Lógica Proposicional

INTRODUCCIÓN

El humano se comunica con sus semejantes a través de un lenguaje determinado (oral, simbólico, escrito, etc.) construido por frases y oraciones. Estas pueden tener diferentes significados pero siempre tienen un valor de verdad. Lo importante en este curso es que a partir de los enunciados y de acuerdo a su significado es posible establecer una proposición y a partir de un conjunto de éstas podemos llegar a una conclusión o inferencia, siendo la lógica la ciencia encargada del estudio de éstas.

La lógica proposicional que estudiaremos tiene una importancia fundamental dada su aplicación en los llamados "circuitos lógicos" de uso en la electrónica y la informática.

Proposición
La proposición es el significado de una idea, enunciado, conjunto de palabras o letras a las que se les puede asignar uno y sólo uno de los valores de verdad, que pueden ser: VERDADERO (V) o FALSO (F) [También se pueden utilizar números V=1, F=0]

En concreto una proposición es toda oración declarativa. Por lo general, a las proposiciones se las representa por las letras del alfabeto desde la letra p, es decir, p, q, r, s, t, ... etc. Así, por ejemplo, podemos citar las siguientes proposiciones y su valor de verdad:
p : 15 + 5 = 21 (F)
q: Táchira es un estado venezolano. (V)
r: El número 15 es divisible por 3. (V)
s: El perro es un ave. (F)

Expresiones No Proposicionales
Son aquellos enunciados a los que no se les puede asignar un valor de verdad. Entre ellos tenemos a los exclamativos, interrogativos o imperativos.
Así tenemos, por ejemplo:
– ¿Cuál es tu nombre?
– Prohibido fumar
– Borra la pared.

Enunciados Abiertos
Si en la proposición: "cinco es mayor que cuatro" (en símbolos: 5 > 4) reemplazamos al número 5 por la letra x, se obtiene la expresión "*x* es mayor que cuatro" (*x* > 4), y si convenimos que *x* no represente necesariamente al número 5, sino a un número cualquiera, entonces al enunciado x > 4 se le denomina **enunciado abierto**.

Clasificación de las Proposiciones
Aquellas proposiciones que constan o se les puede representar por una sola variable, se llaman proposiciones **simples o atómicas**. Por ejemplo, sea la proposición "p: 3 + 6 = 9" es una proposición simple o atómica.

Cuando una proposición consta de dos o más enunciados simples, se le llama proposición **compuesta o molecular**. Así, por ejemplo:

$\underbrace{\text{Bolívar era Venezolano}}_{p}$ y $\underbrace{\text{era soldado}}_{q}$ encontramos dos enunciados. El primero (p) nos afirma que Bolívar era Venezolano y el segundo (q) que Bolívar era soldado.

Notación y Conectivos Lógicos
A partir de proposiciones simples es posible generar otras, simples o compuestas. Es decir que se puede operar con proposiciones, y para ello se utilizan ciertos símbolos llamados conectivos lógicos. A continuación vemos una concreta definición de cada uno:

Símbolo	**Operación asociada**	**Significado**
$\sim$	Negación	no p; no es cierto que p
$\wedge$	Conjunción o producto lógico	p y q
$\vee$	Disyunción o suma lógica	p o q (en sentido incluyente)
$\rightarrow$	Implicación	p implica q; si p entonces q
$\leftrightarrow$	Doble implicación	p si y sólo si q
$\underline{\vee}$	Diferencia simétrica	O p o q (en sentido excluyente)

Operaciones Proposicionales
Definiremos las operaciones entre proposiciones en el sentido siguiente: dadas dos o más proposiciones, de las que se conoce los valores veritativos, se trata de caracterizar la proposición resultante a través de su valor de verdad. A tal efecto, estudiaremos a continuación el uso y significado de los diferentes conectivos lógicos mencionados arriba:

Negación
Dada una proposición p, se denomina la negación de p a otra proposición denotada por ~ p (se lee "no p") que le asigna el valor veritativo opuesto al de p. Por ejemplo:
p: Álvaro estudia Química
~ p: Álvaro no estudia Química
Construyendo su tabla de verdad:

P	$\sim p$
V	F
F	V

P	$\sim p$
1	0
0	1

Observamos aquí que al valor V de p, la negación le hace corresponder el valor F, y viceversa.

Se trata de una operación unitaria, pues a partir de una proposición se obtiene otra, que es su negación.
Ejemplo: La negación de " p: todos los alumnos estudian Química " es
~ p: no todos los alumnos estudian Química;   o bien:
~ p: no es cierto que todos los alumnos estudian Química
~ p: hay alumnos que no estudian Química

Conjunción
Dadas dos proposiciones p y q, se denomina conjunción de estas proposiciones a la proposición p $\wedge$ q (se lee "p y q"), cuya tabla de verdad es:

p	q	p $\wedge$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tabla que define esta operación, establece que la conjunción es verdadera sólo si lo son las dos proposiciones componentes. En todo otro caso, es falsa.

Ejemplo: Sea la declaración: i) $\underbrace{\text{5 es un número impar}}_{p} \ \underset{\wedge}{\text{y}} \ \underbrace{\text{6 es un número par}}_{q}$

Vemos que está compuesta de dos proposiciones a las que llamaremos p y q, que son
p: 5 es un número impar
q: 6 es un número par
Por ser ambas verdaderas, la conjunción de ellas (que no es sino la declaración i) es verdadera.
Ahora bien, sea la declaración
ii) Hoy es el día 3 de noviembre y mañana es el día de 5 de noviembre
Esta conjunción es falsa, ya que no pueden ser simultáneamente verdaderas ambas proposiciones.

Disyunción
Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción de las proposiciones p y q es la proposición p $\vee$q cuya tabla de valor de verdad es:

p	q	p $\vee$ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción o es utilizada en sentido excluyente, ya que la verdad de la disyunción se da en el caso de que al menos una de las proposiciones sea verdadera. En el lenguaje ordinario la palabra o es utilizada en sentido incluyente o excluyente indistintamente. Para agotar toda posibilidad de ambigüedades, en matemática se utiliza la disyunción definida por la tabla precedente, que nos muestra que la disyunción sólo es falsa cuando ambas proposiciones son falsas.

Ejemplo: Sea i) Tiro las cosas viejas o que no me sirven

El sentido de la disyunción compuesta por p y q (p: tiro las cosas viejas, q: tiro las cosas que no me sirven) es incluyente, pues si tiro algo viejo, y que además no me sirve, la disyunción es V.

Implicación o Condicional
Implicación de las proposiciones p y q es la proposición p $\rightarrow$q (si p entonces q) cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	p $\rightarrow$q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposición p se llama antecedente, y la proposición q se llama consecuente de la implicación o condicional. La tabla nos muestra que la implicación sólo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Ejemplo: Supongamos la implicación

$\underbrace{\text{Si apruebo Introducción}}_{\text{p (antecedente)}}$, entonces $\underbrace{\text{pronto me graduaré de Licenciado}}_{\text{q (consecuente)}}$

$\rightarrow$

La implicación está compuesta de las proposiciones
p: apruebo Introducción
q: pronto me graduaré

Nos interesa conocer la verdad o falsedad de la implicación, en relación a la verdad o falsedad de las proposiciones p y q. El enunciado puede pensarse como un compromiso, condicionado por p, y podemos asociar su verdad al cumplimiento del compromiso. Es evidente que si p es F, es decir si no apruebo Introducción quedo liberado del compromiso y me gradué pronto o no la implicación es verdadera.

Si p es verdadera, es decir si apruebo Introducción, y no me graduó pronto, el compromiso no se cumple y la proposición es falsa. Si p y q son verdaderas, entonces la proposición es verdadera pues el compromiso se cumple.

Ejemplo: $2 = -2 \rightarrow 2^2 = (-2)^2$; proposición F

La proposición resulta ser falsa por ser el antecedente (2 = –2) falso, aunque el consecuente sea cierto.

Doble Implicación o Bicondicional

Doble implicación de las proposiciones p y q es la proposición $p \leftrightarrow q$ (se lee "p si y sólo si q") cuya tabla de valores de verdad es

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La doble implicación o bicondicional sólo es verdadera si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.
La doble implicación puede definirse como la conjunción de una implicación y su recíproca. De este modo, la tabla de valores de verdad de $p \leftrightarrow q$ puede obtenerse mediante la tabla de $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, como vemos:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Ejemplo: Sea i) $a = b$ si y sólo si $a^2 = b^2$
El enunciado está compuesto por las proposiciones:
p: $a = b$
q: $a^2 = b^2$
Esta doble implicación es falsa si p es F y q es V. En los demás casos es V.

Diferencia Simétrica

Diferencia simétrica o disyunción en sentido excluyente de las proposiciones p y q es la proposición $p \veebar q$ (se lee "p o q en sentido excluyente") cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La verdad de $p \veebar q$ está caracterizada por la verdad de una y sólo una de las proposiciones componentes.

Ejemplo: o vamos a la playa o vamos a la montaña
Queda claro que sólo podremos ir a uno de los dos lugares, y sólo a uno. Es decir que el enunciado es verdadero sólo si vamos a una de las dos ciudades. En caso de ir a ambas, o de no ir a ninguna, el enunciado es Falso.

Condición Necesaria y Suficiente
Consideremos la tabla de valores de verdad de la implicación

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Hay tres casos en los que $p \to q$ es V, y entre ellos hay uno en que p es V, en el cual resulta q verdadera. Es evidente que hacemos referencia al primer renglón de la tabla y tenemos que si $p \to q$ es V y p es V, entonces q es V. Se dice entonces que el antecedente p es condición suficiente para el consecuente q.
En cambio, si p es F, nada podemos decir de q puesto que puede ser V o F. Por otra parte, cuando $p \to q$ es V, si q es V, entonces p puede ser V o F; mas para que p sea V se necesita que q lo sea. Se dice entonces que q es condición necesaria para p.

Estas condiciones suelen expresarse del siguiente modo:
q si p (condición suficiente)
p sólo si q (condición necesaria)

Ejemplo: La siguiente implicación es V: "Si T es equilátero, **entonces** T es isósceles"
En este caso:
p: T es equilátero
q: T es isósceles
y p es condición suficiente para q, es decir, que un triángulo sea equilátero es suficiente para asegurar que sea isósceles. Por otra parte, T es equilátero sólo si es isósceles; es decir que un triángulo sea isósceles es necesario para que sea equilátero.

Sea ahora la doble implicación $p \leftrightarrow q$, es decir $(p \to q) \wedge (q \to p)$. Si $p \leftrightarrow q$ es V, entonces $p \to q$ es V y $q \to p$ es V. Se tiene, atendiendo a la primera, que p es condición suficiente para q y, teniendo en cuenta la segunda implicación, ocurre que p es condición necesaria para q.
Es decir, si $p \leftrightarrow q$ es V, entonces el antecedente p es condición necesaria y suficiente para el consecuente q. Análogamente, en el caso de la doble implicación verdadera, el consecuente q es también condición necesaria y suficiente para el antecedente p.

Proposiciones lógicamente equivalentes

Dos proposiciones p y q se llaman equivalentes si sus tablas de verdad son idénticas. De ser así se denota: $p \equiv q$

Ejemplo: Sea p: $p \rightarrow q$ y sea la proposición q: $\sim p \veebar q$, sus tablas de verdad resultan:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\sim p \veebar q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Como vemos, luego de realizar las tablas de valor veritativo encontramos que ambas proposiciones tienen el mismo resultado final. Con esto, decimos que ambas proposiciones son lógicamente equivalentes, y en este caso particular lo simbolizamos:
$(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \veebar q)$

Tautología, contradicción y contingencia

Al conjunto de proposiciones, conectivos lógicos y símbolos de agrupación lo denominamos **fórmula lógica**. Por ejemplo: $\sim\{ (p \veebar q) \rightarrow (s \veebar t) \}$

Si al evaluar una fórmula lógica, resulta que todos los valores de verdad resultantes son siempre V para cualquier combinación de sus valores veritativos, decimos que dicha fórmula es una *Tautología o Ley lógica.*

Ejemplo: Si analizamos la proposición t: $p \vee \sim p$ realizando su tabla de verdad:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Vemos que para cualquier combinación de las proposiciones p y su negación ~ p, la proposición t: $p \vee \sim p$ es siempre verdadera. Entonces, la proposición t es una tautología.

Ejemplo: Analicemos ahora la fórmula lógica $\{ (p \rightarrow q) \wedge p \} \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$\{ (p \rightarrow q) \wedge p \} \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

En este caso comprobamos también que independientemente de la combinación de valores de verdad de las proposiciones p y q, el resultado de la fórmula lógica es siempre V. Decimos, aquí también, que esta fórmula es una tautología o ley lógica.

Si al estudiar una fórmula lógica, a diferencia de los ejemplos anteriores resulta que para cualquier valor de verdad de las proposiciones intervinientes el resultado de dicha fórmula es siempre falso, decimos que dicha fórmula es una **Contradicción**.

Ejemplo: Analicemos la fórmula lógica $q \wedge \sim q$

q	$\sim q$	$q \wedge \sim q$
V	F	F
F	V	F

Encontramos que la fórmula es siempre falsa, es entonces una Contradicción.

Si una proposición no es una tautología ni una contradicción (es decir que contiene al menos un valor V y otro F) es una contingencia.

EJERCICIOS

1) Sean las proposiciones p: 2 es un número primo ; q: $\frac{1}{2}$ es un número racional
r: 4 es un número par. Traducir a lenguaje verbal cada una de las siguientes expresiones:
a) $p \wedge r$ b) $\sim p \vee q$ c) $\sim(\sim r)$ d) $\sim(\sim p \to q)$ e) $(p \wedge q) \to r$

2) Sean las proposiciones p: los intereses suben q: el dinero escasea
r: la inflación baja. Escribir simbólicamente cada una de las siguientes expresiones:
   a) Si el dinero escasea, entonces los intereses suben y la inflación baja
   b) El dinero escasea sólo si la inflación baja
   c) Que el dinero escasee es condición necesaria para que los intereses suban
   d) Una condición suficiente para que los intereses suban es que la inflación baje
   e) Para que la inflación no baje es suficiente que el dinero no escasee
   f) Una condición necesaria y suficiente para que los intereses no suban es que la inflación baje y el dinero escasee.

3) Construya las tablas de verdad de las proposiciones:
a) $p \wedge \sim q \leftrightarrow p$ b) $\left[p \to (q \vee \sim r)\right] \wedge \sim (p \leftrightarrow r)$ c) $(p \underline{\vee} q) \leftrightarrow \left[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)\right]$
d) $\sim p \wedge \left[\sim(\sim(q \to p))\right]$ e) $\left[p \to (q \to r)\right] \wedge (p \leftrightarrow q)$ f) $\sim\left[(p \wedge q) \to q\right]$

4) Halla los valores de verdad de las proposiciones si sabes que $p \to q$ es falsa
a) $\sim p \wedge q$ B) $q \to p$ c) $p \vee \sim p$ d) $\sim p \vee q$

5) Halla los valores de verdad de *p,q,r,s,t* para que la proposición $(p \wedge q) \wedge r \to (s \vee t)$ sea falsa

6).Construye una tabla de la verdad para cada una de las proposiciones siguientes:
a) $(p \vee \sim q) \to q$ b) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ c) $q \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
¿Cuáles de esas expresiones es una tautología?

7) Si el valor lógico de la proposición es falso VL$\left[(p \wedge q) \to r\right] = F$, hallar VL(*p*), VL(*q*) y VL(*r*).

8) A partir del esquema molecular $\sim\left[(\sim p \vee q) \vee (r \to q)\right] \wedge \left[(\sim p \vee q) \to (q \vee \sim p)\right]$ determinar el valor veritativo de *p,q, r* si el esquema se asume verdadero. ¿Qué pasaría si se asume como falso?

9) Si VL(*p*)=V, VL(q)=V y VL(*r*)=F, hallar el valor lógico de las siguientes formas proposicionales:
a) $(p \wedge \sim q) \vee r$ b) $(p \to q) \underline{\vee} (\sim q \to r)$ c) $(p \wedge q) \leftrightarrow \left[p \vee (q \wedge \sim r)\right]$
d) $(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow \left[(q \leftrightarrow p) \vee r\right]$

10) Si el valor lógico de $(m \wedge \sim r) \rightarrow [(m \vee \sim r) \leftrightarrow (\sim t \rightarrow r)]$ es falso, halle el valor lógico de las proposiciones *m,r, t.*

11) Simbolice la siguiente proposición " *Si el examen comenzó a las 7 am y Gabriela llegó a tiempo, entonces Pedro no llegó 15 minutos más temprano que Gabriela o no presentó el examen".*

12) Si la anterior proposición es falsa conteste lo siguiente:
a) ¿Llegó Gabriela a tiempo para el examen?
b) ¿A qué hora llegó Pedro?
c) ¿Presentó Pedro el examen?

13) Usando tabla de verdad demuestre que $p \vee (p \wedge q)$ es equivalente a *p.*

14) Determina el valor de verdad de la proposición compuesta:

a) $(p \rightarrow q) \vee (p \leftrightarrow q)$ **b)** $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow q$