LOS NUMEROS NATURALES

Es el conjunto esencial para construir los números reales, él nos permite el proceso del conteo, a partir de este se forman los demás conjuntos. Se denota con la letra **N** y está integrado por los siguientes elementos:

N = $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... \}$, tiene infinitos elementos, por tanto su cardinal es infinito.

Observe lo que sucede al aplicar las operaciones básicas con los elementos de este conjunto, con la adición:

- 2+3 = 5, $5 \in$ **N**; 10+20 = 30, $30 \in$ **N**. Cualquiera sean los números naturales que se operen con la suma, siempre nos dará un número natural.

Con la sustracción:

- $7 - 5 = 2,\ 2 \in$ **N**; $25 - 8 = 17,\ 17 \in$ **N**; pero $\underline{19 - 25 = -6,\ y - 6 \notin \mathbf{N}.}$

LOS NUMEROS ENTEROS

Resultan por la unión de los naturales, sus recíprocos♣ y el cero. Se denotan con la letra **Z,** nombre extraído de la palabra alemana Zhalen que significa entero, sus elementos son:

Z = $\{ ...,-5,-4,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,... \}$, es un conjunto que tiene elementos positivos y negativos, es infinito y de cardinal infinito.

Veamos qué sucede al aplicar las operaciones básicas con los elementos de este conjunto:

- 2+3 = 5, $5 \in$ **Z**; 10-20 = -10, $-10 \in$ **Z**. Es decir, cualquiera sea los números enteros que se operen con la adición o sustracción, siempre nos dará un número entero.
- 2×3 = 6, $6 \in$ **Z**; -5×7 = -35, $-35 \in$ **Z**. Es decir, siempre que se multipliquen dos números enteros nos da como resultado otro número entero.
- $\frac{4}{2} = 2,\quad 2 \in$ **Z**; $\frac{-10}{2} = -5,\quad -5 \in$ **Z** pero $\frac{9}{2} = 4{,}5 \notin$ **Z**.

♣ El recíproco de un número es el mismo número pero de signo contrario.

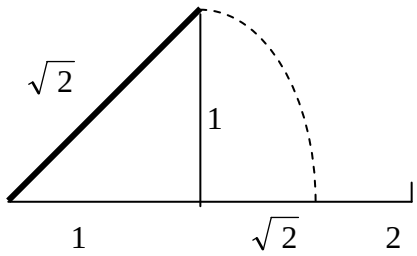
LOS NUMEROS RACIONALES

Se definen como aquellos números que se pueden expresar como el cociente (o razón) de dos números enteros. Este conjunto se denota con la letra **Q** y se describen por comprensión de la siguiente manera:

$$\mathbf{Q} = \left\{ x / \ x = \frac{p}{q} \quad \text{con} \ \ p, q \in Z \quad \text{y} \ \ q \neq 0 \right\}$$

También se puede definir a los números racionales como un número decimal periódico o finito.

Además, existen otros números que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros. Problema que surgió al tratar de encontrar el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tenían longitud igual a uno (1).



$\sqrt{2}$ no se puede copiar como razón de dos números enteros.

Al aplicar el teorema de Pitágoras: "*La suma de los cuadrados de las longitudes de los dos lados menores de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la longitud del lado mayor".*

$$c^2 = a^2 + b^2 \ \Rightarrow \ c^2 = 1^2 + 1^2 \ \Rightarrow c = \sqrt{2} \, ,$$

La irracionalidad consistía en no poder expresar tal número como una fracción o como razón de dos números enteros. Es decir: $\sqrt{2} \notin \mathrm{Q}$.

A estos números los llamaremos **números irracionales**, su conjunto será denotado con la letra **I**.

El término matemático irracional proviene de la palabra latina **irratio**, la cual tiene su origen en la palabra griega *alogos*, por ser un número no expresable como cociente de dos números enteros, cuyo significado contrasta con el lenguaje ordinario donde irracional significa algo ilógico o incomprensible.

Una de las características de esos Números Irracionales es que su representación en forma decimal es infinita y no es periódica.

Entre algunos de sus elementos encontramos:

$\pm\sqrt{2} = \pm 1{,}4142136...$ ♦

$\pm e = \pm 2{,}71828182\,45...$

$\pm\pi = \pm 3{,}14159263...$

Por lo anterior expuesto, se deduce que los números racionales no "agotan" la existencia de los números posibles, por cuanto el problema planteado por la escuela Pitagórica (y otros problemas surgidos posteriormente), no admiten solución en el Conjunto de los Números Racionales. De allí que nuevamente es obligante "ampliar" el campo numérico y dar paso al Conjunto de los Números Irracionales.

Es necesario destacar que al operar con los números irracionales, usamos a menudo números racionales como valores aproximados. De allí que cualquier expresión decimal infinita no periódica se puede "cortar" en alguna cifra, obteniéndose una aproximación racional de la misma.

Ejemplos:

- $\sqrt{2} = 1{,}4142136...$ se puede aproximar por : 1,4 ó 1,41 ó 1,414 etc...

Mientras más cifras decimales se consideren, más cercano se estará del número irracional dado.

- $\pi = 3{,}14159263...$ se puede aproximar a la fracción $\frac{22}{7}$ ya que es igual a $3{,}142857142857...$

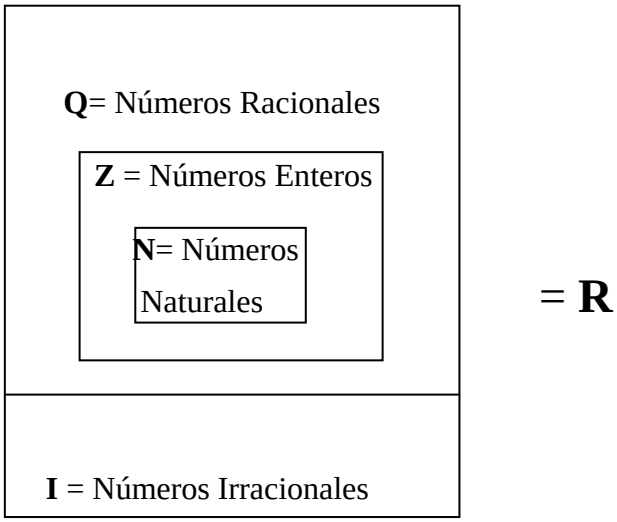
La diferencia esencial entre los números racionales y los irracionales se advierte en su representación decimal. Cuando un número irracional se presenta por medio de decimales, los decimales continúan indefinidamente, sin presentar un patrón repetitivo ($\pi = 3{,}14159263...$). En cambio, los números racionales expresados en forma decimal son finitos o presentan un patrón llamado período ($\frac{1}{6} = 0{,}166666... \cong 0{,}1\widehat{6}$).

♦ La raíz cuadrada de un número primo siempre es un número irracional.
Número primo es aquel que es divisible solamente por el mismo y por la unidad.

LOS NUMEROS REALES

Este conjunto resulta al unir al conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Se denota con la letra **R**.

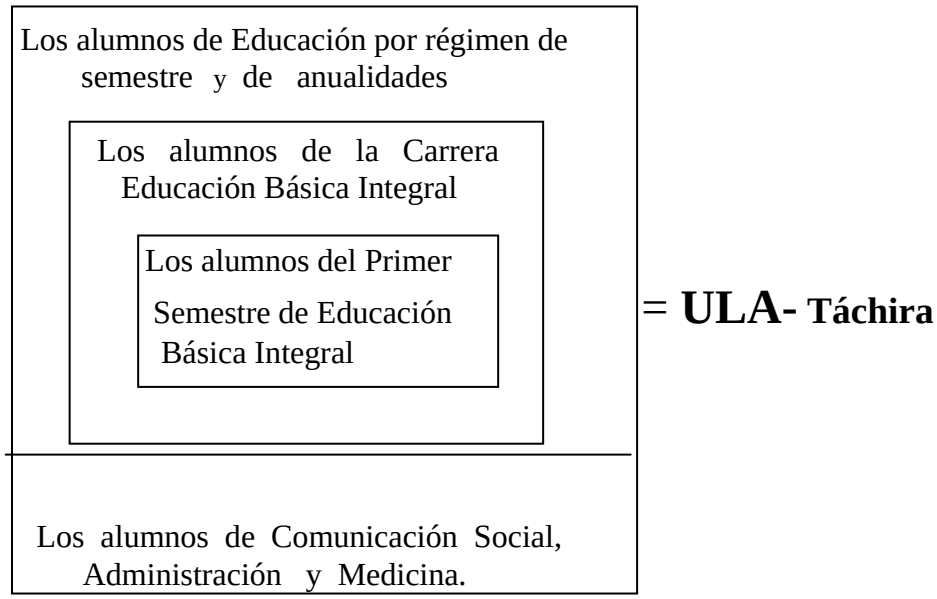
El siguiente cuadro nos hace una excelente referencia del comportamiento de los conjuntos de números antes descritos:



De este cuadro podemos señalar lo siguiente:

- Todo número natural es un número entero.
- Todo número entero es un número racional.
- Todo número entero es un número real.
- Todo número racional es un número real.
- Todo número irracional es un número real.
- No todo número entero es un número natural.
- Un número real es irracional o es racional.
- No todo racional es entero.
- Todo número irracional no es entero.
- Ningún número natural es irracional.
- Ningún número irracional es racional a la vez.

Para reforzar este aprendizaje, haremos un símil del cuadro con otro ejemplo más concreto.



- Como ejercicio, establezca todas las posibles relaciones entre estos conjuntos.

Analizando los cuadros anteriores podemos concluir que todo número natural es subconjunto propio de los números enteros ($\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$), todo número entero es subconjunto propio de los números racionales ($\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$) y todo número racional es subconjunto propio de los números reales ($\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$).

Además, los números racionales unidos con los números irracionales dan los números reales ($\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$) y la intersección del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales es igual al conjunto vacío ($\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$), esto quiere decir *que un número real o es un número racional o irracional, pero nunca puede ser las dos cosas a la vez.*

AXIOMAS DE LOS NUMEROS REALES

El sistema de los números reales es un conjunto no vacío (**R**) dotado de las operaciones llamadas adición y multiplicación denotados por (+) y (**.**), que satisface los siguientes axiomas que a continuación se especifican:

Sean tres números cualesquiera que pertenecen a los números reales: $a, b, c \in \mathbf{R}$

Para la adición

1. Propiedad conmutativa

- ✓ $a+b=b+a$, ejemplo 2+1= 1+2 $\Rightarrow$ 3=3.

2. Propiedad asociativa
   - ✓ $(a+b)+c=a+(b+c)$, ejemplo (1+2)+3 = 1+(2+3) $\Rightarrow$ 3+3 = 1+5 $\Rightarrow$ 6 = 6.

3. Elemento neutro♣

   Existe un único 0, para cada *a*,

   (En lenguaje matemático)

   $\exists 0\,(\text{ único }) \in \mathrm{R}$, $\forall a \in \mathrm{R}$, de modo que:

   - ✓ $a+0=0+a=a$

   Ejemplo, 4+ 0 = 0+ 4 = 4

4. Elemento inverso o inverso aditivo

   Para cada *a*, existe un único (-*a*),

   (En lenguaje matemático)

   $\forall a \in \mathrm{R}, \exists -a\ (\text{opuesto}) \in \mathrm{R}$, de modo que :

   - ✓ $a+(-a)=-a+a=0$

   Ejemplo, 4+(-4) = - 4+ 4 = 0

<u>Para la multiplicación</u>

5. Propiedad conmutativa
   - ✓ $a \cdot b = b \cdot a$, ejemplo 2.1= 1.2 $\Rightarrow$ 2=2.

6. Propiedad asociativa
   - ✓ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, ejemplo (1.2).3 = 1.(2.3) $\Rightarrow$ 2.3 = 1.6 $\Rightarrow$ 6 = 6.

7. Elemento neutro

   Existe un único 1, para cada *a*,

   (En lenguaje matemático)

   $\exists 1\,(\text{ único }) \in \mathrm{R}$, $\forall a \in \mathrm{R}$, de modo que:

   - ✓ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

   Ejemplo, 4.1 = 1.4 = 4

8. Elemento inverso o inverso multiplicativo

   Para cada *a*, existe un único $\left(a^{-1}\right)$,

   (En lenguaje matemático)

♣ Para utilizar el lenguaje matemático debemos señalar que los símbolos $\forall$, $\exists$ son cuantificadores, el primero significa " ***para todo elemento"*** y el segundo ***"existe un elemento "***

$\forall a \in \mathrm{R}$, excepto el cero, $\exists\, a^{-1}$ (inverso) $\in \mathrm{R}$, de modo que :

- ✓ $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$, con $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

Ejemplo, $4.(4^{-1}) = 4^{-1}.4 = \dfrac{1}{4}\cdot 4 = 1$

Única propiedad que relaciona la adición con la multiplicación,

9. Propiedad distributiva,
   - ✓ $a.(b+c) = a.b + a.c$

Ejemplo:

$2(3+5) = 2\times 3 + 2\times 5 \Rightarrow 2\,(8) = 6+10 \Rightarrow 16 = 16$

Axiomas de orden:

10. Para cada $a \in$ **R**, entonces puede ocurrir solamente uno de los siguientes casos:

$a > 0$; $a < 0$; $a = 0$. (Principio de tricotomía)

11. Para cada a y b en **R**, con $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$ y $a.b > 0$.

Ejemplo,

Sea $2 > 0$ y $5 > 0$, entonces $2 + 5 = 7$ y $7 > 0$, además $2\times 5 = 10$ y $10 > 0$.

12. Para cada a y b en **R**, con $a > b$, si y solo si $a - b > 0$.

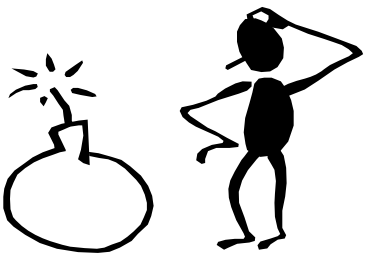
Ejemplo,

Si $5 > 2$, entonces $5 - 2 = 3$ y $3 > 0$.

Axioma de completitud

13. Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{R}$ y A está acotado superiormente, entonces A tiene supremo.

Ejemplo: El intervalo A = $(1, 3)$ está acotado superiormente por el tres, tiene supremo y es el número tres.



Este es uno de los axiomas más importante en el ***cálculo moderno****, este axioma del supremo le da un carácter analítico al cuerpo de los números reales; es la materia prima en el análisis matemático, es la esencia en la demostración de muchos otros teoremas más complejos.*

Haciendo una comparación con respecto a una nación, los axiomas son la constitución nacional que regirá al país de las operaciones básicas, es decir para resolver problemas aritméticos podremos basarnos en estos cuando los necesitemos.