilla (ver fig. 1), se encuentra entre la curva de consolidación virgen (AA') y la envolvente de falla (BB') y todas con una similitud de pendiente, y por esta razón las ecuaciones (6) y (7) pueden ser empleadas para el análisis de cambio de volumen, en este tipo de ensayos, tal como se expone en este artículo. Sin embargo, la ecuación (7) también puede ser escrita en función de q , debido a que en la etapa de consolidación anisotrópicas las curvas de cambio de volumen obtenidas, con valores de q o de p , son paralelas y por consiguiente, la relación de vacíos se escribirá:

$$e = e_a - \lambda \cdot \log q \quad (25)$$

Escribiendo la relación $\eta = K = q/p$, esta última ecuación se expresa:

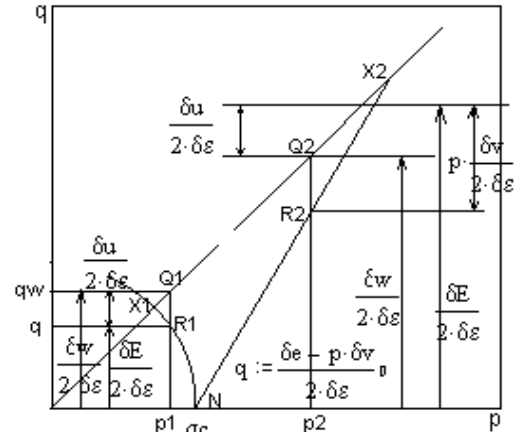


Fig. 3.- Diagrama de balance de energía, en ensayos drenados y no drenados.

donde:

e_a : Relación de vacíos correspondiente a un valor de $p = 1$, para la curva de consolidación virgen.

Para cualquier valor de $\eta = K$, la relación de vacíos correspondiente al valor de $p = 1$, se escribe a partir de (26), como:

$$e_a - \lambda \cdot \log K = e + \lambda \cdot \log p \quad (27)$$

El término de la izquierda en forma general puede expresarse:

$$(e_a)_\eta = e + \lambda \cdot \log p \quad (28)$$

donde el subíndice η , significa determinado grado de consolidación anisotrópica constante en la ecuación (28). Esta función debe corresponder a un valor de $p = 1$, pero estimada a partir de determinado valor de "e" y "p" para una curva "η".

Si $(e_a)_\eta = f(\eta)$, la ecuación (28), resultará:

$$f(\eta) = e + \lambda \cdot \log p \quad (29)$$

En función del logaritmo natural será:

$$f(\eta) = e + \frac{\lambda}{2.3} \ln(p) \quad (30)$$

La función $f(\eta)$, derivada en los puntos donde las trayectorias anisotrópicas intersectan una trayectoria de esfuerzos no drenada, resulta:

$$\frac{\partial f(\eta)}{\partial p} = \frac{\lambda}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{p} \right) \quad (31)$$

Sabemos que $\eta = q/p$, entonces:

$$\frac{\partial \eta}{\partial p} = \frac{\frac{\partial q}{\partial p} \cdot p - q}{p^2} \quad (32)$$

Definiendo un nuevo parámetro, a lo largo de la trayectoria no drenada:

$$S = -\frac{dq}{dp} = -\frac{\partial q}{\partial p} \quad (33)$$

Remplazando la ecuación (33) en la ecuación (32), resulta:

$$\frac{\partial \eta}{\partial p} = -\frac{1}{p} (s + \eta) \quad (34)$$

Luego la ec. 34 se escribe:

$$\frac{d(e_a)_\eta}{d\eta} = f'(\eta) = -\frac{\lambda}{2 \cdot 3(s + \eta)} \quad (35)$$

Ahora considere que a partir del punto R' o R'' en la Fig. 5, se incrementa el esfuerzo δq , δp , hasta alcanzar el estado de esfuerzos Q' ó Q''. En este caso, varía la relación de vacíos e , con el cambio de esfuerzos.

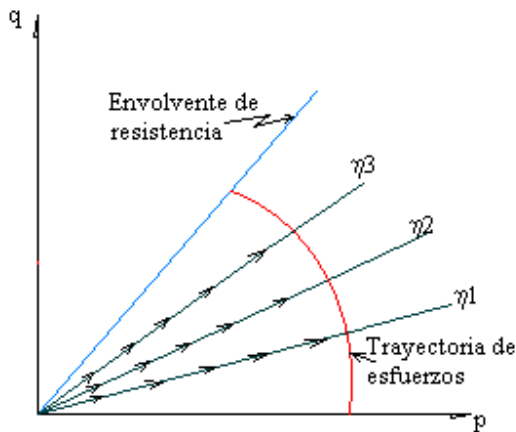


Fig. 4.- Distintas trayectorias de consolidación anisotrópica.

A partir de la ecuación (30), se escribe:

$$\frac{\partial(e_a)_\eta}{\partial \eta} = f'(\eta) = \frac{\partial e}{\partial \eta} + \frac{1}{\delta \eta} \left(\frac{\lambda}{2 \cdot 3} \right) \cdot \left(\frac{1}{p} \right) \cdot \delta p \quad (36)$$

Esta última ecuación está representada en la Fig. 6, donde $\delta(e_a)_\eta$, es la diferencia de relaciones de variaciones de las curvas η , cuando $p = 1$.

Por igualdad de la ecuación (35) con la ecuación (36), considerando que en el punto Q' se alcanza una trayectoria no drenada, donde no existe variación, de la relación de vacíos, se puede plantear:

$$\delta e = -\frac{\lambda}{2 \cdot 3 p} \left(\frac{p \delta \eta + (s + \eta) \delta p}{s + \eta} \right) \quad (37)$$

Esta última ecuación se puede escribir, como:

$$\delta e = -\frac{\lambda}{2 \cdot 3 p} \left(\frac{\delta q + s \cdot \delta p}{s + \eta} \right) \quad (38)$$

Desarrollando

$$\delta e = -\frac{\lambda}{2 \cdot 3} \left[\frac{\delta q + s \delta p}{sp + q} \right] \quad (39)$$

De esta última ecuación, la definición de la deformación volumétrica, será:

$$\delta v = \frac{\lambda}{2 \cdot 3 p(1 + e)} \left(\frac{\delta q + s \cdot \delta p}{s + \eta} \right) \quad (40)$$

La variación de la relación δe expresada por la ecuación (28), debe ser el proporcionado por un trabajo elástico y plástico que se genera en el elemento de suelo cuando está sujeto a un incremento de esfuerzo efectivo δp y cortante δq . La Fig. 6 permite ver los expresado.

De acuerdo a lo mostrado en la Fig. 6 y lo indicado anteriormente, se plantea:

$$\delta e = \delta e^e + \delta e^p \quad (41)$$

donde.

δe : variación de la relación de vacíos

δe^e : componente elástica de δe (relación de vacíos recuperable en la descarga Q'' hasta R'')

δe^p : componente plástica de δe (relación de vacíos no recuperable en la descarga Q'' hasta R'')

La componente elástica de la deformación, viene dada por la ecuación 10:
donde:

$$\delta e^e = -\frac{m}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\delta p}{p} \quad (42)$$

La componente plástica δe^p de la deformación debe ser igual a la diferencia de la relación del vacíos que existe entre las curvas de expansión y el punto inicial de carga (ver Fig. 6), es decir que:

$$\delta e^p = \delta e - de^e \quad (43)$$

Por consiguiente, la componente permanente de la deformación volumétrica, se expresa, de la forma:

$$\delta v^p = -\frac{1}{1+e} \left(\delta e + \frac{m}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\delta p}{p} \right) \quad (44)$$

De acuerdo a Roscoe et al (1963), Drucker (1957) encontró que la superficie de fluencia es convexa y que el incremento de deformación plástica o el vector de variación de deformación debe ser normal a la superficie de fluencia. Las curvas de fluencia o de potencial plástico mostradas en la Fig. 7, son muy similares a trayectorias no drenadas y que por consiguiente estas últimas también son lugares geométricos de potencial plástico.

Las deformaciones volumétricas asociadas con el incremento de esfuerzos para pasar del punto H a H_1 (ver Fig. 7), es estimada a partir de la ecuación (40), donde una parte de esta deformación es recuperable, pudiendo ser calculada a través de la ecuación (44).

Definición de la Condición de Normalidad

En las definiciones hechas anteriormente se dijo que, el vector de incremento de deformación es normal al lugar geométrico de fluencia, por lo tanto a lo largo de la curva CX o C_1X_1 , se hace la siguiente definición del vector de deformación:

$$\left(\frac{dq}{dp} \right)_{CF} = -\frac{\delta v^p}{\delta e} \quad (45)$$

donde:

$(dq/dp)_{CF}$: Variación del esfuerzo cortante q, respecto al esfuerzo efectivo o, a lo largo de la curva CX.

$(\delta v^p/\delta e)$: Normal a la superficie de fluencia CX, representando la dirección del vector de deformación.

Se ha dicho que la curva CX es el límite elástico, por consiguiente la variación de la relación de vacíos a lo largo de esta curva puede ser definido por la ecuación 42, pero donde a su vez debe cumplirse la ecuación 39.

Por igualación de ambas ecuaciones:

$$-\frac{m}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\delta p}{p} = -\frac{\lambda}{2 \cdot 3} \left(\frac{\delta q + s \delta p}{sp + q} \right)$$

De donde:

$$\left(\frac{\delta q}{\delta p} \right)_{CF} = -\frac{m}{\lambda} \left[s \left(\frac{\lambda}{m} - 1 \right) - \eta \right] \quad (46)$$

Sustituyendo la ecuación (44) y la (47) en la (45), resulta:

$$\delta e = \frac{\lambda}{2 \cdot 3(1+e)p} \left\{ \frac{\frac{\lambda}{m} \cdot \delta q + \left[s \left(\frac{\lambda}{m} - 1 \right) - \eta \right] \delta p}{(s + \eta) \left[s \left(\frac{\lambda}{m} - 1 \right) - \eta \right]} \right\} \quad (47)$$

Ahora se tienen las herramientas para evaluar la variación de la relación de vacíos δe y de la deformación cortante en cualquier etapa de algunos ensayos (Roscoe et al, 1963).

En este artículo, se trata de encontrar dos nuevas expresiones, que permitirán definir las trayectorias de esfuerzos en una muestra en condiciones drenadas y no drenadas.

Para ensayos drenados:

Con la ecuación (23) de energía y sustituyendo la ecuación 40 previamente, se obtiene:

$$\delta e = \frac{m \cdot \delta p}{2 \cdot 3(1+e)} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\lambda}{(1+e)} \left(\frac{\delta q + s \cdot \delta p}{s + \eta} \right) \quad (48)$$

También por sustitución de la ecuación 44 en la ecuación 45, y sabiendo que $s = \delta q/\delta p$, resulta:

$$\delta\varepsilon = \frac{m}{2 \cdot 3(1+e)p} \left\{ \frac{\frac{\lambda}{m} \delta q + \left[s \left(\frac{\lambda}{m} - 1 \right) - \eta \right] \delta p}{s(s+\eta)} \right\} \quad (49)$$

Esta última ecuación es diferente de la ecuación 47, obtenida por Roscoe et al (1963), debido a la consideración hecha por los autores.

Igualando las ecuaciones 48 y 49, resulta:

$$\frac{m \left(\frac{q}{p} - \frac{\delta q}{\delta p} \right)}{2(q-Mp)} = -\frac{m}{p} \left\{ \frac{\delta q - \frac{q}{p} \delta p}{\delta q} \right\} \quad (50)$$

En este punto, se debe hacer la siguiente consideración con respecto a la ecuación 48, la cual se origina de la ecuación 23, donde el esfuerzo desviador la ecuación 22, σ_v , se tomó como $2 \cdot q$, siendo q la mitad del desviador.

Para facilitar la integración de la ecuación 50, consideremos que q representa el desviador ($q = \Delta\sigma_v$) y que M surge del ploteo entre el desviador $q = \Delta\sigma_v$ y el esfuerzo efectivo p . De esta forma la ecuación 50, se transforma en:

$$\frac{m \left(\frac{q}{p} - \frac{\delta q}{\delta p} \right)}{(q-M \cdot P)} = -\frac{m}{p} \left\{ \frac{\delta q - \frac{q}{p} \delta p}{\delta q} \right\} \quad (51)$$

Desarrollando, se encuentra que la ecuación diferencial se reduce a:

$$\frac{dq}{dp} = -M \cdot \ln(p) + C_1 \quad (52)$$

Si se considera que cuando $p = pf$, dq/dp viene determinada por:

$$s = \frac{M}{1 - \frac{m}{\lambda}} - \eta \quad (53)$$

Esta ecuación fue determinada por Roscoe et al (1963), la cual sustituida en la ecuación 52, se obtiene:

$$C_1 = - \left[\frac{qf}{pf} - \frac{M}{\left(1 - \frac{m}{\lambda}\right)} \right] + M \cdot \ln(pf) \quad (54)$$

La integración de la ecuación 52, determina la ecuación que define la trayectoria drenada, encontrándose:

$$q = M \cdot P (1 - \ln p) + C_1 p + C_2 \quad (55)$$

Si en esta ecuación se evalúa otra condición de borde, al final de la etapa de consolidación, es decir $p = \sigma_c$, cuando $q = 0$, resulta:

$$C_2 = M \cdot \sigma_c (\ln \sigma_c - 1) - C_1 \cdot \sigma_c \quad (56)$$

Otro análisis más ajustado a los ensayos drenados es el siguiente. A partir de la Fig. 1, se deriva la relación:

$$w = w_0 - \lambda_1 [\log p - \log \sigma_c] \quad (57)$$

donde:

- w : humedad en cualquier punto de trayectoria de corte
- λ_1 : pendiente de la trayectoria drenada de corte
- p : esfuerzo efectivo en cualquier punto de la trayectoria drenada
- σ_c : esfuerzo efectivo al final de la etapa de consolidación

La deformación volumétrica de la muestra en la etapa de corte, puede ser expresada:

$$\delta v = - \frac{1}{w + \frac{1}{G_s}} \cdot \delta w \quad (58)$$

donde:

- δv : deformación volumétrica
- δw : variación de la humedad
- w : humedad en cualquier punto de la trayectoria

G_s : peso específico relativo de los sólidos

De la ecuación 57, se obtiene:

$$\delta w = - \frac{\lambda_1}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{p} \right) \cdot \delta p \quad (59)$$

Sustituyendo las ecuaciones 57 y 59, en 58, se deriva:

$$\delta v = \frac{\lambda_1 \cdot \delta p}{2 \cdot 3 \left[w_0 \cdot p - \lambda_1 p (\log p - \log \sigma_c) + \frac{p}{G_s} \right]} \quad (60)$$

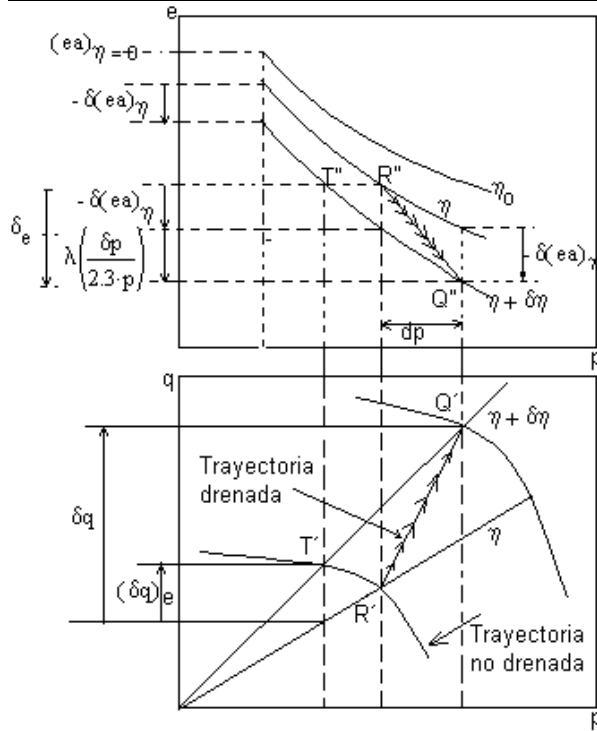


Fig. 5.- Trayectorias para pasar de una línea de anisotropía $\eta + \delta\eta$

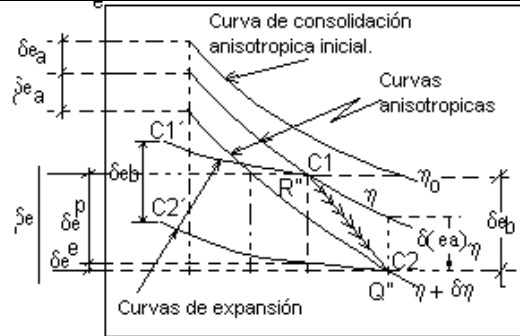


Fig. 6.- Curva de compresibilidad donde se ilustra las deformaciones elásticas y plásticas.

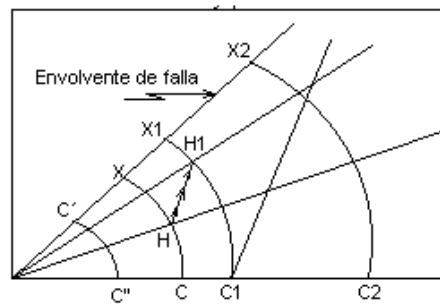


Fig. 7.- Curvas CX y C1X1, mostrando estados de equilibrio elásticos, donde comienza la fluencia.

Sabemos que $\delta v = \frac{e}{1+e}$, por consiguiente si se sustituye la ecuación 60 en 44, resulta:

$$\delta v^p = \frac{\lambda_1 \cdot \delta p}{2 \cdot 3 \left(w_0 p - \lambda_1 p \cdot \log p + \frac{p}{G_s} \right)} - \frac{m}{2 \cdot 3(1+e)} \cdot \frac{\delta p}{p} \quad (61)$$

Haciendo uso de la relación $s.e = W.G_s$, para un grado de saturación $s = 1$, de la ecuación 58, la ecuación 61, puede ser escrita:

$$\delta v^p = \frac{\lambda_1 \cdot \delta p}{2 \cdot 3 \left[w_0 p - \lambda_1 p \cdot (\log p - \log \sigma_c) + \frac{p}{G_s} \right]} - \frac{m \cdot \delta p}{2 \cdot 3(G_s[W_0 - \lambda_1(\log p - \log \sigma_c)] + 1)p} \quad (62)$$

La definición del vector deformación a partir de la condición de normalidad, se hizo a través de la ecuación 45. De esta forma la expresión de la deformación cortante, será:

$$\delta \epsilon = - \frac{\lambda_1 \cdot \delta p}{2 \cdot 3 \left[w_0 p - \lambda_1 p \cdot (\log p - \log \sigma_c) + \frac{p}{G_s} \right]} \cdot \frac{\delta q}{\hat{\phi}} + \frac{m \cdot \delta p}{2 \cdot 3(G_s[W_0 - \lambda_1(\log p - \log \sigma_c)] + 1)p} \cdot \frac{\delta q}{\hat{\phi}} \quad (63)$$

De la ecuación de energía, tomando a "q" como el desviador total se escribe:

$$\delta \epsilon = \frac{m}{2 \cdot 3(1+e)} \frac{\delta p - p \cdot \delta v}{q - M \cdot p} \quad (64)$$

Sustituyendo la expresión de la relación de vacíos (e) y de la deformación volumétrica δv , en la ecuación 64, puede escribirse:

$$\delta \varepsilon = \frac{\frac{m \cdot \delta p}{2 \cdot 3(1 + G_s[w_0 - \lambda_1(\log p - \log \sigma_c)])} - \frac{\lambda_1 \cdot \delta p}{2 \cdot 3(w_0 - \lambda_1(\log p - \log \sigma_c) + 1/G_s)}}{q - M \cdot p} \quad (65)$$

Igualando la ecuación 63 y 65, la pendiente de la trayectoria es:

$$\frac{\delta q}{\delta p} = \frac{(q - M \cdot p) \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\lambda_1}{w_0 p - \lambda_1 p(\log p - \log \sigma_c) + p/G_s} \\ + \frac{m}{G_s[w_0 p - \lambda_1 p(\log p - \log \sigma_c)] + p} \end{array} \right\}}{\frac{m}{1 + G_s[w_0 - \lambda_1(\log p - \log \sigma_c)]} - \frac{\lambda_1}{w_0 - \lambda_1(\log p - \log \sigma_c) + 1/G_s}} \quad (66)$$

La solución de esta última ecuación diferencial, puede hacerse por el método predictor-corrector de Euler (Gerald (1991)), obteniéndose de esta forma la estimación de la trayectoria drenada a partir de parámetros ya mencionados anteriormente.

Ensayos no drenados:

El análisis se realizará similarmente, como en los ensayos drenados, sabiendo que la variación de relación de vacíos δe , en la ecuación 44, es igual a cero, por lo cual, la deformación volumétrica se expresa como:

$$\delta v^p = -\frac{m}{2 \cdot 3(1 + e)} \cdot \left(\frac{\delta p}{p} \right) \quad (67)$$

Sustituyendo la ecuación 67 en la expresión 45, se deriva:

$$\delta \varepsilon = \frac{\frac{m}{2 \cdot 3(1 + e)} \cdot \left(\frac{\delta p}{p} \right)}{\left(\frac{\delta q}{\delta p} \right)} \quad (68)$$

De la ecuación 23, tomando a q como el esfuerzo desviador y manteniendo la etapa de corte sin cambio de volumen, se escribe:

$$\delta \varepsilon = \frac{m}{2 \cdot 3(1 + e)} \cdot \frac{\delta p}{q - M \cdot p} \quad (69)$$

Igualando las ecuaciones 68 y 69, la pendiente se expresa:

$$\frac{\delta q}{\delta p} = \frac{q}{p} - M \quad (70)$$

La solución de esta ecuación es:

$$q = M \cdot [p \ln(\sigma_c) - p \ln(p)] \quad (71)$$

Otra solución de la ecuación 70, resulta transformando la ecuación en una ecuación homogénea, es decir: haciendo el cambio de variable $x = p$, $y = q$, tal que:

$$y = M \cdot x + x \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad (72)$$

Tomando $p = dy/dx$, y derivando nuevamente la ecuación 72, se tiene:

$$P = -M \cdot \ln(x) + c \quad (73)$$

La solución de esta ecuación está dada en las siguientes tres expresiones:

$$q = -M \cdot p[\ln(p) - 1] + c \cdot p + C_1 \quad (74)$$

$$C_1 = M \cdot \sigma_c [\ln(\sigma_c) - 1] - c \cdot \sigma_c \quad (75)$$

$$C = M [1 + \ln(pf)] \quad (76)$$

Aplicación Práctica

En este artículo se hace el análisis para la arcilla Weald, caracterizada por los siguientes valores:

$$\begin{array}{ll} M = 0,07677 & m \approx \lambda/2,5 \\ \lambda = 0,0765 & \lambda_1 = 0,1277 \end{array}$$

Las humedades y relación de vacíos al final de la etapa de consolidación son:

$$\sigma_c = 2 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow w_0 = 23,10 \rightarrow e_0 = 0,635$$

$$\sigma_c = 4 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow w_0 = 20,79 \rightarrow e_0 = 0,575$$

$$\sigma_c = 6 \text{ kg/cm}^2 \rightarrow w_0 = 19,45 \rightarrow e_0 = 0,545$$

Ensayos drenados

Resolviendo las ecuaciones (54), (55) y (56) que corresponden a la solución analítica, se obtienen los resultados mostrados en la Fig. 8, donde se observa como las trayectorias de esfuerzos tocan la envolvente de resistencia al corte.

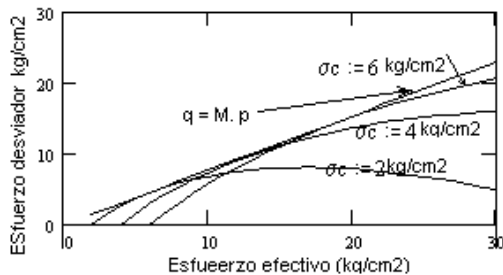


Fig. 8.- Trayectorias de esfuerzos obtenidos analíticamente.

La solución de la ecuación 66, a través del método predictor-corrector de Euler, permite encontrar resultados como los mostrados de la Fig. 9, donde se observa que para determinado esfuerzo efectivo, el mayor corte es soportado por la muestra consolidada al menor esfuerzo, que en este caso es $\sigma_c = 2 \text{ kg/cm}^2$. Aquí ninguna trayectoria, tocaría la envolvente de máxima resistencia.

La Fig. 10 resultó de la aplicación de la ecuación 63 de deformación cortante, para las tres muestras consolidadas a distintos esfuerzos confinantes, donde se aprecia que en las muestras de menor consolidación, las distorsiones cortantes que se generan son mayores.

Este resultado se corresponde con el mostrado en la Fig. 9, donde el desviador estimado sobre la muestra $\sigma_c = 2 \text{ kg/cm}^2$, igualmente se ubican por encima de las otras dos muestras.

Lo anterior pudiera interpretarse, como si este material clasificado con los índices de compresibilidad λ_1 y de expansión m , sufre grandes deformaciones cortantes, a muy bajo esfuerzo desviador, tal como se muestra en las Fig. 9 y Fig. 10.

Con los valores del esfuerzo desviador presentados en la Fig. 9, obtenidos con la solución de la ecuación 66, se puede estimar el desviador en la falla aplicando la ecuación (24), pero considerando que q_w , q son esfuerzos desviadores, escribiéndose:

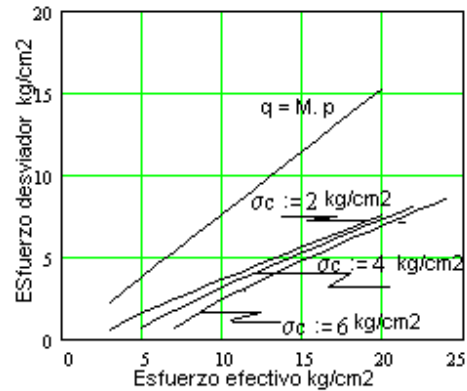


Fig. 9.- Estimación de la trayectoria de esfuerzos efectivos, a partir de las expresiones de la deformación cortante.

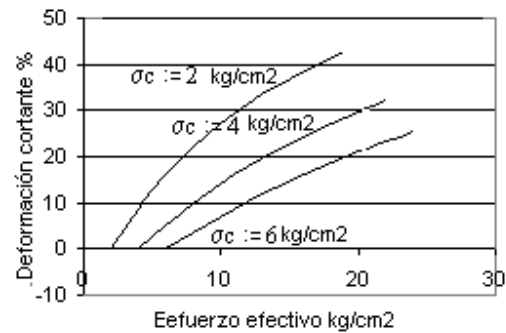


Fig. 10.- Relación entre la deformación cortante vs el esfuerzo efectivo.

$$q_w = q + \frac{p \delta v}{\delta \epsilon} - \frac{m}{2 \cdot 3(1+e)} \cdot \frac{\delta p}{\delta \epsilon} \quad (26)$$

En la expresión el desviador q , está afectado por la corrección de energía de borde y la corrección de energía elástica. De esta forma, el resultado de la ecuación 24, se presenta en la Fig. 11, donde se aprecia una total coincidencia entre los valores estimados y los dados por q_w , correspondiente a la envolvente de resistencia.

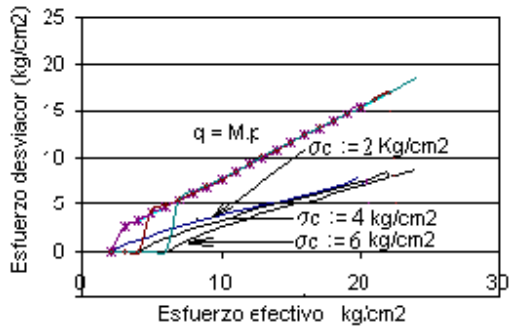


Fig. 11.- Esfuerzos desviadores corregidos coincidiendo con la envolvente de falla.

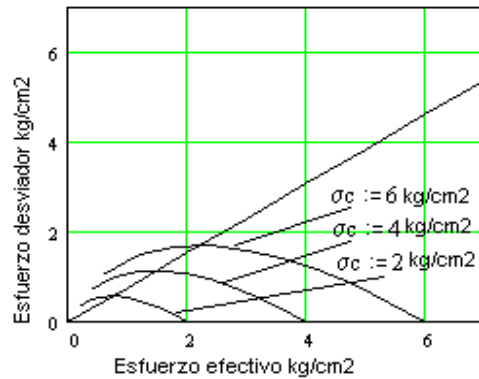


Fig. 13.- Trayectoria estimada analiticamente.

Ensayos no drenados

A partir de los datos correspondientes a la arcilla Weald, y con la aplicación de las ecuaciones 74, 75 y 76, se obtiene la Fig. 12.

También la evaluación de la ecuación 71, genera las trayectorias mostradas en la Fig. 13, observándose que las trayectorias tienen similitud con las mostradas en la Fig. 12, con diferencia en los valores del desviador de esfuerzos.

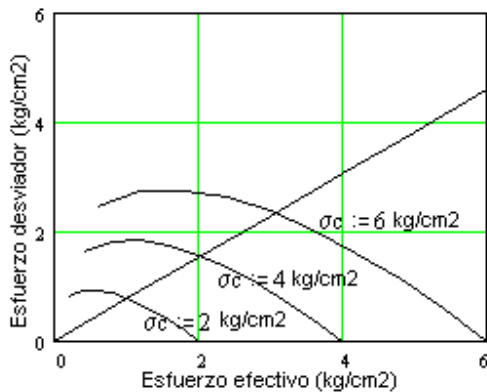


Fig. 12.- Trayectoria de esfuerzos obtenida analiticamente.

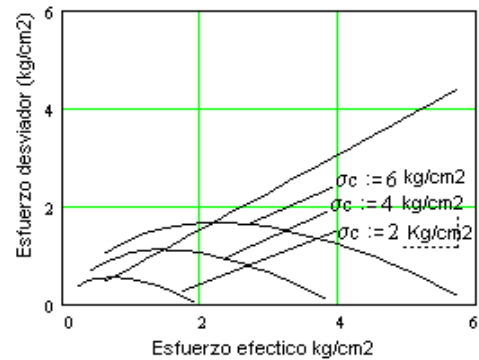


Fig. 14.- Trayectoria estimada de esfuerzos efectivos no drenada.

En la Fig. 15, se muestran las distorsiones cortantes estimadas en los ensayos no drenados, a partir de la ecuación 68 ó la 69, donde se aprecian cambios bruscos en los valores de la distorsión.

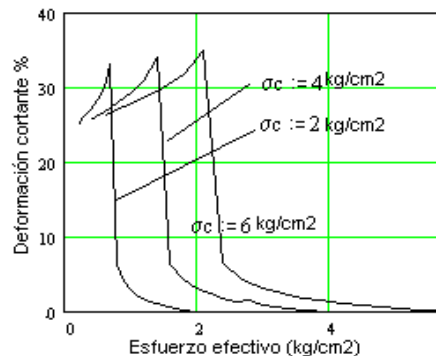


Fig. 15.- Relación entre la deformación cortante y el esfuerzo efectivo.

En este artículo, se quiso presentar la solución de la ecuación 70, aplicando el método predictor-corrector de Euler, cuyos resultados se muestran en la Fig. 14. Las trayectorias de esfuerzos en este caso, prácticamente son las mismas que las conseguidas a partir de la ecuación 71 (Fig. 13), con la cual cada lector tendrá su conclusión respecto a la Fig. 12. Sin embargo, aquí justificaremos el resultado de la Fig. 12, indicando que una condición de borde hecha en la envolvente de resistencia aparentemente no aporta una solución correcta.

Conclusiones

En condiciones drenadas se han presentado dos metodologías para la obtención de las trayectorias de esfuerzos, donde en ambas se ha aplicado la definición de potencial plástico y la ecuación de energía. Sin embargo, la primera metodología cuya solución está dada por las ecuaciones (54), (55), (56) y que son producto de un proceso de integración, obliga a que esta trayectoria alcance la envolvente de resistencia definida por los esfuerzos desviadores máximos. Los resultados mostrados en la Fig. 8, aparentemente es lo que esperamos en laboratorio, en el campo y teóricamente. Respecto a este punto, debemos recordar que esta primera solución tiene un error implícito, debido a que la deformación volumétrica tiende a anularse a lo largo de la trayectoria, cuando se hace el planteamiento matemático.

La segunda metodología, corresponde a la solución de las ecuaciones (63), (65), (66) representadas en las Fig. 9, Fig. 10 y Fig. 11. Los resultados obtenidos por esta metodología no nos causan tanto optimismo, pero si se corresponden con un planteamiento matemático más transparente, lo cual pudiera tener alguna relevancia. Se interpreta entonces, que la distorsión cortante que se produce durante la etapa de corte, limita la envolvente de resistencia para la solución de problemas geotécnicos. En este sentido, es posible definir una serie de envolventes, correspondientes a determinadas distorsiones cortantes, lo cual ayudaría a comprender, que el uso de un factor de seguridad FS, puede no ser suficiente en los análisis de problemas geotécnicos. Tomando en cuenta estos resultados, nos preguntamos: ¿Es válida totalmente la ecuación de energía propuesta por Roscoe et al? ¿La estimación de la distorsión cortante, definida a través del potencial plástico, merece algún tipo de corrección? ¿Sería lo suficientemente lógico emplear un criterio de resistencia de parámetros movilizados, definidos a través de la deformación cortante?.

En cuanto a las trayectorias de esfuerzos no drenados, mostradas en las en las Fig. 12, Fig. 13 y Fig. 14, siguen una dirección y curvatura similar a la conseguida en el laboratorio, aunque con una variación de pendiente menor y donde además los esfuerzos estimados son producto de métodos distintos, tal como se indicó en su desarrollo. Se considera que los valores bajos estimados del desviador de esfuerzos en la falla, se debe a que los mismos están limitados por la distorsión cortante que se debe ir produciendo en la muestra de suelo, a medida que avanza el corte. La Fig. 15 indica, como la deformación cortante incrementa súbitamente, cuando la trayectoria de esfuerzos

se aproxima a la envolvente de máxima resistencia, y luego de intersectarla, la curva de deformación cortante disminuye un poco.

Reconocimiento

A Magaly Varona por su interés y constancia en el desarrollo y culminación de este trabajo.

Bibliografía

- Roscoe K. Mech, M. A. Schofield, A.N and Thurairajah A.(1963), "Yielding of Clays in States Wetter than Critical", *Geotechnique*, Vol. XIII, pp. 211-240.
- Akira, A. Masaki, N. And Toshihiro, N. (1994), "Soil – Water Couple Behaviour of Saturated Clay Near/ At Critical State", *Soils And Foundations*, Japanese Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 34, No 1, pp. 91-105.
- Gerald, C. (1991), "Análisis Numérico", Addison Wesley Publishing Company, pp. 284-292.
- Lambe, W. y Whitman, R. (1990) "Mecánica de Suelos", *Jonh Wiley & Sons, Inc.*, Capítulos 21 y 28.
- Henkel, D. J., (1960) "The Relationships Between the Strength, Pore – Water Pressure, and Volume-Change Characteristics of Saturated Clays", *Geotechnique*, Vol. IX, pp. 119 – 135