Estimados alumnos, sobre este material realizaremos una Evaluación Escrita, les avisaré su fecha próximamente así que a ir desarrollando el contenido en cuestión.

ÉXITO

Realice las siguientes demostraciones:

1) En R, demostrar que si $ab=0$, entonces $a=0 \ \ ó \ \ b=0$!

2) Si $a,b \ y \ c \in R$, y $a+b=a+c$, entonces $b=c$

3) Si $a+b=0$, entonces $b=-a$

4) Si $a \in R,\ a+b=a$, entonces $b=0$

5) Si $a \neq 0 \ \ y \ \ ab=ac$, entonces $b=c$

6) Si $ab \neq 0$, entonces $a \neq 0, b \neq 0, \ y \ \left(ab\right)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$

ÁNGULOS ENTRE PARALELAS

Al intersectar una paralela por una recta llamada transversal o secante, se forman los siguientes tipos de ángulo:

Ángulos correspondientes: Son los que están al mismo lado de las paralelas y al mismo lado de la transversal.

Ángulos alternos internos: Son los que están entre las paralelas a distinto lado de ellas y a distinto lado de la transversal.

Ángulos alternos externos: Son los que "fuera" de las paralelas a distinto lado de ellas y a distinto lado de la transversal.

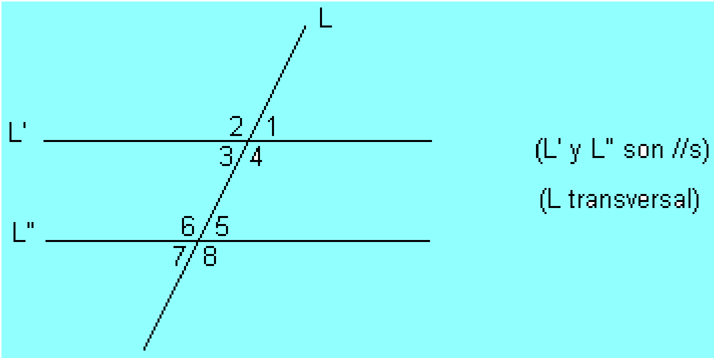
Las propiedades fundamentales de los ángulos entre paralelas son:

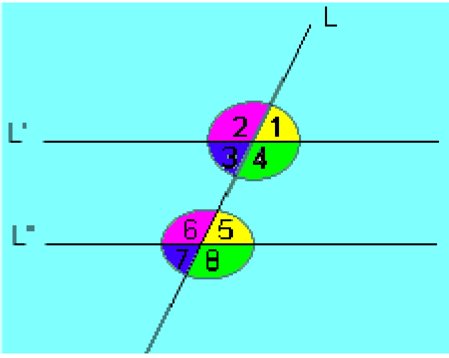
1. Los ángulos correspondientes son iguales entre sí.

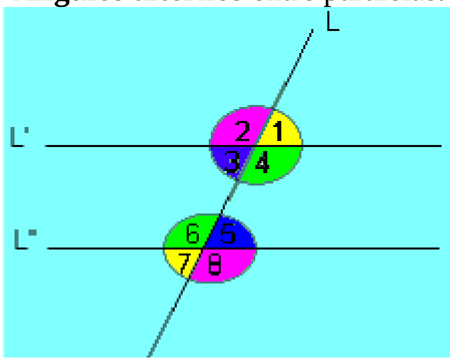
2. Los ángulos alternos internos son iguales entre sí.

3. Los ángulos alternos externos son iguales entre sí.

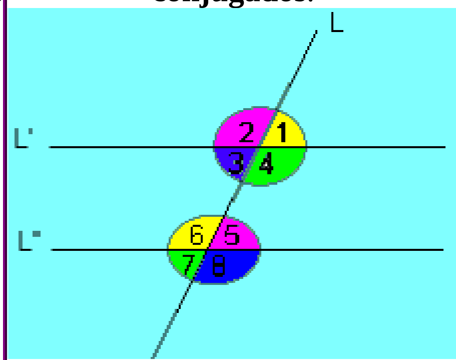
Ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una transversal.

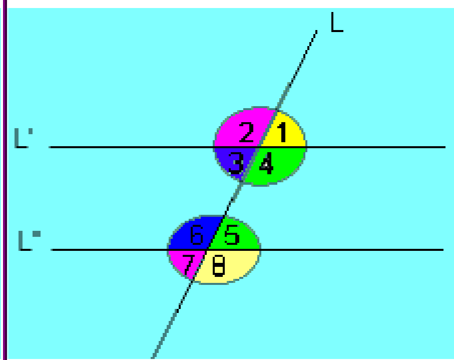


<table>
<tr><td colspan="3">Tipos de ángulos formados</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ángulos correspondientes entre paralelas.


1 = 5
2 = 6
3 = 7
4 = 8</td><td>Ángulos alternos entre paralelas.


1 = 7
2 = 8
3 = 5
4 = 6</td></tr>
<tr><td>Son suplementarios

(suman 180°)</td><td>Ángulos contrarios o conjugados.


1 ^ 6
2 ^ 5
3 ^ 8
4 ^ 7</td><td>Ángulos colaterales.


1 ^ 8
2 ^ 7
3 ^ 6
4 ^ 5</td></tr>
</table>

Realice las siguientes demostraciones:

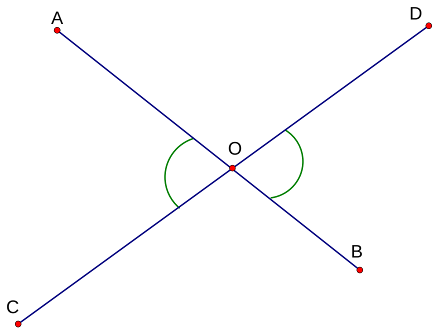
1. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.
2. Si dos ángulos alternos internos son congruentes entonces los otros dos ángulos alternos internos también lo son.
3. Los ángulos internos a un mismo lado de la transversal de rectas paralelas, son suplementarios. Los ángulos externos a un mismo lado de la transversal de rectas paralelas, son suplementarios.
4. Toda transversal forma con dos paralelas ángulos alternos externos congruentes.
5. Toda transversal forma con dos paralelas ángulos alternos internos congruentes
6. La suma de los ángulos interiores de un triángulo, es igual a dos rectos (180º).
7. La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, es igual a 90º.
8. En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos.
9. En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente.
10. La suma de los ángulos exteriores de cualquier triángulo vale cuatro ángulos rectos (360º).

SOLUCIONES

1) Los ángulos opuestos por el vértice son iguales

Demostración:

Sea $\measuredangle AOC$ y $\measuredangle DOB$ ángulos opuestos por el vértice según la siguiente figura, Demostraremos que $\measuredangle AOC \cong \measuredangle DOB$.

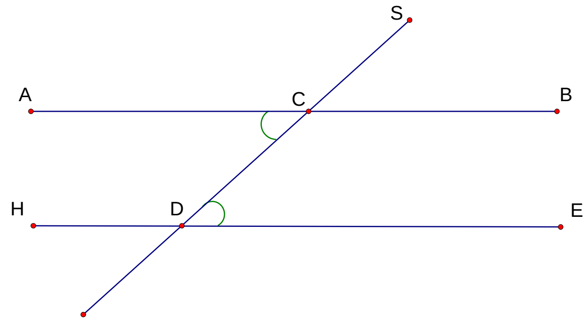


$\measuredangle AOC + \measuredangle AOD = 180^{o}$ por ser suplementarios $\measuredangle DOB + \measuredangle AOD = 180^{o}$ por ser suplementarios, igualando ambas ecuaciones y cancelando de ambos lados de la ecuación $\measuredangle AOD$ se sigue que $\measuredangle AOC \cong \measuredangle DOB$.

2) Si dos ángulos alternos internos son congruentes entonces los otros dos ángulos alternos internos también lo son

Demostración:

Sean las rectas $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HE}$ cortadas por la transversal S.



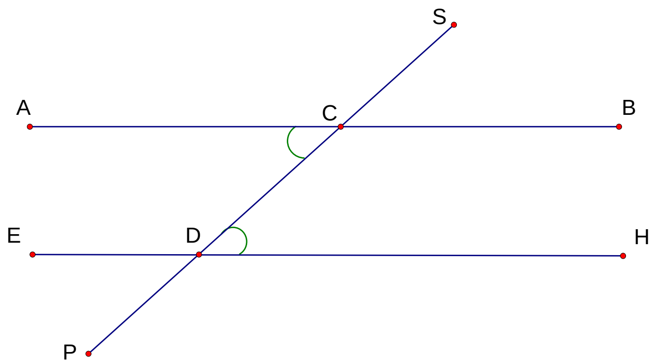
Demostraremos que si $\measuredangle ACD \cong \measuredangle CDE$ entonces $\measuredangle HDC \cong \measuredangle DCB$.

Sabemos que $\measuredangle ACD + \measuredangle DCB = 180^{o}$ por ser suplementarios del igual manera $\measuredangle HDC + \measuredangle CDE = 180^{o}$ por lo que $\measuredangle ACD + \measuredangle DCB = \measuredangle HDC + \measuredangle CDE$. Como $\measuredangle ACD \cong \measuredangle CDE$ podemos cancelarlos en la ecuación anterior y por lo tanto $\measuredangle HDC \cong \measuredangle DCB$.

3) Los ángulos internos a un mismo lado de la transversal de rectas paralelas, son suplementarios. Los ángulos externos a un mismo lado de la transversal de rectas paralelas, son suplementarios.

Demostración:

Sean las rectas $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HE}$ cortadas por la transversal SP como lo muestra la siguiente figura los ángulos $\measuredangle ACD \cong \measuredangle HDC$ son internos a un mismo lado de la transversal y mostraremos que son suplementarios; la demostración es exactamente igual para la otra pareja de ángulos internos a un mismo lado de la transversal $\measuredangle BCD \cong \measuredangle CDE$.



Los ángulos $\measuredangle ACD + \measuredangle ACS = 180^{\circ}$ por ser suplementarios; lo mismo sucede con $\measuredangle HDC + \measuredangle HDP = 180^{\circ}$. De manera que $\measuredangle ACD + \measuredangle ACS + \measuredangle HDC + \measuredangle HDP = 360^{\circ}$ pero sabemos que $\measuredangle ACD \cong \measuredangle HDP$ y $\measuredangle ACS \cong \measuredangle HDC$ por ser correspondientes, por lo tanto

$$2\measuredangle ACD + 2\measuredangle HDC = 360^{\circ}$$

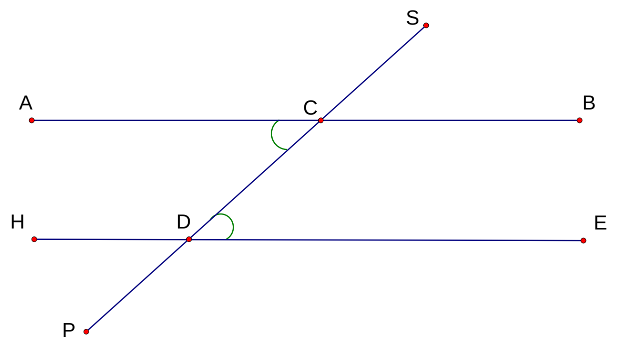
Esto significa que $\measuredangle ACD + \measuredangle HDC = \frac{360^{\circ}}{2}$, es decir, $\measuredangle ACD + \measuredangle HDC = 180^{\circ}$.

Por lo tanto los ángulos son suplementarios.

4) Toda transversal forma con dos paralelas ángulos alternos externos congruentes.

Demostración:

Sean las rectas $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HE}$ cortadas por la transversal SP como lo muestra la siguiente figura



Los ángulos $\measuredangle \mathrm{SCB}$ y $\measuredangle \mathrm{HDP}$ y $\measuredangle \mathrm{ACS}$ y $\measuredangle \mathrm{PDE}$ son alternos externos y probaremos que $\measuredangle \mathrm{SCB} \cong \measuredangle \mathrm{HDP}$ y $\measuredangle \mathrm{ACS} \cong \measuredangle E\mathrm{DP}$.

El $\measuredangle \mathrm{ACS} \cong \measuredangle BCD$ por ser opuestos por el vértice, $\measuredangle BCD \cong \measuredangle EDP$ por ser ángulos correspondientes, por lo tanto $\measuredangle \mathrm{ACS} \cong \measuredangle BCD \cong \measuredangle EDP$ se sigue entonces que

$\measuredangle \mathrm{ACS} \cong \measuredangle EDP$.

Igualmente, $\measuredangle B\mathrm{CS} \cong \measuredangle ACD$ por ser opuestos por el vértice, $\measuredangle ACD \cong \measuredangle HDP$ por ser ángulos correspondientes, por lo tanto, $\measuredangle B\mathrm{CS} \cong \measuredangle ACD \cong \measuredangle HDP$ se sigue, entonces por transitividad que

$\measuredangle B\mathrm{CS} \cong \measuredangle HDP$.

5) Toda transversal forma con dos paralelas ángulos alternos internos congruentes.

Demostración: (realizar el grafico)

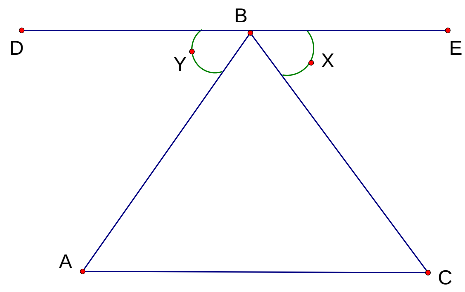
Sean las rectas $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HE}$ cortadas por la transversal SP .

Los ángulos $\measuredangle BCD$ y $\measuredangle HDC$ y $\measuredangle \mathrm{ACD}$ y $\measuredangle C\mathrm{DE}$ son alternos internos y probaremos que $\measuredangle BCD \cong \measuredangle HDC$ y $\measuredangle \mathrm{ACD} \cong \measuredangle C\mathrm{DE}$. El $\measuredangle ACS \cong \measuredangle BCD$ por ser opuestos por el vértice, $\measuredangle ACS \cong \measuredangle HDC$ por ser ángulos correspondientes, por lo tanto, $\measuredangle BCD \cong \measuredangle ACS \cong \measuredangle HDC$ se sigue entonces que $\measuredangle BCD \cong \measuredangle HDC$.

De la misma manera el análisis para el otro par de ángulos.

6) La suma de los ángulos interiores de un triángulo, es igual a dos rectos(180º).

Demostración:



Sean $\measuredangle A, \measuredangle B \ y \ \measuredangle C$ los ángulos interiores del triángulo $\triangle ABC$ como lo muestra la siguiente figura.

probaremos que $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

Por el vértice B tracemos una recta $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ formando el ángulo $\measuredangle X$ y el ángulo

$\measuredangle Y$. Tenemos que $\measuredangle X + \measuredangle Y + \measuredangle B = 180°$ (I) por formar un ángulo llano.

Por otra parte $\measuredangle X$, $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$. por ser parejas de ángulos alternos internos.

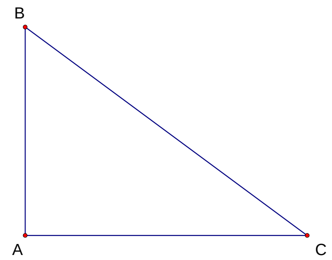
De manera que sustituyendo lo anterior en la identidad (I) tenemos

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$

Por tanto queda demostrada la proposición.

7) La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, es igual a 90º.

Demostración:



Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo, donde $\measuredangle A$ el ángulo recto, como se muestra en la figura

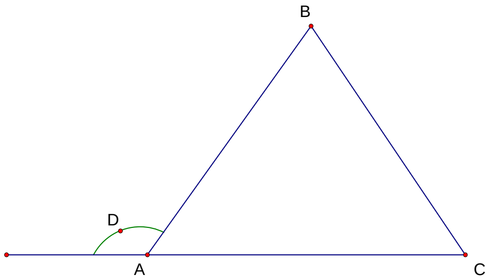
Demostraremos que $\measuredangle B + \measuredangle C = 90°$

Por el teorema anterior sabemos que $\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C=180°$ y como $\measuredangle A=90°$ tenemos que $90°+\measuredangle B+\measuredangle C=180°$ por lo que $\measuredangle B+\measuredangle C=90°$

8) En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es la suma de las medidas de los ángulos internos no contiguos.

Demostración:

Sea el $\triangle ABC$ cuyos ángulos interiores son $\measuredangle A,\ \measuredangle B\ y\ \ \measuredangle C$. Sea $\measuredangle D$ un ángulo exterior como lo muestra la figura.



Probaremos que $\measuredangle D=\measuredangle B+\measuredangle C$

Observemos que $\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C=180°$ por ser ángulos interiores de un triángulo. Y $\measuredangle D+\measuredangle A=180°$ por ser ángulos suplementarios. De las dos identidades obtenidas obtenemos que $\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C=\measuredangle D+\measuredangle A$ cancelando $\measuredangle A$ de ambos lados de la ecuación tenemos $\measuredangle B+\measuredangle C=\measuredangle D$. Queda demostrada la proposición.

9) En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente.

Demostración:

Sea el $\triangle ABC$ cuyos ángulos interiores son $\measuredangle A,\ \measuredangle B\ y\ \ \measuredangle C$. Sea $\measuredangle D$ un ángulo exterior como lo muestra la figura. (HACER LA FIGURA) . Probaremos que $\measuredangle D>\measuredangle B$ y $\measuredangle D>\measuredangle C$.

Por el problema anterior tenemos $\measuredangle B+\measuredangle C=\measuredangle D$ de este modo $\measuredangle D>\measuredangle B$ y $\measuredangle D>\measuredangle C$.

10) La suma de los ángulos exteriores de cualquier triángulo vale cuatro ángulos rectos (360º).

Demostración:

Sea el $\triangle ABC$ cuyos ángulos interiores son $\measuredangle A, \measuredangle B\ y\ \ \measuredangle C$; sea $\measuredangle X, \measuredangle Y\ y\ \ \measuredangle Z$ ángulos exteriores del triángulo como lo muestra la figura

probaremos que $\measuredangle X + \measuredangle Y + \measuredangle Z = 360°$

$\measuredangle A + \measuredangle X = 180°$; $\measuredangle B + \measuredangle Y = 180°$ y $\measuredangle C + \measuredangle Z = 180°$ por ser ángulos suplementarios. Sumando miembro a miembro las tres igualdades tenemos:

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C + \measuredangle X + \measuredangle Y + \measuredangle Z = 540° \quad \text{(I)}$$

Por ser ángulos interiores de un triángulo se tienen:

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180° \quad \text{(II)}$$

Sustituyendo (II) en (I) tenemos,

$180° + \measuredangle X + \measuredangle Y + \measuredangle Z = 540°$

donde, se sigue que

$$\measuredangle X + \measuredangle Y + \measuredangle Z = 540° - 180°.$$

Por lo tanto $\measuredangle X + \measuredangle Y + \measuredangle Z = 360°$