Algunos Problemas de la Teoría de Operadores de Composición en Espacios de Funciones Analíticas

Gerardo A. Chacón

Gerardo R. Chacón

José Giménez

1. Prefacio

En las últimas décadas se ha venido realizando un intenso trabajo de investigación en el campo de la teoría de operadores de composición en Espacios de Banach; en particular, en espacios de funciones analíticas. Sea Ω un dominio del plano complejo y sea $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ el espacio de las funciones analíticas en Ω dotado con la topología de la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de Ω. Si $\mathcal{H}$ es un subespacio de Banach de $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ y φ es una aplicación analítica de Ω en sí mismo tal que $f \circ \varphi \in \mathcal{H}$ para todo $f \in \mathcal{H}$, entonces podemos definir un operador lineal $C_\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mediante:

$$C_\varphi f := f \circ \varphi,$$

conocido como *operador de composición con símbolo* φ. El objeto básico de la teoría es estudiar las propiedades del operador C_φ tales como acotación, compacidad, norma, adjunto, espectro, etc. haciendo uso de las propiedades funcionales del símbolo φ.

Esta fusión de Teoría de Operadores y Teoría de Funciones ha producido gran cantidad de resultados como puede verse, por ejemplo, al consultar las dos recientes monografías [**39**] y [**96**] y la colección de artículos [**66**]. Subsisten, adicionalmente a los grandes progresos que se han hecho en el área, un buen número de problemas abiertos que sugieren líneas de investigación por desarrollar.

Los autores han venido realizando parte de su trabajo de investigación en los últimos años en esta área produciendo un buen número de tesis de pregrado y postgrado así como artículos de investigación.

Con el curso que se propone, se pretende introducir a los participantes en los conceptos, técnicas y problemas básicos del área con la intención de servir como elemento motivador para iniciar eventuales investigaciones en este campo.

Los objetivos del curso son:

1. Introducir los conceptos básicos de la teoría de operadores de composición en espacios de funciones analíticas.
2. Discutir diversos aspectos de la teoría de operadores de composición, desde el punto de vista de la clásica teoría elemental de operadores lineales; a saber, caracterización de nociones tales como: acotación, compacidad, normalidad, fenómenos cíclicos, etc.
3. Estudiar las técnicas fundamentales utilizadas en investigaciones recientes relacionadas con el área.

Con el objeto de alcanzar estos objetivos, el texto presenta dos partes claramente diferenciadas, los dos primeros Capítulos presentan los preliminares que se requerirán en el curso revisados de un modo muy somero, los conceptos básicos sobre operadores de composición en espacios de funciones analíticas y se abordan los dos temas clásicos básicos en el área: caracterizar los operadores de composición acotados y caracterizar los operadores de composición compactos en espacios de funciones analíticas. La presentación esta basada en las monografías fundamentales mencionadas [**39**] y [**96**], con algunas referencias a presentaciones recientes que nos han parecido particularmente ilustrativas. Es claro que a excepción de los matices de la exposición que damos, los resultados son bien conocidos y no hay ninguna pretensión de originalidad. Se dan en cada caso las referencias adecuadas. A fin de agilizar el texto y permitir una interacción del lector con el material, se plantean numerosos ejercicios.

La segunda parte del texto es diferente en naturaleza y estilo: se presentan resultados recientes de investigaciones en el área, fundamentalmente aquellas en las que han estado involucrados los autores, con el objeto de exponer algunas de las nociones fundamentales que se estudian en el área, las técnicas de investigación utilizadas; así como, sugerir al lector posibles líneas de investigación.

El curso va dirigido a estudiantes de postgrado y estudiantes avanzados de pregrado, así como a investigadores en el área de Análisis y temas relacionados que deseen familiarizarse con la temática planteada. Presupone que el lector ha tomado los cursos básicos de Análisis Funcional y Teoría de Funciones de Variable Compleja.

AGRADECIMIENTO

Los autores desean agradecer al comite organizador de la XIX Escuela Venezolana de Matemáticas por brindarles la oportunidad de participar en la misma, haciendo posible la publicación de este libro. Asi mismo, expresan su mas sincero agradecimiento a los profesores: Jurancy Ereu, Mireya Bracamonte, Lorena López y Edixon Rojas. Su colaboración en la edición y revisión del texto es invaluable. La mayor parte del contenido del capítulo 9 proviene del reciente trabajo de investigación del M.Sc. Edixon Rojas.

Índice general

CAPíTULO 1

Espacios de Funciones Analíticas.

En este Capítulo incluiremos una breve descripción de las propiedades básicas de los espacios que consideraremos a lo largo del texto y algunos resultados que requeriremos en el desarrollo de los Capítulos que siguen.

Sea Ω es un dominio, es decir un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}^N$ ($N \geq 1$). Consideraremos espacios de funciones analíticas a valores complejos definidas en Ω. Escribiremos $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ para designar este espacio. Recordemos que $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ con la topología metrizable de convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de Ω es un espacio de Fréchet. La teoría básica de funciones analíticas puede consultarse, por ejemplo, en el libro clásico [**2**], o en los más recientes [**34**] y [**54**].

De hecho, estaremos fundamentalmente interesados en *espacios de Banach de funciones analíticas*; esto es, subespacios $\mathcal{X}$ de $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ con normas que los hacen espacios de Banach y en los cuales supondremos además que los funcionales evaluación son acotados. Precisando: para cada $w \in \Omega$ definimos el *funcional evaluación* $\delta_w : \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ por

$$\delta_w(f) := f(w),$$

y requeriremos que estos funcionales sean continuos en los espacios $\mathcal{X}$ que consideraremos.

Fundamentalmente se tratará con espacios de Banach de funciones analíticas en la bola unitaria de $\mathbb{C}^N$ y en particular en $\mathbb{D}$, el disco unitario del plano complejo.

Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de funciones analíticas en un dominio Ω, por el Teorema de Representación de Riesz, para cada $w \in \Omega$ existe un único elemento K_w en $\mathcal{H}$ tal que

$$f(w) = \langle f, K_w \rangle_{\mathcal{H}}, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

Las funciones K_w ($w \in \mathcal{H}$) se denominan *núcleos reproductivos* de $\mathcal{H}$.

Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable con base ortonormal $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, es fácil verificar que se tiene la siguiente representación de los núcleos reproductivos:

$$K_w = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(w)} e_n, \quad (w \in \Omega).$$

Incluimos a continuación las definiciones y propiedades básicas de los espacios de funciones analíticas que consideraremos en el texto.

1. Espacios de Hardy

Los espacios de Hardy son espacios vectoriales de funciones analíticas que satisfacen una cierta condición de crecimiento. Dicha condición viene dada en términos de las siguientes medias integrales: Si f es una función analítica en $\mathbb{D}$ y $0 < p < \infty$ definimos las medias integrales:

$$M_p(r,f) := \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}}$$

y

$$M_\infty(r,f) := \max_{0 \leq \theta < 2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|$$

Definición 1.1. Sea $0 < p < \infty$, el espacio de Hardy $H^p = H^p(\mathbb{D})$ es el espacio vectorial de todas las funciones analíticas en $\mathbb{D}$ para los cuales se tiene que

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0<r<1} M_p(r,f) < \infty.$$

Denotamos por H^∞ al espacio de las funciones analíticas y acotadas en $\mathbb{D}$ con la norma:

$$\|f\|_\infty := \sup_{0<r<1} M_\infty(r,f) = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\}$$

La cantidad $\|f\|_{H^p}$ es llamada la *norma* de la función f y es realmente una norma si $p \geq 1$.

Mencionamos a continuación algunos hechos bien conocidos sobre los espacios de Hardy. El material es clásico y puede ser encontrado, por ejemplo, en [**45**] ó [**93**].

Ejercicio 1.2. Demuestre que $H^\infty \subset H^p$ para todo $1 \leq p < \infty$.

Los siguientes dos ejercicios, muestran que si $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, entonces $H^{p_2} \subsetneq H^{p_1}$.

Ejercicio 1.3. Demuestre que si $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, entonces $H^{p_2} \subset H^{p_1}$.

Ejercicio 1.4. Muestre que la función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definida como

$$f(z) := \frac{1}{1-z}$$

pertenece a H^p para todo $0 < p < 1$. Como consecuencia, muestre que si $1 \leq p_1 < p < p_2 < \infty$, entonces la función $f^{1/p}$ pertenece a $H^{p_2} \setminus H^{p_1}$.

Ejercicio 1.5. Demuestre que para todo $w \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$|f(w)| \leq \|f\|_p \left\|(1 - we^{-i\theta})^{-1}\right\|_q ,$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Observe que el ejercicio anterior muestra que en los espacios de Hardy H^p $(0 \leq p < \infty)$ los funcionales evaluación son continuos.

Para cada $p \geq 1$, $M_p(r, f)$ es creciente como función de r y por lo tanto, podemos escribir

$$\|f\|_{H^p} := \lim_{r \to 1^-} M_p(r, f) < \infty.$$

Cada función $f \in H^p$ posee límite radial

$$f^*(e^{i\theta}) := \lim_{r \to 1^-} f(re^{i\theta})$$

para casi todo $e^{i\theta}$ en $\partial\mathbb{D} = \mathbb{T}$, la frontera del disco unitario.

Las funciones límite en la frontera f^* pertenecen al espacio $L^p = L^p(\mathbb{T})$ y

$$\int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| > -\infty$$

a menos que f sea idénticamente igual a cero. En particular, el límite radial de una función en H^p no se puede anular en un conjunto de medida de arco positiva.

La norma de una función $f \in H^p$ puede también ser definida equivalentemente como la norma en L^p de f^*. Luego H^p puede ser identificado con un subespacio cerrado de L^p y por lo tanto es un espacio de Banach.

Si para cada $0 < r < 1$ definimos $f_r : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ como

$$f_r(e^{i\theta}) := f(re^{i\theta}),$$

entonces se tiene que $\lim_{r \to 1^-} \|f^* - f_r\|_{L^p} = 0$. Escribiremos de hecho $f(e^{i\theta}) := f^*(e^{i\theta})$.

El conjunto de ceros $\{z_k\}$ de una función no nula $f \in H^p$, repetidos según sus multiplicidades, satisfacen la *condición de Blaschke* $\sum(1 -$

$|z_k|) < \infty$; esta condición permite la convergencia del denominado *producto de Blaschke*

$$B(z) := z^m \prod \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k} z}.$$

Esta función es analítica y posee exactamente los mismos ceros que f tomando en cuenta las multiplicidades, además $|B(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|B(e^{i\theta})| = 1$ para todo $e^{i\theta}$. Como consecuencia, se tiene que $\|B\|_{H^p} = 1$.

Ejercicio 1.6. Muestre que la función $\frac{f}{B}$ no se anula, pertenece a H^p y $\|\frac{f}{B}\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$.

Como consecuencia del ejercicio anterior, se tiene que toda función $f \in H^p$, $1 \leq p \leq \infty$ posee una factorización de la forma $F \cdot B$ donde la función F no se anula y $\|F\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$.

Ejercicio 1.7. Si φ es una aplicación analítica del disco tal que $\varphi(0) \neq 0$ demuestre que

$$|\varphi(0)| \leq \prod |\alpha_j|,$$

donde los α_j son los ceros de φ. *Indicación:* Factorice $\varphi = B\psi$ donde B es el producto de Blaschke con ceros $\{\alpha_j\}$.

El espacio H^2 es un espacio de Hilbert con el producto interno definido como

$$\langle f, g \rangle_{H^2} := \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta.$$

Ejercicio 1.8. Demuestre que si $f \in H^2$, y $f(z) = \sum a_n z^n$, entonces $\{a_n\} \in l_2$ y

$$\|f\|^2 = \sum |a_n|^2.$$

Ejercicio 1.9. Muestre que la familia de monomios $\{1, z, z^2, \dots\}$ es una base ortonormal de H^2.

Ejercicio 1.10. Pruebe que en el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, el funcional evaluación en el punto w del disco viene dado por $f(w) = \langle f, K_w \rangle$ donde

$$K_w(z) = \frac{1}{1 - \overline{w} z} \quad \text{y} \quad \|K_w\| = \frac{1}{\sqrt{1 - |w|^2}}.$$

El núcleo $K(z, w) = K_w(z) = 1/(1 - \overline{w} z)$ se denomina *núcleo de Szegö*.

EJERCICIO 1.11. Pruebe que en el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, el funcional derivación en el punto w del disco viene dado por $f'(w) = \langle f, D_w \rangle$ donde

$$D_w(z) = \frac{z}{1 - \overline{w}z}.$$

EJERCICIO 1.12.

1. **Identidad de Littlewood-Paley:** Si $f \in H^2(\mathbb{D})$, entonces

   $$\|f\|_{H^2}^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|^2} \, dA(z).$$

   Indicación: Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Calcule la integral

   $$\int_{\rho\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|^2} \, dA(z), \quad 0 < \rho < 1,$$

   usando coordenadas polares, en términos de los coeficientes a_n.
2. Demuestre que la expresión

   $$\|f\|^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1 - |z|^2) \, dA(z), \quad f \in H^2,$$

   define una norma equivalente a la usual en H^2.

2. Espacios de Bergman

Sea $dA(z) = \frac{1}{\pi} \, dx \, dy = \frac{1}{\pi} \, r \, dr \, d\theta$ la medida área de Lebesgue, normalizada, en el disco unitario. El *espacio de Bergman* A^p $(1 \leq p < \infty)$ se define como el conjunto de todas las funciones analíticas en $L^p(\mathbb{D}, dA)$ con la norma usual dada por

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} |fre^{i\theta}|^p \, d\theta \right) rdr.$$

Claramente, cada función analítica y acotada en $\mathbb{D}$ pertenece a todos los espacios A^p. Una familia de ejemplos no triviales viene dada por $f_\alpha(z) = (1 - z)^{-\alpha}$, donde $f_\alpha \in A^p$ si y sólo si $\alpha p < 2$. Se ve también, inmediatamente, que $H^p \subset A^p$ y $A^q \subset A^p$ cuando $1 \leq p < q \leq \infty$ (Aquí $A^\infty := H^\infty$).

EJERCICIO 1.13. Verifique las afirmaciones anteriores.

A diferencia de las funciones en el espacio de Hardy, las funciones en el espacio de Bergman no necesariamente poseen límites radiales casi en todas partes en el círculo unitario. Un ejemplo de tales funciones es

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Esta función no está en ninguno de los espacios H^p, pero si pertenece a todos los A^p $(1 \leq p < \infty)$.

El espacio de Bergman A^p es un espacio de Banach para $1 \leq p < \infty$ y A^2 es un espacio de Hilbert con el producto interior dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\, dA(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \overline{b_n}}{n+1},$$

donde $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Esto permite calcular la norma en términos de los coeficientes: $\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 (n+1)^{-1}$.

Ejercicio 1.14. Pruebe que en el espacio de Bergman $A^2(\mathbb{D})$, el funcional evaluación en el punto w del disco es continuo y viene dado por $f(w) = \langle f, K_w \rangle$ donde

$$K_w(z) = \frac{1}{(1 - \overline{w}z)^2} \;\text{ y }\; \|K_w\| = \frac{1}{1 - |w|^2}.$$

El núcleo $K(z, w) = K_w(z) = 1/(1 - \overline{w}z)^2$ se denomina *núcleo de Bergman.*

De hecho se tiene que para $1 \leq p < \infty$ y para cada $a \in \mathbb{D}$ la función $K_a = (1 - \overline{a}z)^{-2}$ tiene la propiedad reproductiva: para cada $f \in A^p$ tenemos

$$f(a) = \int_{\mathbb{D}} f \overline{K_a}\, dA.$$

Esto puede verse, por ejemplo, usando el hecho que los polinomios son densos en cada A^p $(1 \leq p < \infty)$.

Ejercicio 1.15. Demuestre que la expresión

$$\|f\|^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1 - |z|^2)^2\, dA(z), \quad f \in A^2,$$

define una norma equivalente a la usual en A^2.

Mientras la teoría de espacios de Hardy es ya clásica, incluyendo la caracterización de los conjuntos de ceros de funciones en este espacio, resultados precisos de factorización de funciones, descripción de las sucesiones interpolantes y muestrales, caracterización de subespacios invariantes (para el operador multiplicación por la variable independiente), etc; la correspondiente teoría en espacios de Bergman es más reciente y todavía subsisten problemas fundamentales. Importantes desarrollos se han obtenido durante el último cuarto del siglo XX y fechas más recientes. Para la teoría básica y esto desarrollos referimos al lector a las monografías [**46**] y [**59**].

3. El espacio de Dirichlet. Una fórmula de cambio de variable.

El espacio de Dirichlet $\mathcal{D}$ se define como

$$\mathcal{D} = \left\{ f \text{ analítica en } \mathbb{D} : \int_{\mathbb{D}} |f'|^2 \, dA < \infty \right\},$$

con la norma dada por

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'|^2 \, dA.$$

EJERCICIO 1.16. Pruebe que si $f(z) = \sum_n a_n z^n$ $(z \in \mathbb{D})$ está en el espacio de Dirichlet, entonces

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = |f(0)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2.$$

Se sigue inmediatamente que $\mathcal{D} \subset H^2$.

EJERCICIO 1.17. Pruebe que en el espacio de Dirichlet $\mathcal{D}$, el funcional evaluación en el punto w del disco es continuo y viene dado por $f(w) = \langle f, K_w \rangle$ donde

$$K_w(z) = 1 + \log \frac{1}{1 + \overline{w}z}, \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

La norma del espacio de Dirichlet tiene la interpretación geométrica que describimos a continuación:

EJERCICIO 1.18. Pruebe que si $f : G \to G$ es una función analítica y consideramos f como una aplicación de la región G de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, entonces el Jacobiano de f es $|f'|^2$.

Usando el resultado del ejercicio anterior y la fórmula del cambio de variable para integrales dobles se sigue que si f es una aplicación univalente definida en $\mathbb{D}$ entonces $\text{Area}(f(\mathbb{D})) = \int_{\mathbb{D}} |f'|^2 \, dA$.

Si f no es univalente, una versión de este resultado continúa siendo válida: $\int_{\mathbb{D}} |f'|^2 \, dA$ es el área de $f(\mathbb{D})$ "contando multiplicidades". Esta afirmación se clarifica en el siguiente Teorema.

TEOREMA 1.19. *Si $f : \mathbb{D} \to \Omega$ es una aplicación analítica sobreyectiva y para cada $\zeta \in \Omega$, $n(\zeta)$ es el número de puntos en $f^{-1}(\zeta)$, entonces*

$$\int_{\mathbb{D}} |f'|^2 \, dA = \int_{\Omega} n(\zeta) \, dA.$$

EJERCICIO 1.20. Sea f definida en $\mathbb{D}$ por $f(z) = \exp[(z+1)/(z-1)]$ pruebe que f aplica $\mathbb{D}$ en sí mismo, pero $\int_{\mathbb{D}} |f'|^2 \, dA = \infty$.

OBSERVACIÓN 1.21. La prueba del Teorema anterior usa el Teorema de recubrimiento de Vitali. Una generalización del argumento en la prueba de ese Teorema conduce a la siguiente generalización de la formula de cambio de variable.

TEOREMA 1.22. *Si g y W son funciones no negativas medibles definidas en $\mathbb{D}$ y φ es una función analítica en el disco, entonces*

$$\int_{\mathbb{D}} g(\varphi(z)))|\varphi'(z)|^2 W(z) \, dA(z) = \int_{\varphi(\mathbb{D})} g(w) \left(\sum_{j \geq 1} W(z_j(w)) \right) dA(w),$$

donde $\{z_j(w)\}$ denota la sucesión de ceros de $\varphi(z) - w$ contando multiplicidades.

Requeriremos este resultado en varias ocasiones.

4. Espacios de funciones analíticas de varias variables

Mencionamos a continuación las notaciones y definiciones correspondientes a los espacios de Hardy y Bergman en la bola unitaria de $\mathbb{C}^N$. Referimos al lector a la clásica monografía [**94**] o a la muy reciente [**111**].

4.1. Notación. Para un entero positivo N fijo, escribimos

$$\mathbb{C}^N = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$$

para denotar el espacio vectorial euclídeo complejo de dimensión N: La adición, la multiplicación por escalares y la conjugación en $\mathbb{C}^N$ se definen componente a componente. Para

$$z = (z_1 \ldots, z_N), \quad w = (w_1 \ldots, w_N),$$

en $\mathbb{C}^N$ definimos

$$\langle z, w \rangle = z_1 \overline{w_1} + \cdots + z_N \overline{w_N},$$

donde $\overline{w_k}$ es el conjugado complejo de w_k. Escribiremos también

$$|z| = \sqrt{\langle z, z \rangle} = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots |z_N|}.$$

El espacio $\mathbb{C}^N$ con el producto interior definido anteriormente es un espacio de Hilbert de dimensión N. La base estándar para $\mathbb{C}^N$ consiste de los vectores

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \; e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \; \cdots, e_N = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

La bola abierta unitaria en $\mathbb{C}^N$ es el conjunto

$$\mathbb{B}^N = \left\{ z \in \mathbb{C}^N : |z| < 1 \right\}.$$

La frontera de $\mathbb{B}^N$ será denotada por $\mathbb{S}^N$ y nos referiremos a ella como la esfera unitaria en $\mathbb{C}^N$. Así

$$\mathbb{S}^N = \left\{ z \in \mathbb{C}^N : |z| = 1 \right\}.$$

Consideraremos funciones analíticas definidas en un dominio Ω de $\mathbb{C}^N$. Diversas definiciones de funciones analíticas de varias variables aparecen en la literatura y resultan ser equivalentes. Posiblemente la más elemental es la que hace referencia a las derivadas parciales complejas. Así, una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica si para cada punto $z \in \Omega$ y cada $k = 1, \ldots, N$ el límite

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(z + \lambda e_k) - f(z)}{\lambda}$$

existe y es finito, con $\lambda \in \mathbb{C}$. Si f es analítica en Ω denotaremos el límite anterior por

$$\frac{\partial f}{\partial z_k}(z).$$

Se puede ver fácilmente que si Ω es la bola unitaria en $\mathbb{C}^N$, una función analítica f tiene un desarrollo en serie, denominado serie de Taylor de f en el origen, de la forma

$$f(z) = \sum_m a_m z^m, \quad (z \in \mathbb{B}^N),$$

donde la suma recorre todos los multi-índices

$$m = (m_1, \ldots, m_N),$$

para cada m_k entero no negativo y

$$z^m := z_1^{m_1} \ldots z_N^{m_N}.$$

La serie anterior converge absoluta y uniformemente en cada uno de los conjuntos

$$r\overline{\mathbb{B}^N} = \left\{ z \in \mathbb{C}^N : |z| \leq 1 \right\}, \quad 0 < r < 1.$$

Si escribimos

$$f_k(z) = \sum_{|m|=k} a_m z^m$$

para cada $k \geq 0$, donde

$$|m| = m_1 + \cdots + m_N.$$

entonces la serie de Taylor de f puede reescribirse como

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z).$$

Ésta es llamada la expansión homogénea de f pues cada f_k es un polinomio homogéneo de grado k.

Otra notación que adoptamos para un multi-índice m es la siguiente:

$$m! = m_1 \cdots m_N.$$

Como se indicó, el espacio de las funciones analíticas en el dominio Ω se denotará por $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ y usaremos el símbolo $H^\infty(\Omega)$ para designar el espacio de las funciones analíticas y acotadas en Ω.

Escribiremos $d\sigma$ para denotar la medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{S}^N$. Los monomios z^m son ortogonales en $L^2(\mathbb{B}^N, d\sigma)$. Un cálculo muestra que

$$\|z^m\|^2_{L^2(\mathbb{S}^N, d\sigma)} = \frac{(N-1)!m!}{(N-1+|m|)!}.$$

Finalmente denotemos por dv la medida de volumen en $\mathbb{B}^N$ normalizada de modo que $v(\mathbb{B}^N) = 1$. Un cálculo muestra esta vez que

$$\|z^m\|^2_{L^2(\mathbb{B}^N, dv)} = \frac{m!N!}{(N+|m|)!}.$$

4.2. Espacios de Hardy y de Bergman en $\mathbb{B}^N$. Para cada $p \geq 1$, el espacio de Hardy $H^p(\mathbb{B}^N)$ esta formado por las funciones $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{B}^N, \mathbb{C})$ tales que

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{S}^N} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) < \infty.$$

Si $f \in H^p(\mathbb{B}^N)$, el límite radial

$$f(\zeta) = \lim_{r \to 1^-} f(r\zeta)$$

existe para casi toda $\zeta \in \mathbb{S}^N$ y

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{S}^N} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{S}^N} |f(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta).$$

Para cada $p \geq 1$, $H^p(\mathbb{B}^N)$ es un espacio de Banach y en particular $H^2(\mathbb{B}^N)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{S}^N} f(\zeta)\overline{g(\zeta)} \, d\sigma(\zeta).$$

Se verifica fácilmente que si $f = \sum_k f_k$ es la expansión homogénea de una función analítica f en $\mathbb{B}^N$ entonces f está en $H^2(\mathbb{B}^N)$ si y sólo si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|^2_{H^2(\mathbb{B}^N)}$$

es finita y esta suma es justamente $\|f\|^2_{H^2(\mathbb{B}^N)}$.

Finalmente indiquemos que los espacios de Hardy definidos anteriormente son espacios funcionales de Banach. De hecho para $f \in H^p(\mathbb{B}^N)$, $p \geq 1$ y $|w| < 1$ se tiene

$$f(w) = \int_{\mathbb{S}^N} \frac{f(\zeta)}{(1 - \langle w, \zeta \rangle)^N} \, d\sigma(\zeta).$$

Para $p \geq 1$ el espacio de Bergman se define como

$$A^p(\mathbb{B}^N) = \mathrm{Hol}(\mathbb{B}^N, \mathbb{C}) \bigcap L^p(\mathbb{B}^N, dv).$$

Nuevamente se verifica que los espacios $A^p(\mathbb{B}^N)$ $(p \geq 1)$ son espacios funcionales de Banach y el funcional evaluación en $w \in \mathbb{B}^N$ viene dado por

$$f(w) = \int_{\mathbb{B}^N} \frac{f(z)}{(1 - \langle w, z \rangle)^{N+1}} \, dv(z).$$

En particular $A^2(\mathbb{B}^N)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{B}^N} f(z)\overline{g(z)} \, dv(z),$$

y si $f = \sum_k f_k$ es la expansión homogénea analítica $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{B}^N)$ entonces f está en $A^2(\mathbb{B}^N)$ si y sólo si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|f_k\|^2_{A^2(\mathbb{B}^N)}}{k+1}$$

es finita. Esta suma es justamente $\|f\|^2_{A^2(\mathbb{B}^N)}$.

5. Algunos elementos de teoría de funciones en el disco

Si Ω es un dominio en $\mathbb{C}^N$ denotaremos por $\mathrm{Hol}(\Omega)$ el conjunto de las aplicaciones analíticas de Ω en sí mismo. Este conjunto es un semigrupo con respecto a la operación de composición de funciones. El subgrupo de $\mathrm{Hol}(\Omega)$ de todos los automorfismos holomorfos de Ω se denotará por $\mathrm{Aut}(\Omega)$.

Incluimos a continuación, para efectos de posterior referencia, algunos resultados básicos de teoría de funciones en el disco (ver, por ejemplo, [**102**] o [**96**]). Comenzamos recordando el bien conocido Lema de Schwarz.

Teorema 1.23. *Sea $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ con $F(0) = 0$. Entonces*
1. $|F(z)| \leq |z|$ *para todo* $z \in \mathbb{D}$.
2. $|F'(0)| \leq 1$.

Adicionalmente, si la igualdad en (1) se cumple para un $z \in \mathbb{D}$, $z \neq 0$, o $|F'(0)| = 1$ entonces $F(z) = e^{i\theta} z$ para algún $\theta \in [0, 2\pi]$ y así la igualdad en (1) es cierta para todo $z \in \mathbb{D}$.

Si $a \in \mathbb{D}$ consideraremos la transformación fraccional lineal del disco definida por

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

Nótese que φ_a "intercambia" al punto a y el 0. Las propiedades básicas de estas transformaciones, que requeriremos posteriormente, se dan en los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1.24.
1. Verifique la identidad
$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \overline{a}z|^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$
y úsela para ver que $\varphi_a \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Muestre que φ_a envía $\mathbb{T}$, la frontera del disco, en si misma.
2. Compruebe que $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ con $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.
3. Demuestre que cada $h \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ es de la forma $h = \lambda\varphi_a$ para algunos $a \in \mathbb{D}$ y $\lambda \in \mathbb{T}$. *Indicación:* Sea $a = h^{-1}(0)$ y $g := h \circ \varphi_a$. Observe que $g(0) = 0$ y aplique el Lema de Schwarz a g y a g^{-1}.

La forma invariante del Lema de Schwarz es la siguiente afirmación.

Teorema 1.25. ***Lema de Schwarz-Pick.*** *Si $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ entonces para cada par z y w en $\mathbb{D}$ se cumple la desigualdad:*

$$\left| \frac{F(w) - F(z)}{1 - \overline{F(w)}F(z)} \right| \leq \left| \frac{w - z}{1 - \overline{w}z} \right|.$$

Si la igualdad se cumple en esta relación para al menos un para $z \neq w$ en $\mathbb{D}$ entonces $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $w \in \mathbb{D}$ y considérese la aplicación $G = \varphi_{F(w)} \circ F \circ \varphi_w$. Se tiene que $G(0) = 0$ y por el Lema de Schwarz $|G(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{D}$. Reemplazando z por $\varphi_w(z)$ se obtiene la desigualdad. Si la igualdad se cumple para un par $z \neq w$ entonces $|G(\varphi_w(z))| = |\varphi_w(z)|$ y así $G(z) = \lambda z$ para un $\lambda \in \mathbb{T}$ y todo $z \in \mathbb{D}$. Luego $G \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ y también $F = \varphi_{F(w)} \circ G \circ \varphi_w$. $\square$

EJERCICIO 1.26. Sea $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Pruebe que

$$|F'(z)| \leq \frac{1 - |F(z)|^2}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

El Lema de Schwarz-Pick hace natural la siguiente definición

$$\rho(z, w) = |\varphi_a(z)| = \left|\frac{w - z}{1 - \overline{w}z}\right|, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Puede verificarse fácilmente que ρ define una métrica en $\mathbb{D}$ la cual es denominada *métrica pseudo-hiperbólica*. También es fácil ver que ρ induce en $\mathbb{D}$ la topología usual.

Usando este lenguaje, las afirmaciones del Lema de Schwarz-Pick dicen que cada $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ es una contracción para la métrica pseudo-hiperbólica:

$$\rho(F(w), F(z)) \leq \rho(w, z), \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Más aun, F es una isometría con respecto a ρ (es decir, $\rho(F(w), F(z)) = \rho(w, z)$ para todo $z, w \in \mathbb{D}$) si y sólo si $F \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Para $\alpha \in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1$, el conjunto

$$\Delta(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{D} : \rho(z, \alpha) < r\}$$

se conoce como del *disco pseudo-hiperbólico* de centro α y radio r. Se trata de un disco euclidiano, pues las transformaciones de Möbius preservan círculos, pero α no es su centro euclidiano y r no es su radio euclidiano a menos que $\alpha = 0$. Puede verse (cf. [**102**] o [**46**]) que el centro y el radio euclidianos de $\Delta(\alpha, r)$ vienen dados por

$$\beta = \frac{(1 - r^2)\alpha}{1 - r^2|\alpha|^2} \quad \text{y} \quad R = \frac{r(1 - |\alpha|^2)}{1 - r^{|}\alpha|^2},$$

respectivamente.

El Lema de Schwarz-Pick describe el comportamiento de las aplicaciones analíticas de $\mathbb{D}$ en sí mismo, en los discos $\Delta(\alpha, r)$. De hecho para $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$

$$F(\Delta(\alpha, r)) \subset \Delta(F(\alpha, r)), \quad r \in (0, 1), a \in \mathbb{D},$$

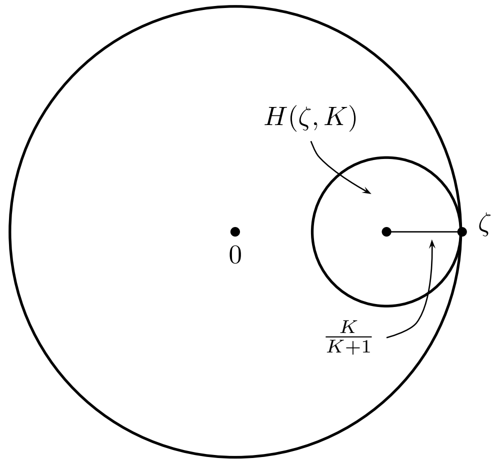

FIGURA 1. Un horodisco en el punto $\zeta \in \mathbb{T}$

sin embargo, los números β y R dependen de la localización del punto α. En particular si α se aproxima a la frontera de $\mathbb{D}$ entonces para $r \in (0, 1)$ fijo, el punto β también se acerca a la frontera mientras el radio R tiende a cero.

Para estudiar el comportamiento en la frontera de las aplicaciones analíticas del disco en sí mismo se requieren ideas adicionales. Para un punto $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ y $K > 1 - |\zeta|^2$ definamos el conjunto

$$H(\zeta, K) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1 - z\overline{\zeta}|^2}{1 - |z|^2} < K \right\}.$$

Se puede comprobar que para un punto interior $\zeta \in \mathbb{D}$ el conjunto $H(\zeta, K)$, $K > 1 - \zeta|^2$ es exactamente el disco pseudo-hiperbólico $\Delta(\zeta, r)$ con $r = \sqrt{1 - \frac{1-|\zeta|^2}{K}}$. Si ζ es un punto en la frontera del disco y $K > 0$ el conjunto $H(\zeta, K)$ es un disco en $\mathbb{D}$ centrado en $\frac{1}{1+K}\zeta$ con radio $\frac{K}{K+1} < 1$ (Verifíquelo).

Como puede verse se trata de un disco internamente tangente a la frontera de $\mathbb{D}$ en el punto ζ. Este conjunto es denominado un *horodisco* en $\mathbb{D}$.

El siguiente resultado muestra que los horodiscos resultan tener un comportamiento en la frontera análogo a los discos pseudo-hiperbólicos.

TEOREMA 1.27 (Lema de Julia). *Sea* $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *y* $\zeta \in \mathbb{T}$. *Suponga que existe una sucesión* $\{z_n\}$ *en* $\mathbb{D}$ *que converge a* ζ, *tal que los límites*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{1-|F(z_n)|}{1-|z_n|} \quad y\ \eta = \lim_{n\to\infty} F(z_n)$$

existen y son finitos. Entonces para cada $K > 0$ *se tiene que*

$$F(H(\zeta, K)) \subset H(\eta, \alpha K).$$

Para $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ y $\zeta \in \mathbb{T}$, definimos el valor $\alpha(\zeta, F)$ por la fórmula

$$\alpha(\zeta, F) = \liminf_{z\to\zeta} \frac{1-|F(z)|}{1-|z|},$$

donde z tiende a ζ (sin restricciones) en $\mathbb{D}$. Si $\alpha(\zeta, F)$ es finito, se sigue del Lema de Julia, que si $\{z_n\}$ es una sucesión a través de la cual el límite inferior es alcanzado entonces $\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \eta$ existe. De hecho, este límite existe (y es igual a η) para cada sucesión convergente a ζ a lo largo de "direcciones no tangenciales". Más precisamente:

DEFINICIÓN 1.28. Para un punto $\zeta \in \mathbb{T}$ y $\kappa > 1$ una región de aproximación no tangencial en ζ es el conjunto

$$\Gamma(\zeta, \kappa) = \{z \in \mathbb{D} : |z - \zeta| < \kappa(1 - |z|)\}.$$

El término "no tangencial" se refiere al hecho que $\Gamma(\zeta, \kappa)$ está contenido en un sector S en $\mathbb{D}$ el cual es la región acotada entre dos líneas rectas en $\mathbb{D}$ que se cortan en ζ y son simétricas respecto al radio de ζ y por tanto, las curvas frontera de $\Gamma(\zeta, \kappa)$ tienen un vértice en ζ, con un ángulo de intersección menor que π .

DEFINICIÓN 1.29. Decimos que una función $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ tiene *límite no tangencial* (*o angular*) L en un punto $\zeta \in \mathbb{T}$ si $f(z) \to L$ cuando $z \to \zeta$, $z \in \Gamma(\zeta, \kappa)$ para cada $\kappa > 1$. Escribimos en este caso

$$L = \angle \lim_{z\to\zeta} f(z).$$

Como consecuencia del Lema de Julia se tiene:

COROLARIO 1.30. *Sea* $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *no constante, y sea* $\zeta \in \mathbb{T}$. *Suponga que existe una sucesión* $\{z_n\}$ *que converge a* ζ, *tal que*

$$\liminf_{z\to\zeta} \frac{1-|F(z_n)|}{1-|z_n|} = \alpha < \infty,$$

entonces

1. $\alpha > 0$;

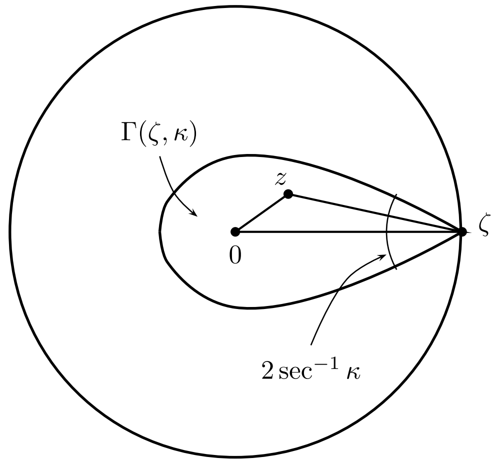

FIGURA 2. Una región de aproximación no tangencial en un punto frontera.

2. *el límite no tangencial*

$$\eta := \angle \lim_{z\to\zeta} F(z),$$

el cual es un punto de $\mathbb{T}$*, existe;*

3. *para cada* $K > 0$ *se cumple la inclusión*

$$F(H(\zeta, K)) \subset H(\eta, \alpha K).$$

Finalmente, se tiene la siguiente afirmación más fuerte establecida por Carathéodory.

TEOREMA 1.31 (Teorema de Julia-Carathéodory). . *Sea* $F \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *y* $\zeta \in \mathbb{T}$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\liminf_{z\to\zeta} \dfrac{1-|F(z)|}{1-|z|} = \alpha < \infty$*, donde el límite es tomado cuando* z *se aproxima a* ζ*, sin restricciones, en* $\mathbb{D}$*;*
2. $\angle \lim_{z\to\zeta} \dfrac{F(z)-\eta}{z-\zeta} := \angle F'(\zeta)$ *existe para un punto* $\eta \in \mathbb{T}$*;*
3. $\angle \lim_{z\to\zeta} F'(z)$ *existe y* $\angle \lim_{z\to\zeta} F(z) = \eta \in \mathbb{T}$*.*

Más aun,

1. $\alpha > 0$ *en (1);*
2. *los puntos frontera* η *en (2) y (3) son los mismos;*

3. $\angle \lim_{z\to\zeta} F'(z) = \angle F'(\zeta) = \alpha\overline{\zeta}\eta.$

El valor $\angle F'(\zeta)$ es llamado *la derivada angular* de F en ζ.

CAPíTULO 2

Operadores de Composición. Resultados básicos.

La composición de funciones es una operación básica en todas las áreas de la Matemática. Definir un *operador de composición* en un espacio de funciones surge naturalmente. El contexto general en el que surgen estas ideas es el siguiente.

Sea Xun conjunto arbitrario no vacío. Supóngase que, para todo $x \in X, F_x$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo K ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Entonces, el producto cartesiano

$$\prod_{x \in X} F_x$$

es un espacio vectorial, cuando definimos las operaciones lineales puntualmente.

Cada elemento de $\prod_{x \in X} F_x$ se conoce como una *sección* (en Inglés cross-section = corte transversal) y a la familia $\prod_{x \in X} F_x$, se le llama un fibrado vectorial sobre X.

Ejemplo 2.1. Si $F_x = \mathbb{C}$ para todo $x \in X$, entonces

$$\prod_{x \in X} F_x = \{f : X \mapsto \mathbb{C}\}.$$

Sea $L(X)$ un subespacio vectorial topológico de $\prod_{x \in X} F_x$. Si $\varphi : X \mapsto X$ es una aplicación tal que

$$(f \circ \varphi) \in \prod_{x \in X} F_x \quad \text{para toda} \quad f \in L(X),$$

entonces la correspondencia

$$f \mapsto f \circ \varphi$$

define una transformación lineal de $L(X)$ a $\prod_{x\in X} F_x$ llamada *Operador de Composición con símbolo* φ, y denotada como C_φ.

Al parecer, la primera aparición de Operadores de Composición data de 1871, cuando, Schroeder [**103**] estudió el *problema espectral* de, dada una función φ, hallar funciones f y escalares α tales que

$$(f\circ\varphi)(z) = \alpha f(z)$$

para todo z en un dominio apropiado.

En las últimas décadas, su estudio tomó nuevo impulso a raíz de la publicación del artículo *Composition Operators* de E. A. Nordgren [**82**] en 1968, así como la publicación de la tesis doctoral *Composition operators on* H^p (University of Toledo, 1969), de H. J. Schwartz [**95**].

Nos interesa, en particular, la instancia en que $C_\varphi : L(X) \mapsto L(X)$; en especial, el caso en que

- X es un dominio de $\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}^N$,
- $\varphi : X \mapsto X$ es una función holomorfa y
- $L(X)$ es un espacio vectorial topológico cuyos elementos son funciones holomorfas definidas en X.

En este orden de ideas, cabe mencionar que, cuando X es el disco unitario en $\mathbb{C}$, G. Koenigs [**70**] dio una solución (1884) al problema planteado por Schroeder.

Por otro lado, si $L(X)$ es un espacio normado, entonces la función φ determina también al operador adjunto

$$C_\varphi^* : L(X)^* \mapsto L(X)^*$$

dado por $C_\varphi^*(F)(f) := F(C_\varphi f) = F(f\circ\varphi)$.

En particular, si $L(X) = \mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, el Teorema de Representación de Riesz, permite identificar $\mathcal{H}^*$ con $\mathcal{H}$ y el adjunto del operador C_φ se caracteriza por

$$C_\varphi^* : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}, \qquad \langle C_\varphi^* f, g\rangle = \langle f, g\circ\varphi\rangle.$$

Es de hacer notar el hecho que, frecuentemente, es mucho mas fácil tratar a este operador adjunto que al operador de composición C_φ.

Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio Hilbert Funcional analítico. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de funciones analíticas en un dominio Ω, por el Teorema de representación de Riesz para cada $w \in \Omega$ existe un único elemento K_w en $\mathcal{H}$ tal que

$$f(w) = \langle f, K_w\rangle_{\mathcal{H}}, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

El estudio explícito de los operadores de composición como operadores lineales en espacios de Banach de funciones es relativamente reciente. El tema tiene dos vertientes: el estudio de estos operadores en el contexto de teoría de la medida, actuando sobre espacios L^p y la vertiente analítica que consideraremos acá.

El trabajo de E. Nordgren de 1968 [**82**] parece marcar el inicio de estudios sistemáticos en el área, seguidos por la tesis de R. Sing [**104**] en espacios de medida y la de H. Schwarz en el caso analítico.

La "fertilidad" del área es testimoniada por la gran cantidad de publicaciones que se recogen de alguna manera en la excelente monografía de J. Shapiro [**96**] y la monumental "enciclopedia" del tema: el libro de C. Cowen y B. MacCluer [**39**].

El objetivo del área: considerar espacios de funciones analíticas y derivar propiedades de los operadores de composición C_φ en ellos definidos, a partir las propiedades de los "símbolos" φ que los inducen, es claramente una oportunidad de desarrollar las interacciones entre teoría de funciones y teoría de operadores.

Consideraremos pues, operadores de composición en el espacio de funciones holomorfas $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ definidas en un dominio de $\mathbb{C}^N$. Recordemos que en este es un espacio de Fréchet al dotarlo de la topología de convergencia uniforme sobre compactos, esto es, se trata de un espacio vectorial topológico, localmente convexo, metrizable, con una métrica invariante por traslaciones con la cual es un espacio completo. Claramente si $\varphi : \Omega \to \Omega$ es analítica, el operador de composición C_φ es continuo con la topología indicada.

El siguiente resultado, aparentemente bien conocido, destaca la importancia de los operadores de composición.

TEOREMA 2.2. *Sea Ω un dominio en el plano complejo. Los homomorfismos del álgebra* $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ *son justamente los operadores de composición inducidos por símbolos $\varphi \in \mathrm{Hol}(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente cada operador de composición es un homomorfismo del álgebra $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$. Para ver el recíproco, sea h uno de tales homomorfismos. Si z es un punto de Ω, sea δ_z el funcional evaluación en z definido para cada $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ por $\delta_z(f) = f(z)$. Es inmediato que $\delta_z \circ h$ es un funcional lineal multiplicativo en $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$.

Es bien conocido (ver por ejemplo [**72**, Th. 5.3]) que cada funcional lineal multiplicativo en esta álgebra es una evaluación puntual. Sea $\varphi(z)$ el punto de Ω tal que $\delta_z \circ h = \delta_{\varphi(z)}$.

Para cada $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ se tiene $h(f)(z) = f(\varphi(z))$, así que h es precisamente el operador de composición C_φ y como la igualdad anterior es cierta, en particular, para la función identidad se sigue que $\varphi \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. □

En el caso general de $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, $N \geq 1$, el resultado es cierto, usando el correspondiente Teorema de caracterización de los funcionales lineales multiplicativos, si se asume que Ω es un dominio de holomorfía (ver [**63**]).

Si en lugar de considerar operadores de composición en $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$, lo hacemos en un espacio de Banach X de funciones analíticas surgen las cuestiones de acotación y compacidad. En el resto de este capítulo consideraremos estas cuestiones en espacios clásicos. En general obsérvese que la cuestión de la continuidad resulta de algún modo automática: si $C_\varphi f \in X$ para cada f en X, el Teorema del gráfico cerrado permite concluir de inmediato que C_φ actúa como un operador acotado en X.

Así pues la cuestión de acotación se reduce a verificar que C_φ efectivamente envía X en sí mismo.

NOTA 2.3. Los datos históricos fueron extraídos de [**92**] y la Introducción de [**39**].

1. El problema de la acotación.

1.1. Funciones subarmónicas. En esta sección incluimos algunos hechos sobre funciones subarmónicas en el disco que se requerirán posteriormente. Haremos uso de los siguientes tres hechos sobre funciones armónicas:

1. Las funciones armónicas tienen la propiedad del valor medio.
2. Se cumple el principio del máximo para funciones armónicas.
3. Si B es una bola en $\mathbb{C}$ con frontera S y u es continua en S entonces u puede ser extendida a una función armónica en B.

Una función $f : \mathbb{D} \to [-\infty, \infty)$ es *semicontinua superiormente* si el conjunto $\{x \in \mathbb{D} : f(x) < \alpha\}$ es abierto.

EJERCICIO 2.4. Verifique que f es semicontinua superiormente si y sólo si

$$\limsup_{z \to z_0} f(z) \leq f(z_0) \quad (z_0 \in \mathbb{D}).$$

EJERCICIO 2.5. Sea f semicontinua superiormente en $\mathbb{D}$ y sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, pruebe que f es acotada superiormente en K y f alcanza esta cota.

DEFINICIÓN 2.6. Una función semicontinua superiormente $f : \mathbb{D} \to [-\infty, \infty)$ se dice *subarmónica* si

$$f(a) \leq \int_{\mathbb{T}} f(a + r\zeta)\, d\sigma(\zeta)$$

para todo $a \in \mathbb{D}$ y $0 \leq r < 1 - |a|$.

El siguiente criterio que caracteriza las funciones subarmónicas es la herramienta que requeriremos en la prueba del Teorema de Subordinación de Littlewood.

TEOREMA 2.7. *Sea $f : \mathbb{D} \to [-\infty, \infty)$ semicontinua superiormente. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es subarmónica en $\mathbb{D}$.*
2. *Para cada punto $a \in \mathbb{D}$ existe un número positivo $\epsilon < 1 - |a|$ tal que*
$$f(a) \leq \int_{\mathbb{T}} f(a + r\zeta) d\sigma(\zeta)$$
para todo $0 \leq r < \epsilon$.
3. *Si B es una bola cuya frontera S está contenida en $\mathbb{D}$, y si g es armónica en B y continua en S, entonces $f \leq g$ en S implica $f \leq g$ en B.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que (1) implica (2).

Suponga que f satisface la condición (3). Para cada $a \in \mathbb{D}$ y $0 < r < 1 - |a|$ sea B la bola euclidiana centrada en a con radio r. La frontera S de B está contenida en $\mathbb{D}$. Si f es continua en $\mathbb{D}$ entonces f es continua en S y existe una función g continua en la clausura de B y armónica en B tal que $g = f$ en S. Se sigue que

$$f(a) \leq g(a) = \int_{\mathbb{T}} g(a + r\zeta) d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} f(a + r\zeta) d\sigma(\zeta).$$

Si f no es continua en $\mathbb{D}$, podemos aproximar f por una sucesión $\{f_k\}$ de funciones continuas con $f \leq f_{k+1} \leq f_k$ para todo $k \geq 1$ (Verifique que esto es posible), y las desigualdades anteriores continúan cumpliéndose para f por el Teorema de Convergencia Monótona. Esto prueba que (3) implica (1).

Para probar que (2) implica (3) supóngase que B es una bola cuya frontera S está contenida en $\mathbb{D}$ y que existe una función continua en $\overline{B} = B \cup S$ tal que g es armónica en B, $f \leq g$ en S pero $g(z) < f(z)$ para algún $z \in B$. Sea E el conjunto de los puntos en $\overline{B}$ en el cual la función semicontinua superiormente $h = f - g$ alcanza su máximo valor $M > 0$ en $\overline{B}$. Como $h \leq 0$ en S se tiene que $E \subset B$. Por la semicontinuidad de h se tiene que E es cerrado, luego existe un punto $z_0 \in E$ tal que ninguna vecindad de z_0 este completamente contenida en E. Podemos pues, encontrar una sucesión $\{r_k\}$ con la propiedad que cada circunferencia $\{z : |z - z_0| = r_k\}$ está contenida en $\mathbb{D}$ pero no está completamente en E. La función h satisface $h \leq M$ en cada circunferencia $\{z : |z - z_0| = r_k\}$ con la desigualdad estricta cumpliéndose en algún arco de esa circunferencia. Se sigue que

$$\int_{\mathbb{T}} h(z_0 + r_k\zeta)d\sigma(\zeta) < M = f(z_0) - g(z_0)$$

para cada k. Combinando esto con la propiedad del valor medio para g obtenemos

$$\int_{\mathbb{T}} f(z_0 + r_k\zeta)d\sigma(\zeta) - g(z_0) < f(z_0) - g(z_0)$$

ó

$$\int_{\mathbb{T}} f(z_0 + r_k\zeta)d\sigma(\zeta) < f(z_0)$$

para todo k. En particular la condición (2) no se cumple. Esto prueba que (2) implica (3). $\square$

Corolario 2.8. *Si f es subarmónica en $\mathbb{D}$ entonces*

$$f(a) \leq \int_{\mathbb{D}} f(a + rz)d\nu(z)$$

para todo $a \in \mathbb{D}$ y $0 \leq r < 1 - |a|$.

Corolario 2.9. *Si f analítica en $\mathbb{D}$ y $0 < p < \infty$, entonces* $\log|f|$ *y f^p son funciones subarmónicas en $\mathbb{D}$.*

Ejercicio 2.10. Pruebe los Corolarios anteriores.

1.2. El principio de subordinación. Sean f y g analíticas en $\mathbb{D}$ con $f(0) = g(0)$. Suponga por el momento que f es univalente y que el rango de g está contenido en el rango de f. Entonces $\varphi(z) = f^{-1}(g(z))$ es analítica en $\mathbb{D}$, $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(z) < 1$. Así, por el Lema de Schwarz $|\varphi(z)| < |z|$ para $0 < |z| < 1$ a menos que φ sea una rotación del disco.

En general diremos que una función analítica g es *subordinada* a una función analítica f $(g \prec f)$ si

$$g(z) = f(\varphi(z)), \quad (|z| < 1),$$

para alguna función analítica φ con $|\varphi(z)| \leq |z|$. La función subordinada f no necesita ser univalente.

Si $g \prec f$, es claro que $|g'(0)| \leq |f'(0)|$ y que la imagen bajo f de cada disco $\{z : |z| \leq r\}$ $(0 \leq r < 1)$ contiene la imagen bajo g del mismo disco. En particular el módulo máximo de f domina el módulo máximo de g:

$$M_\infty(r, g) \leq M_\infty(r, f), \quad (0 \leq r < 1).$$

Littlewood generalizó este resultado a medias integrales de orden p. Recordemos la notación

$$M_p(r, f) = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{1/p}, \quad (0 < p < \infty).$$

TEOREMA 2.11. *Sean f y g analíticas en $\mathbb{D}$ con $g \prec f$. Para $0 < p < \infty$,*

$$M_p(r, g) \leq M_p(r, f), \quad (0 \leq r < 1).$$

DEMOSTRACIÓN. El Teorema es realmente un caso especial de un resultado más general sobre funciones subarmónicas. Sea u subarmónica en $\mathbb{D}$ y sea $v(z) = u(\varphi(z))$ con φ analítica y $|\varphi(z)| \leq |z|$. Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{T}} v(r\zeta) d\sigma(\zeta) \leq \int_{\mathbb{T}} u(r\zeta) d\sigma(\zeta).$$

Como $|f|^p$ es subarmónica $(0 < p < \infty)$ si f es analítica se cumple el Teorema. Para probar la desigualdad fijemos r $(0 < r < 1)$ y sea U la función armónica en $\{z : |z| < r\}$ igual a u en $\{z : |z| = r\}$. Entonces $u(z) \leq U(z)$ si $|z| \leq r$ y $v(z) \leq V(z) = U(\varphi(z))$ si $|z| = r$. Así

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} v(r\zeta) d\sigma(\zeta) &\leq \int_{\mathbb{T}} V(r\zeta) d\sigma(\zeta) = V(0) \\ &= U(0) = \int_{\mathbb{T}} U(r\zeta) d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} u(r\zeta) d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

□

EJERCICIO 2.12. ¿Cuándo se cumple la igualdad para un r, $0 < r < 1$?

1.3. El problema de la acotación y el principio de subordinación. Se sigue del Principio de Subordinación que cada símbolo analítico $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ con $\varphi(0) = 0$ induce un operador de composición acotado en H^p con norma 1. En general se tiene:

TEOREMA 2.13. *Sea $p \geq 1$ y $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una aplicación analítica. El operador*

$$C_\varphi : H^p(\mathbb{D}) \to H^p(\mathbb{D})$$

es acotado.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi(0) = a$ y

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}$$

el automorfismo del disco que intercambia 0 y a. Sea $\psi(z) = \varphi_a \circ \varphi$. Entonces ψ es una aplicación analítica del disco en sí mismo que fija el origen y por el Principio de Subordinación

$$\int_{\mathbb{T}} |f(\psi(r\zeta))|^p d\sigma(\zeta) \leq \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)$$

para cada $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ y $0 < r < 1$. Reemplazando f por $f \circ \varphi_a$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{T}} |f(\varphi(r\zeta))|^p d\sigma(\zeta) \leq \int_{\mathbb{T}} |f \circ \varphi_a(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)$$

para toda $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ y $0 < r < 1$.

Así pues, el problema se reduce a probar la acotación de los operadores C_{φ_a} $(a \in \mathbb{D})$. Verificar esto se reduce a una aplicación de la fórmula de cambio de variable:

$$\begin{aligned}
\|f \circ \varphi_a\|_{H^p} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varphi(e^{i\theta}))|^p d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p |\varphi_a'(e^{it})| dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p \frac{1 - |a|^2}{|1 - \overline{a}e^{it}|} dt \\
&\leq \frac{1 - |a|^2}{(1 - |a|)^2} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p dt \right) \\
&= \frac{1 + |a|}{1 - |a|} \cdot \|f\|_{H^p}^p
\end{aligned}$$

□

EJERCICIO 2.14. Establezca y pruebe los resultados correspondientes para los espacios de Bergman A^p $(1 \leq p < \infty)$.

En general no es cierto que cada aplicación analítica del disco en sí mismo induzca un operador de composición acotado en cada espacio de Banach de funciones analíticas. De hecho tal afirmación no se cumple en el *espacio de Dirichlet.* Recordemos que el espacio de Dirichlet $\mathcal{D}$ es el espacio de las funciones f analíticas en el disco cuya derivada f' esta en el espacio de Bergman A^2.

Nótese que una condición necesaria, obvia, para que el símbolo φ induzca un operador acotado es que $\varphi \in \mathcal{D}$. Así pues, los ejemplos de aplicaciones analíticas φ del disco en el disco que no están en el espacio de Dirichlet prueban que en general C_φ no es un operador acotado en $\mathcal{D}$.

Ejercicio 2.15. Muestre que los símbolos φ univalentes (y de hecho, los finitamente valuados) inducen operadores de composición acotados en $\mathcal{D}$.

Ejercicio 2.16. Una función f analítica en $\mathbb{D}$ pertenece al *espacio de Bloch* $\mathcal{B}$ si

$$\|f\|_{\mathcal{B}} := \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|f'(z)|$$

es finito. Con la norma definida por $\|f\| = |f(0)| + \|f\|_{\mathcal{B}}$, el espacio de Bloch es un espacio de Banach. La desigualdad

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{1}{2}\|f\|_{\mathcal{B}} \log\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

prueba que los funcionales evaluación son acotados en $\mathcal{B}$. Para mayor información sobre el espacio de Bloch ver [**110**] ó [**46**].

Demuestre que todos los símbolos $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ inducen operadores de composición acotados en el espacio de Bloch. *Sugerencia:* Del Lema de Schwarz-Pick se sigue que

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|}.$$

1.4. Acotación de operadores de composición y medidas de Carleson. La situación en espacios de Hardy y Bergman en $\mathbb{B}^N$ la bola unitaria de $\mathbb{C}^N$ $(N>1)$ es completamente diferente. No existe un análogo multidimensional del principio de subordinación. La razón es esencialmente que mientras en una variable las funciones reales armónicas son justamente las partes reales de funciones analíticas, no es cierto un resultado análogo en varias variables. De hecho ejemplos de símbolos muy sencillos muestran la existencia de operadores de composición no acotados en espacios de Hardy y Bergman cuando $N>1$.

Ejercicio 2.17. Pruebe que la aplicación $\varphi(z_1,z_2) = (2z_1z_2, 0)$ de la bola unitaria B^2 en sí misma, no induce un operador de composición acotado en $H^2(\mathbb{B}^2)$ ni en $A^2(\mathbb{B}^2)$.

Indicación: Basta exhibir una función g en $H^2(\mathbb{B}^2)$ (respectivamente $A^2(\mathbb{B}^2)$) tal que $g \circ \varphi \notin H^2(\mathbb{B}^2)$ ($\notin A^2(\mathbb{B}^2)$). Para ello tome $g(z_1, z_2) = \sum a_n z_1^n$ para una sucesión $\{a_n\}$ a determinar. Usando los valores de las normas de los monomios z^α en $L^2(\mathbb{S}^2, d\sigma)$ (y en $A^2(\mathbb{B}^2, dv)$) calcule explícitamente las normas de g y $g \circ \varphi$ en los espacios considerados. Elija a_n de modo conveniente. Seguramente Ud. requerirá la fórmula de Stirling:

$$n! = \Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

El ejemplo anterior es atribuido en [**39**] a J. H. Shapiro sin ninguna referencia. La prueba directa que sugerimos es nuestra.

Criterios de acotación en espacios de funciones analíticas en varias variables son formulados usando *medidas de Carleson.* Este concepto fue introducido en los años 60 por Lennart Carleson en el contexto de los espacios de Hardy del disco. En este contexto una medida μ en $\mathbb{D}$ es una medida de Carleson para el espacio de Hardy H^p si

$$\int_D |f(z)|^p d\mu \leq C\|f\|_{H^p}^p, \quad (f \in H^p),$$

para alguna constante C dependiendo solamente de p. Carleson demostró que una condición necesaria y suficiente para que μ sea una medida de Carleson es que $\mu(S) \leq Ch$ para alguna constante C y todos los *cuadrados de Carleson*:

$$S = \left\{re^{i\theta} \in \mathbb{D} : 1 - h \leq 1 - r, |\theta - \theta_0| \leq h\right\}.$$

Carleson aplicó sus resultados a problemas de interpolación y a su solución del problema de la corona.

Versiones de medidas de Carleson para los espacios de Bergman del disco (y espacios de funciones analíticas en varias variables) son definidas de manera análoga.

Presentamos (sin pruebas) los resultados para espacios de Bergman y de Hardy en la bola unitaria de $\mathbb{C}^N$. Para ello consideremos la llamada (por un abuso de lenguaje) "métrica no isotrópica" en $\mathbb{B}^N$:

$$d(z, w) = |1 - \langle z, w\rangle|, \quad (z, w \in \mathbb{B}^N).$$

La función d es no es una métrica, pero la restricción de $\sqrt{d}$ a $\mathbb{S}^N$ si lo es. Para $\zeta \in \mathbb{S}^N$ y $r > 0$ escribimos

$$Q_r(\zeta) = \left\{z \in \mathbb{B}^N : d(z, \zeta) < r\right\}.$$

Obsérvese que en caso $N = 1$ el conjunto $Q_\zeta(r)$ es justamente la intersección de la bola euclidiana de centro ζ y radio r con $\mathbb{D}$. Se puede verificar que $v(Q_r(\zeta)) \approx r^{N+1}$ y $\sigma(\overline{Q_r(\zeta)}) \cap \mathbb{S}^N \approx r^N$(cf. [**111**, Cor. 5.24] o [**94**, Ch. 5]).

El término "no isotrópico" proviene del hecho que las "dimensiones" del conjunto $Q_r(\zeta)$ dependen de la "dirección". Veamos: sea $\zeta = e_1 = (1,0) \in \mathbb{B}^2$, la intersección de

$$Q_r(e_1) = \left\{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2 : |1 - z_1| < r\right\}$$

con $[e_1]$, el subespacio generado por e_1, es un disco de radio r. Sin embargo la intersección de la clausura de $Q_r(\zeta)$ con $[e_1]^\perp$ contiene la bola de centro 0 y radio $\sqrt{2r - r^2}$. Observe que $\sqrt{2r - r^2}$ es muy grande en comparación con r cuando r es pequeño.

Teorema 2.18. *(cf.* [**39**, Th. 3.28]*) Sea $1 \leq p < \infty$. Si μ es una medida positiva de Borel en $\mathbb{B}^N$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe una constante $C > 0$ tal que*
$$\int_{\mathbb{B}^N} |f(z)|^p d\mu(z) \leq C \int_{\mathbb{B}^N} |f(z)|^p dv(z)$$
para toda $f \in A^p(\mathbb{B}^N)$.
2. *Se cumple que*
$$\sup_{r>0,\, \zeta \in \mathbb{S}^N} \frac{\mu(Q_r(\zeta))}{r^{N+1}} < \infty.$$

Si una medida μ en $\mathbb{B}^N$ satisface las condiciones del Teorema anterior se dice que μ es una *medida de Carleson* para $A^p(\mathbb{B}^N)$. La condición (1) del Teorema anterior dice justamente que μ es una medida de Carleson para $A^p(\mathbb{B}^N)$ si y sólo si el espacio de Bergman $A^p(\mathbb{B}^N)$ está "incluido continuamente" en $L^p(\mu)$.

Teorema 2.19. *(cf.* [**39**, Th. 3.27]*) Sea $1 \leq p < \infty$. Si μ es una medida positiva de Borel en $\overline{\mathbb{B}^N}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Existe una constante $C > 0$ tal que*
$$\int_{\overline{\mathbb{B}^N}} |f(z)|^p d\mu(z) \leq C \int_{\mathbb{S}^N} |f(\zeta)|^p d\sigma(\zeta)$$
para toda $f \in H^p(\mathbb{B}^N)$.

2. *Se cumple que*

$$\sup_{r>0,\,\zeta\in\mathbb{S}^N} \frac{\mu(\overline{Q_r(\zeta)})}{r^N} < \infty.$$

Si una medida μ en $\mathbb{B}^N$ satisface las condiciones del Teorema anterior se dice que μ es una *medida de Carleson* para $H^p(\mathbb{B}^N)$. Nótese que la condición (1) del Teorema anterior dice que μ es una medida de Carleson para $H^p(\mathbb{B}^N)$ si y sólo si el espacio de Hardy $H^p(\mathbb{B}^N)$ está "incluido continuamente" en $L^p(\mu)$.

Ejercicio 2.20. Recordemos la fórmula de cambio de variable de teoría de la medida (cf. por ejemplo [**57**, p. 163].) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(\Omega', \mathcal{F}')$ un espacio medible. Si $T : \Omega \to \Omega'$ es una aplicación medible, definimos

$$\mu T^{-1}(E) = \mu(T^{-1}(E)), \quad E \in \mathcal{F}'.$$

Verifique que μT^{-1} es una medida en $(\Omega', \mathcal{F}')$. Sea $f : \Omega' \to \mathbb{C}$ medible, pruebe que f es μT^{-1}-integrable si y sólo si $f \circ T$ es μ-integrable y

$$\int_{\Omega'} f d\mu T^{-1} = \int_{\Omega} (f \circ T) d\mu.$$

Indicación: Pruebe primero que el resultado es cierto para $f = \chi_E$ con $E \in \mathcal{F}'$.

Con la notación del ejercicio anterior, si $\varphi : \mathbb{B}^N \to \mathbb{B}^N$ es una aplicación analítica, escribiremos μ_φ para designar la medida positiva de Borel $dv\varphi^{-1}$ en $\mathbb{B}^N$, donde dv es la medida volumen normalizada en $\mathbb{B}^N$.

La relación entre medidas de Carleson y operadores de composición se obtiene inmediatamente:

Corolario 2.21. *Sea $p \geq 1$ y $\varphi : \mathbb{B}^N \to \mathbb{B}^N$ analítica.*

1. *El operador C_φ actúa como un operador acotado en $A^p(\mathbb{B}^N)$ si y sólo si la medida μ_φ es una medida de Carleson para $A^p(\mathbb{B}^N)$.*
2. *El operador C_φ actúa como un operador acotado en $H^p(\mathbb{B}^N)$ si y sólo si la medida μ_φ es una medida de Carleson para $H^p(\mathbb{B}^N)$.*

Para $N = 1$ el resultado sobre la acotación de todos los operadores de composición, en espacios de Bergman o Hardy, inducidos símbolos φ analíticos que aplican $\mathbb{D}$ en sí mismo, es justamente la afirmación que para cada uno de tales símbolos la medida μ_φ es de Carleson en $\mathbb{D}$.

Obsérvese que la caracterización de medidas de Carleson en $A^p(\mathbb{B}^N)$ (en $H^p(\mathbb{B}^N)$) es independiente de p. Se tiene pues:

COROLARIO 2.22. *Si C_φ es acotado en $A^p(\mathbb{B}^N)$ (respectivamente en $H^p(\mathbb{B}^N)$) para algún valor de $p \geq 1$ entonces es acotado en $A^p(\mathbb{B}^N)$ (en $H^p(\mathbb{B}^N)$) para cada $p \geq 1$.*

Concluimos esta sección usando la noción de medidas de Carleson para caracterizar los operadores de composición acotados en el espacio de Dirichlet $\mathcal{D}$. El resultado es de J. Arazy, S. Fisher y J. Peetre (cf. [**4**]) y la prueba que damos sigue la exposición de [**60**] donde el resultado se generaliza a espacios tipo Dirichlet D^p con $p \neq 2$.

TEOREMA 2.23. *Sea $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Una condición necesaria y suficiente para que el operador de composición C_φ sea acotado en $\mathcal{D}$ es que la medida $d\mu(w) = n_\varphi(w)dA(w)$ sea de Carleson en A^2, donde $n_\varphi(w)$ es el número de ceros de la función $\varphi - w$ ($w \in \mathbb{D}$).*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que C_φ es acotado en $\mathcal{D}$. Sea $f \in \mathcal{D}$ con $f(0) = 0$. La hipótesis implica que

$$\int_{\mathbb{D}} |f' \circ \varphi|^2 |\varphi'|^2 dA \leq C \int_{\mathbb{D}} |f'| dA,$$

para una constante $C > 0$. Por la fórmula del cambio de variable 1.22 y la definición de μ se tiene

$$\int_{\mathbb{D}} |f' \circ \varphi|^2 |\varphi'|^2 dA = \int_{\mathbb{D}} |f'|^2 d\mu.$$

Sea $g \in A^2$ y defínase $f(z) = \int_0^z g(w)dw$. El argumento anterior prueba que

$$\int_{\mathbb{D}} |g|^2 d\mu \leq C \int_{\mathbb{D}} |g|^2 dA,$$

y se tiene que μ es una medida de Carleson para A^2.

Para ver el recíproco, supóngase que μ es una medida de Carleson, es decir que la desigualdad anterior se cumple para una cierta constante $C > 0$ y cada $g \in A^2$. Se tiene entonces que

$$\int_{\mathbb{D}} |(f \circ \varphi)'|^2 dA = \int_{\mathbb{D}} |f'| d\mu \leq C \int |f'|^2 dA \leq C\|f\|_{\mathcal{D}}^2.$$

para cada $f \in \mathcal{D}$ y como además el funcional evaluación en $\varphi(0)$ es acotado en $\mathcal{D}$, se cumple que C_φ es un operador acotado en $\mathcal{D}$. $\square$

EJERCICIO 2.24. [**67**] Se observó anteriormente que si C_φ es acotado en $\mathcal{D}$ entonces $\varphi \in \mathcal{D}$. El siguiente ejemplo, presentado en [**67**], prueba que ésta no es una condición suficiente para garantizar la acotación de C_φ.

Sea Ω la región simplemente conexa en el semiplano izquierdo sobre el eje real formada por el interior de la unión de los rectángulos R_n, $(n = 1, 2, \dots)$ con base $[x_n, x_n + 1]$ en el eje real y altura $2\pi n$, donde los x_n se eligen de modo que $e^{x_0} = 1/2$ y $e^{x_n} = 1 - (n+1)^{-2}$, $(n \geq 1)$. Sea τ una aplicación conforme de $\mathbb{D}$ sobre Ω.

1. Si $\varphi(z) = \exp(\tau(z))$, verifique que $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$.
2. Usando el hecho que los rectángulos R_n $(n \geq 2)$ son enviados por la función exponencial a los anillos
$$A_n = \left\{z \in \mathbb{D} : 1 - n^{-2} \leq |z| \leq 1 - (n+1)^{-2}\right\}$$
pruebe que
$$\int_{\mathbb{D}} |\varphi'|^2 dA \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$
y por tanto $\varphi \in \mathcal{D}$.
3. Dada $M > 0$, sea N un número entero con $N > M$. Muestre que si r es suficientemente pequeño el conjunto $Q_r(1)$ está contenido en $\cup_{n=N}^{\infty} A_n$ y por lo tanto
$$\mu(Q_r(1)) \geq cMr^2$$
para una cierta constante c independiente de r. Concluya que C_φ no está acotado en $\mathcal{D}$.

EJERCICIO 2.25. El *pequeño espacio de Bloch* $\mathcal{B}_0$ es el subespacio del espacio de Bloch formado por las funciones con la propiedad que
$$\lim_{|z| \to 1^-} (1 - |z|^2)|f'(z)| = 0.$$
Como $\mathcal{B}_0$ es un subespacio de $\mathcal{B}$ es él mismo un espacio de Banach. Pruebe que $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ induce un operador acotado en el espacio de Bloch si y sólo si $\varphi \in \mathcal{B}_0$. *Sugerencia:* Use el hecho que el pequeño espacio de Bloch es la clausura de los polinomios en la norma del espacio de Bloch.

2. Operadores de Composición Compactos

Una vez establecida la acotación de un operador de composición en un espacio de funciones analíticas, surge el problema de determinar si ese operador es compacto. Consideraremos en esta sección la compacidad de los operadores de composición C_φ inducidos por aplicaciones analíticas $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, en los espacios clásicos H^p y A^p $(1 \leq p < \infty)$ del disco.

Para la comodidad del lector incluimos una breve discusión de la definición y propiedades básicas de los operadores compactos.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Denotemos por B_1 la bola unitaria cerrada en $\mathcal{H}$. Recordemos que una transformación lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se dice *compacta* si $T(B_1)$ es relativamente compacta en $\mathcal{H}$. Se verifica fácilmente que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, el espacio de los operadores compactos definidos en $\mathcal{H}$, es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el espacio de los operadores acotados en $\mathcal{H}$. De hecho $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un ideal y resulta ser justamente la clausura de $\mathcal{K}_0(\mathcal{H})$, el espacio de los operadores de rango finito definidos en $\mathcal{H}$.

Ejercicio 2.26. Pruebe que:

1. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces T es una función continua de $\mathcal{H}$ con la topología débil, a $\mathcal{H}$ con la misma topología débil.
2. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces $T(B_1)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{H}$.

La generalización de la noción de operador compacto a espacios de Banach procede a través de los siguientes conceptos:

Definición 2.27. Si X y Y son espacios de Banach y $A : X \to Y$ es una transformación lineal, entonces A es *compacto* si $A(B_1)$, la imagen de la bola unitaria cerrada en X, es relativamente compacta en Y.

Definición 2.28. Si X y Y son espacios de Banach y $A \in \mathcal{B}(X, Y)$, entonces A es *completamente continuo* si para cada sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $x_n \to x$ débilmente se tiene que $\|Ax_n - Ax\| \to 0$.

Estas nociones se relacionan a través del siguiente Teorema:

Teorema 2.29. *Sean X y Y espacios de Banach y sea $A \in \mathcal{B}(X, Y)$.*

1. *Si A es un operador compacto entonces A es completamente continuo.*
2. *Si X es reflexivo y A es completamente continuo entonces A es compacto.*

Claramente los conceptos de operador compacto y completamente continuo coinciden en espacios reflexivos y en particular en espacios de

Hilbert. En espacios de Banach en general, tal cosa no ocurre. Existen operadores completamente continuos que no son compactos.

EJERCICIO 2.30. Recuerde que una sucesión en l^1 es convergente si y sólo si es débilmente convergente. Utilice este hecho para exhibir un operador en l^1 que sea completamente continuo pero no compacto.

Con la notación análoga a la establecida para el caso de espacios de Hilbert, indicamos que del mismo modo que en ese contexto, si X es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{K}(X)$ es un ideal cerrado en el álgebra $\mathcal{B}(X)$.

Mencionamos adicionalmente que en general $\mathcal{K}_0(X)$ no es denso en $\mathcal{K}(X)$. Un ejemplo de un espacio de Banach reflexivo (que no posee una base de Schauder) para el cual esto ocurre fue dado en 1973 por P. Enflo. Sin embargo, para los espacios de Banach clásicos, cada operador compacto es el límite de una sucesión de operadores de rango finito.

La cuestión de si un operador de composición es compacto, en espacios de Banach de funciones analíticas, y en particular en los espacios clásicos de Hardy y Bergman, ha generado considerable interés y producido numerosos resultados importantes. Los resultados iniciales fueron obtenidos por Schwartz en su tesis [**95**]. El problema general probó ser difícil. Para el caso de los espacios de Bergman $A^p(\mathbb{D})$ $(1 \leq p < \infty)$ resulta que C_φ, el operador de composición inducido por el símbolo $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, es compacto si y sólo si φ no tiene derivada angular en ningún punto de la circunferencia unitaria. El resultado fue establecido por MacCluer y Shapiro [**73**] y es válido para espacios de Hardy con la condición adicional que φ sea univalente.

El problema de caracterizar la compacidad de C_φ en $H^p(\mathbb{D})$ $(1 \leq p < \infty)$ cuando φ no es necesariamente univalente requirió otro importante concepto del análisis complejo: la función conteo de Nevanlinna N_φ. Esta función fue introducida (cf. [**81**]) para estudiar distribución de valores de funciones analíticas. De hecho, Shapiro probó en [**98**] que C_φ es compacto en H^p si y sólo si

$$\lim_{|w|\to 1} \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} = 0.$$

A continuación presentamos las herramientas requeridas para obtener las caracterizaciones indicadas de operadores de composición compactos. En primer lugar requeriremos el siguiente resultado valido en los espacios de funciones analíticas que acá se considerarán. Siguiendo a [**107**] (ver también [**111**, 3.3]) diremos que una sucesión $\{f_n\}$ en H^p (o en A^p) converge a 0 *ultra-débilmente* si es acotada en norma y converge a 0 uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Un operador lineal acotado T de H^p (o A^p) en algún espacio L^p es *ultra-débilmente compacto* si $\{Tf_n\}$ converge a 0 en norma cuando $\{f_n\}$ converge ultra-débilmente a 0.

TEOREMA 2.31. *El operador de composición $C_\varphi : H^p \to H^p$ ($1 \leq p < \infty$) es compacto si y sólo si es ultra-débilmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea C_φ compacto y $\{f_n\}$ una sucesión acotada en H^p que converge uniformemente sobre compactos a 0. En particular $f_n(\varphi(z)) \to 0$ para cada $z \in \mathbb{D}$. Si $\{f_n \circ \varphi\}$ no converge a 0 en H_p, existe un $\epsilon > 0$ y una sucesión creciente de enteros positivos $\{n_k\}$ tal que $\|f_{n_k} \circ \varphi\| \geq 0$ para todo k. Como el operador C_φ es compacto, esta sucesión posee una subsucesión, que denotaremos igualmente $f_{n_k} \circ g$, convergente en H_p digamos a g. La convergencia en H^p implica convergencia puntual, así que g es justamente la función idénticamente nula lo cual contradice la afirmación anterior.

Recíprocamente, sea C_φ ultra-débilmente compacto y $\{g_n\}$ una sucesión en la bola unitaria de H^p. La sucesión $\{g_n\}$ es una familia normal y por tanto posse una subsucesión $\{g_{n_k}\}$ que converge en la topología de convergencia uniforme sobre compactos a una función $g \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_{n_k}(re^{i\theta})|^p d\theta \\ \leq \limsup_{k\to\infty} \|g_{n_k}\|^p \leq 1, \end{aligned}$$

se tiene que $g \in H^p$ y así la sucesión $\{g_{n_k} - g\}$ es una sucesión acotada en H^p que converge uniformemente sobre compactos a 0. Se sigue entonces que $g_{n_k} \to g$ en H_p. $\square$

EJERCICIO 2.32. Verifique que el resultado del Teorema anterior se cumple en A^p ($1 \leq p < \infty$), en H^∞ y en $\mathcal{D}$.

EJERCICIO 2.33.
1. Pruebe que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida por $f_n(z) = z^n$ ($z \in \mathbb{D}$) converge ultra-débilmente a 0 en H^2.
2. Use el resultado anterior para demostrar que si $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ induce un operador compacto en H^2 entonces φ no puede tener límite radial de módulo uno en un conjunto de medida de Lebesgue positiva.

Finalmente introduciremos la definición precisa de la *función conteo de Nevanlinna*. Recordemos que si $\{a_n\}$ es la sucesión de los ceros de una función $f \in H^p$ entonces $\sum_n (1 - |a_n|) < \infty$ (con los $|a_n|$ ordenados en forma creciente y contando multiplicidades). Luego si $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es analítica, considerando $\varphi^{-1}(w)$ como la sucesión de ceros de $\varphi(\cdot) - w$, se tiene que $\sum_{z \in \varphi^{-1}(w)} (1 - |z|) < \infty$. Si notamos además que para cada $0 < r < 1$, $1 - |z| \sim \log(1/|z|)$ para $z \in \mathbb{D} \setminus r\mathbb{D}$ vemos que la siguiente función, denominada función conteo de Nevanlinna, está bien definida:
(2.1)

$$N_\varphi : \mathbb{C} \to [0, \infty]; w \mapsto \begin{cases} 0, & \text{si } w \notin \varphi(\mathbb{D}) \\ \sum_{z \in \varphi^{-1}(w)} \log \frac{1}{|z|}, & \text{si } w \in \varphi(\mathbb{D}), w \neq \varphi(0) \\ \infty, & \text{si } w = \varphi(0). \end{cases}$$

Obsérvese que $N_\varphi(w)$ "cuenta" las veces que w es alcanzado por φ ponderando cada vez que esto ocurre por un factor que describe esencialmente la distancia del punto donde w es alcanzado a la frontera del disco. Requeriremos la siguiente desigualdad:

TEOREMA 2.34. ***Desigualdad de Littlewood.*** *Sea $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica. Para cada $w \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}$ se tiene:*

$$N_\varphi(w) \leq \log \left| \frac{1 - \overline{\varphi(0)} w}{\varphi(0) - w} \right|.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $w \notin \varphi(\mathbb{D})$ no hay nada que probar. Supongamos que $w \in \varphi(\mathbb{D})$. Si $\varphi(0) \neq 0$ y $\{z_j\}$ es el conjunto de los ceros de φ, el Ejercicio 1.7 prueba que $|\varphi(0)| \leq \prod |z_j|$. Tomando logaritmos se tiene

$$\log |\varphi(0)| \leq \log \left(\prod |z_j| \right) = \sum \log |z_j|,$$

y multiplicando por -1 obtenemos

$$N_\varphi(0) = \sum \log \frac{1}{|z_j|} \leq \log \frac{1}{|\varphi(0)|}$$

que es la desigualdad requerida para $w = 0$.

Si $\varphi(0) \neq 0$ sea

$$\psi(z) = \frac{\varphi(z) - w}{1 - \overline{w}\varphi(z)}.$$

Es fácil ver que ψ es analítica en $\mathbb{D}$, aplica $\mathbb{D}$ en sí mismo y $\psi(0) \neq 0$. Luego se tiene que $N_\psi(0) \leq \log(1/\psi(0))$, pero esta es justamente la desigualdad requerida. $\square$

Obsérvese que la desigualdad de Littlewood es una generalización del Lema de Schwarz, si $\varphi(0)=0$, la desigualdad se reduce a

$$N_\varphi(w) \leq \log \frac{1}{|w|}, \quad (w \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\})$$

lo cual no es otra cosa que

$$|w| \leq \prod \left\{ |z| : z \in \varphi^{-1}(w) \right\},$$

y el Lema de Schwarz afirma que $|w| \leq |z|$ para cada $z \in \varphi^{-1}(w)$.

Ejercicio 2.35. La caracterización de operadores de composición compactos en H^∞ es fácil: pruebe que $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ induce un operador de composición compacto en H^∞ si y sólo so $\|\varphi\|_\infty < 1$.

Ejercicio 2.36.

1. Recordemos que si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, un operador lineal acotado $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es de *Hilbert-Schmidt* si para una (para toda) base ortonormal $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ en $\mathcal{H}$ se cumple que

$$\sum_{n=0}^\infty \|Te_n\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty.$$

Pruebe que todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto.

2. Pruebe que un operador de composición C_φ es de Hilbert-Schmidt en H^2 si y sólo si

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-|\varphi(e^{i\theta})|^2} d\theta < \infty.$$

Formule y demuestre un resultado análogo para el espacio de Bergman A^2.

3. Use los resultados anteriores para demostrar que $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ con $\|\varphi\|_\infty < 1$ induce un operador de composición compacto en H^2 (y en A^2).
4. Pruebe que C_φ es de Hilbert-Schmidt en $\mathcal{D}$ si y sólo si

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^2} dA(z)$$

es finita.

3. Operadores de composición compactos y medidas compactas de Carleson

Recordemos que las condiciones de acotación del operador de composición C_φ, actuando en el espacio de Bergman A^p, pueden ser descritas en términos de las medidas μ_φ, definidas por $\mu_\varphi(E) = A(\varphi^{-1}(E))$ para cada subconjunto boreliano de $\mathbb{D}$, afirmando que esta medida es de Carleson. Recordemos también, que el hecho de que la medida μ_φ sea de Carleson para A^p $(p \geq 1)$, es descrito geométricamente afirmando que $\mu(Q_r(\zeta)) = O(r^2)$ para todo $\zeta \in \mathbb{T}$ y $0 < r < 1$.

Forma parte de los hechos denominados del "folklore" del tema que mientras las condiciones de acotación se formulan en términos de comparación "O grande", las condiciones de compacidad lo hacen en términos de "o pequeña". Así correspondiendo a la noción de medida de Carleson tenemos una noción de medida *compacta de Carleson.* Precisando:

Teorema 2.37. (*cf.* [**110**]) *Sea $1 \leq p < \infty$. Si μ es una medida positiva de Borel en $\mathbb{D}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La aplicación identidad es una inclusión ultra-débilmente compacta de $A^p(\mathbb{D})$ en $L^p(\mathbb{D}, d\mu)$.*
2. *Se tiene que $\mu(Q_r(\zeta)) = o(r^2)$ cuando $r \to 0$, uniformemente en $\mathbb{T}$.*

Si una medida μ en $\mathbb{D}$ satisface las condiciones del Teorema anterior se dice que μ es una *medida compacta de Carleson* para A^p.

La correspondiente noción de medida compacta de Carleson para H^p se obtiene como sigue:

Teorema 2.38. (*cf.* [**110**]) *Sea $1 \leq p < \infty$. Si μ es una medida positiva de Borel en $\overline{\mathbb{D}}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La aplicación identidad es una inclusión ultra-débilmente compacta del espacio $H^p(\mathbb{D})$ en $L^2(\overline{\mathbb{D}}, d\mu)$.*
2. *Se tiene que $\mu(\overline{Q_r(\zeta)}) = o(r)$ cuando $r \to 0$, uniformemente en $\mathbb{T}$.*

Si una medida μ en $\mathbb{D}$ satisface las condiciones del Teorema anterior se dice que μ es una *medida compacta de Carleson* para H^p.

Como consecuencia inmediata del Teorema de cambio de variable de la teoría de la medida se obtiene la siguiente caracterización de los operadores de composición compactos en A^p y H^p del disco.

Corolario 2.39. *Sea $1 \leq p < \infty$ y $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica.*

1. *El operador C_φ es un operador compacto en A^p si y sólo si la medida μ_φ es una medida compacta de Carleson para A^p.*
2. *El operador C_φ es un operador compacto en H^p si y sólo si la medida μ_φ es una medida compacta de Carleson para H^p.*

Del mismo modo que para las medidas de Carleson, se tiene que también la caracterización de las medidas de Carleson compactas en A^p o en H^p es independiente de p, luego tenemos:

Corolario 2.40. *Si C_φ es acotado en A^p (respectivamente en H^p) para algún valor de $1 \leq p < \infty$ entonces es acotado en A^p (en H^p) para cada $1 \leq p < \infty$.*

Ejercicio 2.41.
1. Sea $\varphi(z) = sz + (1-s)$ con $0 < s < 1$ y $z \in \mathbb{D}$. ¿Cómo es $\varphi(\mathbb{D})$?. Muestre que $\varphi^{-1}(\overline{Q_r(1)}) = \overline{Q_{r/s}(1)}$. Demuestre que C_φ no es compacto en H^2.
2. Sea $\psi(z) = 1-(1-z)^b$ con $0 < b < 1$ y $z \in \mathbb{D}$. Describa $\psi(\mathbb{D})$. Muestre que C_ψ es compacto en H^2.
3. Establezca y verifique los resultados análogos para el espacio de Bergman A^2.

Concluimos esta sección usando los resultados anteriores sobre medidas de Carleson compactas en el espacio de Bergman para caracterizar los operadores de composición compactos en el espacio de Dirichlet $\mathcal{D}$. La prueba sigue la exposición en [**60**].

Teorema 2.42. *Sea $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Una condición necesaria y suficiente para que el operador de composición C_φ sea compacto en $\mathcal{D}$ es que la medida $d\mu(w) = n_\varphi(w)dA(w)$ sea una medida compacta de Carleson en A^2, donde $n_\varphi(w)$ es el número de ceros de la función $\varphi - w$.*

Demostración. Nótese que C_φ es compacto en $\mathcal{D}$ si y sólo si $\|f_n \circ \varphi\|_{\mathcal{D}} \to 0$ para cada sucesión $\{f_n\}$ acotada en $\mathcal{D}$ con $f_n \to 0$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ (ver Ejercicio 2.32).

Supóngase que C_φ es compacto en $\mathcal{D}$. Probaremos que μ es una medida compacta de Carleson en A^2 verificando que el operador inclusión $i : A^2 \to L^2(\mu)$ es compacto. Para ello, sea $\{g_n\}$ una sucesión acotada en A^2 con $g_n \to 0$ uniformemente sobre subconjuntos compactos y defínase $f_n(z) = \int_0^z g_n(w)dw$. La hipótesis implica que

$$\|g_n\|_{L^2(\mu)} = \|(f_n \circ \varphi)'\|_{A^2} \to 0$$

cuando $n \to \infty$ lo que prueba lo afirmado.

Asúmase ahora que μ es una medida compacta de Carleson en A^2. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en el espacio de Dirichlet con $\|f_n\|_{\mathcal{D}} \leq 1$ y $f_n \to 0$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Como el operador inclusión $i : A^2 \to L^2(\mu)$ es compacto se tiene que

$$\|(f_n \circ \varphi)'\|_{A^2} = \|f_n'\|_{L^2(\mu)} \to 0,$$

y como además $|f_n(\varphi(0))| \to 0$ se obtiene que $\|f_n \circ \varphi\|_{\mathcal{D}} \to 0$ y así C_φ es compacto.

$\square$

4. Operadores de composición compactos en espacios de Bergman

Los ejemplos considerados anteriormente posiblemente sugieran que de alguna manera la compacidad de C_φ ocurre si $\varphi(\mathbb{D})$ no está demasiado cerca de la frontera. El ejemplo que sigue aporta evidencia adicional. El resultado es seguramente bien conocido y aparece expresamente descrito en [**109**].

Ejercicio 2.43. Si $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ es transformación lineal fraccional

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

es bien conocido que $\varphi(\mathbb{D})$ es necesariamente un disco euclidiano.

1. Verifique que φ es necesariamente de la forma
$$\varphi(z) = c + R\varphi_a(z), \quad |\lambda| = 1, |a| < 1, |c| + R \leq 1,$$
donde φ_a denota el automorfismo del disco que intercambia a y el origen y es involutivo ($\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$).
2. Concluya que hay justamente dos tipos de tales transformaciones lineales fraccionales de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$: aquellas con $|c| + R < 1$ y aquellas con $|c| + R = 1$. Describa en cada caso $\varphi(\mathbb{D})$.
3. ¿Cuáles transformaciones lineales fraccionales de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ inducen operadores de composición compactos en A^2 (o en H^2)?. Pruebe que si φ es una transformación fraccional de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ el operador C_φ es compacto si y sólo es de Hilbert-Schmidt.

La formulación precisa de la intuición expresada antes, para operadores de composición en espacios de Bergman, es el contenido del siguiente Teorema. El resultado, como se indicó, es de [**73**] y expondremos la prueba siguiendo la presentada en [**107**].

TEOREMA 2.44. *Sea $p \geq 1$ y $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. El operador de composición*

$$C_\varphi : A^p(\mathbb{D}) \to A^p(\mathbb{D})$$

es compacto si y sólo si

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Por los resultados de la sección anterior es suficiente probar el Teorema cuando $p = 2$. En este caso consideraremos el adjunto C_φ^* de C_φ. Es fácil verificar que

$$\|C_\varphi^* k_z\|^2 = \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^2$$

donde

$$k_z(w) = \frac{1-|z|^2}{(1-w\overline{z})^2}, \quad (z, w \in \mathbb{D}),$$

son los núcleos reproductivos normalizados de A^2. Aquí y en el resto de la prueba usamos $\|\cdot\|$ para denotar la norma en A^2. Como $k_{z_n} \to 0$ ultra-débilmente para cada sucesión $\{z_n\}$ con $|z_n| \to 1^-$ es claro que la compacidad de C_φ implica la condición indicada en el Teorema.

Asumamos ahora que la condición indicada se cumple y sea $\{f_n\}$ una sucesión en A^2 que converge débilmente a 0. Probaremos que

$$\lim_{n\to\infty} \|C_\varphi f_n\| = 0.$$

Sea $\epsilon > 0$. Elíjase $\delta \in (0,1)$ tal que

$$1-|z|^2 < \epsilon(1-|\varphi(z)|^2), \quad \text{si } \delta < |z| < 1. \tag{2.2}$$

Usando la norma equivalente para A^2 introducida en el Ejercicio 1.15 vemos que existe una constante $C_1 > 0$, independiente de φ y de n tal que

$$\|C_\varphi f_n\| \leq C_1 \left[|f_n(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f_n'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 (1-|z|^2)^2 dA(z)\right].$$

Es claro que $f_n(\varphi(0)) \to 0$ si $n \to \infty$.

Escribimos la integral

$$\int_{\mathbb{D}} |f_n'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 (1-|z|^2)^2 dA(z)$$

como la suma de

$$I_n = \int_{|z|<\delta} |f_n'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 (1-|z|^2)^2 dA(z)$$

y

$$J_n = \int_{\delta<|z|<1} |f_n'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 (1-|z|^2)^2 dA(z).$$

Como $\{f_n'\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos y φ' es acotada en $\{z : |z| < \delta\}$ se tiene que $I_n \to 0$ si $n \to \infty$.

Usando (2.2) y el hecho que $\log \frac{1}{|z|} \approx 1 - |z|$ cuando $|z| \to 1^-$ se tiene que

$$J_n \leq 2C_2\epsilon \int_{\delta<|z|<1} |f_n'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 (1-|\varphi(z)|^2) \log \frac{1}{|z|} dA(z)$$

para una cierta constante C_2 (independiente de φ y n). Ahora por la fórmula de cambio de variable del Teorema 1.22 obtenemos

$$J_n \leq 2C_2\epsilon \int_{\mathbb{D}} |f_n'(z)|^2 (1-|z|^2) N_\varphi(z) dA(z),$$

donde N_φ es la función conteo de Nevanlinna introducida en (2.1).

La desigualdad de Littlewood (Teorema 2.34) afirma que

$$N_\varphi(z) \leq \log \left| \frac{1-\overline{\varphi(0)}z}{\varphi(0)-z} \right|$$

y como

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{1-\overline{\varphi(0)}z}{\varphi(0)-z} \right| &\approx 1 - \left| \frac{1-\overline{\varphi(0)}z}{\varphi(0)-z} \right|^2 \\ &= \frac{(1-|\varphi(0)|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{\varphi(0)}z|^2} \\ &\leq \frac{(1-|\varphi(0)|^2)(1-|z|^2)}{(1-|\varphi(0)|)^2} \\ &= \frac{(1+|\varphi(0)|)(1-|z|^2)}{1-|\varphi(0)|}, \end{aligned}$$

podemos encontrar una constante $C_3 > 0$, independiente de n y φ tal que

$$J_n \leq C_3 \left(\frac{1+\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|} \right) \epsilon \int_{\mathbb{D}} |f_n'(z)|^2 (1-|z|^2) dA(z).$$

Usando nuevamente el resultado del Ejercicio 1.15 tenemos que existe una constante $C_3 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} |f_n'(z)|^2(1-|z|^2)dA(z) \leq C_3\|f_n\|^2,$$

para todo n y como la sucesión $\{f_n\}$ es acotada en la norma de A^2 existe una constante $C_4 > 0$ independiente de n y φ tal que

$$J_n \leq C_4\left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)\epsilon$$

para todo n. Se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} J_n \leq C_4\left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)\epsilon$$

y como $\epsilon > 0$ es arbitrario tenemos que $J_n \to 0$ si $n \to \infty$, lo cual completa la prueba del Teorema. $\square$

Ejercicio 2.45. Pruebe que la condición del Teorema anterior es necesaria y suficiente para que el operador de composición C_φ inducido en H^2 por un símbolo univalente sea compacto. *Indicación:* Imite la prueba anterior. (Realmente la condición de univalencia puede ser sustituida por la de valencia finita.)

Es posible reescribir el Teorema anterior de un modo más geométrico, en términos de la derivada angular de funciones en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$.

Recuérdese que el Teorema de Julia-Carathéodory establece que si $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ y $|\zeta| = 1$, entonces φ tiene derivada angular finita en ζ si y sólo si

$$\liminf_{z\to\zeta} \frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2} < \infty.$$

Luego se tiene inmediatamente a partir del Teorema anterior el siguiente resultado:

Teorema 2.46. *En $A^p(\mathbb{D})$ $(1 \leq p < \infty)$ el operador C_φ es compacto si y sólo φ no tiene derivada angular finita en ningún punto de $\partial\mathbb{D}$.*

Ejercicio 2.47. Examine los ejemplos de operadores de composición compactos y no compactos, que se han dado en ejercicios anteriores, usando el (los) Teorema(s) anterior(es).

Ejercicio 2.48. Pruebe que si φ no tiene límites radiales de módulo 1 en ningún punto entonces C_φ es compacto en A^2.

EJERCICIO 2.49. [**73**, 3.12] *Un símbolo que llena el disco pero tal que C_φ es compacto:*

1. Describa una región Ω en el semiplano izquierdo que forme una franja infinita cuyas fronteras sean asintóticas al eje imaginario y tal que la función exponencial aplique dicha región sobre $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, alcanzando cada punto a lo más dos veces.
2. Sea F una aplicación univalente de $\mathbb{D}$ sobre Ω y $\varphi_0 = \exp \circ F$. Note que φ_0 aplica $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ con multiplicidad a lo más dos y no tiene límites radiales de módulo 1. Concluya que C_{φ_0} es un operador compacto en A^2.
3. Sea $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ y $\psi(z) = z\varphi_a(z)$. Note que ψ aplica $\mathbb{D}$ en sí mismo con multiplicidad dos y $\varphi(\mathbb{D} \setminus \{0\}) = \mathbb{D}$.
4. Sea $\varphi = \psi \circ \varphi_0$. Muestre que $\varphi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ y C_φ es compacto en A^2.

4.1. Norma esencial de operadores de composición en el espacio de Hardy. Como se indicó, el problema general de caracterizar operadores de composición compactos en el espacio de Hardy resultó ser de naturaleza diferente. Los siguientes ejemplos, tomados de [**73**], ilustran la situación:

EJEMPLO 2.50. [**73**, 3.6] Recuérdese (ver Ejercicio 2.33) que si C_φ es un operador de composición compacto en A^2 entonces φ no puede tener límites radiales de módulo uno en un conjunto de medida de Lebesgue positiva. La situación en H^2 es totalmente diferente. De hecho presentaremos una función φ interior, es decir con $\varphi(\zeta) = 1$ para casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$, tal que C_φ sea compacto en A^2. Tal símbolo φ no posee derivada angular en ningún punto de $\mathbb{T}$ y sin embargo C_φ ¡no es compacto en H^2!

Se trata de una función interior singular. Si μ es una medida positiva en $\mathbb{T}$, singular (con respecto a la medida de Lebesgue) y

$$\varphi(z) = \exp\left(-\int \frac{w+z}{w-z}\, d\mu(w) \right),$$

es fácil ver que φ está bien definida y es analítica en $\mathbb{D}$. De hecho si $u(z) = -\int P_z(w) d\mu(w) = -\mathrm{Re} \int \frac{w+z}{w-z} d\mu(w)$; donde $P_z(w) = (1-|z|^2)/|z-w|^2$ ($z \in \mathbb{D}$, $w \in \mathbb{T}$) es el núcleo de Poisson; se tiene que $|\varphi(z)| = e^{u(z)}$, y como μ es una medida positiva, $u(z) \leq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Además, el hecho que μ sea singular implica, por el Teorema de Fatou (cf. [**93**]), que $u(rw) \to 0$ cuando $r \to 1^-$ c.t.p. Luego si $|w| = 1$ y tanto φ como u tienen límite no tangencial en w, entonces $|\varphi(w)| = \lim_{r \to 1^-} |\varphi(rw)| =$

$\lim_{r\to 1^-} e^{-u(rw)} = 1$ c.t.p. Luego φ es una función interior. Tal función se dice una *función singular interior.*

En el caso de funciones interiores, un Teorema de Ahern y Clark [**1**] caracteriza los puntos en $\mathbb{T}$ en los cuales existe una derivada angular. En el caso de la función singular interior φ descrita antes, esto ocurre en el punto $w_0 \in \mathbb{T}$ si y sólo si

$$I_{w_0} := \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(w)}{|w - w_0|^2} < \infty.$$

Así pues, basta construir una medida singular μ que no cumpla la condición anterior para ningún $w_0 \in \mathbb{T}$. Para ello tómese $\{\mu_n\}$ una sucesión de números positivos tal que $\sum \mu_n < \infty$ pero $\sum \sqrt{\mu_n} = \infty$. Sean ahora arcos consecutivos I_n en $\mathbb{T}$ de longitud $\sqrt{\mu_n}$ y sea ζ_n el centro de cada uno de esos arcos. La medida requerida μ se define como

$$\mu := \sum \mu_n \delta_n,$$

donde δ_n es la medida de Dirac en el punto ζ_n. Para ver que la integral de la condición dada es infinita, basta observar que cada $w_0 \in \mathbb{T}$ pertenece a infinitos arcos I_{n_k} y por tanto $|w_0 - \zeta_{n_k}|$ es menor que $\sqrt{\mu_{n_k}}$ para todo k, luego la integral de la condición, que no es otra cosa que la suma $\sum \mu_n/|\zeta_n - w_0|^2$ diverge, pues tiene una cantidad infinita de sumandos mayores que 1.

Ejemplo 2.51. [**73**, 3.8] El símbolo del ejemplo anterior no posee derivada angular en ningún punto de $\mathbb{T}$. Como además $\varphi(\zeta) = 1,$ c.t.p. y teniendo en cuenta el resultado del Ejercicio 2.48, es tentador aventurar la hipótesis de si la no existencia de derivada angular junto a la condición de que los límites radiales tengan módulo menor que uno caracterizan la compacidad. Tal hipótesis fue propuesta en [**101**]. El siguiente ejemplo prueba que no es así.

Requeriremos el siguiente hecho que se puede verificar fácilmente: las funciones interiores que fijan el origen inducen operadores de composición isométricos en H^2 (de hecho esta condición caracteriza los operadores de composición isométricos en H^2, ver [**39**]). Sea ψ_0 la función singular interior construida en el ejemplo anterior y $\psi_0(0) = a$. Si φ_a es el automorfismo del disco que intercambia a y 0 y $\psi = \varphi_a \circ \psi_0$, entonces ψ es una función interior (es bien conocido que la composición de dos funciones interiores es otra vez interior), y fija el origen. Luego el operador de composición C_ψ es una isometría.

Sea ahora $\chi(z) = (1+z)/2$. Se puede ver fácilmente que C_χ no es compacto en H^2. Finalmente sea $\varphi = \chi \circ \psi$, $C_\varphi = C_\psi C_\chi$ no es compacto en H^2, en efecto: C_χ no lo es, luego la imagen de la bola unitaria B_1 de H^2 es un conjunto A cuya clausura no es compacta y como C_ψ es una isometría, $C_\psi(A) = C_\varphi(B_1)$ tampoco es relativamente compacto. Es fácil ver que φ no tiene derivada angular en ningún punto de $\mathbb{T}$ (un modo de verlo es observando que C_{ψ_0}, y por tanto C_ψ y C_φ, son compactos en A^2) y además $|\varphi(w)| < 1$ para casi todo $w \in \mathbb{T}$.

Como se indicó anteriormente, el problema de la compacidad para operadores de composición en el espacio de Hardy requiere considerar la función conteo de Nevanlinna y fue resuelto en [**98**]. De hecho en ese artículo J. Shapiro obtiene una expresión para la norma esencial del operador C_φ en H^2.

Unas palabras de motivación para el resultado (siguiendo las ideas en [**98**]). Recordemos en primer lugar la expresión para la norma en H^2 dada por la identidad de Littlewood-Paley

$$\|f\|_{H^2}^2 = |f(0)|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|} dA(z).$$

La formula de cambio de variable 1.22 aplicada acá permite obtener

$$\|f \circ \varphi\|_{H^2}^2 = |f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w).$$

Si consideramos el caso $\varphi(0) = 0$ observamos que de la desigualdad de Littlewood 2.34 en ese caso:

$$N_\varphi(w) \le \log\frac{1}{|w|},$$

y de las fórmulas anteriores se obtiene inmediatamente la acotación del operador de composición: $\|f\circ\varphi\|_{H^2}^2 \le \|f\|_{H^2}^2$ (con norma ≤ 1) en el caso $\varphi(0) = 0$. El caso general, como vimos, se obtiene componiendo con un automorfismo y calculando.

Así pues, podemos afirmar que la acotación del operador de composición C_φ en H^2 (es decir el principio de subordinación de Littlewood) es consecuencia de la desigualdad de Littlewood y esta puede escribirse (al menos en el caso $\varphi(0) = 0$) como

$$N_\varphi(w) = O(-\log|w|) \text{ cuando } |w| \to 1.$$

La intuición, ya indicada, de que a una condición O "grande" para acotación, corresponde una condición o "pequeña" para compacidad conduce a conjeturar que C_φ sería compacto en H^2 si

$$N_\varphi(w) = o(-\log|w|) \text{ cuando } |w| \to 1.$$

De hecho, éste es el resultado de J. Shapiro que marca un momento culminante en la teoría de operadores de composición y que presentaremos a continuación.

Recordemos que dado un operador acotado T actuando en el espacio de Banach X, su *norma esencial*

$$\|T\|_e = \text{ínf}\,\{\|T - K\| : K \text{ es compacto en } X\}$$

es una medida de la "no compacidad" de T en el sentido que $\|T\|_e = 0$ si y sólo si T es compacto. Obviamente $\|T\|_e \leq \|T\|$ pues el operador cero es compacto.

Presentamos a continuación el cálculo de la norma esencial del operador C_φ en H^2. Para el cálculo del estimado superior seguimos muy de cerca la exposición en un contexto más general (espacios pesados de Dirichlet) que aparece en [**39**]. Para el estimado inferior seguimos la prueba de [**86**], que utiliza resultados sobre factorización de funciones, en lugar de los argumentos sobre el comportamiento subarmónico de la función conteo de Nevanlinna que aparecen en la prueba original de Shapiro. De hecho la prueba de [**86**] se desarrolla en el contexto de espacios de Bergman usando la reciente teoría de factorización en esos espacios. Escribiremos a lo largo de la prueba $\|\cdot\|$ para designar la norma usual en el espacio de Hardy H^2.

TEOREMA 2.52. *Si $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, entonces en $H^2(\mathbb{D})$*

$$\|C_\varphi\|_e^2 = \limsup_{|w|\to 1} \frac{N_\varphi(w)}{\log(1/|w|)}.$$

ESTIMADO SUPERIOR. Requeriremos la siguiente terminología y los Lemas que aparecen a continuación. Sea R_n la proyección ortogonal de H^2 sobre $z^n H^2$ y $Q_n = I - R_n$, es decir: para $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ en H^2 sea $(R_n f)(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$ y $(Q_n f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$. Necesitaremos los siguientes estimados:

LEMA 2.53. *Para cada r, $0 < r < 1$ y $f \in H^2$ se tiene:*
1. $|(R_n f)(w)| \leq \|f\|(\sum_{k=1}^{\infty} r^{2k})^{1/2}$ *para* $|w| \leq r$.
2. $|(R_n f)'(w)| \leq \|f\|(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 r^{2k-2})^{1/2}$ *para* $|w| \leq r$.

Demostración. Probemos (2). Recordemos (ver ejercicio 1.11) que el funcional diferenciación en el punto $w \in \mathbb{D}$ es acotado en H^2 y viene dado por $f'(z) = \langle f, D_w \rangle$ donde $D_w = z/(1-\overline{w}z)$, entonces

$$\begin{aligned} |(R_n f)'(w)| = |\langle R_n f, D_w \rangle| &= |\langle f, R_n D_w \rangle| \\ &\leq \|f\| \|R_n D_w\| \\ &\leq \|f\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^2 r^{2k-2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

si $|w| \leq r$. La desigualdad (1) se obtiene de modo similar usando los núcleos de Szegö (ver Ejercicio 1.10.) □

Lema 2.54. *Si* $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, *entonces* $\|C_\varphi\|_e = \lim_{n\to\infty} \|C_\varphi R_n\|$.

Demostración. Veamos en primer lugar que el límite indicado existe. De hecho la sucesión $\{\|C_\varphi R_n\|\}$ es decreciente: sea n un entero no negativo, si $\|f\| \leq 1 \in H^2$ con $f(z) = \sum a_k z^k$, sea $g(z) = \sum b_k z^k$ con $a_k = b_k$ si $k \neq n$ y $b_n = 0$, se ve claramente que $R_n g = R_{n+1} f$ y $\|g\| \leq \|f\| \leq 1$, así que

$$\|C_\varphi R_{n+1} f\| = \|C_\varphi R_n g\| \leq \|C_\varphi R_n\|,$$

y así $\|C_\varphi R_{n+1}\| \leq \|C_\varphi R_n\|$ como se indicó.

Como $(R_n + Q_n)f = f$ y Q_n es compacto se tiene para cada n que

$$\|C_\varphi\|_e = \|C_\varphi R_n + C_\varphi Q_n\|_e \leq \|C_\varphi R_n\|_e \leq \|C_\varphi R_n\|,$$

así que

$$\|C_\varphi\|_e \leq \lim_{n\to\infty} \|C_\varphi R_n\|.$$

Para verificar la otra desigualdad, sea V un operador compacto arbitrario actuando en H^2. Se tiene que

$$\|C_\varphi - V\| \geq \|(C_\varphi - V)R_n\| = \|C_\varphi R_n - V R_n\| \geq \|C_\varphi R_n\| - \|V R_n\|.$$

Verificaremos que $\|V R_n\| = \|(V R_n)^*\| = \|R_n V^*\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ lo cual completará la prueba del Lema.

Sea $\epsilon > 0$ y $f \in B_1$ donde B_1 denotará de momento la bola unitaria cerrada de H^2, como V^* es compacto existe $f_1, \ldots f_m$, un conjunto finito de elementos de B_1, tal que las bolas de radio $\epsilon/2$ centradas en los $V^* f_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ cubren al conjunto compacto $V^* B_1$. Como R_n converge puntualmente a 0 elegimos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|R_n V^* f_i\| < \epsilon$ si $n \geq n_0$

para cada $i = 1, \dots, m$. Sea f_j tal que $\|V^*f - V^*f_j\| < \epsilon/2$, se tiene así que si $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \|R_n V^* f\| &\leq \|R_n V^* f - R_n V^* f_j\| + \|R_n V^* f\| \\ &\leq \|R_n\| \|V^* f - V^* f_j\| + \|R_n V^* f_j\| < \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Por el lema anterior

$$\|C_\varphi\|_e = \lim_{n\to\infty} \left[\sup\left\{\|C_\varphi R_n f\| : \|f\| \leq 1\right\}\right].$$

Tomemos pues f en la bola unitaria de H^2. Utilizando la identidad de Littlewood-Paley (Ejercicio 1.12)

$$\|C_\varphi R_n f\|^2 = |R_n f \circ \varphi(0)|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |(R^n f \circ \varphi)'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z).$$

Por el Lema 2.53, el primer término no excede a $\sum_{k=n}^\infty |\varphi(0)|^{2k}$, el cual tiende a 0 cuando n va a infinito. La fórmula de cambio de variable del Teorema 1.22 permite escribir el segundo término como

$$2\int_{\varphi(\mathbb{D})} |(R_n f)'(w)|^2 \left(\sum_{j\geq 1} \log \frac{1}{|z_j(w)|}\right) dA(w)$$

donde $\{z_j(w)\}$ es el conjunto de ceros de $\varphi - w$. La expresión en el paréntesis anterior es justamente la función conteo de Nevanlinna N_φ evaluada en w. Si fijamos un $r \in (0,1)$ esta integral está dominada por

$$\begin{aligned} &2 \sup_{|w|\leq r} |(R_n f)'(w)|^2 \int_{\mathbb{D}} N_\varphi(w) dA(w) \\ &+2\int_{r\leq |z|<1} |(R_n f)'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w). \end{aligned}$$

Usando el Lema 2.53 y otra vez la fórmula de cambio de variable vemos que el primer sumando esta acotado por

$$\begin{aligned} &\|f\|^2 \left(\sum_{k=n}^\infty k^2 r^{2k-2}\right) \left(2\int_{\mathbb{D}} |\varphi'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z)\right) \\ &\qquad = \|f\|^2 \left(\sum_{k=n}^\infty k^2 r^{2k-2}\right) (\|\varphi\|^2 - |\varphi(0)|^2), \end{aligned}$$

y cuando $n \to \infty$ esta cota tiende a 0.

El supremo de la expresión en el segundo sumando, cuando f recorre la bola unitaria cerrada de H^2, está dominado por el correspondiente supremo de

$$2\int_{r\leq|z|<1} |f'(w)|^2 N_\varphi(w)dA(w)$$

cuando f varia sobre el mismo conjunto, pues en el segundo caso el supremo se toma sobre un conjunto más grande. Acotamos ahora la expresión anterior por

$$\sup_{r\leq|z|<1} \frac{N_\varphi(w)}{\log(1/|w|)} \left(2\int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \log\frac{1}{|w|} dA(w)\right).$$

Así pues, como esta desigualdad es cierta para cada $r \in (0,1)$ tenemos que

$$\|C_\varphi\|_e \leq \lim_{r\to 1}\left(\sup_{r\leq|z|<1} \frac{N_\varphi(w)}{\log(1/|w|)}\right),$$

y obtenemos así el estimado superior de la norma esencial de C_φ. □

Estimado inferior. Sea K_w el núcleo reproductor en el punto $a \in \mathbb{D}$ para el espacio de Hardy H^2 y sea $k_w = K_w/\|K_w\|$ la correspondiente función normalizada, esto es:

$$k_w(z) = \frac{\sqrt{1-|w|^2}}{1-\overline{w}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Es inmediato que $k_w \to 0$ ultra-débilmente si $|w| \to 1^-$. Luego, si Q es un operador compacto arbitrario en H^2 se tiene que $\|Qk_w\| \to 0$ si $|w| \to 1^-$ y por tanto

$$\begin{aligned} \|C_\varphi - Q\| &\geq \limsup_{n\to\infty} \|(C_\varphi - Q)k_w\| \\ &= \limsup_{n\to\infty} \|C_\varphi k_w\|. \end{aligned}$$

Como $\|C_\varphi\|_e = \inf\{\|C_\varphi - Q\| : Q \text{ es compacto}\}$ tenemos el estimado

$$\|C_\varphi\|_e^2 \geq \limsup_{|w|\to 1} \|k_w \circ \varphi\|^2. \tag{2.3}$$

Sea $\varphi(0) = a$. Como $k_w(a) \to 0$ si $|w| \to 1$, se tiene que

$$\limsup_{|w|\to 1} \|k_w \circ \varphi\|^2 = \limsup_{|w|\to 1} \|k_w \circ \varphi - k_w(a)\|^2. \tag{2.4}$$

Nótese que las constantes son ortogonales a $k_w \circ \varphi - k_w(a)$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\langle k_w \circ \varphi, 1\rangle &= \frac{1}{\|K_w\|}\langle K_w, C_\varphi^* K_0\rangle \\
&= \frac{1}{\|K_w\|}\langle K_w, K_{\varphi(0)}\rangle \\
&= \langle k_w, K_a\rangle = k_w(a).
\end{aligned}$$

Escribimos entonces

$$\|k_w \circ \varphi - k_w(a)\|^2 = \|k_w \circ \varphi - k_w(w)\|^2 - |k_w(w) - k_w(a)|^2 \tag{2.5}$$

y $\psi = k_w \circ \varphi - k_w(w)$. Sea $|w| > |a|$, entonces $\varphi^{-1}(w) = \{z_j\}$ no contiene a 0 y los z_j son justamente los ceros de ψ. Si

$$B(z) = B_{\varphi,w}(z) = \prod_j \frac{z_j - z}{1 - \overline{z_j} z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

podemos factorizar $\psi = Bh$ con $h \in H^2$ libre de ceros, $\|\psi\| = \|h\|$ y tenemos

$$\begin{aligned}
|\psi(0)|^2 = |h(0)|^2 |B(0)|^2 &= |\langle h, 1\rangle|^2 \prod_j |z_j|^2 \\
&\leq \|h\|^2 \prod_j |z_j|^2 \\
&= \|\psi\|^2 \prod_j |z_j|^2,
\end{aligned}$$

así que

$$\|k_w \circ \varphi - k_w(w)\|^2 = \|\psi\|^2 \geq \frac{|\psi(0)|^2}{\prod_j |z_j|^2} = \frac{|k_w(a) - k_w(w)|^2}{\prod_j |z_j|^2}.$$

Por (2.3), (2.4) y (2.5) obtenemos

$$\|C_\varphi\|_e^2 \geq \limsup_{|w|\to 1} |k_w(w) - k_w(a)|^2 \left(\frac{1}{\prod_j |z_j|^2} - 1 \right).$$

Como $k_w(w) = 1/(1-|w|^2)^{1/2}$, $k_w(a) \to 0$ si $|w| \to 1$, las desigualdades $e^x - 1 \geq x$ y $\log(1/(1-x)) \geq x$ ($x \geq 0$) permiten escribir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\prod_j |z_j|^2} - 1 &= \exp\left(\sum_j \log \frac{1}{1-(1-|z_j|^2)}\right) - 1 \\
&\geq \sum_j \log \frac{1}{1-(1-|z_j|^2)} \\
&\geq \sum_j (1-(1-|z_j|^2),
\end{aligned}$$

y se tiene que

$$\|C_\varphi\|_e^2 \geq \limsup_{|w|\to 1} \frac{\sum_j (1-|z_j|^2)}{1-|w|^2} = \limsup_{|w|\to 1} \frac{N_\varphi(w)}{\log(1/|w|)},$$

pues $1 - x^2$ es asintótica a $\log(1/x^2)$ cuando $x \to 1$.

$\square$

CAPíTULO 3

La Norma de Operador de Composición

1. Norma de un operador de Composición

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal acotado. Recordemos que la norma de T está definida por

$$\begin{aligned}\| T \| &= \sup\{ \|T(f)\| : f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\} \\ &= \sup\{ \|T^*(f)\| : f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1\}.\end{aligned}$$

Calcular el valor exacto de la norma de un operador de composición en un espacio de Hilbert funcional analítico, es un trabajo difícil; por ejemplo, en el espacio de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, la norma de un operador de composición ha sido calculada sólo en ciertos casos especiales; sin embargo, es posible estimar adecuadamente la misma.

Lema 3.1. *En $H^2(\mathbb{D})$ los núcleos reproductivos normalizados $\{k_w\}$ tienden a cero débilmente cuando $|\, w \,| \to 1^-$.*

Demostración. Sea p un polinomio complejo. Sea $M = max\{|p(z)| : z \in \overline{\mathbb{D}}\}$. Entonces

$$\langle\, p, k_w \,\rangle = \langle\, p, \frac{K_w}{\| K_w \|} \,\rangle = \frac{1}{\|K_w\|} \langle\, p, K_w \,\rangle = \sqrt{1 - |w|^2}\, p(w);$$

consecuentemente,

$$0 \leq \lim_{|w| \to 1^-} |\langle\, p, k_w \,\rangle| \leq \lim_{|w| \to 1^-} M \sqrt{1 - |w|^2} = 0.$$

Consideremos ahora $f \in H^2(\mathbb{D})$. Entonces existe una sucesion de polinomios $\{p_n\}$ tal que $\lim_{n \to \infty} \|p_n - f\| = 0$. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que $\|p_n - f\| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. En consecuencia, para todo $w \in \mathbb{D}$:

$$|\langle\, f, k_w \,\rangle - \langle\, p_n, k_w \,\rangle| \;\leq\; \|f - p_n\| \cdot \|k_w\| < \varepsilon \;\text{ para todo }\; n \geq N.$$

Fijemos $n_0 \geq N$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que $1 - |w| < \delta$ implica $|\langle p_{n_0}, k_w \rangle| < \varepsilon$.

Luego, si $1 - |w| < \delta$,

$$|\left\langle f, k_w \right\rangle| \leq |\left\langle f - p_{n_0}, k_w \right\rangle| + |\left\langle p_{n_0}, k_w \right\rangle| < 2\varepsilon$$

□

Teorema 3.2. *Sea $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ un automorfismo. Entonces para toda $f \in H^2(\mathbb{D})$*

$$\left(\frac{1 - |\psi(0)|}{1 + |\psi(0)|} \right)^{1/2} \|f\| \; \leq \; \|C_\psi f\| \; \leq \left(\frac{1 + |\psi(0)|}{1 - |\psi(0)|} \right)^{1/2} \| f \|.$$

Más aun, estas desigualdades son óptimas y

$$\|C_\psi\| = \left(\frac{1 + |\psi(0)|}{1 - |\psi(0)|} \right)^{1/2}.$$

Demostración. Como ψ es un automorfismo de $\mathbb{D}$, ψ es una transformación fraccional lineal de la forma

$$\psi(z) = \lambda \frac{z + u}{1 + \bar{u} z}$$

donde $|\lambda| = 1$ y $|u| < 1$.

Sea f un polinomio complejo. Entonces f es acotada en $\mathbb{D}$ y por lo tanto, $f \circ \psi \in H^\infty(\mathbb{D})$ y su norma en H^2 es

$$\|f \circ \psi\|_{H^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f(\psi(e^{i\theta}))|^2 \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Como ψ es un homeomorfismo suave sobre el círculo unitario, podemos cambiar variables en el círculo:

$$e^{it} = \psi(e^{i\theta}) = \lambda \frac{e^{i\theta} + u}{1 + \bar{u} e^{i\theta}}$$

o

$$e^{i\theta} = \psi^{-1}(e^{it}) = \bar{\lambda} \frac{e^{it} - \lambda u}{1 - \overline{\lambda u} e^{it}}$$

de lo cual, al diferenciar y simplificar, se obtiene

$$e^{i\theta} d\theta = \frac{\overline{\lambda} e^{it} - \overline{\lambda} |u|^2 e^{it}}{(1 - \overline{\lambda u} e^{it})^2} dt.$$

Finalmente, tomando módulo tenemos

$$\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1-|\,u|^{2}}{|1-\overline{\lambda\,u}e^{it}|^{2}}\frac{dt}{2\pi}.$$

Así

$$\int_0^{2\pi} |f(\psi(e^{i\theta}))\,|^2\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f(e^{it})\,|^2\frac{1-|\,u|^2}{|1-\overline{\lambda\,u}e^{it}|^2}\frac{dt}{2\pi}\,.$$

Observemos ahora que

$$\frac{1-|\,u|^2}{(1+|u|)^2} \leq \frac{1-|\,u|^2}{|1-\overline{\lambda\,u}e^{it}|^2} \leq \frac{1-|\,u|^2}{(1-|u|)^2},$$

luego

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\frac{1-|\,u|^2}{(1+|u|)^2}\frac{d\theta}{2\pi} &\leq \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\frac{1-|\,u|^2}{|1-\overline{\lambda\,u}e^{it}|^2}\frac{dt}{2\pi}\\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(e^{i}t)|^2\frac{1-|\,u|^2}{(1-|u|)^2}\frac{d\theta}{2\pi}\,,\end{aligned}$$

y como $|u| = |\psi(0)|$, se concluye que

$$\left(\frac{1-|\psi(0)|}{1+|\psi(0)|}\right)^{1/2}\|f\| \leq \|C_\psi f\| \leq \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}\right)^{1/2}\|\,f\,\|.$$

Puesto que los polinomios son densos en $H^2(\mathbb{D})$, estas desigualdades son válidas para todo f en $H^2(\mathbb{D})$.

Para mostrar que la desigualdad de la derecha es óptima, recordemos que $\forall\ w \in \mathbb{D}:\ C_\psi^*(k_w) = k_{\psi(w)}$. Pongamos $u = se^{i\theta}$ y sea $\{r_n\}$ una sucesión de números reales positivos que converge, de manera creciente, a 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $w_n := r_n\, e^{i\theta}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|C_\psi^*\|^2 &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{\|K_{\psi(w_n)}\|^2}{\|K_{w_n}\|^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1-|\,w_n|^{\,2}}{1-|\psi(w_n)|^{\,2}} \\
&= \frac{1-|\,u|^{\,2}}{1-|u|^{\,2}} \\
&= \frac{1-|\,\psi(0)|^{\,2}}{1-|\psi(0)|^{\,2}}.
\end{aligned}$$

Esto prueba que la desigualdad de la derecha es óptima y que

$$\|C_\psi\| = \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}\right)^{1/2}.$$

Nótese ahora que, para toda $f \in H^2(\mathbb{D})$:

$$\|f\| = \|C_\psi^{-1} C_\psi f\| \leq \|C_\psi^{-1}\|\,\|C_\psi f\|\,.$$

Por lo tanto, al ser $|\psi^{-1}(0)| = |\psi(0)|$, se tiene

$$\|C_\psi f\| \geq \frac{1}{\|C_\psi^{-1}\|}\|f\| = \frac{1}{\|C_{\psi^{-1}}\|}\|f\| = \left(\frac{1-|\psi^{-1}(0)|}{1+|\psi^{-1}(0)|}\right)^{1/2}\|f\|.$$

Para mostrar que esta desigualdad también es óptima consideremos una sucesión $\{g_n\}$ tal que $\lim \|C_\psi\, g_n\| = \|C_\psi^{-1}\|$ y definamos $f_n := C_\psi^{-1}\, g_n$. Entonces

$$\lim \|C_\psi\, f_n\| = \lim \|g_n\| = \left(\frac{1-|\psi(0)|}{1+|\psi(0)|}\right)^{1/2}\|f\|.$$

□

Corolario 3.3. *Sea $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función analítica, entonces en $H^2(\mathbb{D})$ tenemos*

$$\left(\frac{1}{1-|\psi(0)|^2}\right)^{1/2} \leq \|C_\psi\| \leq \left(\frac{1+|\psi(0)|}{1-|\psi(0)|}\right)^{1/2}. \tag{3.1}$$

Las estimaciones 3.1, muestran que si $\psi(0) = 0$ entonces $\| C_\psi \| = 1$,. La desigualdad inferior es alcanzada cuando ψ es una constante, y la desigualdad superior cuando ψ es una función interior.

2. Normas de Operadores de Composición y Núcleos reproductivos

La norma de un operador de composición inducido por una función interior fue calculada por E. A. Nordgren en 1968, [**82**]. C. Cowen en 1988, [**41**], dedujo una fómula para el operador de composicón C_ψ cuando $\psi(z) = sz + t$, donde $|s| + |t| \leq 1$. C. Cowen mostró que, en este caso:

$$\| C_\psi \| = \left(\frac{2}{1 + |s|^2 - |t|^2 + \sqrt{(1 - |s|^2 + |t|^2)^2 - 4|t|^2}} \right)^{1/2}.$$

El problema de calcular la norma de un operador de composición es que debemos considerar la acción de C_ψ, o de C_ψ^* sobre todas las funciones $f \in H^2(\mathbb{D})$, de norma 1; por tal razón, preferimos considerar C_ψ, o C_ψ^*, en un subconjunto conveniente de funciones de norma 1, que nos permitan facilitar los cálculos. Uno de tales conjuntos es la colección de núcleos reproductivos normalizados. Esto vincula el problema del cálculo de la norma de un operador de composición con el célebre problema de los núcleos reproductivos:

¿Qué rol desempeñan los núcleos reproductivos en las propiedades de un operador que actúa en un espacio de Hilbert funcional?

Sea $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función analítica. Definimos:

$$\begin{aligned} S_\psi &= \sup\{ \| C_\psi k_w \| : w \in \mathcal{D},\ \|k_w\| = 1\} \\ S_\psi^* &= \sup\{ \| C_\psi^* k_w \| : w \in \mathcal{D},\ \|k_w\| = 1\} \end{aligned}$$

Es claro que $\| C_\psi \| \geq S$ y $\| C_\psi^* \| \geq S^*$.

- **Supongamos que $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es una función analítica. ¿Cuándo la norma del operador de composición C_ψ es igual a S_ψ o a S_ψ^*?**

El núcleo reproductivo del punto $w \in \mathbb{D}$ en $H^2(\mathbb{D})$ es

$$K_w(z) = \frac{1}{1-\overline{w}z}.$$

Por lo tanto

$$\| K_w(z) \| = \sqrt{\frac{1}{1-|w|^2}}.$$

y

$$k_w(z) := \frac{K_w(z)}{\| K_w \|} = \frac{\sqrt{1-|\, w\,|^2}}{1-\overline{w}z}.$$

PROPOSICIÓN 3.4. *Sea C_ψ un operador de composición en el espacio $H^2(\mathbb{D})$. Entonces*

$$S_\psi^* \,\leq\, S_\psi$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $w \in \mathbb{D}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\|C_\psi^* k_w\| &= \frac{\|C_\psi^* K_w\|}{\|K_w\|} = \frac{\|K_{\psi(w)}\|}{\|K_w\|} \\
&= \frac{\sqrt{1-|w|^2}}{\sqrt{1-|\psi(w)|^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1-|w|^2}\,\sqrt{1-|\psi(w)|^2}}{1-|\psi(w)|^2} \\
&= \sqrt{1-|w|^2}\,\sqrt{1-|\psi(w)|^2}\,\|K_{\psi(w)}\|^{\,2} \\
&= \sqrt{1-|w|^2}\,\sqrt{1-|\psi(w)|^2}\,|\langle K_{\psi(w)}, K_{\psi(w)}\rangle| \\
&= \sqrt{1-|w|^2}\,\sqrt{1-|\psi(w)|^2}\,|\langle K_{\psi(w)}, C_\psi^* K_w\rangle| \\
&= \sqrt{1-|w|^2}\,\sqrt{1-|\psi(w)|^2}\,|\langle C_\psi K_{\psi(w)}, K_w\rangle| \\
&\leq \sqrt{1-|w|^2}\,\sqrt{1-|\psi(w)|^2}\,\|C_\psi K_{\psi(w)}\|\,\| K_w \| \\
&= \sqrt{1-|\psi(w)|^2}\,\|C_\psi K_{\psi(w)}\| \\
&= \|C_\psi K_{\psi(w)}\|.
\end{aligned}$$

Tomando supremo a ambos lados tenemos

$$S_\psi^* \,\leq\, S_\psi$$

□

TEOREMA 3.5. *Supongamos que C_ψ es un operador de composicón compacto en $H^2(\mathbb{D})$ y que $\psi(0) \neq 0$. Entonces*

$$\|C_\psi\| = S_\psi^*$$

si y sólo si $\psi(z) = sz + t$ para constantes complejas s y t, las cuales satisfacen $|\,s| + |\,t| < 1$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que C_ψ es compacto, $\psi(0) \neq 0$ y $\|C_\psi\| = S_\psi^*$.

Como k_w converge a cero débilmente cuando $|\,w| \to 1^-$ y C_ψ es compacto

$$\lim_{|w| \to 1^-} \|\, C_\psi^* k_w\| = 0$$

de manera que S_ψ^* es igual $\|\, C_\psi^* k_\beta \,\|$ para algún $\beta \in \mathbb{D}$. Luego

$$\begin{aligned}
\|\, C_\psi \,\| &= \|\, C_\psi^* k_\beta \,\| \\
&= \sqrt{1 - |\beta|^2}\, \sqrt{1 - |\psi(\beta)|^2}\, |\langle C_\psi K_{\psi(\beta)}, K_\beta \rangle| \\
&\leq \sqrt{1 - |\beta|^2}\, \sqrt{1 - |\psi(\beta)|^2}\, \|C_\psi K_{\psi(\beta)}\|\, \|\, K_\beta \,\| \\
&= \sqrt{1 - |\psi(\beta)|^2}\, \|C_\psi K_{\psi(\beta)}\| \\
&= \|C_\psi K_{\psi(\beta)}\| \\
&\leq \|C_\psi\|;
\end{aligned}$$

en consecuencia, cada desigualdad en la cadena precedente es una igualdad. En particular $|\langle C_\psi K_{\psi(\beta)}, K_\beta \rangle| = \|C_\psi K_{\psi(\beta)}\|\, \|\, K_\beta \,\|$. Por lo tanto $C_\psi K_{\psi(\beta)} = c\, K_\beta$ para alguna constante c diferente de cero. Esto es

$$\begin{aligned}
K_{\psi(\beta)} \circ \psi &= c\, K_\beta \\
K_{\psi(\beta)}(\psi(z)) &= c\, K_\beta(z) \\
\frac{1}{1 - \overline{\psi(\beta)}\, \psi(z)} &= c\, \frac{1}{1 - \overline{\beta} z} \\
1 - \overline{\beta} z &= c\, (1 - \overline{\psi(\beta)} \psi(z)) \\
\overline{\psi(\beta)} \psi(z) &= (1 - \frac{1}{c}) \, + \, (\frac{\overline{\beta}}{c}) z
\end{aligned}$$

Como $\|C_\psi K_{\psi(\beta)}\| = \|C_\psi\| \geq \dfrac{1}{\sqrt{1-|\psi(0)|^2}}$ y $\psi(0) \neq 0$ debe ser $\psi(\beta) \neq 0$. En consecuencia $\psi(z) = sz + t$ para algunas constantes s y t en $\mathbb{C}$.

Como $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, tenemos $|\psi(z)| = |sz+t| < 1$. Supongamos $t \neq 0$, pongamos $s/t = |s/t|e^{i\theta}$ y definamos la sucesión

$$z_n \ := \big(1 - \frac{1}{n}\big)e^{-i\theta}.$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = e^{-i\theta}$ y además $|z_n| = 1 - \frac{1}{n} < 1$, de manera que $|\,\psi(z_n)\,| \ = \ |\,sz_n + t\,| < 1$. Tomando límite se obtiene

$$|\,\psi(e^{-i\theta})\,| \ \leq \ 1.$$

Pero

$$\begin{aligned}
|\,\psi(e^{-i\theta})\,| \ &= \ |\,se^{-i\theta} \ + \ t\,| \\
\psi(e^{-i\theta})\,| \ &= \ |\,|\frac{s}{t}|e^{i\theta}\, te^{-i\theta} \ + \ t\,| \\
|\,\psi(e^{-i\theta})\,| \ &= \ |\,t|\,|\,|\frac{s}{t}| \ + \ 1\,| \\
|\,\psi(e^{-i\theta})\,| \ &= \ |s| \ + \ |\,t\,|
\end{aligned}$$

de aquí $|\,s\,|+|\,t\,| \ \leq 1$. La compacidad de C_ψ obliga a que $|\,s\,|+|\,t\,| \ < 1$. En efecto:
supongamos que $|\,s\,|+|\,t\,| \ = 1$, $\dfrac{s}{t} =|\dfrac{s}{t}|e^{i\theta}$ y consideremos nuevamente la sucesión $z_n =\big(1 - \frac{1}{n}\big)e^{-i\theta}$. Entonces

$$|\,\psi(z_n)\,|^2 \ = \ |\,sz_n + t\,|^2 \ = \ |\,t|^2\,\big(\,|\frac{s}{t}|\big(1 - \frac{1}{n}\big) \ + \ 1\,\big)^2.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
\|\,C_\psi^* k_{z_n}\,\|^2 \ &= \ \frac{1-\big(1-\frac{1}{n}\big)^2}{1-\big(|\,s\,|+|\,t\,| - \frac{|\,s\,|}{n}\,\big)^2} \\
&= \ \frac{1-\big(1-\frac{1}{n}\big)^2}{1-\big(|1 - \frac{|\,s\,|}{n}\,\big)^2} \\
&= \ \frac{n^2 - (\,n-1)^2}{n^2 - (\,n - |\,s\,|)^2},
\end{aligned}$$

de lo cual, tomando límite, se obtiene

$$\| C_\psi^* k_{z_n} \|^2 \to \frac{1}{|s|}$$

lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que $\psi(z) = sz + t$ donde $|s| + |t| < 1$. Debemos probar que $\|C_\psi\| = S_\psi^*$

C. Cowen demostró en [**41**] que

$$\| C_\psi \| = \left(\frac{2}{1 + |s|^2 - |t|^2 + \sqrt{(1 - |s|^2 + |t|^2)^2 - 4|t|^2}} \right)^{1/2}$$

Sea

$$\beta = \begin{cases} 0 & s = 0 \\ \frac{1 - |s|^2 - |t|^2 - \sqrt{(1 - |s|^2 - |t|^2)^2 - 4|s|^2|t|^2}}{2|s||t|} e^{i(arg(t) - arg(s))} & s \neq 0 \end{cases}$$

llamemos $q = (1 - |s|^2 - |t|^2)^2 - 4|t|^2|s|^2$. Observemos que

$$q = \left(1 - (|s| - |t|)^2\right)\left(1 - (|s| + |t|)^2\right)$$

de modo que q es positiva $(|s| - |t| \le |s + t| \le |s| + |t| < 1)$.

Luego, dado $s \neq 0$

$$|\beta| = \left(\frac{1 - |s|^2 - |t|^2 - \sqrt{q}}{2|s||t|} \right) = \frac{2|s||t|}{1 - (|s|^2 + |t|^2) + \sqrt{q}}.$$

Usando el hecho que $|s|^2 + |t|^2 \le 1 - 2|s|^2|t|^2$, tenemos que $\beta \in \mathbb{D}$.

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\|C_\psi\|^2 &\geq S_\psi^* \\
&\geq \| C_\psi^* k_\beta \|^2 \\
&= \frac{1-|\beta|^2}{1-| s\beta + t|^2}. \\
&= \frac{1-\left(\dfrac{2|s||t|}{1-(|s|^2+|t|^2)+\sqrt{q}}\right)^2}{1-\left(\dfrac{2|t|}{1-|s|^2+|t|^2+\sqrt{q}}\right)^2} \\
&= \frac{1-|s|^{\,2}+|t|^{\,2}+\sqrt{q}}{1-|s|^{\,2}-|t|^{\,2}+\sqrt{q}} \\
&= \frac{2}{1+|s|^{\,2}-|t|^{\,2}+\sqrt{q}} \\
&= \|C_\psi\|^2,
\end{aligned}
$$

y en consecuencia

$$\|C_\psi\| = S_\psi^*$$

□

De la demostración del teorema anterior se deduce el siguiente resultado.

Corolario 3.6. *Supongamos que* $S_\psi^* = \| C_\psi \|$, *que* $\psi(0) \neq 0$, *y que* ψ *no tiene la forma* $\psi(z) = sz + t$ *para algunas constantes* s, t. *Entonces*

$$S_\psi^* = \limsup_{|w|\to 1^-} \| C_\psi^* (k_w) \|.$$

Proposición 3.7. *Supongamos que* $S_\psi^* = \| C_\psi \|$, *que* $\psi(0) \neq 0$, *y que* ψ *no tiene la forma* $\psi(z) = sz + t$ *para algunas constantes* s, t, *entonces*

$$\| C_\psi \| = \| C_\psi \|_e,$$

donde $\| C_\psi \|_e$*, denota la norma esencial de* C_ψ*.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Q un operador compacto en $H^2(\mathbb{D})$ y sea $\{w_j\}$ una suceción en el disco con $| w_j | \to 1$. Entonces $Q^* k_{w_j} \xrightarrow{w} 0$ en $H^2(\mathbb{D})$, así

$$\begin{aligned} \| C_\psi^* - Q^* \| &\geq \lim_{j\to\infty} \| (C_\psi^* - Q^*) k_{w_j} \| \\ &= \lim_{j\to\infty} \| C_\psi^* k_{w_j} - Q^* k_{w_j} \| \\ &= \lim_{j\to\infty} \| C_\psi^* k_{w_j} \|. \end{aligned}$$

Para cualquier operador compacto Q,

$$\| C_\psi - Q \| \geq \limsup_{|w|\to 1^-} \| C_\psi^* (k_w) \|.$$

En consecuencia.

$$\| C_\psi \|_e \equiv \inf\{ \| C_\psi - Q \| : Q \text{ compacto}\} \geq \limsup_{|w|\to 1^-} \| C_\psi^* (k_w) \|.$$

Finalmente, Por el corolario 3.6 tenemos

$$\| C_\psi \| \geq \| C_\psi \|_e \geq \limsup_{|w|\to 1^-} \| C_\psi^* (k_w) \| = S_\psi^* = \| C_\psi \|.$$

□

El hecho de que $\| C_\psi \| = \| C_\psi \|_e$, no garantiza el que S_ψ^* sea igual a $\| C_\psi \|$. Por ejemplo, la función interior (no univalente)

$$\varphi(z) = \left(\frac{1-2z}{2-z} \right)^2$$

satisface $\| C_\varphi \| = \| C_\varphi \|_e$, [**98**]; sin embargo $S_\psi^* < \| C_\psi \|$, [**3**].

CAPíTULO 4

Normalidad, Subnormalidad, Hiponormalidad

1. Normalidad, Invertibilidad, Subnormalidad e Hiponormalidad de Operadores de Composición

En esta sección consideraremos operadores de composición actuando sobre el espacio $H^2(\mathbb{D})$, y discutiremos los siguientes problemas.

- ¿Bajo qué condiciones es normal (inversible, subnormal) un operador de composición $C_\phi : H^2 \to H^2$.
- Caracterización de la Hiponormalidad y de la Subnormalidad conjunta para n-uplas conmutativas de operadores de composición, $(C_{\phi_1}, C_{\phi_2}, ..., C_{\phi_n})$, en términos de los símbolos ϕ_i, $i = 1...n$.
- Caracterización de Subnormalidad para n-uplas conmutativas, $(C^*_{\sigma_1}, C^*_{\sigma_2}, ..., C^*_{\sigma_n})$, de adjuntos de operadores de composición.

Ya hemos mencionado que dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y operadores $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la expresión: $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, denotará al *conmutador* de A, B; es decir, al operador: $\mathrm{AB} - \mathrm{BA}$.

Recordemos que un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice **normal** si $[T, T^*] = 0$.

Definición 4.1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice *subnormal* si existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ que contiene a $\mathcal{H}$ y un operador normal $N \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ tal que $N\big|_{\mathcal{H}} = S$. Un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice ser *hiponormal* si

$$[T^*, T] \geq 0. \tag{4.1}$$

Esta desigualdad puede ser expresada también en forma matricial por

$$\begin{pmatrix} I & T^* \\ T & T^*T \end{pmatrix} \geq 0.$$

Una caracterización similar (ver [**36**]) se tiene para operadores subnormales, como sigue:

Proposición 4.2 (Bram-Halmos). *$S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador subnormal si, y sólo si, la matriz*

$$\begin{pmatrix} I & S^* & S^{*2} & \dots & S^{*n} \\ S & S^*S & S^{*2}S & \dots & S^{*n}S \\ S^2 & S^*S^2 & S^{*2}S^2 & \dots & S^{*n}S^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S^n & S^*S^n & S^{*2}S^n n & \dots & S^{*n}S^n \end{pmatrix} \geq 0, \ (\forall\, n \geq 1).$$

Es claro que **todo operador normal es subnormal**; por otra parte, sea $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador subnormal y sea $N \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ una extensión normal de S. Entonces, bajo la descomposición $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$, N admite una representación matricial

$$N = \begin{pmatrix} S & T \\ 0 & U \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Debido a que N es un operador normal, $[N^*, N] = 0$, lo que implica que $S^*S - SS^* = TT^*$. En consecuencia $[S^*, S] \geq 0$; y así, **cualquier operador subnormal es hiponormal**.

Definición 4.3. Una extensión normal $N \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, de un operador subnormal $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, se dice una **extensión normal minimal** si $\mathcal{K}$ no tiene subconjuntos propios que contienen a $\mathcal{H}$ y reducen a N. Equivalentemente, $N \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ es una extensión normal minimal de $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si

$$\mathcal{K} = \bigvee \{N^{*j}\xi : j \in \mathbb{N}, \xi \in \mathcal{H}\}.$$

Observación 4.4 (Ver [**36**]). (i) Cualquiera dos extensiones normales minimales de un operador subnormal son unitariamente equivalentes; en consecuencia, podemos referirnos a una tal extensión normal como: **La Extensión Normal Minimal**.

(ii) Si N es la extensión normal minimal de un operador subnormal S, entonces $\partial\sigma(S) \subseteq \sigma(N) \subseteq \sigma(S)$.

TEOREMA 4.5. *Si C_φ es hiponormal entonces $\varphi(0) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por $\mathbf{1} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ la función definida como $\mathbf{1}(z) := 1$ Entonces,

$$C_\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}(\varphi) = \mathbf{1}$$

. Así $\mathbf{1}$ es un autovector para C_φ (para el autovalor $\lambda = 1$). La hiponormalidad de C_φ implica que $\mathbf{1}$ es también un autovector para C_φ^* (porque $\mathtt{ker}(T) \subseteq \mathtt{ker}(T^*)$ para T hiponormal), por lo tanto

$$K_{\varphi(0)} = C_\varphi^*(K_0) = C_\varphi^*(\mathbf{1}) = \mathbf{1} = K_0$$

ya que la correspondencia $\mathbb{D} \ni w \to K_w$ es inyectiva, concluimos que $\varphi(0) = 0$ □

El siguiente teorema es bien conocido y puede deducirse a partir de los resultados del Capítulo 2. Los detalles pueden ser vistos en [**39**].

TEOREMA 4.6. *Si φ es una aplicación analítica del disco en el mismo, entonces sobre H^p con $p \geq 1$,*

$$\left(\frac{1}{1 - |\varphi(0)|^2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|C_\varphi\| \leq \left(\frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{p}}$$

COROLARIO 4.7. *Si $C_\varphi : H^2 \to H^2$ es hiponormal, entonces $\|C_\varphi\| =$* 1.

2. Normalidad e Invertibilidad

DEFINICIÓN 4.8. Sea $\mathcal{H} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ un espacio de Hilbert. Un operador $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, se dice **casi-multiplicativo** si

$$T(f_1 \cdot f_2) = T(f_1) \cdot T(f_2), \text{ siempre que } f_1,\ f_2 \text{ y } f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{H}.$$

El lector podrá ver una prueba de la siguiente caracterización de un operador de composición en H^p en [**95**].

Lema 4.9. *A $(\neq 0) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^p(\mathbb{D}))$, $p \geq 1$, es un operador de composición si y sólo si A es casi-multiplicativo.*

Teorema 4.10 (H. J. Schwartz, Tésis Doctoral 1969 [**95**]). .
Sea $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.

1. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*
a) C_φ^* es un operador de composición.

b) Existe una constante compleja a, de módulo ≤ 1, tal que

$$\varphi(z) = a\, z, \quad \forall\ z \in \mathbb{D}.$$

c) C_φ es normal.

Demostración.

1. $[a \Rightarrow b]$.
Supongamos que $C_\varphi^* = C_\psi$, para alguna $\psi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. En consecuencia:

$$C_\varphi^* f(w) = f(\psi(w)) = \langle f, K_{\psi(w)} \rangle, \quad f \in \mathcal{H}, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Recordemos que los núcleos reproductivos del espacio H^2 son funciones en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ de la forma

$$K_w(z) := \frac{1}{1 - \overline{w}\, z}, \;\; w\,(\text{fijo}),\; z \in \mathbb{D}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
K_w(\varphi(z)) &= \langle K_w, K_{\varphi(z)} \rangle \\
&= \langle K_w, C_\varphi^* K_z \rangle \\
&= \langle C_\varphi K_w, K_z \rangle \\
&= (K_w \circ \varphi)(z) \\
&= (C_\varphi K_w)(z) \\
&= (C_\psi^* K_w)(z) \\
&= K_{\psi(w)}(z)
\end{aligned}$$

para todo $z, w \in \mathbb{D}$.
Por lo tanto $\overline{w}\varphi(z) = \overline{\psi(w)} z$, para todo $z, w \in \mathbb{D}$.

Fijemos un valor de w. Entonces la función $\frac{\varphi(z)}{z}$, analítica en $\mathbb{D}\backslash\{0\}$, debe ser constante allí; en consecuencia, podemos extenderla analíticamente a todo $\mathbb{D}$, con lo que necesariamente:

$$\varphi(z) = az.$$

Finalmente, por el lema de Schwarz se obtiene $|a| \leq 1$. La igualdad $\psi = \bar{a}z$ es immediata.

$[b \Rightarrow a, c]$.
Pongamos $\psi(w) := \bar{a}\,(z).\ w \in \mathbb{D}$.
Mostraremos, en primer lugar, que $C_\phi^* = C_\psi$. Para ello será suficiente verificar que la igualdad se satisface al evaluar los operadores sobre los núcleos reproductivos: en efecto,

Fijemos $w \in \mathbb{D}$. Entonces, $\forall\ z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned}
C_\varphi^* K_w(z) &= K_{\varphi(w)}(z) \\
&= \frac{1}{1 - \overline{aw}\, z} \\
&= \frac{1}{1 - \overline{w}\,\bar{a}\, z} \\
&= K_w(\psi(z)) \\
&= C_\psi K_w(z).
\end{aligned}$$

Luego, C_φ^* es un operador de composición.

Para ver que, en este caso, C_φ es un operador normal, notemos que si $C_\varphi^* = C_\psi$, entonces

$$[C_\varphi^*, C_\varphi] = [C_\psi, C_\varphi] = C_{\psi\circ\varphi} - C_{\varphi\circ\psi} = 0\,,$$

ya que por (b), φ y ψ son lineales, y en consecuencia conmutan.

$[c \Rightarrow b]$.
Si C_φ es normal entonces, por el teorema 4.5, $\varphi(0) = 0$; en consecuencia, la serie de Fourier de φ en H^2 es de la forma

$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e_n$. Luego, por la identidad de Parseval:

$$\begin{aligned} \| \, C_\varphi^* e_1 \, \|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |\langle C_\varphi^* e_1, e_n \rangle|^{\,2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_1, \varphi^n \rangle|^{\,2}. \end{aligned}$$

Pero $\varphi(0) = 0$, así que $\langle e_1, \varphi^n \rangle = 0$ para $n \geq 2$. Por lo tanto,

$$\|C_\varphi^* e_1\|^2 = |\, a_1|^2.$$

Por otro lado,

$$\| \, C_\varphi(e_1) \, \|^2 \; = \; \| \, \varphi \, \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,|^2.$$

De manera que siendo $[C_\varphi^*, C_\varphi] \; = \; 0$, debe tenerse

$$|\, a_1 \,|^2 \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n \,|^2.$$

En consecuencia, $a_n = 0$ para $n \, \geq \, 2$ y $\psi(z) = a_1 \, z$.

□

Teorema 4.11. *C_ψ es inversible si y solo si ψ es un automorfismo del disco. En este caso $C_\psi^{-1} = C_{\psi^{-1}}$*

Demostración. $[\Rightarrow]$:
Supongamos que C_ψ es inversible, es decir, existe un operador $A \in H^2(\mathcal{D})$, tal que $AC_\psi = C_\psi A = I$.

Mostraremos, en primer lugar, que A es casi-multiplicativo:

Sean $f_1, f_2 \in H^2(\mathbb{D})$ tales que $f_1 \cdot f_2 \in H^2(\mathbb{D})$. Como C_ψ es sobreyectiva, existen g_1, $g_2 \in H^2(\mathbb{D})$ tales que $C_\psi g_1 = f_1$ y $C_\psi g_2 = f_2$. Luego

$$C_{\,\psi} \, g_1 \cdot g_2 \; = \; C_\psi g_1 \cdot C_\psi g_2 = f_1 \cdot f_2.$$

Invocado de nuevo la sobreyectividad de C_φ, tenemos que existe $h \in H^2(\mathbb{D})$ tal que $C_\psi h = f_1 \cdot f_2$. Ahora bien, las funciones $g_1 \cdot g_2$, h son analíticas en $\mathbb{D}$, y coinciden el el abierto $\psi(\mathbb{D})$. Por el principio de unicidad para funciones analíticas concluimos que $g_1 \cdot g_2 = h$ en $\mathbb{D}$. En consecuencia, $g_1 \cdot g_2 \in H^2(\mathbb{D})$ y además

$$\begin{aligned} Af_1 \cdot f_2 &= AC_\psi g_1 \cdot AC_\psi g_2 \\ &= AC_\psi g_1 \cdot g_2 \\ &= g_1 \cdot g_2 \\ &= Af_1 \cdot Af_2. \end{aligned}$$

Luego, A es casi-conmutativa y por el lema 4.9, exite un θ tal que $A = C_\theta$. A es la inversa de C_ψ, así que ,

$$C_\theta C_\psi = C_\psi C_\theta = I = I_{e_1}$$

de este modo $\psi\theta = \theta\psi = e_1$. Esto implica que que ψ es un automorfismo del disco y $\theta = \psi^{-1}$.

[$\Leftarrow$]. Evidente.

$\square$

3. Subnormalidad e Hiponormalidad

En [**41**], C.C. Cowen caracterizó los operadores de composición hiponormales, con símbolo fraccional lineal. En la sección 4, usaremos estos resultados y exhibiremos una caracterización de la hiponormalidad conjunta para n-uplas conmutativas de operadores de composición. Mostraremos, como estos resultados se conectan de manera natural con la teoría de semigrupos (fuertemente continuos) de operadores subnormales. En la sección 4.1, usando técnicas similares y un Teorema de C.C. Cowen y T. Kriete [**38**], mostraremos condiciones necesarias para que una n-upla de adjuntos de operadores de composición que conmutan sea subnormal.

En lo que sigue mencionamos algunos resultados bien conocidos acerca de los operadores de composición que actúan sobre H^2, que están cercanamente relacionados con este trabajo. Las principales referencias son [**41**],[**39**],[**38**],[**95**] y [**96**].

Definición 4.12. Sea $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica. Un punto $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ es llamado un punto fijo para φ si

$$\lim_{r \to 1^-} \varphi(rz)$$

Si $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, entonces usando el Lema de Schwarz se puede probar que, a excepción de que φ sea la identidad, existe al menos un punto fijo para φ, en $\mathbb{D}$. Por otro lado, si $\|\varphi\|_\infty < 1$ entonces una aplicación directa del Teorema de Rouché implica que φ tiene un punto fijo en $\mathbb{D}$.

Teorema 4.13. *Si $\varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ no es la aplicación identidad ni un automorfismo elíptico de $\mathbb{D}$ entonces existe un punto α en $\overline{\mathbb{D}}$ tal que los iterados φ_n de φ convergen uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.*

Si φ es la aplicación identidad o es un automorfismo elíptico de $\mathbb{D}$ entonces el Teorema anterior es equivalente al hecho de que existe un único punto fijo $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que $\varphi'(\alpha) \leq 1$. Este resultado es parte del así llamado Teorema Grande de Iteración. Detalles pueden ser encontrados en [**96**]. El punto fijo referido anteriormente es conocido como el **punto Denjoy-Wolff**, ver [**39**].

El siguiente Teorema, que caracteriza la subnormalidad de operadores de composición para una clase particular de símbolos, pone de manifiesto el rol determinante que juega el punto de Denjoy-Wolff en relación a las propiedades espaciales de los operadores de composición.

Teorema 4.14 (Cowen-Kriete, 1988). . *Sea $\sigma \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ no constante y supongamos que C_φ^* es subnormal y no normal. Entonces el punto de Denjoy-Wolff, c de σ, satisface $|c| = 1$ y $\lim_{\rho\to 1^-} \sigma'(\rho c) := s < 1$. Más aún, si σ es analítica en una vecindad de c, entonces C_φ^* es subnormal si y solo si*

$$\sigma = \sigma_{r,s}(z) := \frac{(r+s)z + (1-s)c}{r(1-s)\bar{c}z + (1+sr)}$$

para algún $0 \leq r \leq 1$ y $0 < s < 1$; aquí $s = \sigma(c)$

Sea φ una aplicación fraccional lineal y supongamos que $C_\varphi : H^2 \to H^2$ es hiponormal y no es normal. Por el Teorema 4.5, φ debe ser de la forma

$$\varphi(z) = \frac{z}{uz + v}, \quad \text{con} \quad u \neq 0. \tag{4.3}$$

Como φ es analítica, debe tenerse que $|v|/|u| > 1$. Es fácil mostrar, por otro lado, que, $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ si y sólo si $|v| \geq 1 + |u|$. El próximo Teorema, debido a C. Cowen ([**41**]), caracteriza la hiponormalidad para operadores de composición cuyos símbolos son auto aplicaciones fraccionales lineales de $\mathbb{D}$. La prueba se basa en una fórmula encontrada por C. Cowen para el adjunto de cualquier operador de composición con símbolo fraccional lineal. En particular, si φ es como en 4.3, y H_0^2 es el subespacio

$$zH^2 = \{f \in H^2 : f(0) = 0\},$$

C. Cowen mostró que

$$C_\varphi|_{H_0^2} \cong kC^*_{\sigma_{r,s}}$$

para algún $(r,s) \in [0,1] \times (0,1)$ y una cierta constante k.

El siguiente teorema caracteriza a los operadores de composición hiponormales, cuyo símbolo es una transformación fraccional lineal. Una prueba del mismo puede hallarse en [**41**].

TEOREMA 4.15. *Sea* $u \neq 0$, $|v| \geq 1 + |u|$, *y* $\varphi(z) := \dfrac{z}{uz+v}$. *Entonces las siguientes propociones son equivalentes:*

1. C_φ *es subnormal;*
2. C_φ *es hiponormal;*
3. $v > 1$ *y* $|u| = v - 1$.

4. Subnormalidad e Hiponormalidad Conjunta

En esta sección consideraremos el problema de determinar cuándo una n-upla conmutativa de operadores de composición con símbolo fraccional lineal, es (conjuntamente) hiponormal.

DEFINICIÓN 4.16. Sea $\mathbf{S} = (S_1, \ldots, S_n)$ una n-upla conmutativa de operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. $\mathbf{S}$ se dice (conjuntamente) *subnormal* si existen operadores normales $N_1, N_2, \ldots, N_n$, que conmutan entre si, y que actuan sobre algún espacio de Hilbert $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$, tal que $N_j\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ y $N_j\big|_{\mathcal{H}} = S_j$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Una n-upla conmutativa $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ de operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice (conjuntamente) *hiponormal* si la matriz operador

$$[\mathbf{T}^*, \mathbf{T}] := \begin{pmatrix} [T_1^*, T_1] & [T_2^*, T_1] & \ldots & [T_n^*, T_1] \\ [T_1^*, T_2] & [T_2^*, T_2] & \ldots & [T_n^*, T_2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [T_1^*, T_n] & [T_2^*, T_n] & \ldots & [T_n^*, T_n] \end{pmatrix} \geq 0. \tag{4.4}$$

Recordamos al lector, que si A, B, C son operadores, y A es inversible, entonces la matriz operador 2×2

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0 \iff \begin{cases} A \geq 0 \\ C \geq B^* A^{-1} B. \end{cases} \tag{4.5}$$

Así, la condición expresada por (4.4) puede escribirse como:

Una n-upla *conmutativa* $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$, de operadores que conmutan en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es *hiponormal* si y sólo si

$$\begin{pmatrix} I & T_1^* & \ldots & T_n^* \\ T_1 & T_1^*T_1 & \ldots & T_n^*T_1 \\ T_2 & T_1^*T_2 & \ldots & T_n^*T_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_n & T_n^*T_n & \ldots & T_n^*T_n \end{pmatrix} \geq 0.$$

Evidentemente, la subnormalidad conjunta de n-uplas conmutativas de operadores implica la hiponormalidad conjunta, tal y como ocurre para el caso $n = 1$.

Proposición 4.17 ([**43**], Lema 1.4). *Sea $\mathbf{T} = (T_1, T_2)$ un par conmutativo de operadores en $\mathcal{H}$. Entonces $\mathbf{T}$ es hiponormal si y solo si*

1. *T_1 es hiponormal,*
2. *T_2 es hiponormal y*
3. *$|\langle [T_2^*, T_1]y, x\rangle|^2 \leq \langle [T_1^*, T_1]x, x\rangle \langle [T_2^*, T_2]y, y\rangle$, para todo $x, y \in \mathcal{H}$.*

Observación 4.18.

1. Si una n-upla $\mathbf{S}$ es subnormal (respectivamente hiponormal) entonces cualquier sub-upla de $\mathbf{S}$ es también subnormal (respectivamente hiponormal).
2. Si $N, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con N normal y S subnormal (respectivamente hiponormal), entonces (S, N) es (conjuntamente) subnormal (respectivamente hiponormal) . (La subnormalidad es una consecuencia del Teorema 8 en [**22**], mientras que la hiponormalidad conjunta se sigue del Teorema de Flugede y de la Proposición 4.17 anterior).
3. La hiponormalidad conjunta y la subnormalidad conjunta son preservadas bajo equivalencia unitaria.
4. **[Inclusión Espectral]** Si $\mathbf{S} = (S_1, S_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \times \mathcal{H})$ es subnormal y $\mathbf{N} \equiv (N_1, N_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{K} \times \mathcal{K})$ es la extensión normal minimal de $\mathbf{S}$, con $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$, entonces

$$\sigma_T(\mathbf{N}, \mathcal{K}) \subseteq \sigma_T(\mathbf{S}, \mathcal{H}), \tag{4.6}$$

donde σ_T denota el espectro de Taylor [**76**]. Para propiedades adicionales, el lector es referido a [**76**] y [**42**].

Si C_φ es hiponormal sobre H^2, entonces el Teorema 4.15 implica que cada φ_i $(i = 1, \dots, n)$ debe ser de la forma

$$\varphi_u \equiv \frac{z}{uz + (|u| + 1)}, \text{ con } |u| > 0. \tag{4.7}$$

Lema 4.19. $[C_{\varphi_u}, C_{\varphi_v}] = 0$ *si y sólo si* $\operatorname{Arg}(u) = \operatorname{Arg}(v)$.

Demostración. Como $C_{\varphi_u} C_{\varphi_v} = C_{\varphi_u \circ \varphi_v}$, es suficiente mostrar que $\varphi_u \circ \varphi_v = \varphi_v \circ \varphi_u$ si y solo si $\operatorname{Arg}(u) = \operatorname{Arg}(v)$.

Usando la representación matricial para una aplicación fraccional lineal, la ecuación $\varphi_u \circ \varphi_v = \varphi_v \circ \varphi_u$ es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 + |u| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 + |v| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 + |v| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 + |u| \end{pmatrix}$$

la cual, a su vez, es equivalente a que $u + v(1 + |u|) = v + u(1 + |v|)$. Desarrollando esta identidad y simplificando obtenemos $u|v| = v|u|$. $\square$

Sea $(C_{\varphi_u}, C_{\varphi_v})$ un par conmutativo de operadores de composición que actuan sobre H^2. Por el Lema 4.19 debemos tener que $v = \lambda u$ para algún número real $\lambda > 0$. Sea $\tau(z) := e^{i\theta} z$, donde $\theta := \operatorname{Arg}(u)$. Entonces C_τ es un operador unitario (Teoremas 4.10, y 4.11) y

$$C_\tau^{-1} C_{\varphi_u} C_\tau = C_{\varphi_{|u|}}.$$

Concluimos que el par $(C_{\varphi_u}, C_{\varphi_v})$ es unitariamente equivalente a un par $(C_{\varphi_a}, C_{\varphi_b})$ con $a, b > 0$. Así, para nuestro propósito, será suficiente considerar pares $(C_{\varphi_a}, C_{\varphi_b})$ con $a, b > 0$.

Por otra parte, es fácil constatar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(\varphi_a)_n = \varphi_{(1+a)^n - 1},$$

lo cual implica que el conjunto

$$\{C_{\varphi_a}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

es un semigrupo discreto de operadores de composición subnormales.

Como hicimos notar en el Capitulo 4, definiendo para $\lambda \geq 0$,

$$(\varphi_a)_\lambda := \varphi_{(1+a)^\lambda - 1} \qquad ((\varphi_a)_0 = I), \tag{4.8}$$

y colocando

$$C_{\varphi_a}^\lambda := C_{(\varphi_a)_\lambda}, \tag{4.9}$$

puede probarse que el conjunto

$$\{C_{\varphi_a}^{\lambda}\}_{\lambda\geq 0}, \tag{4.10}$$

es un semigrupo fuertemente continuo de operadores de composición (más sobre semigrupos de operadores de composición puede verse en [**7**] y [**105**]).

Como cada $C_{(\varphi_a)_\lambda}$ es subnormal, un resultado de T. Ito [**65**] asegura que el semigrupo (4.10) es subnormal (es decir, puede ser extendido a un semigrupo fuertemente continuo de operadores normales que conmutan) y por lo tanto cualquier par conmutativo $(C_{\varphi_u}, C_{\varphi_v})$, es (conjuntamente) subnormal.

TEOREMA 4.20. *Sea $\mathbf{\Phi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ una n-upla conmutativa de auto-aplicaciones fraccionales lineales de $\mathbb{D}$, ninguna una de ellas teniendo a ∞ como un punto fijo. Sea $C_{\mathbf{\Phi}} := (C_{\varphi_1}, \ldots, C_{\varphi_1})$. Las siguientes proposiciones son equivalentes*

(a) *C_{φ_k} es hiponormal para algún k;*
(b) *$C_{\mathbf{\Phi}}$ es (conjuntamente) subnormal;*
(c) *$C_{\mathbf{\Phi}}$ es (conjuntamente) hiponormal;*
(d) *existen números reales positivos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tal que $C_{\mathbf{\Phi}} \cong ({C_\psi}^{\lambda_1}, {C_\psi}^{\lambda_2}, \ldots, {C_\psi}^{\lambda_n})$, donde $\psi \equiv \frac{z}{z+2}$.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la discusión anterior es suficiente mostrar que (a) $\Rightarrow$ (b).

Supongamos C_{φ_k} es hiponormal para algún k. Entonces, por el Teorema 4.15,

$$\varphi_k = \varphi_u \equiv \frac{z}{uz + (|u|+1)}.$$

Sea $j \neq k$. Por hipótesis $\varphi_j \equiv \frac{z+b_j}{c_j z + d_j}$ con $c_j \neq 0$. Así,

$$\begin{aligned} &[C_{\varphi_k}, C_{\varphi_j}] = 0 \iff \varphi_k \circ \varphi_j = \varphi_j \circ \varphi_k \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1+|u| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1+|u| \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} b_j u = 0 \\ d_j u = u + |u| c_j. \end{cases} \end{aligned}$$

Así

$$[C_{\varphi_k}, C_{\varphi_j}] = 0 \iff \varphi_j \equiv \frac{z}{c_j z + d_j},$$

con $|d_j| \geq 1 + |c_j|$ (ya que $\varphi_j : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$), y $d_j u = u + |u| c_j$. Concluimos que

$$|d_j - 1| = |c_j| \leq |d_j| - 1,$$

y por lo tanto $|d_j| = |c_j| + 1$.

Luego, por el Teorema 4.15, C_{φ_i} es subnormal para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. La implicación es entonces consecuencia de las consideraciones previas al Teorema. □

4.1. n-uplas de Adjuntos de Operadores de Composición. En esta sección trataremos el problema e determinar cuando una n-upla *conmutativa*$(C^*_{\sigma_1}, \ldots, C^*_{\sigma_n})$ de operadores de composición es (conjuntamente) subnormal. Por simplicidad estudiaremos solamente pares de tales operadores. Así mismo, la clase de símbolos σ será restringida a la ya mencionada en el Teorema 4.14; a saber, símbolos de la forma

$$\sigma \equiv \sigma_{r,s}(z) := \frac{(r+s)z + (1-s)c}{r(1-s)\bar{c}z + (1+sr)} \tag{4.11}$$

donde $0 \leq r \leq 1, 0 < s < 1$, y c es una constante de módulo 1; i.e., c es punto (de Denjoy-Wolff) fijo de σ, el cual satisface $\sigma'(c) = s$.

Primero necesitamos un lema similar al Lema 4.19.

En lo que sigue usaremos la siguiente notación:

Si $\sigma : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es una aplicación fraccional lineal, entonces denotaremos por $M(\sigma)$ a la matriz asociada (cf. la prueba del Lema 4.19). Recordemos que una matriz $M(\sigma)$ representa, en realidad, una clase de equivalencia, ya que $M(\sigma)$ y $\lambda M(\sigma)$ representan la misma aplicación fraccional lineal (σ), para cualquier número real λ.

Lema 4.21.
(i) *Si* σ_{r_1,s_1} *y* σ_{r_2,s_2} *conmutan entonces* $r_1 = r_2$.
(ii) σ_{r,s_1} *y* σ_{r,s_2} *conmutan si y solo si* $r(c_1\bar{c_2} - \bar{c_1}c_2) = 0$ *y* $(1-r)(c_1 - c_2) = 0$.

Demostración. Usando la representación matricial del símbolo $\sigma_{r,s}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
M &:= M(\sigma_{r_1,s_1} \circ \sigma_{r_2,s_2} - \sigma_{r_2,s_2} \circ \sigma_{r_1,s_1}) \\
&= (1-s_1)(1-s_2)\begin{pmatrix} r_2c_1\bar{c_2} - r_1c_2\bar{c_1} & c_1(1-r_2) - c_2(1-r_1) \\ r_2\bar{c_2} + r_1((1-r_2)\bar{c_1} - r_2\bar{c_2}) & r_1c_2\bar{c_1} - r_2c_1\bar{c_2} \end{pmatrix} \\
&= M(\tau),
\end{aligned}$$

donde

$$\tau(z) := \frac{(r_2 c_1 \bar{c_2} - r_1 c_2 \bar{c_1})z + c_1(1-r_2) - c_2(1-r_1)}{(r_2\bar{c_2} + r_1((1-r_2)\bar{c_1} - r_2\bar{c_2}))z + (r_1 c_2 \bar{c_1} - r_2 c_1 \bar{c_2})}.$$

Haciendo la entrada $M_{11} = 0$ obtenemos (i).

Por otro lado, si $r_1 = r_2 = r$ entonces

$$M = \begin{pmatrix} r(c_1\bar{c_2} - c_2\bar{c_1}) & (c_1 - c_2)(1-r) \\ r(1-r)(c_2 - c_1) & r(c_2\bar{c_1} - c_1\bar{c_2}) \end{pmatrix}.$$

De acá (ii) se sigue fácilmente. □

Observaciones 4.22. Sea $\mathbb{B}$ un espacio de Banach y sea $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathbb{B})$ un semigrupo fuertemente continuo. El *semigrupo adjunto* $\{T_t^*\}_{t\geq 0}$ (formado por todos los adjuntos T_t^* sobre el espacio dual $\mathbb{B}^*$) no es, en general, fuertemente continuo (ver [**47**] p. 43); sin embargo, es fácil ver que este es débil$-*$ continuo. Por otro lado, un semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathbb{B})$ es fuertemente continuo si y sólo si este es débilmente continuo ([**47**]).

Lema 4.23. *Todo semigrupo* $\{\sigma_t\}_{t\geq 0} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, *induce un semigrupo adjunto, fuertemente continuo, de operadores de composición, sobre* $H^p, 0 < p < \infty$.

Demostración. Esta es una consecuencia inmediata del Teorema 3.4 en [**7**] (Todo semigrupo de operadores de composición sobre H^p es fuertemente continuo) y las observaciones 4.22. □

Lema 4.24. *Sea* $0 \leq r \leq 1$, $0 < s < 1$, *y sea* $\theta \in \mathbb{R}$ *fijo. Entonces el semigrupo discreto* $\{C^{*n}_{\sigma_{r,s}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *puede ser extendido a un semigrupo fuertemente continuo, con parámetro en* $[0,\infty)$.

Demostración. Para $\lambda \geq 0$, definamos

$$\sigma^\lambda(z) := \frac{(r+s^\lambda)z + (1-s^\lambda)e^{i\theta}}{r(1-s^\lambda)e^{-i\theta}z + (1+rs^\lambda)}.$$

Entonces

$$M_\lambda := M(\sigma^\lambda) = \begin{pmatrix} r + s^\lambda & (1-s^\lambda)e^{i\theta} \\ r(1-s^\lambda)e^{-i\theta} & (1+rs^\lambda) \end{pmatrix},$$

$$M_o = I_{A(\mathbb{D})}, \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} M(\sigma^\lambda)M(\sigma^\mu) &= (1+r)\begin{pmatrix} (r + s^{\lambda+\mu}) & (1-s^{\lambda+\mu})e^{i\theta} \\ r(1-s^{\lambda+\mu})e^{-i\theta} & (1+rs^{\lambda+\mu}) \end{pmatrix} \\ &= M(\sigma^{\lambda+\mu}). \end{aligned}$$

Así, podemos definir

$$C^{*\lambda}_{\sigma_{r,s}} := C^*_{\sigma^\lambda_{r,s}} \ \text{(para todo } \lambda \geq 0).$$

La continuidad fuerte de $\{C^{*\lambda}_{\sigma_{r,s}}\}_{\lambda\geq 0}$ es consecuencia del Lema 4.23. □

Lema 4.25. *Sea $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador subnormal inversible. Entonces S^{-1} es subnormal y (S, S^{-1}) es conjuntamente subnormal.*

Demostración. Seat N la *extensión normal minimal* (e.n.m.) de S. Entonces por inclusión espectral, $\sigma(N) \subseteq \sigma(S)$, Luego N es inversible. Pongamos

$$N := \begin{pmatrix} S & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad N^{-1} := \begin{pmatrix} R & U \\ V & X \end{pmatrix},$$

entonces $N^{-1}N = I$ implica $VS = 0$ y $RS = I$. Por lo tanto, $N^{-1}\big|_{\mathcal{H}} = S^{-1}$ y es fácil verificar que (N, N^{-1}) es la e.n.m. de (S, S^{-1}). □

Lema 4.26 (c.f. Teorema 2.8 en [**20**]). *$C_{\varphi_a}\big|_{H^2_0} = sM_zC^*_{\sigma_a}M_{\frac{1}{z}}$, donde $\sigma_a(z) := sz + s - 1$ con $s := \frac{1}{1+a}$. (M_u denota al operador ($\in \mathcal{L}(H^2)$) de multiplicación por una función $u \in$* Hol($\mathbb{D}$)).

Demostración. Dada $f \in H^2_0$, pongamos $\widetilde{f} := M_{\frac{1}{z}}f$. Entonces, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\langle C_{\varphi_a}^* f, z^n\rangle &= \langle f, C_{\varphi_a}(z^n)\rangle = \langle f, \varphi_a^n\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{\varphi_a(e^{i\theta})}^n d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} f(\xi)\left[\frac{s\bar{\xi}}{1+(1-s)\bar{\xi}}\right]^n \frac{d\xi}{\xi} \\
&= \frac{s^n}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\widetilde{f}(\xi)}{[\xi+(1-s)]^n} d\xi \\
&= \frac{s^n}{(n-1)!}\widetilde{f}^{(n-1)}(s-1) \\
&= \frac{s}{(n-1)!}(\widetilde{f}\circ\sigma_a)^{(n-1)}(0).
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\langle C_{\varphi_a}^* f, z^n\rangle &= s\langle \widetilde{f}\circ\sigma_a, z^{n-1}\rangle \\
&= s\langle C_{\sigma_a} M_{\frac{1}{z}} f, z^{n-1}\rangle \\
&= s\langle M_z C_{\sigma_a} M_{\frac{1}{z}} f, z^n\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Como f y n son arbitrarios, el lema queda demostrado. $\square$

Teorema 4.27. *Sea σ_1, σ_2 como en (4.11), y supongamos que $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Entonces $(C_{\sigma_1}^*, C_{\sigma_2}^*)$ es subnormal.*

Demostración. Por el Lema 4.21, $\sigma_1 = \sigma_{r,s_1}$ y $\sigma_2 = \sigma_{r,s_2}$. En este caso tenemos $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ si y sólo si $r(c_1\bar{c_2} - c_2\bar{c_1}) = 0$ y $(1-r)(c_1 - c_2) = 0$, así que sólo necesitaremos considerar los siguientes tres casos:

[**Caso 1:** $r = 0$]. Aquí

$$\sigma_1(z) = s_1 z + (1-s_1)c \quad \text{y} \quad \sigma_2(z) = s_2 z + (1-s_2)c.$$

Por tanto

$$(C_{\sigma_1}^*, C_{\sigma_2}^*) \cong (C_{\varphi_a}\big|_{H_0^2}, C_{\varphi_b}|_{H_0^2})$$

donde $a, b > 0$ y φ_a, φ_b son como en (4.7).

El Lema 4.26 implica que, en este caso, $(C_{\sigma_1}^*, C_{\sigma_2}^*)$ es subnormal.

[**Caso 2:** $r \neq 0, c_1 = c_2$]. Aquí

$$(C^*_{\sigma_1}, C^*_{\sigma_2}) = (C^*_{\sigma_1}, {C^*_{\sigma_1}}^{\lambda}), \text{ con } \lambda = \frac{\log(s_2)}{log(s_1)}.$$

El resultado es una consecuencia del Lema 4.24 y del Teorema de Ito, [**65**].

[**Caso 3:** $r = 1, c_1 = -c_2$]. Aquí

$$\sigma_1(z) = \frac{(1+s_1)z + (1-s_1)c}{(1-s_1)\bar{c}z + (1+s_1)} \quad \text{y} \quad \sigma_2(z) = \frac{(1+s_2)z - (1-s_2)c}{-(1-s_2)\bar{c}z + (1+s_2)}.$$

Nótese que si $r = 1$, $\sigma_{r,s}$ es un automorfismo de $\mathbb{D}$. Más aún

$$\begin{pmatrix} (1-s) & (1-s)c \\ (1-s)\bar{c} & (1+s) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (1-s) & -(1-s)c \\ -(1-s)\bar{c} & (1+s) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, si $\lambda = \dfrac{\log(s_2)}{log(s_1)}$,

$$(C^*_{\sigma_1}, C^*_{\sigma_2}) = (C^*_{\sigma_1}, ({C^*_{\sigma_1}}^{\lambda})^{-1}) = (C^*_{\sigma_1}, ({C^*_{\sigma_1}}^{-1})^{\lambda}) = (C^*_{\sigma_1}, (C^*_{\sigma_1^{-1}})^{\lambda})$$

El resultado es consecuencia del Lema 4.25, ya que en este caso, si N es la e.n.m. de $C^*_{\sigma_1}$, entonces $(N^{-1})^{\lambda}$ es una extensión normal de $({C^*_{\sigma_1}}^{-1})^{\lambda}$ que conmuta con N.

□

CAPíTULO 5

Propiedades espectrales y problemas relacionados.

Una vez clarificada la acotación de un operador y estudiada su compacidad se plantean naturalmente diversas cuestiones: ¿cuál es su norma?, ¿cómo es el operador adjunto?, ¿es el operador considerado unitario, auto-adjunto, normal, etc?, ¿cuál es su espectro? y en general cada una de las cuestiones clásicas que permitan clasificar y describir el operador considerado.

En el caso de un operador de composición las respuestas a estas cuestiones deberían de darse en términos del símbolo que lo induce. Este programa está lejos de haber sido completado, aún en el caso de los espacios clásicos de funciones analíticas en el disco, y las respuestas parciales a estas cuestiones se suceden casi continuamente en el área.

Particularmente el estudio de las propiedades espectrales de los operadores de composición es un aspecto en el que, a pesar de los numerosos resultados obtenidos, respuestas definitivas están lejos de ser alcanzadas. La identificación del espectro de C_φ y la clasificación de sus partes, aún en el caso del espacio de Hardy, no es aún completa. Las ideas claves en la identificación del espectro son que éste está asociado a la localización de los puntos fijos de φ y a la posibilidad de "representar" símbolos arbitrarios φ usando transformaciones lineales fraccionarias. Para una revisión de los resultados conocidos el lector puede consultar [**39**, Ch. 7].

En lugar de repetir la inmejorable presentación de esta monografía, en este Capítulo presentamos resultados relacionados que forman parte del trabajo de investigación de los autores [**25**] en el contexto de operadores de composición en el espacio de Dirichlet que nos parece describen y ejemplifican algunas técnicas en el área.

1. Introducción

En un artículo de 1988 (cf. [**41**]), C. Cowen encontró una fórmula que expresa el adjunto del operador de composición C_φ inducido, en el espacio de Hardy, por una transformación lineal fraccionaria del disco unitario en sí mismo, como un producto de operadores de Toeplitz y otro operador de composición inducido por una transformación lineal fraccionaria. En [**64**] P. Hurst obtiene una expresión análoga para el adjunto de C_φ actuando en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$, un espacio ponderado tipo Bergman.

Recientemente, en [**50**] E. Gallardo y A. Montes obtienen una fórmula para el adjunto del operador de composición inducido por una transformación lineal fraccionaria, actuando en el clásico espacio de Dirichlet, en términos de otro operador de composición inducido por otro símbolo linear fraccionario mas un operador de rango dos.

En lo que sigue presentamos algunos resultados en relación con propiedades de los operadores de composición inducidos en el espacio de Dirichlet por transformaciones lineales fraccionarias del disco unitario. En la Sección 2 usamos la fórmula de E. Gallardo y A. Montes para caracterizar los operadores de composición esencialmente normales inducidos en el espacio de Dirichlet, por transformaciones lineales fraccionarias. En la Sección 3 obtenemos condiciones sobre los símbolos φ y ψ, dos transformaciones lineales fraccionarias del disco, para las cuales los operadores $C_\varphi C_\psi^*$ ó el operador $C_\psi^* C_\varphi$ sean compactos. Finalmente en la Sección 4 investigamos la "forma" del rango numérico de los operadores de composición inducidos en el espacio de Dirichlet por transformaciones lineales fraccionarias.

2. Operadores de composición esencialmente normales

Recordemos que el objetivo general en el estudio de los operadores de composición es entender cómo las propiedades de los operadores de composición se relacionan con el comportamiento de la aplicación que los induce. En esta dirección, en [**18**] se caracterizan los operadores de composición esencialmente normales inducidos en el espacio de Hardy H^2 por transformaciones lineales fraccionarias φ en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$.

Recordemos que un operador T en un espacio de Hilbert se dice *normal* si $TT^* = T^*T$, y *esencialmente normal* si $T^*T - TT^*$ es compacto. Los operadores compactos y los operadores normales son trivialmente esencialmente normales, así que diremos que un operador es *no trivialmente esencialmente normal* si es esencialmente normal, pero no es normal ni compacto.

Para dos operadores acotados A y B en un espacio de Hilbert, usaremos la notación

$$[A, B] := AB - BA,$$

para designar el *commutador* de A y B; en particular A es esencialmente normal si y sólo si $[A^*, A]$ es compacto.

El resultado principal en [**18**] es: *Un operador de composición inducido en H^2 por una transformación fraccional lineal que aplique el disco unitario en sí mismo es no trivialmente esencialmente normal si y sólo si esta transformación es parabólica y no es un automorfismo.* Las pruebas en [**18**] están basadas en la fórmula del adjunto de Cowen.

En [**74**] R. Wier y B. MacCluer estudian la cuestión análoga en el contexto del espacio de Bergman. Ellas obtienen que los operadores de composición esencialmente normales inducidos por transformaciones lineales fraccionales en el espacio de Bergman son exactamente los mismos que en el espacio de Hardy: los no triviales son precisamente aquellos cuyo símbolo es una transformación lineal fraccionaria parabólica que no sea un automorfismo del disco. La expresión generalizada de [**64**] para el adjunto de C_φ actuando en $A^2_\alpha(\mathbb{D})$ es el elemento crucial en su trabajo.

En lo que sigue, estudiamos la siguiente cuestión: ¿Cuáles operadores de composición C_φ inducidos en $\mathcal{D}$ por una transformación fraccional lineal φ del disco unitario, son no trivialmente esencialmente normales? Seguimos la misma idea de las pruebas en [**18**] y usamos resultados del reciente artículo de E. Gallardo-Gutiérrez y A. Montes-Rodríguez [**50**], y las ideas en [**61**] a fin de obtener el siguiente resultado:

Teorema Principal. *Un operador de composición C_φ inducido en $\mathcal{D}$ por una transformación fraccional lineal φ en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ es no trivialmente esencialmente normal si y sólo si φ no es una transformación hiperbólica, que no sea automorfismo con un punto fijo en $\partial\mathbb{D}$.*

A fin de probar nuestro resultado recordemos algunos hechos bien conocidos sobre transformaciones lineales fraccionarias. Si a, b, c y d son números complejos con $ad - bc \neq 0$, entonces la transformación lineal fraccionaria

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

es una aplicación uno a uno del plano complejo extendido $\widehat{\mathbb{C}}$ sobre sí mismo. De hecho, definimos $\varphi(\infty) = a/c$, y $\varphi(-d/c) = \infty$ si $c \neq 0$, con $\varphi(\infty) = \infty$ si $c = 0$.

Una transformación fraccional lineal, distinta a la identidad, tiene uno o dos puntos fijos en el plano complejo extendido. Dos transformaciones lineales fraccionales φ y ψ se dicen conjugadas si existe otra transformación fraccional lineal T tal que $\varphi = T^{-1} \circ \psi \circ T$.

Si φ tiene sólo un punto fijo α, es llamado *parabólico* y es conjugado bajo $Tz = 1/(z-\alpha)$ a $\psi(z) = z + \tau$ con $\tau \neq 0$. Observe que la derivada en el punto fijo es 1.

Si φ tiene dos puntos distintos fijos α y β, entonces φ es conjugado bajo $Tz = (z-\alpha)/(z-\beta)$ a $\psi(z) = \mu z$. En este caso, la transformación fraccional lineal es llamada *elíptica* si $|\mu| = 1$; *hiperbólica* si $\mu > 0$ y *loxodrómica* en otro caso (ver [**96**] para más detalles). No es difícil probar que la derivada en los puntos fijos satisface $\varphi'(\alpha) = 1/\varphi'(\beta)$.

Es fácil ver que si φ es parabólica, entonces la sucesión $\{\varphi_n(z)\}$ converge para cada $z \in \mathbb{D}$, uniformemente sobre subconjuntos compactos, al punto fijo α. En este caso, decimos que α es un punto fijo *atractor*; si φ es hiperbólica or loxodrómica, sus puntos fijos son, uno atractor y el otro repulsor. Cuando φ es elíptica, sus puntos fijos no son atractores, ni repulsores. Para φ loxodrómica o hiperbólica el punto fijo atractor de φ es aquel para el cual el módulo de la derivada es estrictamente menor que uno.

Adicionalmente, cuando exigimos la condición que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, obtenemos restricciones sobre la localización de los puntos fijos de φ como sigue:

Proposición 5.1. (*Ver* [**96**, p. 5]) *Si φ es una transformación fraccional lineal con $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ entonces:*

1. *Si φ es parabólica, sus puntos fijos están en $\partial\mathbb{D}$.*
2. *Si φ es hiperbólica, el punto atractor está en $\overline{\mathbb{D}}$ y el otro punto fijo fuera de $\mathbb{D}$. Ambos puntos fijos están en $\partial\mathbb{D}$ si y sólo si φ es un automorfismo de $\mathbb{D}$.*
3. *Si φ es loxodrómica o elíptica, un punto fijo está en $\mathbb{D}$ y el otro punto fijo fuera de $\overline{\mathbb{D}}$. Las elípticas siempre son automorfismos de $\mathbb{D}$. El punto fijo en $\mathbb{D}$ para las loxodrómicas es atractor.*

Como nosotros estamos interesados acá solamente en operadores no compactos, consideraremos únicamente φ transformaciones lineales fraccionales con $\|\varphi\|_\infty = 1$; esto es con $\sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi(z)| = 1$. De hecho, si $\|\varphi\|_\infty < 1$

es fácil ver que C_φ es un operador de Hilbert-Schmidt (cf. Ejercicio 2.36) y por tanto compacto.

Hagamos otra reducción. Siguiendo [**61**] (cf. también [**50**] y [**51**] donde la idea de [**61**] es usada) consideremos $\mathcal{D}_0$, el espacio de las funciones en el espacio de Dirichlet $\mathcal{D}$ que se anulan en el origen. Como las funciones constantes son invariantes para cualquier operador de composición, el operador C_φ actuando en $\mathcal{D}$ es de la forma

$$C_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & \widetilde{C}_\varphi \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{D} \ominus \mathcal{D}_0 \\ \mathcal{D}_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathcal{D} \ominus \mathcal{D}_0 \\ \mathcal{D}_0 \end{pmatrix},$$

donde $\widetilde{C}_\varphi$ es la *compresión* de C_φ a $\mathcal{D}_0$, es decir $\widetilde{C}_\varphi = P_{\mathcal{D}_0} C_\varphi|_{\mathcal{D}_0}$, con $P_{\mathcal{D}_0}$ la proyección ortogonal sobre $\mathcal{D}_0$.

Es fácil ver que C_φ es esencialmente normal si y sólo si $\widetilde{C}_\varphi$ es esencialmente normal. Así, para probar nuestros resultados podemos, y así lo haremos, considerar $\widetilde{C}_\varphi$ y $\mathcal{D}_0$. Como no hay riesgo de confusión, continuaremos denotando $\widetilde{C}_\varphi$ por C_φ.

El siguiente resultado en [**50**] caracteriza los operadores de composición normales inducidos por transformaciones lineales fraccionales en $\mathcal{D}_0$:

Proposición 5.2. [**50**, Th. 4.1] *Un operador de composición C_φ, inducido por una transformación fraccional lineal, es normal en $\mathcal{D}_0$ si y sólo si se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. *El símbolo φ es un automorfismo.*
2. *El símbolo φ is parabólico.*
3. *El símbolo φ tiene un punto interior y un punto exterior fijos y φ es conjugado a $z \mapsto \mu z$ con $0 < |\mu| < 1$.*

Es claro a partir de esta Proposición y las observaciones precedentes el siguiente Corolario:

Corolario 5.3. *Un operador de composición C_φ, inducido por una transformación fraccional lineal, es esencialmente normal en $\mathcal{D}$ si se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. *El símbolo φ es un automorfismo.*
2. *El símbolo φ es parabólico.*
3. *El símbolo φ tiene un punto interior y un punto exterior fijos y φ es conjugado a $z \mapsto \mu z$ con $0 < |\mu| < 1$.*

Consideremos ahora el caso el caso restante: una transformación fraccional lineal φ en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ que sea hiperbólica y no sea un automorfismo con un punto fijo $\partial\mathbb{D}$. Probaremos que en este caso C_φ no es esencialmente normal y así habremos completado la caracterización indicada.

Usaremos la representación del adjunto de un operador de composición inducido en $\mathcal{D}_0$ por una transformación fraccional lineal, obtenida en [**50**], análoga a la fórmula del adjunto de Cowen:

Proposición 5.4. [**50**, Th. 3.2] *Sea* $\varphi(z) = (az+b)/(cz+d)$ *Una transformación fraccional lineal en* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *y considérese* C_φ *actuando en* $\mathcal{D}_0$. *Entonces,* $C_\varphi^* = C_\psi$ *donde* $\psi(z) = (\overline{a}z - \overline{c})/(-\overline{b}z + \overline{d})$.

Observamos que

$$\psi = \rho \circ \varphi^{-1} \circ \rho, \qquad \text{donde} \qquad \rho(z) = 1/\overline{z},$$

(es decir ρ es la aplicación de inversión en el círculo unitario) y el inverso se refiere a φ visto como una aplicación univalente de $\widehat{\mathbb{C}}$ sobre sí mismo. Se sigue de esta fórmula que los puntos fijos de ψ son las imágenes por ρ de los puntos fijos de φ. En particular φ y ψ tienen los mismos puntos fijos en la frontera del disco unitario.

También requeriremos el siguiente resultado de teoría de funciones.

Lema 5.5. [**18**, Lemma 5.1] *Supóngase que* φ *es una transformación lineal fraccional que aplica* $\mathbb{D}$ *en sí mismo, con un punto fijo* $\omega \in \partial\mathbb{D}$. *Entonces:*

1. *Si* φ *no es un automorfismo entonces* $\psi\circ\varphi$ $\varphi\circ\psi$ *son parabólicos (con punto fijo en* ω*).*
2. $\psi \circ \varphi$ *conmuta con* $\varphi \circ \psi$*,*

donde ψ *es la aplicación a la que se refiere la Proposición 5.4.*

Finalmente, tenemos:

Proposición 5.6. *Si* φ *es una transformación fraccional lineal que aplica* $\mathbb{D}$ *en sí mismo es hiperbólica y no es un automorfismo con un punto fijo en* $\partial\mathbb{D}$ *entonces* C_φ *no es esencialmente normal.*

Demostración. Por la Proposición 5.4 necesitamos únicamente demostrar que $[C_\psi, C_\varphi]$ (actuando en el espacio $\mathcal{D}_0$) no es compacto.Tanto ψ como φ tienen un punto fijo en $\partial\mathbb{D}$. Como φ es hiperbólica, tiene otro punto fijo p en la esfera de Riemann, que no está en $\partial\mathbb{D}$ (pues φ no es un automorfismo de $\mathbb{D}$). Además ψ es también hiperbólica, y su punto fijo que no está en la frontera del disco es $\rho(p) \neq p$. Así ψ no conmuta con φ (pues de otro modo $\psi(p)$ sería un punto fijo de φ que no pertenecería a $\partial\mathbb{D}$ distinto de p, y así ¡φ tendría demasiados puntos fijos!). Se sigue que $\gamma := \varphi \circ \psi$ y $\chi := \psi \circ \varphi$ son transformaciones lineales fraccionales distintas de $\mathbb{D}$ en sí mismo, con los mismos puntos fijos en la frontera que φ. Por el Lema 5.5 γ y χ son ambas parabólicas y como tienen el mismo punto fijo conmutan y por lo tanto, también lo hacen los operadores de composición C_γ y C_χ.

Las aplicaciones γ y χ son conjugadas a las traslaciones $\tau_a(z) = z + a$ y $\tau_b(z) = z + b$ respectivamente ($a \neq b$, $\operatorname{Im} a > 0$ y $\operatorname{Im} b > 0$). Luego, siguiendo las ideas de la prueba de [**50**, Th. 4.3] puede verse fácilmente que $[C_\psi, C_\varphi] = C_\gamma - C_\chi$ es unitariamente similar al operador multiplicación $M_\phi : L^2(\mathbb{R}^+, tdt) \to L^2(\mathbb{R}^+, tdt)$ donde $\phi(t) = e^{iat} - e^{ibt}$. Así, $\sigma(C_\gamma - C_\chi)$; el espectro de $C_\gamma - C_\chi$, el conjunto no numerable $\{e^{iat} - e^{ibt} : t \geq 0\} \cup \{0\}$ y así $[C_\psi, C_\varphi]$ no puede ser compacto. □

3. Los operadores $C_\varphi C_\psi^*$ y $C_\psi^* C_\varphi$

El estudio de la compacidad de los operadores de composición y de propiedades relacionadas es, como se ha visto, uno de los temas fundamentales en esta teoría. Si φ es una transformación fraccional lineal del disco $\mathbb{D}$ en sí mismo y $\overline{\varphi(\mathbb{D})} \subset \mathbb{D}$, el operador C_φ (actuando en el espacio de Dirichlet, y de hecho en otros espacios funcionales de Hilbert) es claramente compacto; en los restantes casos $\varphi(\mathbb{D})$ es tangente al círculo unitario y el operador de composición no es compacto (cf. [**109**]). A fin de hacer completa la exposición incluimos el siguiente resultado.

Teorema 5.7. *Sea φ una transformación fraccional lineal de $\mathbb{D}$ en sí mismo. las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $C_\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ *es compacto.*
2. $C_\varphi : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0$ *es compacto.*
3. $C_\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ *es de Hilbert-Schmidt.*
4. $C_\varphi : H^2 \to H^2$ *es compacto.*
5. $C_\varphi : H^2 \to H^2$ *es de Hilbert-Schmidt.*
6. $\overline{\varphi(\mathbb{D})} \subset \mathbb{D}$.

Demostración. La prueba es inmediata de consideraciones elementales y de la observación precedente. □

Sean φ y ψ transformaciones lineales fraccionales del disco unitario en sí mismo. El problema de determinar la compacidad de $C_\varphi C_\psi^*$ y $C_\psi^* C_\varphi$ fue estudiado en el espacio de Hardy en [**29**] y en el espacio de Bergman en [**30**].

Nosotros presentamos en el contexto del espacio de Dirichlet una caracterización de la compacidad de estos operadores análoga a la de [**29**]. En este contexto la prueba es más simple, pues la formula para el adjunto de un operador de composición es más simple en el espacio de Dirichlet. Como fue observado en [**30**] y es fácil ver a partir de los siguientes resultados, existen operadores de composición no compactos C_φ y C_ψ inducidos por transformaciones lineales fraccionales, tales que el producto $C_\varphi C_\psi^*$ ó el producto $C_\psi^* C_\varphi$ sean compactos. Del mismo modo vemos que la compacidad de $C_\varphi C_\psi^*$ no es equivalente a la compacidad de $C_\psi^* C_\varphi$.

TEOREMA 5.8. *(cf.* [**29**, Th. 2.1]*) Supóngase que φ y ψ son aplicaciones lineales fraccionales de $\mathbb{D}$ en sí mismo. Entonces $C_\varphi C_\psi^*$ no es compacto, visto como operador en $\mathcal{D}$, si y sólo si existen puntos η_1 y η_2 en $\partial\mathbb{D}$ tales que $\varphi(\eta_1) = \psi(\eta_2) \in \partial\mathbb{D}$.*

DEMOSTRACIÓN. Escribimos $\sigma = \rho \circ \varphi^{-1} \circ \rho$ y $\gamma = \rho \circ \psi^{-1} \circ \rho$ con $\rho(z) = 1/\overline{z}$, $z \in \widehat{\mathbb{C}}$.

La fórmula del adjunto 5.4 de E. Gallardo y A. Montes dice que $C_\varphi^* = C_\sigma$ y $C_\psi^* = C_\gamma$ (como operadores en $\mathcal{D}_0$). Así, $C_\varphi C_\psi^* : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ no es compacto si y sólo si $C_{\gamma\circ\varphi}$ no es compacto. Esto es, $\rho \circ \psi^{-1} \circ \rho \circ \varphi$ aplica un punto de $\partial\mathbb{D}$ en $\partial\mathbb{D}$ y esto es equivalente a la conclusión del Teorema. □

TEOREMA 5.9. *(cf.* [**29**, Th. 2.2]*) Supóngase que φ y ψ sun aplicaciones lineales fraccionales de $\mathbb{D}$ en sí mismo. Entonces $C_\psi^* C_\varphi$ no es compacto, visto como un operador en $\mathcal{D}$, si y sólo si existen puntos ω_1 y ω_2 en $\partial\mathbb{D}$ tales que $\varphi^{-1}(\omega_1) = \psi^{-1}(\omega_2) \in \partial\mathbb{D}$.*

DEMOSTRACIÓN. Con la notación del Teorema anterior, $C_\psi^* C_\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ no es compacto si y sólo si $C_{\varphi\circ\gamma}$ no lo es. Esto es, $\varphi \circ \rho \circ \psi^{-1} \circ \rho$ envía un punto de $\partial\mathbb{D}$ en $\partial\mathbb{D}$ y esto es equivalente a la conclusión del Teorema. □

4. Rango Numérico de Operadores de Composición con Símbolo Fraccional Lineal

Para un operador acotado T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, el *rango numérico* de T se define como el subconjunto del plano complejo dado por:

$$W(T) := \{\langle Tx, x\rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}.$$

Mencionamos algunas importantes propiedades del rango numérico que usaremos (ver [**97**] y [**80**] por ejemplo).

PROPOSICIÓN 5.10. *Para un operador T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$:*

1. $W(T)$ *es invariante por similaridad unitaria.*
2. $W(T)$ *está incluido en el disco cerrado de radio $\|T\|$ centrado en el origen.*
3. $W(T)$ *contiene los autovalores de T. Más aun, si T es un operador unitariamente diagonalizable, entonces $W(T) = \mathrm{co}\{\lambda : \lambda$ es autovalor de $T\}$, es decir la envolvente convexa de sus autovalores.*
4. *El espectro de T pertenece a la clausura $\overline{W(T)}$ de $W(T)$. Más aun, si T es un operador normal entonces $\overline{W(T)}$ es igual a la cubierta convexa de su espectro.*
5. ***Teorema de Toeplitz-Hausdorff:*** $W(T)$ *es siempre convexo.*
6. $W(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in W(T)\}$.

Debido a las anteriores propiedades (4) y (5), tenemos que $\overline{W(T)}$ contiene la cubierta the convexa del espectro de T. Una importante diferencia entre el espectro y el rango numérico es que mientras el primero es invariante por similaridades, el segundo no lo es.

Hay algunos trabajos que estudian la “forma” del rango numérico de operadores de composición en espacios de Hilbert de funciones analíticas. En particular, los recientes artículos de Bourdon and Shapiro [**19**] y Matache [**80**] tratan este problema. Específicamente, en [**19**] se estudia la “forma” del rango numérico de operadores de composición inducidos en el espacio de Hardy H^2 por automorfismos del disco. En [**80**] se considera la “forma” del rango numérico de operadores de composición inducidos en el mismo espacio por monomios. Nosotros presentamos acá resultados análogos en el espacio $\mathcal{D}_0$. Para esto nos apoyaremos en el trabajo de Gallardo y Montes [**50**]. Indicamos a continuación varios de sus resultados que usaremos.

TEOREMA 5.11. [**50**, Th. 4.3] *Sea C_φ un operador de composición inducido por una transformación fraccional lineal actuando en $\mathcal{D}_0$. Entonces:*

1. *Si φ es conjugado a $\eta(z) = \mu z$, con $0 < |\mu| \leq 1$, entonces C_φ es unitariamente similar a un operador diagonal.*
2. *Si φ es parabólica conjugada a $\tau(z) = z + a$, entonces C_φ es unitariamente similar a la multiplicación por $\phi(t) := e^{iat}$ en $L^2(\mathbb{R}^+, tdt)$.*

3. *Si φ es un automorfismo hiperbólico conjugado a $\eta(z) = \lambda z$, entonces C_φ es unitariamente similar a la multiplicación por $\phi(t) := \lambda^{-it}$ en $L^2(\mathbb{R}, 2\pi dt)$.*
4. *Si φ es hiperbólica con justamente un punto fijo en $\partial\mathbb{D}$, entonces C_φ es unitariamente similar al producto de un operador unitario y un operador normal, o viceversa.*

Como una consecuencia del Teorema anterior E. Gallardo and A. Montes obtienen:

Teorema 5.12. [**50**, Th. 5.1] *Sea C_φ un operador de composición inducido en $\mathcal{D}_0$ por una transformación fraccional lineal. Entonces:*

1. *Si φ es un automorfismo elíptico y la derivada $\varphi'(\alpha)$ en su punto fijo interior sea una raíz n-ésima de la unidad entonces $\sigma(C_\varphi)$, el espectro de C_φ, es igual a $\{\varphi'(\alpha)^k : k = 0, 1, \ldots n-1\}$.*
2. *Si φ es un automorfismo que no es conjugado a una rotación de un múltiplo racional de π, entonces $\sigma(C_\varphi) = \partial\mathbb{D}$.*
3. *Si φ es parabólica, no es un automorfismo y es conjugada a $\tau(z) = z + a$, $\operatorname{Im} a > 0$, entonces $\sigma(C_\varphi) = \{e^{iat} : t \geq 0\} \cup \{0\}$.*
4. *Si φ es hiperbólica con justamente un punto fijo en la frontera del disco, entonces $\sigma(C_\varphi) = \overline{\mathbb{D}}$.*
5. *Si φ no es elíptica, tiene un punto fijo exterior y un punto fijo interior y $\varphi'(\alpha)$ es la derivada en este último punto, entonces $\sigma(C_\varphi) = \{\varphi'(\alpha)^n : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{0\}$.*

Para obtener el Teorema anterior E. Gallardo y A. Montes (cf. [**50**]), siguiendo una idea de [**61**] consideran $\mathcal{D}_\Pi$, el espacio de Dirichlet del semiplano superior, consistente de las funciones analíticas F en Π, el semiplano superior, para las cuales la integral

$$\frac{1}{\pi}\int_\Pi |F'(x+iy)|^2\, dx\, dy$$

es finita. Si identificamos funciones que difieran por constantes, entonces $\mathcal{D}_\Pi$ resulta un espacio de Hilbert y es isométricamente isomorfo a $\mathcal{D}_0$. Adicionalmente, el espacio $\mathcal{D}_\Pi$ es isométricamente isomorfo, bajo la transformada de Fourier, a $L^2(\mathbb{R}^+, tdt)$.

También usaremos el siguiente Corolario del Teorema 5.11:

Corolario 5.13. [**50**, Cor. 6.1] *Sea φ una transformación fraccional lineal de $\mathbb{D}$ en sí mismo. Si φ es elíptica o tiene un punto fijo en la frontera entonces $\|C_\varphi\|_{\mathcal{D}_0} = 1$.*

4.1. El Rango Numérico en $\mathcal{D}_0$. En esta sección mostraremos como es la "forma" del rango numérico de operadores de composición inducidos por transformaciones lineales fraccionales en el espacio $\mathcal{D}_0$. Para esto nos apoyaremos fuertemente en los dos resultados mencionados anteriormente.

TEOREMA 5.14. *Sea C_φ un operador de composición actuando en $\mathcal{D}_0$ e inducido por una transformación fraccional lineal. Se tiene que:*

1. *Si φ es un automorfismo elíptico con un punto interior fijo α y $\varphi'(\alpha)$ es una raíz n-ésima de la unidad, entonces*
$$W(C_\varphi) = \mathrm{co}\{\varphi'(\alpha)^k : k = 0, 1, \dots n-1\};$$
es decir, $W(C_\varphi)$ es región poligonal cerrada limitada por el polígono regular de n lados con vértices las raíces n-ésimas de la unidad.
2. *Si φ es conjugado a una rotación por un múltiplo irracional de π: $z \mapsto \mu z$, $|\mu| = 1$, entonces $W(C_\varphi) = \mathbb{D} \cup \{\mu, \mu^2, \dots\}$.*
3. *Si φ es un automorfismo hiperbólico o un automorfismo parabólico, entonces $W(C_\varphi) = \mathbb{D}$.*
4. *Si φ es parabólica y no es un automorfismo, entonces $\overline{W(C_\varphi)}$ es la envolvente convexa de una espiral que une 1 y 0.*
5. *Si φ es hiperbólica con exactamente un punto fijo en la frontera del disco entonces $W(C_\varphi) = \mathbb{D}$.*
6. *Si φ no es elíptica, con un punto exterior al disco y un punto interior del disco fijos y $\varphi'(\alpha)$ es la derivada en este último punto, entonces*
$$\overline{W(C_\varphi)} = \mathrm{co}(\{\varphi'(\alpha)^n : n = 1, 2 \dots\} \cup \{0\}).$$

DEMOSTRACIÓN. Para probar (1) observamos que, por la primera parte del Teorema 5.12, se tiene que C_φ es unitariamente similar a un operador diagonal con la familia $\{\varphi'(\alpha)^k : k = 0, 1 \dots n-1\}$ como autovalores de C_φ (tomando $\left\{\frac{z^m}{\sqrt{m}}\right\}_{m=1}^{\infty}$ como una base ortonormal de $\mathcal{D}_0$). Recordemos que el conjunto de autovalores es invariante bajo similaridad unitaria. Entonces, usando la Proposición 5.10 obtenemos el resultado.

Para las partes (2) y (3), usamos el hecho que el operador C_φ es normal en $\mathcal{D}_0$ (5.2) y entonces, por la Proposición 5.10, tenemos que $\overline{W(C_\varphi)} = \mathrm{co}(\sigma(C_\varphi))$. Pero en ambos casos el símbolo φ es un automorfismo que no es conjugado a una rotación de un múltiplo racional de π, y entonces $\sigma(C_\varphi) = \partial\mathbb{D}$, así que $\overline{W(C_\varphi)} = \overline{\mathbb{D}}$.

Si φ es como en la parte (2), tenemos otra vez que C_φ es unitariamente similar a un operador diagonal, pero ahora con la sucesión $\{\mu, \mu^2, \dots\}$ como autovalores de C_φ. Entonces $W(C_\varphi) = \mathbb{D} \cup \{\mu, \mu^2, \dots\}$.

Supóngase ahora que φ es un automorfismo hiperbólico conjugado a $\eta(z) = \lambda z$, $\lambda > 0$, el cual tiene entonces dos puntos fijos en $\partial\mathbb{D}$, y por el Corolario 5.2 tenemos que $\|C_\varphi\|_{\mathcal{D}_0} = 1$, además si existe un punto $z \in W(C_\varphi)$ tal que $|z| = 1$, entonces existe $f \in \mathcal{D}_0$, $\|f\|_{\mathcal{D}_0} = 1$ tal que $\langle C_\varphi f, f\rangle = z$, pero por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$1 = |z| = |\langle C_\varphi f, f\rangle| \leq \|C_\varphi f\|_{\mathcal{D}_0} \leq \|C_\varphi\|_{\mathcal{D}_0} = 1, \tag{5.1}$$

así que existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $C_\varphi f = \alpha f$, y por tanto, $z = \langle C_\varphi f, f\rangle = \alpha\langle f, f\rangle = \alpha$. Así, un punto pertenece a $W(C_\varphi) \cap \partial\mathbb{D}$ si y sólo si es un autovalor de C_φ.

Ahora bien, el Teorema 5.11 dice que C_φ es unitariamente similar al operador multiplicación M_ϕ en $L^2(\mathbb{R}, 2\pi dt)$ inducido por el multiplicador $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \lambda^{-it}$ $(= e^{-it\log\lambda})$. Sabemos que si α es un autovalor de C_φ entonces también lo es de M_ϕ, y por tanto, debe existir $f \in L^2(\mathbb{R}, 2\pi dt)$, $f \neq 0$ tal que $e^{-it\log\lambda} f(t) = \alpha f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como f debe ser distinto de cero en un conjunto de medida de Lebesgue positiva, $e^{-it\log\lambda} = \alpha$ en tal conjunto, lo cual es imposible. Luego, C_φ no tiene ningún autovalor y la convexidad de $W(C_\varphi)$ asegura que $W(C_\varphi) = \mathbb{D}$.

El caso en el cual el símbolo φ es un automorfismo parabólico conjugado a $\tau(z) = z + a$, $\mathrm{Im}\, a = 0$, $a \neq 0$, es similar: otra vez tenemos que φ tiene un punto fijo en $\partial\mathbb{D}$ y por tanto $\|C_\varphi\|_{\mathcal{D}_0} = 1$ y el mismo razonamiento sobre la ecuación 5.1, nos lleva a ver que únicamente autovalores pueden pertenecer a $W(C_\varphi) \cap \partial\mathbb{D}$. Ahora, por el Teorema 5.11, C_φ es unitariamente similar a un operador multiplicación $L^2(\mathbb{R}^+, tdt)$ con multiplicador $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{iat}$. Pero la medida tdt es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, y el razonamiento sigue como en el último caso.

Los casos (4) y (6) se siguen fácilmente del hecho que C_φ es normal en $\mathcal{D}_0$ (Teorema 5.2) y luego (Proposición 5.10) $\overline{W(C_\varphi)} = \mathrm{co}(\sigma(C_\varphi))$.

Para probar el caso (5), usamos el hecho que φ tiene un punto fijo en $\partial\mathbb{D}$ y luego $\|C_\varphi\|_{\mathcal{D}_0} = 1$. Pero como $\sigma(C_\varphi) \subset \overline{W(C_\varphi)}$, entonces (Teorema 5.12) $\overline{\mathbb{D}} \subset \overline{W(C_\varphi)}$, y otra vez por la Proposición 5.10, tenemos que $W(C_\varphi)$ pertenece al disco cerrado unitario de radio $\|C_\varphi\|$ centrado en el origen, así $\overline{W(C_\varphi)} = \overline{\mathbb{D}}$. Más aun, podemos deducir usando la ecuación 5.1 que $\alpha \in W(C_\varphi) \cap \partial\mathbb{D}$ si y sólo si existe $f \in \mathcal{D}_0$, tal que $C_\varphi f = \alpha f$.

Supóngase por un momento que el otro punto fijo de φ es interior al disco unitario, entonces (ver [**50**, Th. 4.3]) C_φ es unitariamente similar a $C_\psi : \mathcal{D}_\Pi \longrightarrow \mathcal{D}_\Pi$; donde $\psi(z) = \lambda z + a$, $\mathrm{Im}\, a > 0$ y $0 < \lambda < 1$. Ahora, si α es un autovalor de C_ψ, debe existir $g \in \mathcal{D}_\Pi$, $g \neq 0$ tal que $C_\psi g = \alpha g$, esto es,

$$g(\psi(z)) = \alpha g(z) \quad \text{para todo } z \in \Pi.$$

En particular, $g\big(\psi\big(\frac{a}{1-\lambda}\big)\big) = \alpha g\big(\frac{a}{1-\lambda}\big)$ y así, $g\big(\frac{a}{1-\lambda}\big) = \alpha g\big(\frac{a}{1-\lambda}\big)$; luego si $g\big(\frac{a}{1-\lambda}\big) \neq 0$ entonces $\alpha = 1$ y podemos escoger $z_0 \in \Pi$ tal que $g(z_0) \neq 0$ y como $g(\psi_n(z_0)) = \alpha^n g(z_0) = g(z_0)$ para todo n, (aquí ψ_n denota la composición de ψ con sí mismo n veces) entonces g toma cada valor no nulo de rango infinitas veces, esto contradice el hecho que $g \in \mathcal{D}_\Pi$ y luego $W(C_\varphi) = \mathbb{D}$.

Si $g\big(\frac{a}{1-\lambda}\big) = 0$, entonces elegimos $z_0 \in \Pi$ tal que $g(z_0) \neq 0$ y ahora es fácil ver que $\psi_n(z_0) \xrightarrow{n} \frac{a}{1-\lambda}$ y entonces

$$\lim_n g(\psi_n(z_0)) = g(\lim_n \psi_n(z_0)) = g\left(\frac{a}{1-\lambda}\right) = 0,$$

pero esto contradice el hecho que $|g(\psi_n(z_0))| = |\alpha^n g(z_0)| = |g(z_0)| \neq 0$ para todo n. Luego $W(C_\varphi) = \mathbb{D}$.

En el caso en el cual el otro punto fijo es exterior al disco unitario, se tiene $C_\varphi^* = C_\psi$, con ψ una transformación fraccional lineal de $\mathbb{D}$ en sí mismo con exactamente un punto fijo en la frontera y un punto interior fijo, así $W(C_\psi) = \mathbb{D}$ y por la Proposición 5.10 podemos concluir que $W(C_\varphi) = \mathbb{D}$.

□

4.2. El Rango Numérico Esencial en $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, el espacio de los operadores acotados en $\mathcal{H}$, sea $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ el subespacio de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ formado por todos los operadores compactos, y $[T]$ la clase de T en el álgebra de Calkin, es decir el espacio cociente $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Recordemos que la norma esencial de T es su norma en el álgebra de Calkin, esto es $\|T\|_e = \inf\{\|T - K\| : K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\}$, y el *rango numérico esencial* de T ($W_e(T)$) es el rango numérico de la clase $[T]$. Denotamos por $w_e(T)$ el *radio numérico esencial* de T, esto es, $w_e(T) = \sup\{|r| : r \in W_e(T)\}$. La noción de rango numérico esencial fue introducida por Stampfli y Williams en [**106**]. Puede verse que

$W_e(T) = \bigcap_{K\in\mathcal{K}(\mathcal{H})} \overline{W(T+K)}$ y por tanto, $W_e(T)$ es un subconjunto cerrado de $\overline{W(T)}$.

De manera similar, el espectro esencial $\sigma_e(T)$ de un operador T es definido como el espectro de la clase $[T]$ en el álgebra de Calkin. El espectro esencial $\sigma_e(T)$ es siempre un subconjunto compacto contenido en $\sigma(T)$ (cf. por ejemplo [**33**]).

Tenemos las siguientes propiedades de $W_e(T)$ (Ver [**15**] y [**56**], por ejemplo).

PROPOSICIÓN 5.15. *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces:*

1. *$W_e(T)$ es un conjunto compacto, no vacío y convexo.*
2. *$W_e(T) = \{0\}$ si y sólo si T es compacto.*
3. *Si T es un operador esencialmente normal, $W_e(T) = \mathrm{co}(\sigma_e(T))$ y $w_e(T) = \|T\|_e$.*
4. *Si M es un subespacio lineal cerrado de $\mathcal{H}$ tal que $M^\perp$ tiene dimensión finita. Entonces $W_e(T) = W_e(P_M T|_M)$, donde P_M denota la proyección ortogonal sobre M.*

En esta sección encontraremos la "forma" del rango numérico esencial de operadores de composición inducidos por transformación fraccional lineal actuando en el espacio de Dirichlet $\mathcal{D}$. Para esto, usaremos algunos resultados de [**50**].

PROPOSICIÓN 5.16.
1. [**50**, Remark 5.2] *El espectro esencial $\sigma_e(C_\varphi)$ de un operador de composición C_φ inducido por una transformación fraccional lineal actuando en $\mathcal{D}$ coincide con el espectro esencial de C_φ actuando en $\mathcal{D}_0$.*
2. [**50**, Cor. 5.2] *Sea C_φ un operador de composición inducido por una transformación fraccional lineal actuando en $\mathcal{D}_0$. Entonces $\sigma_e(C_\varphi) = \sigma(C_\varphi)$, excepto si φ no es elíptica y tiene un punto fijo interior al disco unitario y otro punto fijo exterior al disco, en cuyo caso $\sigma_e(C_\varphi) = \{0\}$.*

En la Sección 2 probamos que un operador de composición C_φ inducido en $\mathcal{D}$ por una transformación fraccional lineal φ del disco unitario en sí mismo es esencialmente normal si y sólo si φ no es una transformación hiperbólica que no sea un automorfismo con un punto fijo en $\partial\mathbb{D}$. Así, podemos deducir fácilmente el siguiente resultado.

TEOREMA 5.17. *Sea C_φ un operador de composición actuando en $\mathcal{D}$ e inducido por una transformación fraccional lineal. Entonces:*

1. *Si φ es un automorfismo elíptico y la derivada $\varphi'(\alpha)$ en su punto fijo interior es una raíz n-ésima de la unidad, entonces*

$$W_e(C_\varphi) = \text{co}(\{\varphi'(\alpha)^k : k = 0, \dots n-1\}).$$

2. *Si φ es un automorfismo el cual no es conjugado a una rotación de un múltiplo racional de π, entonces $W_e(C_\varphi) = \overline{\mathbb{D}}$.*
3. *Si φ es una transformación parabólica que no sea un automorfismo y la cual sea conjugada a $\tau(z) = z + a$, entonces $W_e(C_\varphi) = \text{co}(\{e^{iat} : t \geq 0\} \cup \{0\})$.*
4. *Si φ no es elíptica y tiene un punto interior y un punto exterior al disco unitario fijos, entonces $W_e(C_\varphi) = \{0\}$.*
5. *Si φ es hiperbólica con exactamente un punto fijo en la frontera del disco unitario, entonces $W_e(C_\varphi) = \overline{\mathbb{D}}$.*

Demostración. Los casos (1) a (4) se siguen fácilmente de los dos últimos resultados mencionados antes del Teorema. Para probar el caso (5), sabemos que $\overline{\mathbb{D}} = \sigma_e(C_\varphi) \subset W_e(C_\varphi)$, pero por la Proposición 5.16 tenemos que $W_e(C_\varphi) = W_e(\widetilde{C_\varphi}) \subset \overline{W(\widetilde{C_\varphi})} = \overline{\mathbb{D}}$ y se sigue el resultado. □

Corolario 5.18. *Sea C_φ un operador de composición actuando en $\mathcal{D}$ e inducido por una transformación fraccional lineal. Entonces $\|C_\varphi\|_e = 1$ excepto si φ no es elíptico y tiene un punto exterior del disco unitario y un punto interior del disco unitario fijos, en cuyo caso $\|C_\varphi\|_e = 0$.*

Corolario 5.19. *Sea C_φ un operador de composición actuando en $\mathcal{D}$ e inducido por una transformación fraccional lineal. Entonces C_φ es compacto si y sólo si φ no es elíptico y tiene un punto exterior del disco unitario y un punto interior del disco unitario fijos.*

4.3. El Rango Numérico en el espacio de Hardy del semiplano superior. Sea Π el semiplano superior del plano complejo. El espacio de Hardy del semiplano superior $H^2(\Pi)$ es el espacio de las funciones analíticas en Π para el cual la norma

$$\|f\|^2_{H^2(\Pi)} = \sup_{y>0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dx$$

es finita.

En este espacio la situación para el estudio de operadores de composición inducidos por transformación fraccional lineal es mucho más simple que en el espacio de Dirichlet: *Sólo las transformaciones fraccionales lineales de la forma* $\varphi(z) = az+b$ *con* $a > 0$ *y* $\operatorname{Im} b \geq 0$ *inducen operadores de composición acotados en* $H^2(\Pi)$ (Ver [**79**]).

Otra vez en [**50**], podemos encontrar una prueba del siguiente resultado.

Teorema 5.20. *Sea* $\varphi(z) = az + b$ *tal que* $a > 0$ *y* $\operatorname{Im} b \geq 0$*. Consideremos* C_φ *actuando en* $H^2(\Pi)$*. Entonces*

1. *Si* φ *es parabólica, entonces* C_φ *es unitariamente similar al operador multiplicación por* e^{ibt} *en* $L^2(\mathbb{R}^+, dt)$*.*
2. *Si* φ *es un automorfismo hiperbólico, entonces* C_φ *es unitariamente similar al operador multiplicación por* $z^{-it-1/2}$ *en el espacio* $L^2(\mathbb{R}, 2\pi dt)$*.*

En [**50**] y como una consecuencia del último resultado, se prueba que para φ como en 5.20, C_φ actuando en $H^2(\Pi)$ es normal si y sólo si φ es un automorfismo de Π o φ es parabólico. También se prueba allí que $\|C_\varphi\|_{H^2(\Pi)} = a^{-1/2}$ y se obtiene el espectro de C_φ:

Teorema 5.21. *Sea* $\varphi(z) = az + b$ *tal que* $a > 0$ *y* $\operatorname{Im} b \geq 0$*. Considérese* C_φ *actuando en* $H^2(\Pi)$*. Entonces*

1. *Si* φ *es un automorfismo, entonces* $\sigma(C_\varphi) = \{z \in \mathbb{C} : .|z| = a^{-1/2}\}$*.*
2. *Si* φ *es una transformación parabólica que no es un automorfismo, entonces* $\sigma(C_\varphi) = \{e^{ibt} : t \geq 0\} \cup \{0\}$*.*
3. *Si* φ *es hiperbólica y no es un automorfismo, entonces* $\sigma(C_\varphi) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq a^{-1/2}\}$*.*

Ahora, con un razonamiento similar al de la prueba del Teorema 5.14, podemos ver fácilmente:

Teorema 5.22. *Sea* $\varphi(z) = az + b$ *tal que* $a > 0$ *y* $\operatorname{Im} b \geq 0$*. Considérese* C_φ *actuando en* $H^2(\Pi)$*. Entonces*

1. *Si* φ *es un automorfismo, entonces* $W(C_\varphi) = \{z \in \mathbb{C} : .|z| < a^{-1/2}\}$*.*
2. *Si* φ *es parabólica y no es un automorfismo, entonces* $\overline{W(C_\varphi)} = \operatorname{co}(\{e^{ibt} : t \geq 0\} \cup \{0\})$*.*
3. *Si* φ *es hiperbólica y no es un automorfismo entonces* $\overline{W(C_\varphi)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq a^{-1/2}\}$*.*

4.4. Notas Finales. Algunas cuestiones quedan pendientes: en los casos (1), (2), (3) y (5) del Teorema 5.14, conocemos exactamente cómo es $W(C_\varphi)$, pero en los casos (4) y (6) sólo conocemos la "forma" de $W(C_\varphi)$ y no sabemos lo que $\partial W(C_\varphi)$ es. Usando el mismo razonamiento de la prueba de la parte (3), podemos probar que 1 no pertenece a $W(C_\varphi)$ cuando φ es parabólica y no es un automorfismo, pero nada más. El próximo paso es calcular el rango numérico de operadores de composición inducidos por transformaciones fraccionales lineales actuando en $\mathcal{D}$. Algunas consecuencias directas de los últimos resultados son: como $W_e(C_\varphi) \subset \overline{W(C_\varphi)}$, podemos concluir que si φ es hiperbólica con exactamente un punto fijo en la frontera del disco unitario, entonces $\overline{W(C_\varphi)} = \overline{\mathbb{D}}$. En [**50**] se prueba que un operador de composición C_φ inducido por una transformación fraccional lineal y actuando en $\mathcal{D}$ es normal si y sólo si $\varphi(z) = \mu z$, con $0 < |\mu| \leq 1$, así para esta clase de operadores $W(C_\varphi) = \mathrm{co}\{\mu^k : k = 0, 1, \dots\}$. Es fácil ver que $\|C_\varphi\| = 1$ en $\mathcal{D}$ si φ es una transformación fraccional lineal que aplica $\mathbb{D}$ en sí mismo y fija el origen, luego $\overline{W(C_\varphi)} = \overline{\mathbb{D}}$ si φ es un automorfismo que fija el origen y no es conjugado a una rotación de un múltiplo racional de π.

CAPÍTULO 6

Fenómenos Cíclicos

1. Introducción

En este capítulo estudiaremos el comportamiento dinámico de los operadores de composición con símbolo fraccional lineal actuando en algunos espacios de funciones analíticas definidos en el disco unitario. Seguiremos la exposición de [**24**].

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de funciones analíticas, $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal y $f \in \mathcal{H}$. Investigaremos algunas propiedades espaciales del conjunto *Órbita de f bajo T*, definido como

$$\mathrm{Orb}(f, T) := \{f, Tf, T^2(f), T^3(f), \dots\},$$

donde T^n denota la composición del operador T con sí mismo n veces.

Existen esencialmente dos nociones asociadas al hecho de que el conjunto $\mathrm{Orb}(f, T)$ sea "grande" en $\mathcal{H}$, estas son: *ciclicidad* e *hiperciclicidad*. Una operador T se dice cíclico si existe un elemento $f \in \mathcal{H}$ tal que el espacio generado linealmente por los elementos de $\mathrm{Orb}(f, T)$ es denso en $\mathcal{H}$; en este caso, la función f es llamada un *vector cíclico para T*. Asimismo, diremos que T es hipercíclico si existe una función $f \in \mathcal{H}$ tal que $\mathrm{Orb}(f, T)$ es un conjunto denso en $\mathcal{H}$. Aquí a una tal función f se le denomina *vector hipercíclico para T*. Es claro que todo operador hipercíclico también es cíclico.

En dimensión finita, resulta sencillo encontrar ejemplos de operadores de composición cíclicos.

Ejercicio 6.1. Encuentre un ejemplo de un operador lineal cíclico definido en $\mathbb{C}^N$.

Sin embargo, en estos espacios ningún operador lineal puede ser hipercíclico.

Ejercicio 6.2 ([**100**]). Demuestre que si el operador adjunto de un operador lineal posee al menos un autovalor, entonces dicho operador no puede ser hipercíclico. Por lo tanto, la hiperciclicidad de un operador lineal es una propiedad que sólo puede tener lugar en espacios de dimensión infinita.

Recordemos que $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$ designa al espacio de todas las funciones analíticas definidas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de Ω. El primer ejemplo de un operador lineal hipercíclico fue construido en el espacio $\mathcal{B}(\mathrm{Hol}(\mathbb{C}))$ ([**10**]). De hecho, existe toda una clase de operadores hipercíclicos actuando sobre este espacio: *Si* $a \neq 0$, *entonces el operador de traslación* $T_a : \mathrm{Hol}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ *definido por* $T_a(f)(z) := f(z+a)$ *es hipercíclico.* Obsérvese que si denotamos por $\varphi_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a la función definida como $\varphi_a(z) := z + a$, entonces $T_a(f) = f \circ \varphi_a$. Es decir, el operador T_a es un *operador de composición* sobre $\mathrm{Hol}(\mathbb{C})$.

Un ejemplo de un operador lineal hipercíclico actuando sobre un espacio de Hilbert es el siguiente ([**90**]): Sea l_2 el espacio de las sucesiones complejas cuadrado-sumables con la norma $\|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_2^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \langle \{a_n\}, \{a_n\} \rangle$. El operador de *retroceso unilateral*:

$$B(\{a_1, a_2, a_3, \dots\}) := \{a_2, a_3, \dots\},$$

claramente satisface $\|B(\{a_1, a_2, a_3, \dots\})\|_2 \leq \|\{a_1, a_2, a_3, \dots\}\|_2$, por lo que B es una función no expansiva. Mas aún, si multiplicamos a B por una constante λ de módulo menor que uno obtendremos que, de acuerdo al Teorema del punto fijo de Banach, el conjunto $\mathrm{Orb}(x, \lambda B)$ es una sucesión convergente para cualquier $x \in l_2$ y en consecuencia, el operador λB no es hipercíclico. Sin embargo, como mostraremos mas adelante, si $|\lambda| > 1$ el operador λB es hipercíclico. Este fenómeno no es exclusivo de los múltiplos del operador de retroceso unilateral y de hecho existe una gran cantidad de ejemplos similares.

Notemos lo siguiente: el espacio l_2 puede ser visto como el espacio de todas las funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $\|f\|_2^2 := \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty$. Si ahora definimos la función $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ como $\varphi(n) := n + 1$, vemos que el operador B es el operador de composición $C_\varphi : l_2 \longrightarrow l_2$.

Es fácil ver que $C_\varphi^*(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{0, a_1, a_2, \dots\}$ (el operador de *traslación unilateral a la derecha*). Hacemos notar la siguiente relación: si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la base canónica de Schauder de l_2 ($e_n(m) := \delta_{nm}$), entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ los funcionales de evaluación $\gamma_n : l_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definidos como $\gamma_n(f) := f(n)$ son lineales y continuos, de hecho

$$\gamma_n(f) = \langle f, e_n \rangle$$

con lo que podemos concluir que las funciones $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ "reproducen" al espacio l_2.

Es interesante resaltar el siguiente hecho: como observamos anteriormente, en los espacios de Hilbert funcionales, la familia de núcleos reproductivos genera el espacio, de hecho, en el caso del espacio l_2, los núcleos reproductivos son precisamente los vectores canónicos $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ y *todos* son necesarios para generar al espacio; es decir, si omitimos alguno de ellos, el espacio generado por los vectores restantes es un subespacio propio de l_2. Este fenómeno no es cierto en espacios Hilbert de Funciones Analíticas.

Ejercicio 6.3. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de funciones analíticas definidas en un dominio Ω y $\{z_n\}$ es cualquier sucesión convergente en Ω, entonces $\mathrm{CLS}\{K_{z_n}\} = \overline{\mathrm{LS}\{K_{z_n}\}}^{\|\cdot\|}$ (la clausura de la cápsula lineal de $\{K_{z_n}\}$) coincide con $\mathcal{H}$

Definición 6.4. Si t es un número real, definimos $\log^+(t) = \log(t)$ si $t \geq 1$ y $\log^+(t) = 0$ si $t < 1$. La clase de Nevanlinna $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbb{D})$ es el conjunto de todas las funciones $f \in H(\mathbb{D})$ tales que

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

Es claro que tanto $H^2(\mathbb{D})$ como H^∞ están contenidos en $\mathcal{N}$.

Por ajustarse mejor a nuestros propósitos, presentamos la siguiente versión del Teorema de unicidad para funciones pertenecientes a la clase de Nevanlinna $\mathcal{N}$ (ver Teor. 15.23 en [**93**]).

Proposición 6.5. *Sea $f \in \mathcal{N}$. Si $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{D}$ es una sucesión de ceros tal que* $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\alpha_n|) = \infty$, *entonces* $f \equiv 0$.

La relación $\sum_{n=0}^{\infty}(1 - |\alpha_n|) < \infty$ aludida en la Proposición anterior es conocida como *condición de Blaschke*.

Ejercicio 6.6. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones analíticas, tal que $H^\infty \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{N}$. Una familia numerable de núcleos reproductivos $\{K_{\alpha_n}\}_{\alpha_n \in \mathbb{D}}$ genera linealmente a $\mathcal{H}$ si, y sólo si, la sucesión $\{\alpha_n\}$ no satisface la condición de Blaschke.

2. Operadores de Composición Hipercíclicos en $H^2(\mathbb{D})$

A continuación presentamos algunos resultados relacionados con el comportamiento cíclico de operadores de composición. Escribiremos φ_n para designar a la composición de $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ con sí mismo n veces. Obsérvese que $C_\varphi^n = C_{\varphi_n}$.

El siguiente resultado limita la clase de símbolos que inducen comportamiento hipercíclico en los operadores de composición.

EJERCICIO 6.7. Demuestre que si C_φ es hipercíclico en $H^2(\mathbb{D})$, entonces φ es univalente y no posee puntos fijos en $\mathbb{D}$.

De acuerdo a este resultado, si un operador de composición con símbolo φ en TFL($\mathbb{D}$) es hipercíclico en $H^2(\mathbb{D})$, entonces φ es necesariamente parabólica o hiperbólica y sin puntos fijos en $\mathbb{D}$. De hecho, *casi todo* símbolo de éste tipo induce operadores de composición hipercíclicos en $H^2(\mathbb{D})$ como muestra el siguiente Teorema.

TEOREMA 6.8. *Si $\varphi \in TFL(\mathbb{D})$ no tiene puntos fijos en $\mathbb{D}$. Entonces:*

1. *C_φ es hipercíclico en $H^2(\mathbb{D})$ excepto en el caso en el cual φ es parabólica y no es un automorfismo.*
2. *Si φ es parabólica y no es automorfismo, entonces solamente las funciones constantes pueden ser puntos límites de las órbitas de C_φ.*

La herramienta fundamental para obtener el Teorema 6.8 la constituye el llamado Teorema de Kitai ([**68**]), obtenido por Carol Kitai (1982) en su tesis doctoral.

TEOREMA 6.9 (Kitai). *Sea X un espacio de Banach separable y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal y continuo tal que:*

a) *Existe un subconjunto denso Y de X en el cual la sucesión de iterados $\{T^n\}$ converge puntualmente a cero.*
b) *Existe un subconjunto denso Z de X y una aplicación $S : Z \longrightarrow Z$ tal que:*
   (i) *TS es la identidad en Z.*
   (ii) *La sucesión de iterados $\{S^n\}$ converge puntualmente en Z a cero.*

Entonces T es hipercíclico.

La demostración de este resultado se sigue de observar el hecho que un operador T es hipercíclico en un espacio de Banach separable X si, y sólo si, para cada par de abiertos no vacíos U, $V \subset X$ existe un número natural n tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

EJERCICIO 6.10 (Rolewicz, [**90**]). Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > 1$, el operador λB es hipercíclico en l_2, donde B es el operador de retroceso unilateral. *Indicación*: Utilice el Teorema de Kitai con $Z = l_2$ y Y como el espacio de las sucesiones eventualmente nulas.

TEOREMA 6.11. *Sea φ un automorfismo del disco unitario sin puntos fijos en $\mathbb{D}$. Entonces C_φ es hipercíclico (y por lo tanto cíclico) en H^2.*

DEMOSTRACIÓN. Utilizaremos el Teorema de Kitai: Primero recuérdese que, todo automorfismo no elíptico del disco unitario, posee un único punto fijo atractor $\alpha \in \partial\mathbb{D}$. Supongamos que φ posee otro punto fijo $\beta \in \partial\mathbb{D}$ y tomemos

$$Y := \{f \in H(\mathbb{D}) : f \text{ es continua en } \overline{\mathbb{D}} \text{ y } f(\alpha) = 0\}$$

El resultado se sigue al verificar que C_φ^n converge puntualmente a cero en Y.

Probemos pues lo afirmado: sea $f \in Y$, nótese que si $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus \{\beta\}$, entonces $\varphi_n(\zeta) \to \alpha$ (pues α es atractor) y por lo tanto $f(\varphi_n(\zeta)) \to f(\alpha) = 0$.

Ahora bien, como f es continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y las φ_n son continuas casi siempre en $\overline{\mathbb{D}}$, se tiene que

$$\|C_\varphi^n f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\varphi_n(e^{it}))|^2 dt < \infty$$

y del Teorema de la convergencia dominada, se concluye que

$$\|C_\varphi^n f\| \to 0.$$

□

OBSERVACIÓN 6.12. El argumento utilizado en la prueba anterior nos muestra que si α no es un elemento de $\mathbb{D}$, entonces el conjunto de los polinomios que se anulan en α es denso en H^2. Esto será utilizado más adelante.

Procedemos ahora a demostrar el Teorema 6.8, seguiremos la exposición de [**20**]:

DEMOSTRACIÓN. **a)** Si φ es un automorfismo de $\mathbb{D}$, el resultado ya fue demostrado en el Teorema anterior. Sólo queda el caso en que φ sea hiperbólica y no sea un automorfismo.

Sean α y β sus puntos fijos con α el atractor, utilizaremos de nuevo el Teorema de Kitai para demostrar la hiperciclicidad de C_φ.

Claramente, el espacio Y tomado en la demostración del Teorema anterior funciona igualmente en este caso; pero para el espacio Z es necesario algo más de trabajo: Supongamos primero que β se encuentra en la recta definida por α y el origen, del otro lado del origen que α (véase la figura 1) y consideremos D como el disco cuya frontera es perpendicular a esa recta y la corta en los puntos α y β. Entonces D contiene a $\mathbb{D}$ y ∂D es tangente a $\partial\mathbb{D}$ en el punto α.

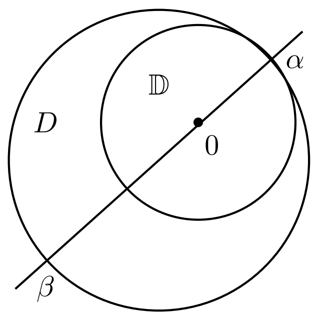

Figura 1

Como φ es una TFL($\mathbb{D}$), entonces preserva ángulos y envía círculos y rectas en círculos y rectas; por lo tanto debe enviar a ∂D en sí misma, así que D es enviado en sí mismo o en $\overline{D}^c$ pero como $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, entonces lo segundo no puede ocurrir, luego φ es un automorfismo de D.

Sea

$$Z := \{f \in H(D) : f \text{ es continua en } \overline{D} \text{ y } f(\beta) = 0\}.$$

Como hicimos notar en la Observación 6.12, el hecho de que $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ nos asegura que el conjunto de los polinomios que se anulan en β es denso en H^2; por lo tanto, Z es denso en H^2. Definamos $S : Z \longrightarrow Z$ por:

$$Sf(z) := f(\varphi^{-1}(z)) \qquad (z \in D),$$

S está bien definida pues $\varphi^{-1}(D) \subset D$ y $C_\varphi \circ S$ es la identidad en Z y el hecho que $\varphi^{-n}(\zeta) \to \beta$ para cada $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, nos conduce, de manera análoga a la demostración anterior a que $S^n \to 0$ en Z. Luego, del Teorema de Kitai se obtiene que C_φ es hipercíclico en H^2.

En caso que β no esté en la posición requerida, entonces existe un automorfismo γ_α de $\mathbb{D}$ que fija α y envía a β a dicha posición. Entonces,

$$\varphi = \gamma_\alpha \circ \psi \circ \gamma_\alpha^{-1}$$

con $\psi \in \mathrm{TFL}(\mathbb{D})$ tal que sus puntos fijos estén en la posición conveniente. Así C_ψ es hipercíclico en H^2 y por lo tanto C_φ también lo es.

b) Supongamos ahora que φ es parabólica y no es un automorfismo, entonces posee un único punto fijo (atractor) que se debe encontrar en $\partial\mathbb{D}$; luego de conjugar con una rotación de ser necesario, podemos asumir que dicho punto fijo es el 1.

Utilizando la aplicación $\omega(z) := \dfrac{z+1}{z-1}$, obtenemos que la aplicación $\phi := \omega \circ \varphi \circ \omega^{-1}$ es una transformación fraccional lineal del semiplano derecho $\mathbb{P}$ que posee como único punto fijo (atractor) al infinito. Luego, ϕ es una traslación de $\mathbb{P}$ de la forma $\phi(w) = w + a$, con $\Re a > 0$ ($\Re a \geq 0$ ya que $\phi(\mathbb{P}) \subset \mathbb{P}$ y $\Re a \neq 0$ ya que ϕ no es un automorfismo).

De manera similar, la n-ésima iteración de φ se puede representar como una traslación por na pues $\phi_n(w) = w + na$.

Primero estudiaremos que tan rápido se acercan las φ-órbitas entre sí y al punto fijo 1:

Sea $z \in \mathbb{D}$ y w su correspondiente por medio de ω en $\mathbb{P}$; es decir,

$$w = \frac{z+1}{z-1} \qquad \text{y} \qquad z = \frac{w-1}{w+1}.$$

Entonces $1 - z = 1 - \dfrac{w-1}{w+1} = \dfrac{2}{w+1}$ y

$$\begin{aligned} 1 - |z|^2 &= 1 - \left|\frac{w-1}{w+1}\right|^2 \\ &= \frac{|w+1|^2 - |w-1|^2}{|w+1|^2} \\ &= \frac{(\Re w + 1)^2 + (\Im w)^2 - (\Re w - 1)^2 - (\Im w)^2}{|w+1|^2} \\ &= \frac{4\Re w}{|w+1|^2}. \end{aligned}$$

Luego si w es el correspondiente por medio de ω en $\mathbb{P}$ de $\varphi(z)$, se tiene:

$$1 - |\varphi_n(z)|^2 = \frac{4\Re(w+na)}{|w+na+1|^2},$$

además si llamamos $w_0 \in \mathbb{P}$ al correspondiente a $\varphi(0)$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_n(z) - \varphi_n(0) &= \frac{w+na-1}{w+na+1} - \frac{w_0+na-1}{w_0+na+1} \\
&= \frac{(w+na-1)(w_0+na+1) - (w_0+na-1)(w+na+1)}{(w+na+1)(w_0+na+1)} \\
&= \frac{-2w-2w_0}{(w+na+1)(w_0+na+1)}
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} n(1-|\varphi_n(z)|^2) = c_1$ y $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} n^2|\varphi_n(z) - \varphi_n(0)| = c_2$ con c_1 y c_2 constantes no nulas que dependen únicamente de z y de a.

Fijemos ahora $f \in H^2$; demostraremos que si la órbita de f bajo C_φ se acerca a alguna función $g \in H^2$, entonces g debe ser constante. Para esto necesitaremos estimar el crecimiento de las diferencias de los valores que toma f. Comenzaremos con el siguiente estimado para $z \in \mathbb{D}$.

$$\begin{aligned}
|f'(z)|^2 &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} n\hat{f}(n)z^{n-1}\right|^2 \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} n|\hat{f}(n)||z|^{n-1}\right)^2 \\
&\leq \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2|z|^{2(n-1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\
&\leq \|f\|^2 \frac{2}{(1-|z|^2)^3}
\end{aligned}$$

así, $|f'(z)| \leq \dfrac{\sqrt{2}\|f\|}{(1-|z|^2)^{\frac{3}{2}}}$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Supongamos ahora que z y $w \in \mathbb{D}$, con $|z| \leq |w|$; entonces

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &\leq \int_z^w |f'(\zeta)||d\zeta| \\ &\leq \sqrt{2}\|f\| \int_z^w \frac{|d\zeta|}{(1-|\zeta|^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq \sqrt{2}\|f\| \frac{|w-z|}{(1-|w|^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

luego, para cualquier par de puntos $z, w \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{\sqrt{2}\|f\||w-z|}{\text{mín}\{(1-|w|^2),(1-|z|^2)\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Si ahora sustituimos a z por $\varphi_n(z)$ y a w por $\varphi_n(0)$, obtenemos

$$\begin{aligned} |f(\varphi_n(z)) - f(\varphi_n(0))| &\leq C \frac{|\varphi_n(z) - \varphi_n(0)|}{\text{mín}\{(1-|\varphi_n(z)|^2),(1-|\varphi_n(0)|^2)\}^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq \frac{C}{n^2} n^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{C}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

donde C representa constantes que dependen de f, z y φ pero no de n. Luego, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f(\varphi_n(z)) - f(\varphi_n(0)) = 0$.

Finalmente, supongamos que $g \in H^2$ es un punto límite de la órbita de f bajo C_φ, entonces existe una subsucesión φ^{n_k} tal que $f \circ \varphi^{n_k} \longrightarrow g$ en H^2 y por lo tanto $f(\varphi^{n_k}(z)) \underset{k}{\longrightarrow} g(z)$ para cada $z \in \mathbb{D}$; luego,

$$g(z) - g(0) = \lim_{n \longrightarrow \infty} (f(\varphi^{n_k}(z)) - f(\varphi^{n_k}(0))) = 0.$$

Así g es constante y esto termina la demostración. $\square$

3. Operadores de Composición Cíclicos en $H^2(\mathbb{D})$

Pasamos ahora a estudiar el comportamiento cíclico de los operadores de composición en $H^2(\mathbb{D})$ con símbolo φ en TFL($\mathbb{D}$). Puesto que ciclicidad es una propiedad "más débil" que hiperciclicidad, podrían existir operadores de composición cíclicos en $H^2(\mathbb{D})$ que no sean hipercíclicos. El Teorema 6.8 nos dice que si φ no posee puntos fijos en $\mathbb{D}$ y no es un no-automorfismo parabólico, entonces el operador de composición inducido es hipercíclico (y por lo tanto cíclico) en $H^2(\mathbb{D})$; nos queda entonces preguntarnos ¿qué sucede en los dos casos restantes?; es decir si φ posee puntos fijos en $\mathbb{D}$ o si es un no-automorfismo parabólico, ¿el operador de composición inducido será cíclico?. Esta pregunta es estudiada en [**20**]; acá presentamos algunos de sus resultados. Queremos hacer notar que la herramienta fundamental usada es la presencia de núcleos reproductivos en el espacio $H^2(\mathbb{D})$.

Si φ es elíptica, es conjugada de una rotación $\psi = e^{ir\pi}z$ y hay dos posibilidades: que r sea irracional, o que r sea racional. En el segundo caso resulta obvio que la órbita de cualquier elemento $f \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ bajo C_ψ consiste en un conjunto finito y por lo tanto $\{C_\varphi^n f : n = 0, 1, 2, \dots\}$ tendrá la misma propiedad. En [**20**] se demuestra además que en el primer caso el operador C_φ es cíclico en $H^2(\mathbb{D})$.

En el caso en que φ sea parabólica, de acuerdo al Teorema 6.8, se tiene que el operador C_φ es hipercíclico en $H^2(\mathbb{D})$ a menos que φ sea un no-automorfismo; sin embargo, en [**20**] también se muestra que C_φ es cíclico en $H^2(\mathbb{D})$.

Los casos restantes son descritos en el siguiente resultado. Recordemos que cada $\varphi \in \mathrm{TFL}(\mathbb{D})$ no parabólica, distinta de la identidad, posee exactamente dos puntos fijos, y como consecuencia del Lema de Schwarz se tiene que ambos no pueden pertenecer a $\mathbb{D}$, esto nos deja solamente dos casos.

TEOREMA 6.13. *Sea $\varphi \in TFL(\mathbb{D})$ no elíptica ni parabólica y distinta de la identidad con un puntos fijos $z_1 \in \mathbb{D}$ y $z_2 \in \mathbb{D}^c$, entonces:*

(i) *Si $z_2 \in \partial\mathbb{D}$, entonces C_φ no es cíclico.*
(ii) *Si $z_2 \in \overline{\mathbb{D}}^c$, entonces C_φ es cíclico.*

En el Cuadro 1 resumimos los resultados sobre ciclicidad e hiperciclicidad en $H^2(\mathbb{D})$ de los operadores de la forma C_φ con $\varphi \in \mathrm{TFL}(\mathbb{D})$.

Es importante el hecho de que en los espacios de Hilbert funcionales analíticos, se tiene la "propiedad generalizada de traslación" $C_\varphi^*(K_w) = K_{\varphi(w)}$ para el adjunto de cualquier operador de composición definido en dicho espacio y para cualquier núcleo reproductivo del mismo; esto nos permite hacernos preguntas mas generales sobre la ciclicidad de los operadores adjuntos de operadores de composición. El siguiente es un resultado parcial que permite "decidir" cuándo un núcleo reproductivo de $H^2(\mathbb{D})$ es un vector cíclico para el adjunto de un operador de composición.

φ	**Característica**	**Dinámica de $\mathbf{C}_\varphi$**
Elíptica	$\approx e^{i\pi\alpha}z,\ \ \alpha \in \mathbb{I}$	cíclico y no hipercíclico
	$\approx e^{i\pi\alpha}z,\ \ \alpha \in \mathbb{Q}$	no cíclico
No Elíptica Ptos. fijos en $\mathbb{D}^c$	No un no-automorf. parab.	hipercíclico
	no-automorf. parab.	cíclico y no hipercíclico
No Elíptica Un pto. fijo en $\mathbb{D}$	Pto. fijo en $\mathbb{D}^c$	cíclico y no hipercíclico
	Pto. fijo en $\partial\mathbb{D}$	no cíclico

CUADRO 1. Comportamiento dinámico de C_φ en $H^2(\mathbb{D})$

TEOREMA 6.14. *Sea $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Entonces:*

1. *Si existe $x \in \mathbb{D}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\varphi_n(x)|) = \infty$, entonces C_φ^* es cíclico en $H^2(\mathbb{D})$ y K_x es un vector cíclico para dicho operador.*
2. *Si en cambio $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\varphi_n(x)|) < \infty$ para todo $x \in \mathbb{D}$, entonces los núcleos reproductivos de $H^2(\mathbb{D})$ no pueden ser vectores cíclicos para C_φ^*.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar la primera parte obsérvese que si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\varphi_n(x)|) = \infty$, entonces la sucesión $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ no es una sucesión de Blaschke y por lo tanto si $f \in H^2(\mathbb{D})$ es tal que $\langle f, (C_\varphi^*)^n K_x\rangle = 0$ para todo entero positivo n, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (C_\varphi)^n f, K_x\rangle \\ &= \langle f \circ \varphi_n, K_x\rangle \\ &= f(\varphi_n(x)) \end{aligned}$$

para todo entero positivo n. Esto implica que $f \equiv 0$. Así K_x es un vector cíclico para C_φ^*.

Para demostrar la segunda parte del Teorema basta tomar a la función $f \in H^2(\mathbb{D})$ como el producto de Blaschke correspondiente a la sucesión $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ y observar que para todo entero positivo n,

$$\langle f, (C_\varphi^*)^n K_x \rangle = f(\varphi_n(x)) = 0$$

pero $f \neq 0$. Esto nos permite concluir que K_x no es un vector cíclico para C_φ de donde se sigue el resultado.

□

Nota 6.15. En la primera parte del Teorema anterior puede sustituirse $H^2(\mathbb{D})$ por cualquier espacio de Hilbert funcional analítico; sin embargo, para asegurar en la segunda parte la existencia de un vector ortogonal a la órbita de K_x, es necesario que el espacio contenga a todo producto de Blaschke correspondiente a las sucesiones $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Otro punto importante es el siguiente: dada una combinación lineal finita de núcleos reproductivos, digamos $f := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i K_{w_i}$, bajo las hipótesis de la segunda parte del resultado anterior, obtenemos que $\{\varphi_n(w_i)\}_{n\in\mathbb{N}, 1\leq i\leq m}$ es una sucesión de Blaschke y su correspondiente producto de Blaschke es un elemento ortogonal a la órbita de f. Así, las combinaciones lineales de los núcleos reproductivos en $H^2(\mathbb{D})$ no pueden ser tampoco vectores cíclicos para C_φ^*.

Cabe entonces la siguiente pregunta: *bajo las hipótesis de la segunda parte del Teorema 6.14, ¿ningún elemento de $H^2(\mathbb{D})$ puede ser cíclico para C_φ^*?*

4. Dinámica de Semigrupos de Operadores de Composición

En esta sección revisaremos algunos aspectos relacionados a la dinámica de operadores de composición utilizando la teoría de semigrupos. Comenzaremos recordando la noción de semigrupo de operadores.

Definición 6.16. Sea X un espacio vectorial topológico; una función $T : [0,\infty) \to \mathcal{B}(X)$ (el álgebra de los operadores lineales y acotados en X), es llamada un semigrupo de operadores si satisface las siguientes condiciones:

(i) $T(t)T(s) = T(t+s)$, para todo $s, t \in [0,\infty)$.
(ii) $T(0) = I$ (el operador identidad en X).

Denotaremos al operador $T(t)$ como T_t y al semigrupo mediante $(\{T_t\}_{t\geq 0}, X)$. Si queda claro a partir del contexto que $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$, entonces nos referiremos al semigrupo simplemente como $\{T_t\}_{t\geq 0}$.

Recuérdese que los iterados un operador de composición C_φ^n son los operadores de composición C_{φ_n} inducidos por los iterados de φ. Si φ

posee "iterados fraccionales"; es decir, si podemos definir iterados de la forma φ_t con $t \in [0, \infty)$, esto a su vez induce iterados fraccionales del operador C_φ; esto es,

$$C_\varphi^t(f) := C_{\varphi_t}(f)$$

para cada $t \geq 0$. A continuación estudiaremos un importante semigrupo de operadores de composición inducido por iterados fraccionales.

En [**52**] J. Giménez encuentra interesantes propiedades de los operadores de composición con símbolo de la forma

$$\phi_a(z) := \frac{z}{az + (a+1)}, \qquad a > 0.$$

es fácil ver que para cada n, $(\phi_a)_n \equiv \phi_{(1+a)^n-1}$, por lo que parece natural definir $(\phi_a)_t := \phi_{(1+a)^t-1}$ para $t > 0$ y $(\phi_a)_0$ como la aplicación identidad en $\mathbb{D}$. Veamos que $\{(\phi_a)_t\}_{t\geq 0}$ induce un semigrupo de operadores de composición. En efecto, la propiedad (ii) se tiene directamente de la definición. Veamos que se satisface (i): para esto basta observar que

$$\begin{aligned}
((\phi_a)_t \circ (\phi_a)_s)(z) &= \phi_{(1+a)^t-1}(\phi_{(1+a)^s-1}(z)) \\
&= \phi_{(1+a)^t-1}\left(\frac{z}{[(1+a)^s-1]z + (1+a)^s}\right) \\
&= \frac{z}{[(1+a)^{t+s}-1]z + (1+a)^{t+s}} \\
&= (\phi_a)_{t+s}.
\end{aligned}$$

Luego estamos en presencia de una familia de iterados fraccionales de ϕ_a que induce un semigrupo de operadores de composición dados por la forma:

$$C_{\phi_a}^t := C_{(\phi_a)_t} = C_{\phi_{(1+a)^t-1}}.$$

Nótese que para cualquier $a > 0$, la aplicación fraccional lineal ϕ_a posee al 0 y al -1 como puntos fijos, luego si tomamos $\tau(z) := \dfrac{z}{z+1}$ entonces $\tau^{-1}(z) = \dfrac{z}{1-z}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
(\tau \circ \phi_a \circ \tau^{-1}(z) &= \tau\left(\phi_a\left(\frac{z}{1-z}\right)\right) \\
&= \tau\left(\frac{z}{a+1-z}\right) \\
&= \frac{z}{a+1}
\end{aligned}$$

y como $a > 0$ se tiene que ϕ_a es hiperbólica; así, podemos concluir del Teorema 6.13 que el operador C_{ϕ_a} no puede ser cíclico en $H^2(\mathbb{D})$. Sin embargo, ahora contamos con “mas iterados” en los cuales apoyarnos y esto podría traducirse en un “mejor” comportamiento cíclico en algún sentido, esto motiva la siguiente definición.

Definición 6.17. Sea $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de operadores actuado sobre un espacio de Banach X, diremos que $\mathcal{T}$ es un *semigrupo cíclico* si existe un elemento $x \in X$ tal que $\mathrm{CLS}\{T_t(x) : t > 0\} = X$. Análogamente, diremos que $\mathcal{T}$ es un *semigrupo hipercíclico* si existe $x \in X$ tal que $\overline{\{T_t(x) : t > 0\}} = X$.

Obsérvese que si el operador T_{t_0} es cíclico para algún $t_0 \geq 0$, entonces el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ también lo es. Surge entonces de manera natural la pregunta: *si un semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es cíclico, entonces ¿cada operador T_t también lo es?*. Esto es falso en general y la respuesta, como veremos, la obtenemos a partir del semigrupo de operadores de composición definido anteriormente.

Utilizaremos la siguiente notación. $H^2_0(\mathbb{D}) := zH^2(\mathbb{D})$ es el espacio constituido por las funciones $f \in H^2(\mathbb{D})$ tales que $f(0) = 0$. La familia $\{z^n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ es una base ortonormal de este espacio, el cual por ser un subespacio de $H^2(\mathbb{D})$, es un espacio de Hilbert funcional analítico y por lo tanto posee núcleos reproductivos que en este caso vienen dados como:

$$K^0_w(z) = \frac{z}{1 - \overline{w}z}.$$

Tanto ϕ_a como cada $(\phi_a)_t$ poseen como puntos fijos al 0 y al -1, por lo tanto el Teorema 6.13 nos permite concluir que ningún operador $C^t_{\phi_a}$ puede ser cíclico en $H^2(\mathbb{D})$; de hecho, en la demostración de 6.13 se concluye que la cápsula lineal de cualquier órbita de $C^t_{\phi_a}$ tiene codimensión infinita en $H^2(\mathbb{D})$. Luego los operadores $C^t_{\phi_a}$ tampoco pueden ser cíclicos en H^2_0; sin embargo, el semigrupo $\{C^t_{\phi_a}\}_{t\geq 0}$ es cíclico en H^2_0 como mostramos a continuación.

Observemos, en primer lugar, que

$$\phi_a(z) = \frac{z}{az + 1 + a} = -\frac{1}{a}\frac{\left(-\frac{a}{1+a}\right)z}{1 + \left(\frac{a}{1+a}\right)z} = -\frac{1}{a}K^0_b,$$

donde $b = -\frac{a}{1+a}$, de modo que cada $\phi_a \in H^2_0$.

Fijemos $s \geq 0$. Mostraremos que $(\phi_a)_s$ es un vector cíclico para el semigrupo $\{C^t_{\phi_a}\}_{t\geq 0}$. Supongamos que $g \in H^2_0$ es ortogonal a la cápsula lineal de $\{C^t_{\phi_a}(\phi_a)_s : t \geq 0\}$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle g, C^t_{\phi_a}(\phi_a)_s\rangle = \langle g, (\phi_a)_s \circ (\phi_a)_t\rangle \\ &= \langle g, (\phi_a)_{s+t}\rangle = \langle g, \phi_{(1+a)^{t+s}-1}\rangle \\ &= \left\langle g, \frac{-1}{(1+a)^{t+s}-1} K^0_c \right\rangle \\ &= \frac{-1}{(1+a)^{t+s}-1} g\left(\frac{1}{(1+a)^{t+s}} - 1\right), \end{aligned}$$

con $c = -\frac{(1+a)^{t+s}-1}{(1+a)^{t+s}}$.

Luego g se anula a lo largo de la curva $\left\{\frac{1}{(1+a)^{t+s}} - 1 : t \geq 0\right\}$ y por el Teorema de unicidad para funciones analíticas se tiene que $g \equiv 0$. Así, cada $(\phi_a)_s$, con $s \geq 0$ es un vector cíclico para el semigrupo $\{C^t_{\phi_a}\}_{t\geq 0}$.

En [**49**], Frankfurt introduce la noción de *cuasi-ciclicidad* de semigrupos de operadores, mas tarde utilizada por Giménez en [**53**]; veremos a continuación que que las nociones de semigrupos cuasi-cíclicos y cíclicos realmente coinciden en espacios de Banach.

Sea X es un espacio de Banach. Un semigrupo $\mathcal{T} := \{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ se dice *cuasi-cíclico* si existe una familia de vectores $\{x_t\}_{t>0} \subset X$ tal que $T_t x_s = x_{t+s}$, para todo $s, t > 0$ y $\mathrm{CLS}\{x_s : s > 0\} = X$.

TEOREMA 6.18. [**24**] *Un semigrupo de operadores actuando en un espacio de Banach es cuasi-cíclico si y solamente si es cíclico.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio de Banach y $\mathcal{T} := \{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ un semigrupo. Si $\mathcal{T}$ es cíclico entonces existe un vector $x_0 \in X$ tal que $\mathrm{CLS}\{T_t x_0 : t \geq 0\} = X$, basta entonces definir para cada $s > 0$, $x_s := T_s x_0$ y se tiene que $\mathcal{T}$ es cuasi-cíclico.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{T}$ es cuasi-cíclico, entonces existe una familia $\{x_s\}_{s>0}$ con las propiedades descritas anteriormente; para cada entero positivo x, definamos

$$A_n := \mathrm{CLS}\{x_s : s > 1/n\},$$

entonces para cada n, A_n es un subespacio cerrado de X y $A_n \subset A_{n+1}$, luego el Teorema de categoría de Baire nos permite asegurar la existencia de un entero positivo n_0 tal que A_{n_0} tiene interior no vacío y puesto que A_{n_0} es un subespacio vectorial de X, concluimos que $A_{n_0} = X$. Así, si tomamos $x_0 := x_{\frac{1}{n_0}}$, entonces $T_s x_0 = T_s x_{\frac{1}{n_0}} = x_{\frac{1}{n_0}+s}$ y por lo tanto

$$\mathrm{CLS}\{T_s x_0 : s > 0\} = \mathrm{CLS}\{x_s : s > 1/n_0\} = A_{n_0} = X.$$

□

TEOREMA 6.19. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert funcional analítico y $\Phi := \{\phi_t : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} : t \geq 0\}$ una familia de iterados fraccionales univalentes tales que ϕ_t no posean puntos fijos en $\mathbb{D}$ si $t \neq 0$. Entonces el adjunto, $\{C^*_{\phi_t}\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, del semigrupo de operadores de composición inducido por Φ es cíclico.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos cualquier $w \in \mathbb{D}$ y sea $K_w \in \mathcal{H}$ el correspondiente núcleo reproductivo. Las hipótesis sobre Φ garantizan que la aplicación $t \mapsto \phi_t(w)$ define una curva contenida en $\mathbb{D}$; de hecho, esta curva es simple ya que si $t \geq s$ y $\phi_t(w) = \phi_s(w)$, entonces $(\phi_s \circ \phi_{t-s})(w) = \phi_t(w) = \phi_s(w)$, lo que implica (ya que ϕ_s es univalente) que $\phi_{t-s}(w) = w$; pero si $t > s$ entonces ϕ_{t+s} no fija puntos en $\mathbb{D}$, así $t = s$.

Ahora bien, si $g \in \mathcal{H}$ entonces del Teorema de unicidad para funciones analíticas se tiene que para todo $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \langle g, C^*_{\phi_t} K_w \rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \langle g, K_{\phi_t(w)} \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad g(\phi_t(w)) = 0. \end{aligned}$$

Luego, $g \equiv 0$. □

NOTA 6.20. Si $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0, \infty)$ es una sucesión convergente y no eventualmente constante, entonces utilizando de nuevo el Teorema de unicidad para funciones analíticas y un razonamiento similar al anterior, concluimos que $\mathrm{LS}\{C_{\phi_{t_k}} K_w : k > 0\} = \mathcal{H}$ para cualquier $w \in \mathbb{D}$.

Este resultado es una especie de generalización del Teorema 6.14 en el siguiente sentido. Bajo las condiciones del Teorema anterior se tiene que $\langle g, C_{\phi_{t_k}} K_w \rangle = 0$ para todo k si, y sólo si, $g \equiv 0$; es decir, $g(\phi_{t_k}(w)) = 0$ para todo k si, y sólo si, $g \equiv 0$. Esto es, *todos* los núcleos reproductivos de $H^2(\mathbb{D})$ son “vectores cíclicos” para la familia $\{C_{\phi_{t_k}}\}_{k=1}^{\infty}$.

En lo que sigue plantearemos algunas preguntas relacionadas con el comportamiento hipercíclico de semigrupos de operadores de composición. Es fácil ver que si X es un espacio de Banach separable, entonces $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ es un semigrupo hipercíclico de operadores si para todo par de abiertos U y V en X existe $t > 0$ tal que $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$. Esto nos permite establecer un criterio muy similar al que proporciona el Teorema 6.9, esta vez para parámetro continuo, en relación a la hiperciclicidad de un semigrupo de operadores de composición. La demostración del mismo es similar a la demostración del Teorema de Kitai (ver [**100**]).

TEOREMA 6.21. *Dado un espacio de Banach separable X y un semigrupo de operadores $\mathcal{T} := \{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ tales que:*

(i) *Existe un subespacio* Y *denso en* X *tal que* $\|T_t y\| \underset{t}{\longrightarrow} 0$ *para todo* $y \in Y$.

(ii) *Existe un subespacio* Z *denso en* X *y una familia* (*no necesariamente un semigrupo*) $\{S_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(Z)$ *tal que para cada* $t \geq 0$ $T_t S_t$ *es la identidad en* Z *y* $\|S_t z\| \underset{t}{\longrightarrow} 0$ *para todo* $z \in Z$.

Entonces el semigrupo $\mathcal{T}$ *es hipercíclico.*

Es claro que si un operador $\{T_{t_0}\}$ es hipercíclico, entonces el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ también lo es; el recíproco es un problema abierto propuesto en [**8**]. En dicho artículo se prueba que todo espacio de Banach complejo, separable e infinito dimensional admite un semigrupo hipercíclico.

Otro problema abierto es el siguiente (ver [**100, 9**]): *¿ Satisface todo operador hipercíclico el criterio de hiperciclicidad* (Teorema 6.9)*?*. En virtud del Teorema 6.21 planteamos la siguiente pregunta para el caso de semigrupos: *¿Satisface todo semigrupo hipercíclico el criterio de hiperciclicidad?*.

Hacemos notar que si un semigrupo de operadores $\{T_t\}_{t\geq 0}$ satisface el criterio de hiperciclicidad dado en el Teorema 6.21, entonces cada operador T_t satisface el criterio de hiperciclicidad (6.9). Por lo tanto una respuesta afirmativa a esta segunda pregunta responde a su vez a la primera. Cabe también preguntarse: *Si cada operador* T_t *satisface el criterio de hiperciclicidad (6.9) ¿Satisface el semigrupo* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *el criterio de hiperciclicidad (6.21)?*.

Otro aspecto relacionado con los conceptos presentados en este Capítulo, es el estudio de transformaciones caóticas. Precisando:

Definición 6.22. Sea (X, d) un espacio métrico y $T : X \longrightarrow X$ una función. Se dice que T *depende sensiblemente de las condiciones iniciales* si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ y todo $x \in X$ existe un punto $y \in B(x, \varepsilon)$ tal que $d(T^n x, T^n y) > \delta$ para algún entero no negativo n.

Definición 6.23 (Devaney). Con las hipótesis de la definición anterior, T se dice una aplicación *caótica* si satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo par de abiertos U y V en X existe un entero no negativo n tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$
2. T depende sensiblemente de las condiciones iniciales.
3. Existe un subconjunto denso de puntos con órbita (respecto a T) finita.

En [**100**] encontramos una demostración del siguiente hecho: *Si X es un espacio de Banach y $T : X \longrightarrow X$ es una aplicación continua, hipercíclica y tal que existe un subconjunto denso de X de puntos cuya órbita bajo T es finita (puntos periódicos), entonces T es caótica.* Vemos así que la teoría del caos está íntimamente relacionada con la noción de hiperciclicidad. Para mayor información sobre las relaciones del caos con los temas tratados en este artículo, recomendamos [**44, 14, 100**].

En cuanto a ciclicidad, en el libro de Bourdon y Shapiro ([**20**]) se resuelve totalmente el problema de identificar a los símbolos analíticos que inducen operadores de composición en el espacio $H^2(\mathbb{D})$ y en [**51**] se hace lo correspondiente para operadores de composición con símbolo fraccional lineal actuando en espacios tipo Dirichlet.

Finalmente, para un excelente resumen acerca del trabajo hecho en los últimos años sobre hiperciclicidad de operadores lineales, recomendamos [**55**].

CAPíTULO 7

Operadores de Composición, isometrías y problemas relacionados.

Como se ha afirmado repetidas veces el gran objetivo de la teoría de los operadores de composición es estudiar propiedades de estos operadores en términos de propiedades de los símbolos que los inducen. Se plantea naturalmente la posibilidad de utilizar propiedades de los operadores inducidos que determinen propiedades del símbolo.

En este Capítulo consideraremos este tipo de cuestiones. Basados en resultados de dos artículos recientes, [**77**] y [**78**], de M. Martín y D. Vukotić, continuaremos estudiando operadores de composición en el espacio de Dirichlet $\mathcal{D}$. Concretamente, en la Sección 1, consideramos el análogo en el espacio de Dirichlet a un problema propuesto por Walter Rudin en el contexto de espacios de Hardy: ¿Cuándo para una función φ analítica y acotada en el disco unitario $\mathbb{D}$, que fija el 0, se cumple que el conjunto $\{\varphi^n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ es ortogonal en $\mathcal{D}$?, y en la Sección 2 se considerará el problema de caracterizar las aplicaciones analíticas, del disco unitario en sí mismo, univalentes y cuya imagen "llena" el disco, en términos de la norma del operador de composición que ellas inducen. Este problema es análogo a una cuestión planteada y resuelta por J. Shapiro en [**99**] sobre funciones interiores, en el contexto del espacio H^2. Los resultados presentados aparecen en [**27**].

Escribiremos $\mathcal{D}_0$ para designar el subespacio de $\mathcal{D}$ formado por aquellas funciones en el espacio de Dirichlet que se anulan en 0, y usaremos la notación $\|C_\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\|$ para designar la norma del operador de composición inducido en el espacio $\mathcal{H}$.

1. Funciones ortogonales en el espacio de Dirichlet.

El problema de describir los operadores de composición isométricos en espacios de Hilbert de funciones analíticas ha sido estudiado en diversos contextos. De hecho, Nordgren probó en [**82**] que el operador de composición C_φ inducido en H^2 por $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ es una isometría en H^2

si y sólo si $\varphi(0) = 0$ y φ es una función interior (ver también [**39**, p. 321]). En A^2 es una consecuencia fácil del Lema de Schwarz que φ induce un operador de composición isométrico si y sólo si φ es una rotación.

Recientemente, M. Martín y D. Vukotić probaron en [**78**] que en $\mathcal{D}$, el espacio de Dirichlet en el disco unitario, los operadores de composición isométricos son aquellos inducidos por aplicaciones univalentes y llenas, del disco en sí mismo, que fijen el origen. Recordemos que $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ es una aplicación *llena* si $A[\mathbb{D} \setminus \varphi(\mathbb{D})] = 0$.

W. Rudin en 1988 propuso el siguiente problema: Si φ es una aplicación analítica y acotada en el disco unitario $\mathbb{D}$ tal que el conjunto $\{\varphi^n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ sea ortogonal en H^2, ¿φ debe ser un múltiplo constante de una función interior? C. Sundberg [**108**] y C. Bishop [**11**] resolvieron independientemente el problema. En efecto, ellos probaron que existen funciones φ que no son interiores pero para las cuales el conjunto $\{\varphi^n\}$ es ortogonal en H^2.

Como afirman M. Martín y D. Vukotić en [**78**], su caracterización de los operadores de composición isométricos actuando en $\mathcal{D}$ puede ser interpretada como sigue: las aplicaciones univalentes, llenas, del disco, que fijan el origen son la contrapartida en el espacio de Dirichlet, de las funciones interiores que fijan el origen, con respecto a los operadores de composición en H^2. Así pues, es natural proponer la siguiente cuestión: ¿Cuándo se cumple, para una función φ analítica y acotada en el disco unitario $\mathbb{D}$, que fije el 0, que el conjunto $\{\varphi^n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ es ortogonal en $\mathcal{D}$? Recordemos que una función analítica y acotada en $\mathbb{D}$ no pertenece necesariamente a $\mathcal{D}$, luego nosotros asumiremos, en este contexto que φ está en $\mathcal{D}$ (y por tanto, como $\mathcal{D} \cap H^\infty$ es un álgebra, que $\{\varphi^n\}$ está en $\mathcal{D}$).

Acá responderemos la cuestión planteada en el caso en que n_φ es esencialmente acotada, esto es: existe una constante C tal que $n_\varphi(w) \leq C$ para los $w \in \mathbb{D}$ excepto, posiblemente, por aquellos en un conjunto de área cero. Nuestro resultado es análogo a una caracterización dada por P. Bourdon en [**16**] en el contexto de H^2: las funciones que satisfacen las hipótesis del problema de Rudin son aquellas aplicaciones φ tales que su función conteo de Nevanlinna N_φ es esencialmente radial. Nuestra hipótesis que n_φ es esencialmente acotada es claramente más fuerte que asumir solamente que φ pertenece al espacio de Dirichlet y posiblemente pueda ser debilitada. Nuestras pruebas se apoyan en las técnicas utilizadas en [**16**].

TEOREMA 7.1. *Sea* $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *con* $\varphi(0) = 0$. *El conjunto* $\{\varphi^n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ *es ortogonal en* $\mathcal{D}$ *si y sólo si existe una función* $g : [0, 1) \to [0, \infty)$ *tal que para casi todo* $r \in [0, 1)$, $n_\varphi(re^{i\theta}) = g(r)$ *para casi todo* $\theta \in [0, 2\pi]$ *(esto es,* n_φ *es esencialmente radial).*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que n_φ es esencialmente radial. Sean $n > m$ enteros no negativos. Se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \varphi^n, \varphi^m \rangle_{\mathcal{D}} &= nm \int_{\mathbb{D}} \varphi(z)^{n-1}\overline{\varphi(z)^{m-1}}|\varphi'(z)|^2 \, dA(z) \\
&= nm \int_{\mathbb{D}} w^{n-1}\overline{w^{m-1}} n_\varphi(w) \, dA(w) \\
&= nm \int_0^1 r^{n+m-1} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} n_\varphi(re^{i\theta}) \, d\theta \right] dr \\
&= nm \int_0^1 r^{n+m-1} g(r) \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \, d\theta \right] dr \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Inversamente, si $\{\varphi^n : n = 0, 1, 2 \dots\}$ es ortogonal en $\mathcal{D}$. Sea k un entero positivo arbitrario. Para cada entero $n > k$, tenemos

$$\begin{aligned}
0 = \langle \varphi^n, \varphi^{n-k} \rangle_{\mathcal{D}} &= n(n-k) \int_{\mathbb{D}} \varphi(z)^{n-1}\overline{\varphi(z)^{n-k-1}}|\varphi'(z)|^2 \, dA(z) \\
&= n(n-k) \int_{\mathbb{D}} w^{n-1}\overline{w^{n-k-1}} n_\varphi(w) \, dA(w) \\
&= n(n-k) \int_0^1 r^{2n-k-1} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} n_\varphi(re^{i\theta}) \, d\theta \right] dr.
\end{aligned}$$

Las funciones $f_k(r) := \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} n_\varphi(re^{i\theta}) \, d\theta$ pertenecen a $L^2[0, 1]$ pues n_φ es esencialmente acotada (ésta es la única aparición de esta hipótesis) y la ecuación anterior dice que ellas son ortogonales en $L^2[0, 1]$ al conjunto de las funciones $\left\{r \mapsto r^{2n-k-1} : n > k\right\}$. Por una ligera variación del Teorema de Müntz-Szasz (cf. [**16**]), el espacio vectorial generado por este conjunto es denso en $L^2[0, 1]$, y así $f_k(r) = 0$ para casi todo $r \in [0, 1]$. Tomando conjugados complejos, vemos que $\int_0^{2\pi} e^{ij\theta} n_\varphi(re^{i\theta}) \, d\theta = 0$ para todo $j \neq 0$, y casi todo $r \in [0, 1]$. Así que $\theta \mapsto n_\varphi(re^{i\theta})$ es esencialmente constante para casi todo r. □

La siguiente Proposición describe las aplicaciones analíticas de $\mathbb{D}$ en sí mismo que satisfacen las propiedades indicadas en las condiciones del Teorema anterior.

PROPOSICIÓN 7.2. *Supóngase que* $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *y su función conteo es esencialmente acotada y esencialmente radial. Entonces* φ *es un múltiplo constante de una aplicación llena de* $\mathbb{D}$.

DEMOSTRACIÓN. Suponga que φ no es constante. Si el rango de φ contiene un punto en el círculo $S_r = \left\{re^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\right\}$, $\varphi(\mathbb{D})$ contiene un arco de ese círculo pues el rango es un subconjunto abierto de $\mathbb{D}$. En este arco $n_\varphi \geq 1$, y así el rango de φ puede omitir únicamente un subconjunto de S_r de θ-medida cero, pues n_φ es esencialmente constante en S_r. Luego el rango de φ contiene casi todos los puntos en el disco $\{z : |z| < \|\varphi\|_\infty\}$. $\square$

2. Aplicaciones llenas y operadores de composición

En el espacio de Hardy, J. Shapiro [**99**] caracterizó, en términos de sus normas, aquellos operadores de composición C_φ cuyo símbolo es una *función interior.* En efecto, J. Shapiro probó:

1. Si $\varphi(0) = 0$ entonces φ es interior si y sólo si
$$\|C_\varphi : H_0^2 \to H_0^2\| = 1,$$
donde H_0^2 es el subespacio de las funciones en H^2 que se anulan en 0, y
2. Si $\varphi(0) \neq 0$ entonces φ es interior si y sólo si
$$\|C_\varphi : H^2 \to H^2\| = \sqrt{\frac{1 + |\varphi(0)}{1 - |\varphi(0)|}}.$$

Presentaremos a continuación los resultados de nuestras investigaciones sobre cuestiones análogas en el espacio de Dirichlet.

En [**77**] M. Martín y D. Vukotić calculan la norma del operador de composición C_φ inducido en $\mathcal{D}$ por una aplicación univalente, llena φ en $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. Ellos obtienen que

$$\|C_\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}\| = \sqrt{\frac{L + 2 + \sqrt{L(4 + L)}}{2}}, \tag{7.1}$$

donde $L = \log \frac{1}{1 - |\varphi(0)|^2}$, y prueban que esta es una cota superior para las normas de operadores de composición actuando en el espacio de Dirichlet inducidos por símbolos univalentes.

Los resultados en [**99**] y el paralelismo mencionado anteriormente entre las aplicaciones del disco, univalentes y llenas, que fijan el origen y las funciones interiores que igualmente fijan el origen, nos llevan a

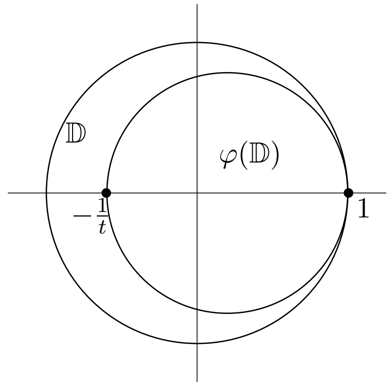

FIGURA 1

investigar si la igualdad en la ecuación (7.1) caracteriza las funciones univalentes, llenas del disco dentro de las aplicaciones univalentes de $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$.

Además, el resultado principal en [**78**] dice que $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, $\varphi(0) = 0$, es univalente y llena, si y sólo si C_φ es una isometría en $\mathcal{D}$, y por tanto en $\mathcal{D}_0$, luego en particular su restricción a $\mathcal{D}_0$ tiene norma 1. ¿Es cierto el recíproco?

Es fácil ver que esto no es verdad. En efecto, sea φ_t, $t \geq 1$, la transformación fraccional lineal dada por

$$\varphi_t(z) = \frac{2z}{(1-t)z + (1-z)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Se ve fácilmente que $\varphi_t(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $\varphi_t(0) = 0$, $\varphi_t(1) = 1$, y $\varphi_t(-1) = -1/t$ (ver la Figura 1). Si $t > 1$ claramente φ_t no es llena, pero un cálculo en [**50**, Cor. 6.1] prueba que $\|C_\varphi : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0\| = 1$ cuando φ es una transformación fraccional lineal de $\mathbb{D}$ con un punto fijo en la frontera.

Sin embargo, tenemos el siguiente resultado, análogo a los resultados en [**99**].

TEOREMA 7.3. *Supóngase que φ es una aplicación analítica y univalente de $\mathbb{D}$ en sí mismo, con n_φ esencialmente radial y $\varphi(0) = 0$. Entonces φ es una aplicación llena si y sólo si*

$$\|C_\varphi : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0\| = 1.$$

Demostración. Vimos antes una dirección. Para el recíproco, suponga que φ es una aplicación analítica y univalente de $\mathbb{D}$ en sí mismo, con n_φ esencialmente radial, $\varphi(0) = 0$, y que φ no es una aplicación llena.

Probaremos que la restricción de C_φ a $\mathcal{D}_0$ tiene norma menor que 1. Tenemos que $\varphi(\mathbb{D})$ está contenido en el disco $D(0,\rho) = \{z : |z| < \|\varphi\|_\infty = \rho\}$ con $A[\varphi(\mathbb{D}) \setminus D(0,\rho)] = 0$ y $0 < \rho < 1$ (cf. la prueba de la Proposición 7.2.)

Escribimos

$$g(r) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 \, d\theta,$$

y como $|f'|^2$ es subarmónica en $\mathbb{D}$ entonces g es monótona creciente para $0 \le r < 1$. A partir de la fórmula de cambio de variable obtenemos:

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi\|_{\mathcal{D}}^2 &= \int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 \, |\varphi'(z)|^2 \, dA(z) \\
&= \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 \, dA(w) \\
&= \int_0^\rho g(r) \, r \, dr.
\end{aligned}$$

y así:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \, dA(w) &= \int_0^\rho g(r) \, r \, dr + \int_\rho^1 g(r) \, r \, dr \\
&\ge \int_0^\rho g \, dr + \frac{1-\rho^2}{2} g(\rho) \\
&= \int_0^\rho g \, dr + \frac{(1-\rho^2)/2}{\rho^2/2} (\rho^2/2) g(\rho) \\
&\ge \int_0^\rho g \, dr + \frac{(1-\rho^2)/2}{\rho^2/2} \int_0^\rho g(r) \, r \, dr \\
&= \left(1 + \frac{(1-\rho^2)/2}{\rho^2/2}\right) \int_0^\rho g(r) \, r \, dr \\
&= \left(1 + \frac{(1-\rho^2)/2}{\rho^2/2}\right) \|C_\varphi\|_{\mathcal{D}}^2,
\end{aligned}$$

para cada $f \in \mathcal{D}_0$. Esto lleva al resultado deseado: la restricción de C_φ a $\mathcal{D}_0$ tiene norma $\le \nu = \left(1 + \frac{(1-\rho^2)/2}{\rho^2/2}\right)^{-1/2} < 1$. $\square$

En el próximo Teorema, consideraremos el caso $\varphi(0) \neq 0$. La prueba sigue de cerca la de [**99**, Th. 5.2]).

TEOREMA 7.4. *Supóngase que φ es una aplicación analítica y univalente de $\mathbb{D}$ en sí mismo, con n_φ esencialmente radial y $\varphi(0) \neq 0$. Entonces φ es una aplicación llena si y sólo si*

$$\|C_\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}\| = \sqrt{\frac{L + 2 + \sqrt{L(4+L)}}{2}},$$

donde $L = \log 1/(1 - |\varphi(0)|^2)$.

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es parte de [**77**, Th. 1]. Para el recíproco, supóngase que φ es una aplicación analítica y univalente de $\mathbb{D}$ en sí mismo con n_φ esencialmente radial, tal que $\varphi(0) = p \neq 0$, y sin embargo φ no es una aplicación llena. Queremos probar que la norma de C_φ es estrictamente menor que $\sqrt{\frac{L+2+\sqrt{L(4+L)}}{2}}$, donde $L = \log 1/(1 - p^2)$.

Para ello consideramos α_p, el automorfismo estándar de $\mathbb{D}$ que intercambia p con el origen, esto es

$$\alpha_p := \frac{p - z}{1 - \overline{p}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Escribimos $\varphi_p = \alpha_p \circ \varphi$, el cual es 0 en el origen. Como esta función es univalente y aplica $\mathbb{D}$ en sí mismo, con función conteo esencialmente radial, pero no es llena, el Teorema 7.3 afirma que la restricción del operador C_{φ_p} a $\mathcal{D}_0$ tiene norma ν menor que 1.

Como α_p es su propio inverso, $\varphi = \alpha_p \circ \varphi_p$, y así, para cada $f \in \mathcal{D}$:

$$C_\varphi f = C_{\varphi_p}(f \circ \alpha_p) = C_{\varphi_p} f + f(p),$$

donde $g = f \circ \alpha_p - f(p)$.

La función $C_{\varphi_p} g$ pertenece a $\mathcal{D}_0$ y así:

$$\begin{aligned} \|C_\phi f\|_\mathcal{D} =& \|C_{\varphi_p} g\|^2_\mathcal{D} + |f(p)|^2 \\ &\leq \nu^2 \|g\|^2_\mathcal{D} + |f(p)|^2 \\ &= \nu^2 \|(C_{\alpha_p} f) - f(p)\|^2_\mathcal{D} + |f(p)|^2. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Como $\langle h, 1\rangle_\mathcal{D} = h(0)$ para cada $h \in \mathcal{D}$,

$$\langle C_{\alpha_p} f, f(p)\rangle_\mathcal{D} = \overline{f(p)} C_{\alpha_p} f(0) = |f(p)|^2,$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}\|(C_{\alpha_p}f) - f(p)\|_{\mathcal{D}}^2 &= \|C_{\alpha_p}f\|_{\mathcal{D}}^2 - 2\Re\langle C_{\alpha_p}f, f(p)\rangle_{\mathcal{D}} + |f(p)|^2 \\ &= \|C_{\alpha_p}f\|_{\mathcal{D}}^2 - 2|f(p)|^2 + |f(p)|^2 \\ &= \|C_{\alpha_p}f\|_{\mathcal{D}}^2 - |f(p)|^2.\end{aligned}$$

Esta identidad y la ecuación (7.2) llevan a,

$$\|C_\alpha f\|_{\mathcal{D}}^2 \leq \nu^2\|C_{\alpha_p}f\|_{\mathcal{D}}^2 + (1-\nu^2)|f(p)|^2.$$

Sabemos de [**78**, Th. 1] que $\|C_{\alpha_p} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}\| = (L + 2 + \sqrt{L(4+L)})/2$, y tenemos el siguiente estimado para $|f(p)|$:

$$|f(p)| \leq \|f\|_{\mathcal{D}}\|K_p\|_{\mathcal{D}} = \sqrt{1+L}\|f\|_{\mathcal{D}},$$

entonces

$$\|C_\alpha f\|_{\mathcal{D}}^2 \leq \left[\nu^2\left(\frac{L+2+\sqrt{L(4+L)}}{2}\right) + (1-\nu^2)(1+L)\right]\|f\|_{\mathcal{D}}^2,$$

y $\delta = \left[\nu^2\left(\frac{L+2+\sqrt{L(4+L)}}{2}\right) + (1-\nu^2)(1+L)\right] < 1$ pues $p \neq 0$ y $L > 0$. □

2.1. La norma esencial. Recordemos que la norma esencial de un operador T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es definida como $\|T\|_e := \text{ínf}\{\|T-K\| : K \text{ es compacto }\}$, esto es, la norma esencial de T es su norma en el álgebra de Calkin. Como vimos en el Capítulo 2,

$$\|C_\varphi\|_e = \lim_n \|C_\varphi R_n\|, \tag{7.3}$$

donde R_n denota la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $z^n\mathcal{H}$.

En [**99**], se probó que una aplicación $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es interior si y sólo si la norma esencial de C_φ en el espacio de Hardy es igual a $\sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$. Debido a las analogías presentadas acá entre funciones interiores y funciones univalentes llenas, podemos preguntarnos: ¿Están las aplicaciones llenas caracterizadas por el hecho que la norma esencial de C_φ en el espacio de Dirichlet sea igual a $\sqrt{\frac{L+2+\sqrt{L(4+L)}}{2}}$? donde $L = \log\frac{1}{1-|\varphi(0)|^2}$. La respuesta es no, en efecto *cada aplicación univalente llena tiene norma esencial igual a 1 en el espacio de Dirichlet*:

Teorema 7.5. *Sea $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una aplicación univalente llena, entonces $\|C_\varphi\|_e = 1$ en el espacio de Dirichlet.*

Demostración. Suponga primero que $\varphi(0) = 0$, entonces como notamos anteriormente, C_φ es una isometría y a partir de la ecuación 7.3 obtenemos:

$$\|C_\varphi\|_e = \lim_n \{ \sup_{\|f\|=1} \|R_n f\| \} = \lim_n \|R_n\| = 1.$$

Si $\varphi(0) = p \neq 0$, entonces la función $\varphi_p := \alpha_p \circ \varphi$ es una aplicación univalente llena que fija el origen y por lo tanto para cada función $f \in \mathcal{D}$ con $\|f\| = 1$ tenemos que $\|C_\varphi R_n f\| = \|C_{\alpha_p} R_n f\|$. Así, $\|C_\varphi\|_e = \|C_{\alpha_p}\|_e$.

Pero en [**25**, Cor. 5.9], se prueba que la norma esencial de cualquier operador de composición inducido por un automorfismo de $\mathbb{D}$ es igual a 1 y así se obtiene el resultado. $\square$

CAPíTULO 8

Operadores de composición en espacios de funciones enteras

1. Introducción y preliminares

En éste capítulo estudiaremos operadores de composición actuando en algunos espacios de Hilbert constituidos por funciones enteras. Recordemos que una función es entera si $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$. Referimos al lector a [**12**] o [**71**] para los conceptos básicos de la teoría de funciones enteras que utilizaremos. Nuestra presentación sigue cercanamente la de [**26**].

Dada una función entera f, estimamos su crecimiento radial por medio de la función

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

DEFINICIÓN 8.1. Diremos que una función entera f es de *orden finito* si se cumple la desigualdad $M_f(r) < \exp(r^k)$ para valores suficientemente grandes de r y para alguna constante $k > 0$. El *orden* de una función entera f de orden finito es definido como el ínfimo de los valores de k para los cuales se satisface esta desigualdad asintótica.

Si una función entera f es de orden ρ, decimos que es de *tipo finito* si para algún $A > 0$ se satisface la desigualdad $M_f(r) < e^{Ar^\rho}$ para valores de r suficientemente grandes. El supremo de los valores A para los cuales se satisface dicha desigualdad, será llamado el *tipo* de la función f.

Diremos que una función entera f, es de *tipo exponencial* σ si es de orden $\rho \leq 1$ y tipo $\sigma \in (0, \infty)$.

En la siguiente sección, estudiaremos operadores de composición en el espacio de Paley-Wiener L^2_π. Caracterizaremos los operadores de composición acotados y compactos en L^2_π. También investigaremos el comportamiento cíclico de estos operadores. En la Sección 3, estudiaremos operadores de composición en el espacio de Hilbert de funciones enteras $E^2(\gamma)$ haciendo uso de algunas ideas presentadas en [**28**].

2. Operadores de Composición en el espacio de Paley-Wiener

2.1. El espacio de Paley-Wiener. El *espacio de Paley-Wiener* L^2_π es el espacio de aquellas funciones enteras de tipo exponencial menor o igual que π cuyas restricciones a la recta real pertenecen al espacio $L^2(-\infty,\infty)$ (cf. [**12, 71**]). L^2_π con la norma dada por

$$\|f\|^2_{L^2(-\infty,\infty)} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx,$$

es un subespacio cerrado de $L^2(-\infty,\infty)$ y, por lo tanto, un espacio de Hilbert. Más aun, la desigualdad

$$|f(x+iy)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{\pi(|y|+1)} \|f\|_{L^2(-\infty,\infty)},$$

nos permite concluir que L^2_π es un espacio de Hilbert funcional. Se puede ver (cf. [**71**]) que los núcleos reproductivos vienen dados por la siguiente fórmula:

$$k_w(z) = \frac{\sin \pi(z-\overline{w})}{\pi(z-\overline{w})}, \quad (w \in \mathbb{C}),$$

y que el conjunto $\{k_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en L^2_π. Luego, como consecuencia de la identidad de Parseval, tenemos la siguiente expresión para la norma:

$$\|f\|^2_{L^2(-\infty,\infty)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^2.$$

Como es usual en este contexto, utilizaremos la notación:

$$\operatorname{sinc} z := \frac{\sin \pi z}{\pi z}.$$

Como una consecuencia del bien conocido Teorema de Paley-Wiener, la transformada de Fourier unitaria (la transformada de Fourier usual normalizada) $\hat{f} := \mathfrak{F}(f)$ de una función $f \in L^2_\pi$ tiene su soporte en $[-\pi,\pi]$. Cada función $f \in L^2_\pi$ admite la representación

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(t) e^{itz}\, dt, \quad \hat{f} \in L^2(-\pi,\pi),$$

donde $L^2(-\pi,\pi)$ denota al subespacio cerrado de $L^2(-\infty,\infty)$ constituido por aquellas funciones que son iguales a cero case siempre fuera del intervalo $(-\pi.\pi)$. Luego,

$$L^2_\pi = \mathfrak{F}^{-1}(L^2(-\pi,\pi)).$$

De hecho, la identidad de Parseval:

$$\|f\|_{L^2(-\infty,\infty)} = \|\hat{f}\|_{L^2(-\pi,\pi)},$$

muestra que la transformada de Fourier unitaria $\mathfrak{F} : L^2_\pi \to L^2(-\pi,\pi)$ es un isomorfismo isométrico.

2.2. Acotación y Compacidad en L^2_π. Como se reseña en [**5**], los operadores de composición en el espacio de Paley-Wiener aparecen también el el área de *procesamiento de señales*. Una función f en $L^2(-\infty,\infty)$ es considerada como una *señal* (con "energía finita") y pertenece al espacio de Paley-Wiener si su dominio de frecuencia (el dominio de su transformada de Fourier unitaria) se encuentra limitada a la banda $[-\pi,\pi]$.

En este contexto, el símbolo φ es llamado *función de distorsión* y el operador $f \mapsto f \circ \varphi$ es un *operador de distorsión*. En [**5**] (ver también [**6**]) los autores consideran el caso $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Estudiaremos el caso en el que φ es una función entera. Primero, consideraremos el problema de caracterizar los símbolos φ tales que C_φ es un operador de composición acotado en L^2_π.

Para caracterizar loas operadores de composición acotados en el espacio de Paley-Wiener, usaremos los siguientes resultados demostrados en [**84**] (ver también [**5, 62**]).

TEOREMA 8.2. *Sea f y φ funciones enteras, con $\varphi(0) = 0$. Sea $F = f \circ \varphi$. Entonces existe una constante $c \in (0,1)$ tal que*

$$M_F(r) \geq M_f(cM_\varphi(r/2)).$$

TEOREMA 8.3 (Teorema de Pólya). *Sean f y φ funciones enteras tales que $F = f \circ \varphi$ es de orden finito. Entonces*

1. *φ es un polinomio y f es de orden finito, o*
2. *φ no es un polinomio, es una función de orden finito y f es de orden 0.*

El Teorema de Pólya implica que si una función de distorsión $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ envía funciones de banda limitada a funciones de banda limitada, entonces φ es afín (cf. [**5, 6**]). En la prueba del siguiente lema usamos las ideas dadas en [**5**] y [**6**].

LEMA 8.4. *Sea $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ no nula, si el operador C_φ envía L^2_π en sí mismo, entonces φ es una aplicación afín.*

Demostración. Suponga que $C_\varphi(L^2_\pi) \subset L^2_\pi$, entonces la función $\operatorname{sinc} \circ \varphi$ pertenece a L^2_π y como sinc tiene orden exactamente igual a uno, el Teorema 8.3 implica que φ es un polinomio. Sea n el grado de φ. Mostraremos que $n = 1$.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\varphi(0) = 0$. Entonces existe una constante positiva a tal que $M_\varphi(r) \geq ar^n$ para r suficientemente grande, y por el Teorema 8.2 existe una constante c, $0 < c < 1$ tal que

$$M_{f\circ\varphi}(r) \geq M_f(car^n/2^n),$$

para cada función de orden uno en L^2_π. Sea $0 < b < 1$. Si el orden de f es uno, entonces podemos hallar valores arbitrariamente grandes de R para los cuales se tiene la desigualdad $M_f(R) \geq \exp R^b$. Luego, existen valores arbitrariamente grandes de r tales que

$$M_f(car^n/2) \geq \exp(ca^b r^{nb}/2^{nb}).$$

Si $f \circ \varphi$ es de orden $\rho \leq 1$, entonces existen constantes A y B tales que

$$M_{f\circ\varphi}(r) \leq A\exp(Br),$$

para todo r. Así, existen valores arbitrariamente grandes de r tales que

$$\exp(ca^b r^{nb}/2^{nb}) \leq A\exp(Br).$$

En consecuencia $nb \leq 1$ y como $0 < b < 1$, debe ocurrir que $n = 1$ ($n > 0$ pues si φ es constante, entonces $C_\varphi(L^2_\pi) \not\subseteq L^2_\pi$). $\square$

Teorema 8.5. *Sea φ una función entera no constante. Entonces C_φ es acotado en L^2_π si y sólo si $\varphi(z) = az + b$, ($z \in \mathbb{C}$) con $0 < |a| \leq 1$, y $a \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Es fácil ver que el orden y el tipo de las funciones enteras es preservado por traslaciones. El Teorema de Plancherel-Pólya (cf. [**71**, Section 7.4]) muestra que

$$\int |f(x+s+it)|^2\,dx = \int |f(x+it)|^2\,dx \leq \|f\|_{L^2(-\infty,\infty)} e^{2\pi|t|}.$$

Por lo tanto, el espacio de funciones enteras de tipo exponencial $\leq \pi$ que pertenecen a $L^2(-\infty,\infty)$ es invariante bajo traslaciones.

Ahora,

$$\int |f(ax)|^2\,dx = (1/|a|)\int |f(x)|^2\,dx, \quad (a \in \mathbb{R});$$

por otro lado, si el orden de $f(z)$ es ρ, entonces el orden de $f(az)$ también es ρ mientras que si el tipo de $f(z)$ es σ, entonces el tipo de $f(az)$ es $|a|^\rho\sigma$.

Esto muestra además que si $C_\varphi(L^2_\pi) \subset L^2_\pi$ entonces $\varphi(z) = az + b$ con $0 < |a| \leq 1$. Para ver que $a \in \mathbb{R}$ basta mostrar que si $\psi(z) = iz$, entonces la función $f(z) = \operatorname{sinc} z$ pertenece a L^2_π pero $f \circ \psi \notin L^2_\pi$. En efecto,

$$|\operatorname{sinc} ix| = \frac{|e^{\pi x} - e^{-\pi x}|}{2\pi x} \geq \frac{e^{\pi x}}{2\pi x} - \frac{e^{-\pi x}}{2\pi x} \geq \frac{e^{\pi x}}{2\pi x} - \frac{1}{2\pi}, \quad (x \geq 1),$$

y si $A > 0$ es tal que $\frac{e^{\pi x}}{2\pi x} - \frac{1}{2\pi} \geq 1$ cuando $x \geq A$ tenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\operatorname{sinc} ix|^2\, dx \geq \int_A^{\infty} |\operatorname{sinc} ix|^2\, dx \geq \int_A^{\infty} 1\, dx = \infty.$$

$\square$

Corolario 8.6. *Ningún operador de composición en L^2_π es compacto.*

Demostración. Claramente, C_φ es compacto en L^2_π si y sólo si $C_{\varphi-\varphi(0)}$ es compacto.

Como $f(n) \to 0$ cuando $n \to \pm\infty$ para todo $f \in L^2_\pi$, entonces la sucesión de vectores ortonormales $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge débilmente a cero. Sin embargo, un cálculo sencillo muestra que

$$\|C_{\varphi-\varphi(0)}(k_n)\| = 1/\sqrt{|a|}$$

para todo n. En consecuencia, C_φ no puede ser compacto. $\square$

2.3. El Adjunto de un operador de composición en L^2_π. Recordemos que, como consecuencia del Teorema de Paley-Wiener, la función $\mathfrak{F}$ es un isomorfismo isométrico entre los espacios L^2_π y $L^2(-\pi,\pi)$. Si $f \in L^2_\pi$ tenemos que:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(t) e^{itz}\, dt,$$

con $\hat{f} \in L^2(-\pi,\pi)$. Luego, si $\varphi(z) = az+b$, $b = \lambda+i\eta$, $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \leq 1$ (para simplificar el razonamiento asumiremos $a > 0$), entonces tenemos:

$$\begin{aligned} C_\varphi(f)(z) = f(az + \lambda + i\eta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(t) e^{itaz} e^{i\lambda t} e^{-\eta t}\, dt \\ &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-a\pi}^{a\pi} \hat{f}\left(\frac{x}{a}\right) e^{i\lambda\left(\frac{x}{a}\right)} e^{-\eta\left(\frac{x}{a}\right)} e^{ixz}\, dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el operador C_φ corresponde, vía $\mathfrak{F}$, al operador $\hat{C}_\varphi : L^2(-\pi,\pi) \to L^2(-\pi,\pi)$ definido como

$$(\hat{C}_\varphi\, g)(x) := \frac{1}{a}\, g\left(\frac{x}{a}\right) \chi_{(-a\pi,a\pi)}(x) e^{i\lambda\left(\frac{x}{a}\right)} e^{-\eta\left(\frac{x}{a}\right)}, \tag{8.1}$$

Ahora sean $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_\varphi\, g, f\rangle &= \frac{1}{2a\pi}\int_{-a\pi}^{a\pi} g\left(\frac{x}{a}\right) e^{i\lambda\frac{x}{a}} e^{-\eta\frac{x}{a}}\overline{f(x)}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{i\lambda t}e^{-\eta t}\overline{f(ta)}\, dt \\ &= \langle g, \hat{C}_\varphi^*\, f\rangle. \end{aligned}$$

En consecuencia, el operador C_φ^* corresponde, vía $\mathfrak{F}$, al operador

$$(\hat{C}_\varphi^*\, f)(x) = e^{-i\lambda x}e^{-\eta x} f(ax), \quad f \in L^2(-\pi,\pi). \tag{8.2}$$

Como $\mathfrak{F}$ es una isometría, podemos calcular C_φ^* actuando en el espacio de Paley-Wiener como sigue: Sea $f \in L_\pi^2$ y $\hat{f} \in L^2(-\pi,\pi)$ su respectiva transformada de Fourier unitaria, entonces como $0 < a \leq 1$, tenemos $\hat{C}_\varphi^*\hat{f} \in L^2(-\pi,\pi)$ y $\mathfrak{F}^{-1}(\hat{C}_\varphi^*\hat{f}) \in L_\pi^2$. Ahora,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}^{-1}(\hat{C}_\varphi^*\hat{f}))(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda x}e^{-\eta x}\hat{f}(ax)e^{izx}\, dx \\ &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(t)e^{-i\lambda\frac{t}{a}}e^{-\eta\frac{t}{a}}e^{iz\frac{t}{a}}\, dt \\ &= \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(t)e^{it\left(\frac{z-\lambda+i\eta}{a}\right)}\, dt \\ &= \frac{1}{a} f\left(\frac{z-\lambda+i\eta}{a}\right). \end{aligned}$$

Luego,

$$(C_\varphi^* f)(z) = \frac{1}{a} f\left(\frac{z-\lambda+i\eta}{a}\right), \quad f \in L_\pi^2. \tag{8.3}$$

Como consecuencia de la ecuación (8.3) obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 8.7. *Un operador de composición C_φ actuando L_π^2 es normal si y sólo si $\varphi(0) = 0$.*

2.4. Comportamiento Cíclico de Operadores de Composición en L^2_π. Una noción “intermedia” entre ciclicidad e hiperciclicidad es la llamada *superciclicidad*. Usando la notación del Capítulo 4, diremos que un operador lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ actuando en sobre el espacio de Hilbert de funciones analíticas $\mathcal{H}$ es *supercíclico* si existe una función $f \in \mathcal{H}$ tal que el conjunto de todos los múltiplos escalares de $\mathrm{Orb}(f, T)$ es denso en $\mathcal{H}$. Claramente, todo operador hipercíclico es supercílcico y todo operador supercíclico es cíclico. Utilizaremos la ecuación (8.1) para demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 8.8. *Ningún operador de composición en L^2_π es supercíclico.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi(z) = az + (\lambda + i\eta)$ y supongamos que C_φ es supercíclico. Por simplicidad, asumamos que $a > 0$ y $\eta > 0$ (en el caso general, las modificaciones necesarias son triviales). Entonces existe una función $g \in L^2(-\pi, \pi)$, una sucesión $\{\alpha_k\}$ en $\mathbb{C}$, y una sucesión $\{n_k\}$ en $\mathbb{N}$ tal que $\left\{\alpha_k \hat{C}_\varphi^{n_k}(g)\right\}$ converge en $L^2(-\pi, \pi)$ a la función función $f \equiv 1$. Tomando una subsucesión si es necesario, podemos asumir que $\alpha_k \hat{C}_\varphi^{n_k}(g)(x) \to 1$, para casi todo x, pero es fácil ver, usando la ecuación (8.1) que $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k \hat{C}_\varphi^{n_k}(g)(x) = 0$ si $a < 1$.

Si $a = 1$, entonces $C_\varphi(g)(x) = g(x)e^{i\lambda x}e^{-\eta x}$. Esto es, C_φ es el operador de multiplicación $M_h : g \mapsto hg$ en $L^2(-\pi, \pi)$ con $h(x) = e^{i\lambda x}e^{-\eta x}$. Utilizaremos ahora el criterio del ángulo para vectores supercíclicos [**51**]. Sea $g \in L^2(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$. Entonces la desigualdad de Bessel implica que para todo $k \in \mathbb{Z}^+$

$$|\langle \frac{\chi_{(-\pi,0)}}{\sqrt{\pi}}, e^{-k\eta(\cdot)}|g|\rangle|^2 + |\langle \frac{\chi_{(0,\pi)}}{\sqrt{\pi}}, e^{-k\eta(\cdot)}|g|\rangle|^2 \leq \|e^{-k\eta(\cdot)}g\|^2$$

y por lo tanto existe una constante $\epsilon > 0$, que depende de g, tal que para todo $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$\sqrt{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2k\eta x}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} > \int_0^{\pi} e^{-k\eta x}|g(x)|\,dx + \epsilon.$$

Luego

$$\sup_k \frac{\int_0^\pi e^{-k\eta x}|g(x)|\,dx}{\sqrt{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2k\eta x}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}} < \sup_k \frac{\int_0^\pi e^{-k\eta x}|g(x)|\,dx + \epsilon}{\sqrt{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2k\eta x}|g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}} \leq 1.$$

Por lo tanto,

$$\sup_k \frac{|\langle M_h^k g, \chi_{(0,\pi)}\rangle|}{\|M_h^k g\| \|\chi_{(0,\pi)}\|} < 1.$$

En consecuencia, g no puede ser un vector supercíclico para el operador M_h. $\square$

2.5. Operadores de Composición en L^p_π. Consideremos ahora los espacios de Paley-Wiener L^p_π, $1 \leq p < \infty$. Estos espacios están constituidos por las funciones enteras de tipo exponencial $\leq \pi$ cuyas restricciones a la recta real pertenecen al espacio $L^p(-\infty, \infty)$.

Como se observó en el Capítulo 2, la acotación y la compacidad de un operador de composición C_φ se encuentran cercanamente relacionadas con las propiedades de medidas tipo Carleson asociadas con φ. En esta sección, mostraremos resultados similares a los Teoremas 2.18, 2.19, 2.37 y 2.38; estos nos permitirán caracterizar la acotación y la compacidad de los operadores de composición actuando entre espacios L^p_π. Hacemos notar que la prueba del Teorema 8.5 puede ser modificada para obtener el resultado correspondiente en espacios L^p_π . Sin embargo, pensamos que los resultados de esta sección poseen un interés propio.

En lo que sigue, asumiremos que $1 \leq p \leq q < \infty$.

Diremos que una medida μ en $\mathbb{R}$ es una (p,q)-*medida de Carleson* (para el espacio de Paley-Wiener) si el espacio L^p_π está acotadamente contenido $L^q(\mu)$, es decir: si el operador inclusión $i : L^p_\pi \to L^q(\mu)$ es acotada. Si i es compacto, diremos que μ es una medida (p,q)-*medida compacta de Carleson* (para el espacio de Paley-Wiener).

Para una función entera φ dada, definimos μ_φ en $\mathbb{R}$ como:

$$\mu_\varphi(E) := l(\varphi^{-1}(E)),$$

para todo subconjunto de Borel E de $\mathbb{R}$, donde l denotes la medida de longitud de arco. Se puede ver fácilmente que $\|C_\varphi(f)\|_{L^q(-\infty,\infty)} = \|f\|_{L^q(\mu_\varphi)}$ para toda función $f \in L^p_\pi$, por lo tanto si $C_\varphi : L^p_\pi \to L^q_\pi$ es acotado, entonces μ_φ es una (p,q)-medida de Carleson. Más aun, si $1 < p$ entonces C_φ es compacto si y sólo si μ_φ es una (p,q)-medida compacta de Carleson.

A continuación presentamos algunas propiedades bien conocidas de los espacios de Paley-Wiener L^p_π $(1 \leq p < \infty)$ que requeriremos mas adelante (cf. [**71**, 20.1]).

Observación 8.9. 1. Ya que la función $|f|^p$ es subarmónica, y como consecuencia del Teorema de Plancherel y Pólya, para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$|f(x+iy)|^p \leq \frac{2}{\pi} e^{\pi(|y|+1)} \|f\|^p_{L^p(-\infty,\infty)}.$$

En particular, existe una constante K (que depende de p, pero no de x ni de f) tal que

$$|f(x)|^p \leq K \|f\|^p_{L^p(-\infty,\infty)}.$$

2. Sea $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ una sucesión y sean H, δ números positivos tales que

$$|\mathrm{Im}\, \lambda_n| \leq H < \infty, \quad |\lambda_n - \lambda_m| \geq \delta \quad \text{para } n \neq m.$$

Entonces, para cada $f \in L^p_\pi$,

$$\sum_n |f(\lambda_n)|^p \leq C \|f\|^p_{L^p(-\infty,\infty)},$$

donde C depende de δ, y H pero no de f.

3. Si $1 < p < \infty$, entonces para cualquier sucesión $\{c_k\}$ en $l^p(\mathbb{Z})$ existe una única solución en L^p_π al problema de interpolación $f(k) = c_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Además, las normas de f y de la sucesión $\{c_k\}$ son comparables, es decir, existen constantes m, M tales que

$$m \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^p \right)^{1/p} \leq \|f\|_{L^p(-\infty,\infty)} \leq M \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^p \right)^{1/p},$$

para toda función $f \in L^p_\pi$. En particular, esta última desigualdad implica que si $1 \leq p < q < \infty$, entonces $L^p_\pi \subset L^q_\pi$.

En realidad, sólo necesitaremos el resultado para un problema mas sencillo: dado $x_0 \in \mathbb{R}$ queremos hallar una función $f \in L^p_\pi$ tal que $f(x_0) = 1$. Esto se obtiene al considerar la sucesión $c_k = 0$ si $k \neq 0$ y $c_0 = 1$.

4. *Desigualdad de Bernstein:* (cf. [**12**, 11.1.2]) Si f es una función entera de tipo exponencial τ y $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $|f'(x)| \leq M\tau$.

TEOREMA 8.10. *Sea $1 \leq p \leq q < \infty$. Las siguiente afirmaciones son equivalentes:*

1. *μ es una (p, q)-medida de Carleson.*
2. *Para cada $r > 0$ existe una constante C tal que $\mu(D(x, r)) \leq C$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

3. *Existe $r > 0$ y una constante C tal que $\mu(D(x,r)) \leq C$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Las afirmaciones (2) y (3) son claramente equivalentes.

(3)⇒(1): Sea $C > 0$ tal que $\mu(D(x,1)) < C$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y sea $x_n \in [n, n+1]$ tal que $|f(x_n)| = \text{máx}_{[n,n+1]} |f(x)|$. Entonces, descomponemos la sucesión $\{x_n\}$ en dos subsucesiones: $\{\lambda_n\}$ y $\{\lambda'_n\}$, con $|\lambda_n - \lambda_m| \geq 1/2$ y $|\lambda'_n - \lambda'_m| \geq 1/2$ si $n \neq m$. Ahora,

$$
\begin{aligned}
\left(\int |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(x_k)|^q \mu([n, n+1])\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(\lambda_k)|^p + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(\lambda'_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C^{\frac{1}{q}} (2K)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(-\infty,\infty)},
\end{aligned}
$$

donde la constante K es como en 8.9(2).

(1)⇒(3): Sean K y M constantes tales que $|f(x)| \leq K\|f\|_{L^p(-\infty,\infty)} \leq KM \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)|^p\right)^{1/p}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f \in L^p_\pi$ (cf. 8.9(1 y 3)). Sea $r > 0$ tal que $\pi KMr < 1$. Si (c) es falsa, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe x_n en $\mathbb{R}$ tal que $\mu(D(x_n, r) > n$. Pero para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n \in L^p_\pi$ tal que $f_n(x_n) = 1$ y $\|f_n\|_{L^p(-\infty,\infty)} \leq M$, (cf. 8.9(3)). Luego, la desigualdad de Bernstein (8.9 (4)) implica que $|f'_n(x)| \leq \pi KM$ para todo $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, y aplicando el Teorema del valor medio tenemos que:

$$
1 - |f_n(x)| \leq |1 - f_n(x)| = |f_n(x_n) - f_n(x)| = |f'_n(\xi)| \, |x - x_n| \leq \pi KMr,
$$

para todo $x \in D(x_n, r)$ y algún número real ξ en esta bola.

Finalmente, tenemos

$$\int |f_n|^q \, d\mu \geq \int_{D(x_n,r)} |f_n|^q \, d\mu \geq (1 - \pi KMr)^q n,$$

lo que contradice el hecho que μ es una medida de Carleson y por lo tanto existe una constante $C > 0$ tal que $\|f_n\|_{L^q(\mu)} \leq C\|f_n\|_{L^p(-\infty,\infty)} \leq CM$ $\square$

Para medidas compactas de Carleson tenemos el siguiente resultado.

Teorema 8.11. *Sea $1 < p \leq q < \infty$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *μ es una (p,q)-medida compacta de Carleson.*
2. *Para cada $r > 0$ $\mu(D(x,r)) \to 0$ cuando $x \to \infty$.*
3. *Existe $r > 0$ tal que $\mu(D(x,r)) \to 0$ cuando $x \to \infty$.*

Demostración. Nuevamente, las afirmaciones (2) y (3) son claramente equivalentes.

(3)$\Rightarrow$(1): Sea $\{f_n\}$ una sucesión en L^p_π que converge débilomente a cero; es decir, la sucesión $\left\{\|f_n\|_{L^p(-\infty,\infty)}\right\}$ es acotada (sin pérdida de generalidad podemos asumir que es acotada por 1), y f_n converge uniformemente en conjuntos compactos a cero. Veremos que $\int |f_n|^q \, d\mu \to 0$.

Como en la prueba del Teorema anterior, para cada n escogemos la sucesión $\{x_{n,k}\}_k$ como sigue: $x_{n,k}$ será el número en el intervalo $[k, k+1]$ en el cual $|f_n|$ alcanza su máximo. Entonces, descomponemos esta sucesión en dos subsucesiones $\{\lambda_{n,k}\}$ y $\left\{\lambda'_{n,k}\right\}$ de manera que $|\lambda_{n,k} - \lambda_{n,j}| \geq 1/2$ y $|\lambda'_{n,k} - \lambda'_{n,j}| \geq 1/2$ cuando $k \neq j$. Por la observación 8.9(2), existe una constante C tal que $\sum_k |f_n(\lambda_{n,k})|^p \leq C\|f_n\|^p_{L^p(-\infty,\infty)}$ (y $\sum_k |f_n(\lambda'_{n,k})|^p \leq C\|f_n\|^p_{L^p(-\infty,\infty)}$) para todo n. Luego para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_n(x_{n,k})|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_n(x_{n,k})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (2C)^{\frac{1}{p}} \|f_n\|_{L^p(-\infty,\infty)} \leq (2C)^{\frac{1}{p}}.$$

Dado $\epsilon > 0$, tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(D(x,1)) < \frac{\epsilon^q}{(4C)^{\frac{q}{p}}}$ si $|x| \geq N$, y si n es lo suficientemente grande tal que $|f_n(x)|^q \leq \frac{\epsilon}{2\mu([-N,N])}$ para todo x en el conjunto compacto $[-N, N]$, entonces

$$\int_N^N |f_n|^q \, d\mu \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Así

$$\left(\int_{|x|>N} |f_n|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\left(\sum_{k=N}^{\infty} |f_n(x_{n,k})|^q \mu([k,k+1]) + \sum_{k=N}^{\infty} |f_n(x_{n,-k-1})|^q \mu([-k-1,-k])\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\frac{\epsilon}{8C} \sum_{k=N}^{\infty} |f(x_{n,k})|^q + \frac{\epsilon}{8C} \sum_{k=N}^{\infty} |f(x_{n,-k-1})|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \epsilon/2,$$

luego, $\int |f_n|^q \, d\mu < \epsilon$ para tal n.

(1)⇒(3): Al igual que en la prueba de (1)⇒(3) en el Teorema 8.10 (y con esa notación) tomamos $r > 0$ tal que $\pi KMr < 1$. Si la afirmación (3) es falsa, entonces existe $\epsilon > 0$ y una sucesión $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $x_n \to \infty$ y $\mu(D(x_n, r) \geq \epsilon$. Podemos asumir que estos discos son disjuntos. Ahora tomamos $f_n \in L^p_\pi$ con $f_n(x_n) = 1$ y $\|f_n\|^p_{L^p(-\infty,\infty)} \leq M$.

Como el operador inclusión $i : L^p_\pi \to L^q(\mu)$ es compacto, podemos asumir (tomando una subsucesión si es necesario) que $f_n \to f \in L^q(\mu)$.

Nuevamente, al igual que en la prueba del Teorema 8.10, usamos la desigualdad de Bernstein y el Teorema del valor medio, para ver que $|f_n(x)| \geq 1 - \pi KMr$ en la bola $D(x_n, r)$ para cad n, y entonces

$$\int |f_n|^q \, d\mu \geq \int_{D(x_n,r)} |f_n|^q \, d\mu \geq (1 - \pi KMr)^q \epsilon.$$

Ahora, observando que

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{L^q(\mu)} &\geq \left(\int_{D(x_n,r)} |f_n - f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \\
&\geq \left(\int_{D(x_n,r)} |f_n|^q \, d\mu\right)^{1/q} - \left(\int_{D(x_n,r)} |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \\
&\geq (1 - \pi KMr)\epsilon^{1/p} - \left(\int_{D(x_n,r)} |f|^q \, d\mu\right)^{1/q},
\end{aligned}$$

obtenemos $\left(\int_{D(x_n,r)} |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \geq (1 - \pi KMr)\epsilon^{1/p} - \|f_n - f\|_{L^q(\mu)}$, y como $\|f_n - f\|_{L^q(\mu)} \to 0$, entonces existe $n \geq N$ tal que

$$\int_{D(x_n,r)} |f|^q \, d\mu \geq \left(\frac{(1 - \pi KMr)\epsilon^{1/p}}{2}\right)^q .$$

Pero

$$\int |f|^q \geq \sum_{n \geq N} \int_{D(x_n,r)} |f|^q \, d\mu,$$

lo que es una contradicción pues $f \in L^q(\mu)$. □

Una consecuencia importante de esta caracterización es el hecho que la condición para las medidas de Carleson (respectivamente, medidas compactas de Carleson) es independiente de p y q, $1 \leq p \leq q < \infty$. De este hecho y de la sección 2.2 podemos concluir lo siguiente:

TEOREMA 8.12. *Sea $1 < p \leq q < \infty$ y suponga que C_φ actúa de L^p_π a L^q_π. Entonces*

1. *C_φ es acotado si y sólo si $\varphi(z) = az + b$, con $0 < |a| \leq 1, a \in \mathbb{R}$.*
2. *C_φ no es compacto.*

3. Operadores de Composición en los Espacios $E^2(\gamma)$

3.1. Espacios $E^2(\gamma)$. De acuerdo a Chan y Shapiro [**28**], una función entera $\gamma(z) = \sum \gamma_n z^n$ es llamada una *función de comparación* si $\gamma_n > 0$ para todo n y si la sucesión γ_{n+1}/γ_n decrece a cero cuando $n \to \infty$. En caso que la sucesión $(n+1)\gamma_{n+1}/\gamma_n$ decrezca de manera monótona a $\tau \geq 0$, entonces decimos que γ es una *función admisible de comparación.*

Para cada función de comparación γ, definimos $E^2(\gamma)$ como el espacio de Hilbert de funciones enteras

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

tales que

$$\|f\|^2_{2,\gamma} := \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{-2} |a_n|^2 < \infty.$$

En este caso, el producto interior de $E^2(\gamma)$ es dado por

$$\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{-2} a_n \overline{b_n},$$

y las funciones $e_n(z) := \gamma_n z^n$, $n = 0, 1, 2\ldots$, forman una base ortonormal para $E^2(\gamma)$. Más aun, si $f(z) = \sum a_n z^n \in E^2(\gamma)$, entonces la siguiente desigualdad [**28**, Prop. 1.4] muestra que los espacios $E^2(\gamma)$ son espacios de Hilbert funcionales.

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{\gamma_n} \gamma_n |z|^n \\ &\leq \|f\|_{2,\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^2 |z|^{2n} \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{2,\gamma} \gamma(|z|). \end{aligned}$$

De hecho, los núcleos reproductivos de $E^2(\gamma)$ están dados por

$$K_w(z) = \hat{\gamma}(\overline{w} z),$$

donde $\hat{\gamma}(z) := \sum \gamma_n^2 z^n$.

De [**28**, Prop. 1.3], se sigue que el orden y tipo de las funciones de comparación γ afecta el comportamiento de las funciones correspondientes en el espacio $E^2(\gamma)$. En realidad, toda función de $E^2(\gamma)$ tiene orden y tipo no mayores que el de γ.

Por otro lado, en [**28**, Prop. 1.3] se prueba que si $(n+1)\gamma_{n+1}/\gamma_n \downarrow \tau$, $\tau > 0$, entonces γ es de orden uno y tipo τ. El caso en el que $\tau = 0$ es más delicado. Por ejemplo, si tomamos $\gamma_1(z) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{2n}\right)^{2n} z^n$, entonces γ_1 es claramente una función admisible de comparación con $\tau = 0$, orden $1/2$ y tipo 1. Sin embargo, la función $\gamma_2(z) := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} z^n$ también es una función admisible de comparación con $\tau = 0$ pero de orden cero, (ver [**71**, Capítulo 1]). Esto muestra que el orden y tipo de una función admisible de comparación γ no son determinados por τ en este caso.

3.2. Operadores de Composición Acotados en $E^2(\gamma)$. En [**28**], Chan y Shapiro mostraron que si la sucesión $\{(n+1)\gamma_{n+1}/\gamma_n\}$ es acotada, entonces cada operador de traslación es acotado en $E^2(\gamma)$. En esta sección, consideraremos el problema de caracterizar los símbolos que inducen operadores de composición acotados y operadores de composición compactos en $E^2(\gamma)$ cuando $\tau > 0$.

Primero, observemos que para cada $\sigma < \tau$, la función $f_\sigma(z) := e^{\sigma z}$ pertenece a $E^2(\gamma)$. Esto resulta del hecho que, para cada n, la desigualdad $(n+1)\gamma_{n+1}/\gamma_n \geq \tau$ implica que $\gamma_n \geq \tau^n \gamma_0 / n!$ y luego

$$\|f_\sigma\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2} \frac{\sigma^{2n}}{(n!)^2} \leq \frac{1}{\gamma_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{\tau^{2n}} \frac{\sigma^{2n}}{(n!)^2} = \frac{1}{\gamma_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^{2n} < \infty.$$

TEOREMA 8.13. *Sea φ función entera. Entonces C_φ es acotado en $E^2(\gamma)$ si y sólo si $\varphi(z) = az + b$ con $|a| \leq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f \in E^2(\gamma)$ es de orden finito y distinto de cero. Si $f \circ \varphi$ pertenece a $E^2(\gamma)$, entonces es de orden finito, y por el Teorema de Pólya (8.2), φ debe ser un polinomio. Sea $\varphi(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Si $\sigma < \tau$, entonces $f_\sigma \circ \varphi(z) = \exp(\sigma(a_n z^n + \cdots + a_0))$ pertenece a $E^2(\gamma)$, y es una función de orden n y tipo $\sigma|a_n|$. Luego $n = 1$ y $\sigma|a_n| \leq \tau$. Como σ es arbitrario, tiene que ocurrir que $|a_n| \leq 1$.

Para demostrar que la condición es suficiente, basta probar que el símbolo $\varphi(z) = az$, $|a| \leq 1$ induce un operador de composición acotado en $E^2(\gamma)$, pues toda traslación es acotada en $E^2(\gamma)$ (cf. [**28**]).

Ahora, si $f(z) = \sum c_n z^n$ pertenece a $E^2(\gamma)$ entonces,

$$\|C_\varphi f\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{-2} |a|^{2n} |c_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{-2} |c_n|^2 = \|f\|_{2,\gamma}^2.$$

$\square$

3.3. Operadores de Composición Compactos en $E^2(\gamma)$. A fin de caracterizar los símbolos que inducen operadores de composición compactos en $E^2(\gamma)$, mostraremos primero que este espacio esta cercanamente relacionado al espacio $\mathrm{Hol}(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C}, e^{-2\tau|\cdot|}\, dA)$. Las ideas y cálculos realizados a continuación, son tomados de [**85**, 6.8] donde se estudia el espacio $E(e^z)$.

En general, $\mathfrak{H}_W$ se define como el espacio de Hilbert de funciones enteras tales que

$$\|f\|_W^2 := \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 W(|z|)\, dA(z) < \infty,$$

donde W una cierta función de ponderación.

LEMA 8.14. *Sea $\gamma(z) = \sum \gamma_n z^n$ una función admisible de comparación tal que $0 < \tau = \lim_{n\to\infty} (n+1)\gamma_{n+1}/\gamma_n$. El espacio $\mathfrak{H}_{W_\tau}$, donde*

$W_\tau(|z|) := e^{-2\tau|z|}$ esta contenido en $E^2(\gamma)$, y y existe una constante K tal que $\|f\|_{2,\gamma} \leq K\|f\|_{W_\tau}$ para toda $f \in \mathfrak{H}_{W_\tau}$.

Por otro lado, el espacio $E^2(\gamma)$ está contenido en el espacio $\mathfrak{H}_{W_t}$, donde $W_t(|z|) := e^{-2t|z|}$, $t > \tau$. En este caso existe una constante C tal que $\|f\|_{W_t} \leq C\|f\|_{2,\gamma}$ para toda $f \in E^2(\gamma)$.

Demostración. Como se notó anteriormente, $\lim_{n\to\infty}(n+1)\gamma_{n+1}/\gamma_n = \tau > 0$, implica que

$$\gamma_n \geq \tau^n \gamma_0/n! \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8.4}$$

Más aun, si $t > \tau$ podemos encontrar una constante C (que dependo sólo de t) tal que

$$\gamma_n < C\frac{t^n}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8.5}$$

Ahora, si $W_t(|z|) = e^{-2t|z|}$, $t \geq \tau$, y $f(z) = \sum a_n z^n$, entonces

$$\|f\|_{W_t}^2 = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} p_n |a_n|^2$$

donde $p_n := \displaystyle\int_0^\infty r^{2n+1} W_t(r)\, dr = (2n+1)!(2t)^{-2(n+1)}$ y por lo tanto

$$\frac{p_n}{(n!)^2} = (2n+1)\left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right](2t)^{-2(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

El término entre corchetes es (por la fórmula de Stirling) asintóticamente una constante multiplicada por $4^n/\sqrt{n}$, y por lo tanto p_n es asintóticamente una constante multiplicada por $\sqrt{n}(n!)^2 t^{-2n}$.

Si $t = \tau$ usando la ecuación (8.4) vemos que existe una constante C tal que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{W_\tau}^2 &= C \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\frac{(n!)^2}{\tau^{2n}}|a_n|^2 \\
&\geq C \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\frac{1}{\gamma_n^2}|a_n|^2 \\
&\geq C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^2}|a_n|^2 = C\|f\|_{2,\gamma}^2.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $t > \tau$, tomamos $\tau < s < t$, y la ecuación (8.5) implica:

$$\begin{aligned}\|f\|_{W_t} &= C\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}\frac{(n!)^2}{t^{2n}}|a_n|^2\\ &= C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{s^{2n}}\sqrt{n}\left(\frac{s}{t}\right)^{2n}|a_n|^2\\ &\leq C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n^2}\sqrt{n}\left(\frac{s}{t}\right)^{2n}|a_n|^2\\ &\leq C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n^2}|a_n|^2 = C\|f\|_{2,\gamma}^2.\end{aligned}$$

□

El siguiente Lema se cumple en cualquier espacio de Hilbert funcional analítico. Incluimos aquí la prueba para el caso de $E^2(\gamma)$.

LEMA 8.15. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $E^2(\gamma)$. $\{f_n\}$ converge a cero débilmente si y sólo si $\{f_n\}$ converges a cero uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\{f_n\}$ converge débilmente a cero, entonces converge puntualmente a cero (cf. [**39**]) y existe $M > 0$ tal que $\|f_n\|_{2,\gamma} \leq M$ para todo n. Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto, entonces para cada $w \in K$ tenemos,

$$\begin{aligned}|f_n(w)| &= |\langle f_n, K_w\rangle| \leq \|f_n\|_{2,\gamma}\|K_w\|\\ &= \|f_n\|_{2,\gamma}\hat{\gamma}(|w|^2) \leq M\sup_{w\in K}\hat{\gamma}(|w|^2).\end{aligned}$$

Luego, la sucesión $\{f_n\}$ es localmente acotada y por lo tanto es una familia normal. Si $\{f_n\}$ no converge a cero uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, entonces existe $\epsilon > 0$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $\sup_{w\in K}|f_{n_k}(w)| > \epsilon$. Pero $\{f_{n_k}\}$ es una familia normal por lo tanto posee una subsucesión convergente a cero uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Esto es una contradicción. El recíproco es inmediato. □

TEOREMA 8.16. *Sea φ una función entera y $\gamma = \sum \gamma_n z^n$ una función admisible de comparación tal que* $\lim(n+1)\gamma_{n+1}/\gamma_n = \tau > 0$. *Entonces, C_φ es compacto en $E^2(\gamma)$ si y sólo si $\varphi(z) = az + b$ donde $|a| < 1$.*

Demostración. Recordemos que la sucesión $\{e_n\}$, $e_n(z) = \gamma(n)z^n$ es una base ortonormal de $E^2(\gamma)$, en particular, $\{e_n\}$ es débilmente convergente a cero. Si $\varphi(z) = az$ con $|a| = 1$, entonces

$$\|C_\varphi e_n\|_{2,\gamma}^2 = \|a^n e_n\|_{2,\gamma}^2 = 1,$$

y C_φ no puede ser compacto. Se sigue entonces que si $\varphi(z) = az + b$ ($|a| = 1$), entonces C_φ tampoco puede ser compacto.

Ahora, mostraremos que si $\varphi(z) = az$, $|a| < 1$, entonces C_φ tiene que ser compacto. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $E^2(\gamma)$ débilmente convergente a cero. Entonces por el Lema 8.15, tenemos que la sucesión $\{f_n\}$ es acotada por $M > 0$ y converge a cero uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Debemos probar que la sucesión $\|f_n \circ \varphi\|_{2,\gamma}$ converge a cero.

Por el lema 8.14, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|f\|_{2\gamma}^2 \leq c \int |f(z)|^2 e^{-\tau|z|}\, dA(z).$$

Luego, basta mostrar que $\int |f_n(az)|^2 e^{-2\tau|z|}\, dA(z)$ converge a cero, o cambiando variables, que

$$\int |f_n(w)|^2 e^{-2\tau|w|/|a|}\, dA(w) \to 0.$$

Dado $\epsilon > 0$, tomamos $\tau < t < \tau/|a|$. Nuevamente por el Lema 8.14, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int |f(w)|^2 e^{-t|w|}\, dA(w) \leq C\|f\|_{2,\gamma}^2.$$

Ahora podemos tomar un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$ tal que para cada w de K, se cumpla que $e^{-2\tau|w|/|a|}e^{t|w|} < \epsilon/2CM$; luego,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}\setminus K} |f_n(w)|^2 e^{-2\tau|w|/|a|}\, dA(z) &= \int_{\mathbb{C}\setminus K} |f_n(w)|^2 e^{-2\tau|w|/|a|} e^{2t|w|} e^{-2t|w|}\, dA(w) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2CM} \int_{\mathbb{C}\setminus K} |f_n(w)|^2 e^{-2t|w|/|a|}\, dA(z) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2CM} C\|f\|_{2,\gamma}^2 \\
&\leq \frac{\epsilon}{2CM} CM = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos tomar n lo suficientemente grande de manera que, para cada $w \in K$,

$$|f_n(w)| \leq \epsilon/2 \int e^{-2\tau|z|}\, dA(z).$$

Luego,

$$\int_K |f_n(w)|^2 e^{-2\tau|w|/|a|}\, dA(w) \leq \epsilon/2,$$

y esto completa la demostración. $\square$

CAPíTULO 9

Transformaciones Fraccionales Lineales en $\mathbb{C}^N$

A lo largo de este texto, hemos presentado diversos resultados que describen el comportamiento de operadores de composición inducidos por transformaciones fraccionales lineales del disco unitario en sí mismo. Adicionalmente al hecho que estos ejemplos tienen interés en sí mismos, existe el denominado *Teorema del Modelo Fraccional Lineal* que permite clasificar a *todos* los elementos de $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ en términos análogos a la conocida clasificación de las transformaciones fraccionales lineales. De hecho, el Teorema afirma que bajo condiciones muy generales (cf. [**39**, Th. 2.53] cada $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ puede ser "representada" por una transformación fraccional lineal. Una versión de dicho teorema es la siguiente:

Teorema 9.1. [**20**] *Sea $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ univalente, entonces existe una aplicación univalente $\sigma : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ y una transformación fraccional lineal $\psi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ tal que $\psi(\sigma(\mathbb{D})) \subset \sigma(\mathbb{D})$ y (ver Figura 9)*

$$\sigma \circ \varphi = \psi \circ \sigma.$$

El modelo indicado permite, de alguna manera, "reducir" el estudio de ciertas propiedades (por ejemplo, fenómenos cíclicos) de los operadores de composición al estudio de estas para aquellos operadores de composición inducidos por símbolos fracciones lineales.

En la búsqueda de un análogo en dimensiones superiores a las transformaciones fraccionales lineales, Cowen y McCluer en [**40**] han estudiado recientemente las que ellos han llamado *transformaciones fraccionales lineales de* $\mathbb{C}^N$. En este capítulo, a modo de motivación para ulteriores investigaciones en el tema, describimos algunos resultados en relación a dichas transformaciones. En la sección 1 presentamos las definiciones básicas e indicamos algunos de los resultados obtenidos en [**40**] y [**21**]. Animamos al lector interesado a revisar esta bibliografía. En la sección 2 ilustraremos un resultado sobre la ciclicidad de operadores de composición obtenido por el cálculo directo de los iterados del símbolo en [**89**].

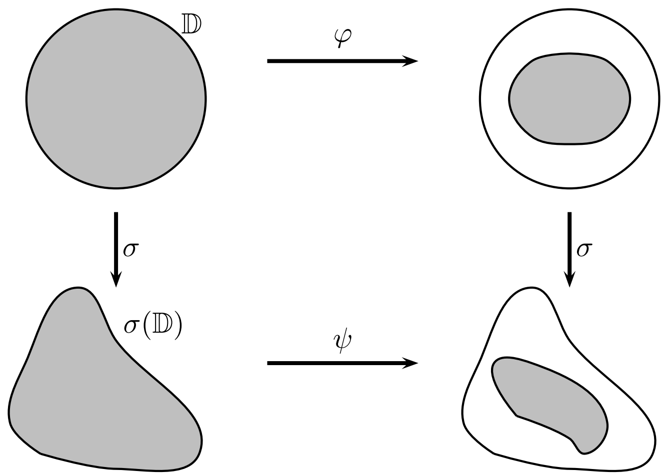

FIGURA 1. Modelo fraccional lineal

1. Definiciones y Resultados Básicos

DEFINICIÓN 9.2. Una aplicación φ de $\mathbb{C}^N$ en $\mathbb{C}^N$ es llamada una transformación fraccional lineal si es de la forma

$$\varphi(z) := \frac{Az + B}{\langle z, C\rangle + D}, \qquad z \in \mathbb{C}^N;$$

Donde A es una matriz $N \times N$, B y C son elementos en $\mathbb{C}^N$ (que veremos como vectores columna), y D es un número complejo.

Por ejemplo, obsérvese que una transformación lineal es una transformación fraccional lineal:

$$Tz = \frac{Tz + 0}{\langle z, 0\rangle + 1}$$

y una traslación también lo es:

$$z + p = \frac{Iz + p}{\langle z, 0\rangle + 1}.$$

Asimismo, una aplicación afín, esto es, una transformación lineal seguida por una traslación, es una transformación fraccional lineal:

$$Tz + p = \frac{Tz + p}{\langle z, 0\rangle + 1}.$$

Es fácil verificar también que los automorfismos de $\mathbb{B}^N$ son transformaciones fraccionales lineales (cf. [**94**]).

Claramente, el dominio de una transformación fraccional lineal es el conjunto de z en $\mathbb{C}^N$ para los cuales

$$< z, C > + D \neq 0.$$

Es decir, el dominio de una transformación fraccional lineal es el complemento de un subespacio afín. Para nuestro propósito, queremos que el dominio de φ incluya la bola cerrada; como $z = \frac{-DC}{|C|^2}$ es un cero de $< z, C > + D$, entonces requerimos que $\left|\frac{-DC}{|C|^2}\right| > 1$, o equivalentemente $|D| > |C|$. Recíprocamente, si $|D| > |C|$, entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que $\langle z, C\rangle + D \neq 0$ para z en la bola cerrada. En particular, $D \neq 0$ para esta transformación fraccional lineal.

Identificando una matriz 1×1 con su entrada, ocasionalmente escribiremos

$$\langle z, C\rangle = C^* z.$$

Por ejemplo, usando esta identificación podemos ver que una transformación fraccional lineal es constante si, y sólo si,

$$A = \frac{BC^*}{D}$$

Usualmente no consideraremos el caso de aplicaciones constantes.

Identificaremos a $\mathbb{C}^N$ con clases de equivalencias en $\mathbb{C}^{N+1}$. Dos puntos v y w en $\mathbb{C}^{N+1}$ son equivalentes si $v = cw$ para $c \neq 0$, $c \in \mathbb{C}$. Para un elemento v tenemos que su clase de equivalencia es:

$$[v] = \{cv \ : \ c \neq 0\}.$$

Así tenemos que $\mathbb{C}^N$ puede ser sumergido en $\left(\mathbb{C}^{N+1}/\sim\right)$ de la siguiente manera:

$$\mathbb{C}^N \xrightarrow{\varepsilon} \left(\mathbb{C}^{N+1}/\sim\right)$$

$$\varepsilon(z) = [(z, 1)] \qquad z = (z_1, \ldots, z_n).$$

Es claro que:

$$\mathrm{Rgo}(\varepsilon) = \{[v_1, v_2] \ : \ v_1 \in \mathbb{C}^N \ , \ v_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$$

y

$$\varepsilon^{-1} : \mathrm{Rgo}(\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{C}^N$$

$$\varepsilon^{-1}([v_1, v_2]) = \tfrac{v_1}{v_2}.$$

En el mencionado artículo de Cowen y McCluer [**40**], se introduce un formalismo basado en la noción de *espacios de Kreĭn* para el estudio de las transformaciones fraccionales lineales. Recordemos que un espacio de Kreĭn es un espacio $\mathcal{K}$ con un semiproducto interior $[\cdot,\cdot]$ que puede ser expresado como una suma directa ortogonal

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-$$

donde $\mathcal{K}_+$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{K}_-$ es el *antiespacio* de un espacio de Hilbert, es decir, $(\mathcal{K}_-, -[\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}_-})$ es un espacio de Hilbert.

El espacio de Kreĭn que acá consideraremos es el siguiente: En $\mathbb{C}^{N+1}$ definimos

$$[v,w] = (v_1\overline{w_1} + \cdots + v_n\overline{w_n}) - v_{n+1}\overline{w_{n+1}}.$$

Este espacio es conocido como el *Espacio de Minkowski*

Obsérvese que:

$$[v,w] = \langle Jv, w\rangle$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el usual producto interno Euclídeo en $\mathbb{C}^{N+1}$ y

$$J = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde I_N es la matriz identidad en $\mathbb{C}^N$.

Habiendo introducido esta estructura, vemos que un elemento $v = (v_1, v_2)$ en el rango de ε representa un punto de la esfera unitaria de $\mathbb{C}^N$ si, y sólo si, $|v_1| = |v_2|$ lo cual ocurre si, y sólo si, $[v,v] = |v_1|^2 - |v_2|^2 = 0$.

Por otro lado, el punto $v \in \mathrm{Rgo}(\varepsilon)$ representa un punto en la bola unitaria de $\mathbb{C}^N$ si, y sólo si, $[v,v] < 0$.

Definición 9.3. Si $\varphi(z) = \frac{Az+B}{\langle z,C\rangle + D}$ es una transformación fraccional lineal de $\mathbb{C}^N$ en $\mathbb{C}^N$, la matriz

$$m_\varphi := \begin{pmatrix} A & B \\ C^* & D \end{pmatrix}_{(N+1)\times(N+1)}$$

es llamada la matriz asociada a φ, la cual es única salvo múltiplos por constantes.

La ventaja de esta notación está en que podemos ver que para $z \in \mathbb{C}^N$, $m_\varphi \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$ está en la misma clase de equivalencia que $\begin{pmatrix} \varphi(z) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por otro lado, si $\varphi_1(z) = \frac{A_1 z + B_1}{C_1^* z + D_1}$ y $\varphi_2(z) = \frac{A_2 z + B_2}{C_2^* z + D_2}$ son transformaciones fraccionales lineales, entonces $\varphi_1 \circ \varphi_2$ también es una transformación fraccional lineal.

Mas aún, la matriz asociada a $\varphi_1 \circ \varphi_2$ es $m_{\varphi_1 \circ \varphi_2} = m_{\varphi_1} m_{\varphi_2}$. En particular, si φ tiene una transformación fraccional lineal inversa, entonces $m_{\varphi^{-1}} = (m_\varphi)^{-1}$ y si m_φ es inversible, φ tiene una transformación fraccional lineal inversa.

La primera pregunta critica en el estudio de operadores de composición en varias variables es el problema de determinar cuándo el símbolo aplica $\mathbb{B}^N$ en sí mismo.

Una respuesta a esta cuestión, para transformaciones fraccionales lineales, fue dada por Cowen y McCluer usando el formalismo de espacios de Kreĭn .

Definición 9.4. Una transformación T en un espacio de Kreĭn es una contracción (o Kreĭn contracción) si

$$[Tv, Tv] \leq [v, v] \qquad \forall\, v \in \mathbb{C}^{N+1}$$

y T es una isometría si $[Tv, Tv] = [v, v]$ para todo v.

Teorema 9.5. [**40**] *Sea $\varphi(z) = \frac{Az+B}{\langle z, C\rangle + D}$ una transformación fraccional lineal no constante. Si un múltiplo no cero de la matriz*

$$m_\varphi = \begin{pmatrix} A & B \\ C^* & D \end{pmatrix}$$

es una contracción de Kreĭn en $\mathbb{C}^{N+1}$ (con la estructura de espacio de Kreĭn definida anteriormente) entonces φ aplica la bola unitaria $\mathbb{B}^N$ en sí misma. Recíprocamente, si φ aplica la bola unitaria en sí misma, entonces m_φ es un múltiplo no cero de una contracción en este espacio de Kreĭn. Esto es, $t^2[m_\varphi v, m_\varphi v] \leq [v, v]$ para algún $t > 0$.

Ahora, si T es una transformación lineal en $\mathbb{C}^{N+1}$ entonces $[Tv, Tv] \leq [v, v]$ si, y sólo si, $\langle JTv, Tv\rangle \leq \langle Jv, v\rangle$ si, y sólo si, $0 \leq \langle Jv, v\rangle - \langle JTv, Tv\rangle = \langle Jv, v\rangle - \langle T^*JTv, v\rangle = \langle (J - T^*JT)v, v\rangle$ para todo $v \in \mathbb{C}^{N+1}$ si, y sólo si, el operador $J - T^*JT$ es definido positivo. Esto nos da una condición bastante concreta para verificar cuándo una transformación lineal es una contracción de Kreĭn .

Teorema 9.6. [**40**] *Si la matriz*

$$m_\varphi = \begin{pmatrix} A & B \\ C^* & D \end{pmatrix}$$

es un múltiplo de una isometría en un espacio de Kreĭn con

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces $\varphi(z) = \frac{Az+B}{\langle z,C\rangle + D}$ *aplica* $\mathbb{B}^N$ sobre *sí misma. Recíprocamente si* $\varphi(z) = \frac{Az+B}{\langle z,C\rangle + D}$ *es una transformación fraccional lineal de la bola unitaria* $\mathbb{B}^N$ sobre *sí misma, entonces* m_φ *es un múltiplo de una isometría.*

Para una isometría inversible U en un espacio de Kreĭn, tenemos que $U^{-1} = U^{\times}$, es el adjunto de Kreĭn. En general, el adjunto de Kreĭn es el operador que satisface $[Tv, w] = [v, T^{\times}w]$ y no es difícil ver que $T^{\times} = JT^*J$ donde T^* es el adjunto usual del espacio de Hilbert. Para nuestro caso

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C^* & D \end{pmatrix}^{\times} = \begin{pmatrix} A^* & -C \\ -B^* & D^* \end{pmatrix}, \tag{9.1}$$

escribiendo $UU^{\times} = I$ y $U^{\times}U = I$, tenemos ecuaciones que caracterizan a las isometrías en nuestro espacio de Kreĭn y por lo tanto, a los automorfismos de $\mathbb{B}^N$.

El formalismo de espacios de Kreĭn pareciera ser una herramienta prometedora en el estudio de las trasformaciones fraccionales lineales de $\mathbb{B}^N$; hasta donde sabemos, el aprovechamiento de esta estructura no ha sido llevado mas allá.

Mencionamos los siguientes ejemplos adicionales

- Notemos primero que el automorfismo dado por un operador unitario U en $\mathbb{C}^N$, $\varphi(z) = Uz$ puede ser representado por

$$m_\varphi = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Los automorfismos φ que fijan $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ y $-e_1$ pueden ser escritos como

$$\varphi(z) = \frac{Az+B}{\langle z, C\rangle + D} \quad \text{donde } B = C = ce_1 \; D > 1$$

con $c = \pm\sqrt{D^2 - 1}$ y A tiene la forma de bloque

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

donde V es una matriz $(n-1) \times (n-1)$ unitaria (euclidiana).

En efecto,

$$\varphi(e_1) = \frac{Ae_1 + ce_1}{\langle e_1, ce_1 \rangle + D} = \frac{\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} e_1 + ce_1}{c + D} = \frac{De_1 + ce_1}{c + D} = e_1$$

y $\varphi(-e_1) = -e_1$.

- Cuando $V = I$, el automorfismo correspondiente es llamado *dilatación no isotrópica* de la bola.
- Finalmente, si p es un punto de $\mathbb{B}^N$, un automorfismo φ tal que $\varphi(\varphi(z)) = z$ y $\varphi(0) = p$ es llamado *involución*.

Adicionalmente, indicamos el siguiente resultado que permite dar una nueva caracterización de los automorfismos de $\mathbb{B}^N$.

TEOREMA 9.7 (Modelo de Automorfismo de $\mathbb{B}^N$). [**40**] *Las aplicaciones unitarias y las* dilataciones no isotrópicas *generan el grupo de automorfismos de la bola. Específicamente, si φ es un automorfismo de la bola (no unitario), entonces existen W_1 y W_2 unitarios y una* dilatación no isotrópica *δ tal que $\varphi = W_1 \delta W_2$.*

Mencionamos a continuación algunos hechos geométricos sobre las transformaciones fraccionales lineales. En el plano complejo, es bien conocido que las transformaciones fraccionales lineales aplican círculos sobre círculos. En dimensiones mayores existe mucha mas flexibilidad, pero la analogía apropiada no es obvia. Un *elipsoide* es una traslación de la imagen de la bola unitaria bajo una transformación lineal inversible (compleja). Como traslaciones y transformaciones lineales son Transformaciones Fraccionales Lineales, todo elipsoide es la imagen de la bola unitaria bajo una Transformación Fraccional Lineal. El próximo resultado da el recíproco.

TEOREMA 9.8. [**40**] *Si φ es una transformación fraccional lineal inyectiva definida en una bola $\overline{\mathbf{B}}$ en $\mathbb{C}^N$, entonces $\varphi(\mathbf{B})$ es un elipsoide.*

Si φ es una transformación fraccional lineal definida en una bola cerrada $\overline{\mathbf{B}}$ que no es inyectiva, la imagen $\varphi(\overline{\mathbf{B}})$ será la intersección de un elipsoide con una traslación de un subespacio k-dimensional de $\mathbb{C}^N$, para algún $k < n$. Para ver esto, de nuevo asumamos sin pérdida de generalidad que $\varphi(0) = 0$ y notemos que

$$m_\varphi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C^* & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C^* & 1 \end{pmatrix}.$$

El primer término del lado derecho corresponde a la transformación lineal $D^{-1}Az$ y el segundo corresponde a una transformación fraccional lineal inyectiva también definida en $\overline{\mathbf{B}}$. Si φ no es inyectiva, entonces $\mathrm{Rgo}(A) = k < n$ y por el Teorema anterior $\varphi(\overline{\mathbf{B}})$ es un trasladado de la imagen de una bola bajo alguna transformación lineal de rango k.

Recordemos que si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son puntos de $\mathbb{C}^N$, el *conjunto afín* (cápsula afín) determinado por estos puntos es el conjunto

$$[z_1, z_2, \ldots, z_n] = \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_j \ : \ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \quad \alpha_i \in \mathbb{C} \Big\}.$$

Los subconjuntos afines son como traslaciones de subespacios complejos y la dimensión de un conjunto afín es la dimensión de este subespacio. El siguiente Teorema dice que las transformaciones fraccionales lineales aplican conjuntos afines en conjuntos afines.

TEOREMA 9.9. *Sea φ una transformación fraccional lineal y sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ puntos en el dominio $\triangle$ de φ, entonces la clausura de $\varphi([z_1, \ldots, z_n] \cap \triangle)$ es $[\varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_n)]$.*

Notemos que la afirmación de clausura en el Teorema es necesaria pues, si tomamos $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ en el plano y $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, entonces el conjunto afín $[z_1, z_2]$ es el plano complejo; sin embargo $\varphi([z_1, z_2] \cap \triangle)$ no contiene al 0.

Con respecto a los operadores de composición inducidos por símbolos fraccionales lineales, Cowen y McCluer prueban los siguientes dos resultados fundamentales.

TEOREMA 9.10. [**40**] *Si φ es una transformación fraccional lineal de $\mathbb{B}^N$ en $\mathbb{B}^N$, entonces C_φ es acotado en $H^p(\mathbb{B}^N)$ para todo $p \geq 1$.*

TEOREMA 9.11. [**40**] *Si φ es una transformación fraccional lineal de $\mathbb{B}^N$ es sí mismo, entonces C_φ es acotado en $A^p(\mathbb{B}^N)$ para todo $p \geq 1$.*

De manera análoga a lo que ocurre en $\mathbb{D}$, una transformación fraccional lineal $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{B}^N)$ induce un operador de composición compacto en $H^p(\mathbb{B}^N)$ o en $A^p(\mathbb{B}^N)$, $p \geq 1$ si y sólo si $\|\varphi\|_\infty < 1$ (cf. [**40**]).

Prosiguiendo el estudio de los operadores de composición inducidos por símbolos fraccionales lineales, C. Bisi y F. Bracci en [**21**] abordan el problema de estudiar los fenómenos cíclicos exhibidos por estos operadores. Ellos obtienen los siguientes resultados parciales.

TEOREMA 9.12. [**21**] *Sea φ una transformación fraccional lineal de la bola unitaria $\mathbb{B}^N$. Si φ tiene mas de dos puntos fijos en $\overline{\mathbb{B}}_N$, entonces C_φ no es cíclico.*

TEOREMA 9.13. [**21**] *Sea φ una transformación fraccional lineal de $\mathbb{B}^N$ con exactamente dos puntos fijos en la frontera. Entonces C_φ es hipercíclico si, y sólo si, $d\varphi$ es inversible en un, y así en todo, punto de $\mathbb{B}^N$.*

2. Iterados de las dilataciones no isotrópicas de $\mathbb{B}^N$ y ciclicidad

Ilustramos a continuación la técnica de prueba del Teorema anterior de C. Bisi y F. Bracci en el caso del operador de composición inducido por la dilatación no isotrópica $\delta_D(z) = \frac{Az+B}{\langle z,C\rangle + D}$ con $B = C = ce_1$, $c = \pm\sqrt{D^2-1}$ y $D > 1$. La matriz asociada a esta dilatación es

$$m_{\delta_D} := \begin{pmatrix} D & 0 & c \\ 0 & I_{N-1} & 0 \\ c & 0 & D \end{pmatrix}$$

Para efectos del cálculo de los iterados, trabajando con matrices en bloque, con un bloque igual a la matriz identidad $(N-1)\times(N-1)$, vemos que es posible simplificar la escritura de la matriz anterior como una matriz 2×2, es decir, escribiremos $m_{\delta_D} = \begin{pmatrix} D & c \\ c & D \end{pmatrix}$

Un cálculo directo, usando por ejemplo MAPLE®, permite obtener la siguiente expresion para $(m_{\delta_D})^n$:

$$\begin{pmatrix} P_n(D) & -\frac{1}{2}\big(D-c\big)^n + \frac{1}{2}\big(D-c\big)^n \\ -\frac{1}{2}\big(D-c\big)^n + \frac{1}{2}\big(D-c\big)^n & P_n(D) \end{pmatrix}$$

donde

$$P_n(D) = \frac{1}{2}\big(D + \sqrt{D^2-1}\big)^n + \frac{1}{2}\big(D - \sqrt{D^2-1}\big)^n$$

es el *polinomio de Chebyshev* de grado n evaluado en D. Este hecho fue notado por E. Rojas en su tesis [**89**], donde se hace un cálculo detallado. De hecho, E. Rojas observó además que como es posible calcular los polinomios de Chebychev P_λ de grado λ, para $\lambda \in \mathbb{R}$, podemos sumergir el grupo discreto de los iterados de las dilataciones no isotrópicas en el *grupo continuo*, definido por:

$$(m_{\delta_D})^\lambda := \begin{pmatrix} P_\lambda(D) & -\frac{1}{2}\big(D-c\big)^\lambda + \frac{1}{2}\big(D-c\big)^\lambda \\ -\frac{1}{2}\big(D-c\big)^\lambda + \frac{1}{2}\big(D-c\big)^\lambda & P_\lambda(D) \end{pmatrix}$$

El siguiente resultado, esta contenido en 9.13. Sin embargo, nos parece interesante mostrar la prueba a manera de ilustración de la técnica de prueba del resultado general.

Teorema 9.14. *Sea δ_D una dilatación no isotrópica de la bola unitaria $\mathbb{B}^N$. Entonces C_{δ_D} es hipercíclico en $H^2(\mathbb{B}^N)$.*

Demostración. Sean δ_D y ψ_D las siguientes dilataciones no isotrópicas de la bola:

$$\delta_D(z) := \frac{\begin{pmatrix} D & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}{\langle (c,0,\ldots,0),(z_1,\ldots,z_N)\rangle + D} = \frac{(Dz_1+c, z_2, \ldots, z_N)}{cz_1 + D}$$

$$\psi_D(z) := \frac{\begin{pmatrix} D & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}{\langle (-c,0,\ldots,0)+(z_1,\ldots,z_N)\rangle + D} = \frac{(Dz_1-c, z_2, \ldots, z_N)}{-cz_1 + D}$$

donde $c = \sqrt{D^2-1}$ y $D > 1$.

Sea

$$\mathcal{D}_p := \{h \quad \text{analítica en } \mathbb{C}^N \ : \ h(p) = 0\}$$

y tomemos $X := \mathcal{D}_{e_1}$ y $S = C_{\psi_D}$. $\mathcal{D}_{e_1}$ es denso en $H^2(\mathbb{B}^N)$

El operador C_{ψ_D} aplica $\mathcal{D}_{e_1}$ en sí mismo pues $\psi_D(e_1) = e_1$. Más aún, $C_{\delta_D} \circ C_{\psi_D} = C_{\delta_D \circ \psi_D} = id$, pues $(\delta_D \circ \psi_D)(z) = z$ para $z \in \mathbb{B}^N$. Además, utilizando la fórmula encontrada anteriormente para $(m_{\delta_D})^k$, se comprueba fácilmente que:

$$\delta_D^k \to e_1 \quad \text{y} \quad \psi_D^k \to e_1.$$

Luego, $C_{\delta_D}^k = C_{\delta_D^k} \to 0$ en $\mathcal{D}_{e_1}$ y $C_{\psi_D}^k = C_{\psi_D^k} \to 0$ en $\mathcal{D}_{e_1}$. Por lo tanto, aplicando el criterio de hiperciclicidad de Kitai (Teorema 6.9) tenemos que C_{δ_D} es hipercíclico. $\square$

Observamos finalmente que la conjetura adelantada por Cowen y McCluer sobre la posibilidad de utilizar las transformaciones fraccionales lineales de $\mathbb{B}^N$ como se han definido acá, de modo análogo a su conocida contrapartida unidimensional, estáún lejos de ser verificada. Los resultados que acá se presentaron simplemente ilustran algunas posibilidades. Para desarrollos adicionales, ver [**75**], [**37**], [**31**] y [**32**].

Bibliografía

[1] P. Ahern y D. Clark: *On inner functions with H^p derivative*, Michiga J. Math., 21, 1974, 115-127.

[2] Ahlfors, Lars. V: *Complex Analysis*, McGraw-Hill International Editions, Tercera Edición, New York. 1979.

[3] M. Appell, P. Bourdon, y J. Thrall: *Norms of Composition Operators on the Hardy space*, Experiment. Math. 5 (1996) 111-117.

[4] J. Arazy, S. Fisher y J. Peetre: *Mobius invariant function spaces,* J. Reine. Angew. Math., 363, 1985, 110-145.

[5] S. Azizi, D. Cochran, J. Clark, and J. McDonald: *On the Preservation of Band limitedness under Non-affine Time Warping.* Unpublished notes.

[6] S. Azizi, D. Cochran, and J.N. McDonald: *On the preservation of bandlimitedness under non-affine time warping.* Proceedings of the 1999 International Workshop on Sampling Theory and Applications, Loen Norway, August 1999.

[7] E. Berkson and H. Porta, *Semigroups of analytic funtions and composition operator*: Michigan Math. J. 25(1978), 101-115.

[8] T. Bermúdez, A. Bonilla, A. Martinón: *On the Existence of Chaotic and Hipercyclic Semigroups on Banach Spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 131, (2003) 2435-2441.

[9] J. Bés & A. Peris: *Hereditarily Hipercyclic Operators.* J. Functional Analysis 167, (1999) 94-112.

[10] G. D. Birkhoff: *Démonstration d'un théoreme elementaire sur les functions entieres.* C. R. Acad. Sci. Paris. 189 (1929), 473-475.

[11] C. Bishop: *Orthogonal functions in H^∞.* Preprint.

[12] R. Boas: *Entire functions.* Academic Press Inc., Pub., 1954.

[13] H. Bohr: *Über einen satz von Edmund Landau.* Scripta Univ. Hierosolymitanarum 1, (1923).

[14] J. Bonét, F. Martínez-Giménez, A. Peris: *Linear Chaos on Fréchet Spaces. Dynamical systems and functional equations* Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 13 (2003), 1649–1655

[15] F. Bonsall and J. Duncan: *Numerical Ranges II.* Cambridge University Press, 1973, London Math. Soc. Lectures Notes. Series 10.

[16] P. Bourdon: *Rudin's orthogonality problem and the Nevanlinna counting function.* Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 1187-1192.

[17] P. Bourdon, D. Retsek *Reproducing kernels and norms of composition operatos* Acta Sci. Math. (Szeged) 67 (2001), 387-394.

[18] P. Bourdon, D. Levi, S. Narayan, and J. Shapiro: *Which linear-fractional composition operators are essentially normal ?* J. Math. Anal. Appl. **280** (2003) 30–53.

[19] P. Bourdon, and J. Shapiro: *The numerical range of automorphic composition operators.* J. Math. Anal. Appl. **251** (2000) 839-854.

[20] P. S. Bourdon & J. H. Shapiro: *Cyclic Phenomena for Composition Operators.* Memoirs of the American Mathematical Society, 1997.

[21] F. Bracci y C. Bisi: *Linear Fractional Maps of the Unit Ball: A Geometric Study.* Adv. Math. 167 (2002), No 2, 265-287.

[22] J. Bram: *Subnormal Operators.* Duke Math. J. Vol 22 (1955), 75-94.

[23] B. Carswell, B. MacCluer, and A. Schuster: *Composition Operators on the Fock Space.* Acta Sci. Math. (Szeged) 69 (2003), no. 3-4, 871–887.

[24] G. R. Chacón, J. Giménez y E. Rojas: *Dinámica de Operadores de Composición en Espacios de Hilbert Funcionales Analíticos* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, XVII, 1, (2005), 1-10.

[25] G.A. Chacón and G.R. Chacón: *Some Properties of Composition Operators on the Dirichlet Space.* Acta Math. Univ. Comenanie. Vol LXXIV, 2 (2005), p. 259-276.

[26] G.A. Chacón, G.R. Chacón y J. Giménez: *Composition Operators on spaces of entire functions.* Por aparecer en Proc. Amer. Math. Soc.

[27] G.A. Chacón, G.R. Chacón y J. Giménez: *Composition Operators on the Dirichlet space and related problems.* PrePrint, disponible en http://front.math.ucdavis.edu/math.FA/0504179

[28] K. Chan, and J. Shapiro: *The cyclic behavior of translation operators on Hilbert spaces of entire functions.* Ind. Univ. Math. J. 40 (1991) 1421–1449

[29] J. Clifford, and D. Zheng: *Composition operators on the Hardy spaces.* Indiana Univ. Math. J. **48** (1999) 1585-1616.

[30] J. Clifford, and D. Zheng: *Composition operators on the Bergman spaces.* Chinese Ann. NMath. **24B** (2003) 433-448.

[31] M. Contreras, F. Bracci y S. Díaz-Madrigal: *Infinitesimal generators associated with semigroups of linear fractional maps.* PrePrint.

[32] M. Contreras, F. Bracci y S. Díaz-Madrigal: *Classification of semigroups of linear fractional maps in the unit ball.* PrePrint.

[33] J. Conway: *A Course in Functional Analysis.* Springer Verlag, 1985.

[34] Conway, John B. *Functions of one Complex Variables*, Springer-Verlag New York Inc. 1973.

[35] Conway, John B. *Functions of one Complex Variables*, Springer-Verlag New York Inc. 1995. Volúmen II

[36] Conway, John B. *The Theory of Subnormal Operators*, Amer. Math. Soc. Surveys and Monographs 36, Providence, 1991

[37] C. Cowen, D. Crosby, T. Horine, R. Ortiz, A. Richman, Y. Yeow y B. Zerbe: *Geometric properties of linear fractional maps.* Indiana Uni. Math. J. 55 (2006), 553-578.

[38] C. Cowen and T. L. Kriete: *Subnormality and Composition Operators on H^2.* J. Funct. Anal. 81. (1988), 298-319.

[39] C. Cowen and B. MacCluer: *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions.* CRC Press, 1995.

[40] C. Cowen and B. MacCluer: *Linear Fractional Maps of the Unit Ball and their Composition Operators.* Acta. Sci. Math. (Szeged). 66. (2000), No 1-2, 351-376.

[41] C. Cowen: *Linear fractional composition operators on H^2.* Integral Equations Operator Theory, **11** (1988), 151-160.

[42] R. Curto, *Joint hyponormality: A bridge between hyponormality and subnormality*, Operator Theory and Applications, Proc. Symp. in Pure Math, A.M.S., Vol. 51-Part 2 (1990), 69-91.

[43] R. Curto, P. Muhly and J. Xia: *Hyponormal pairs of conmuting operators.* Oper. Theory: Adv. Appl. Vol 35 (1988) 1-22.

[44] R. L. Devaney: *An Introduction to Chaotical Dynamical Systems* Addison-Wesley, 1989.

[45] P. Duren: *Theory of H^p spaces,* Academic Press, New York, 1970.

[46] P. Duren y A. Schuster: *Bergman spaces,* Math. Surveys and Monographs, 100, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.

[47] K. J. Engel and R. Nagel: *One-Parameter Semigroups of linear Evolution Equations,* Grad. Texts in Math, 194 Springer-Verlag, 2000.

[48] N. Feldman: *Pointwise Multipliers of the Hardy space into the Bergman space.* Illinois J. Math. 43 (1999) no. 2, 211-221

[49] R. Frankfurt: *Quasicyclic Subnormal Semigroups.* Can. J. Math. XXIX (1977), 1230-1246.

[50] E. Gallardo-Gutiérrez, and A. Montes-Rodríguez: *Adjoints of linear fractional composition operators on the Dirichlet space.* Math. Ann. **327**, (2003) 117-234.

[51] E. Gallardo-Gutiérrez, and A. Montes-Rodríguez: *The role of the spectrum of the cyclic behavior of the composition operators.* Memoirs of the A.M.S. 791, (2004).

[52] J. Giménez: *Joint Hyponormality of Composition Operators with Linear Fractional Symbols.* Integr. equ. oper. theory. 43 (2002), 385-396.

[53] J. Giménez: *Subnormal Semigroups of Composition Operators.* Proc. Amer. Math. Soc, 133 (2005), 1749–1756.

[54] Greene, Robert E. & Krantz S.: *Function theory of one complex variable*, John Wiley & Sons, INC. New York. 1997.

[55] K. G. Grosse-Erdmann: *Universal Families and Hipercyclic Operators.* Bull. Amer. Math. Soc, 6 (1999), 345-381.

[56] K. Gustafson, and D. Rao: *Numerical Range.* Springer Verlag, 1997.

[57] P. Halmos: *Measure theory.* Springer-Verlag, New York, 1974.

[58] C. Hammond: *The norm of a Composition Operator with linear Fractional Symbol acting on the Dirichlet Space,* preprint.

[59] H. Hedenmalm, B. Koremblum, y K. Zhu : *Theory of Bergman Spaces.* Springer Verlag, New York, 2000.

[60] R. Hibschweiler: *Composition operators on Dirichle t-type spaces,* Proc. Amer. Math. Soc., Vol 128, Number 12, (2000), 3579-3586.

[61] W. Higdon: *The Spectra of Composition Operators from linear fractional maps acting upon the Dirichlet space.* Preprint.

[62] A. Holland: *Introduction to the theory of the entire functions.* Academic Press Inc., Pub., 1973.

[63] W. Hornor: *Semigroups of holomorphic self-maps of domains and one-parameter semigroups of isometries of Bergman spaces,* Michigan Math. J. 51 (2003), 305-325.

[64] P. Hurst: *Relating composition operators on different weighted Hardy spaces.* Arch. Math. (Basel) **68** (1997), 503-513.

[65] T. Ito: *On the conmutative family of subnormal operators.* J. fac. Sci. Hokkaido Univ. **14** (1958), 1-15.

[66] F. Jafari et al., editors: *Studies on Composition Operators.* Comtemp. Math. Vol. 210 Amer. Math. Soc., 1998.

[67] M. Jovović and B. MacCluer: *Composition operators on Dirichlet spaces.* Acta Sci. Math. (Szeged) 63 (1997), 229-247.

[68] C. Kitai: *Invariant Closed Sets for Linear Operators.* PhD Thesis, University of Toronto, 1982

[69] S. Krantz: *Function Theory of Several Complex Variables.* 2 ed. Chelsea Publishing, Providence, RI, 2000.

[70] G. Koenigs, *Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles*, Ann. Sci. École Norm. Sup.(Sér), **1**(1884) supplément, 3-41.

[71] B. Levin: *Lectures on Entire Functions:* Traslations of Mathematical Monographs. Vol. 150 American Math. Soc. (1986)

[72] D. Luecking y L. Rubel: *Complex Analysis: A Functional Analysis approach,* Springer, Verlag, New York, 1984.

[73] B. D. MacCluer and J. S. Shapiro: *Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces,* Canad. J. Math. 38 (1986), 878-906.

[74] B. MacCluer and R. Weir: *Essentially Normal Composition Operators on the Bergman Spaces.* Preprint, 2004.

[75] B. MacCluer and R. Weir: *Linear-Fractional Composition Operators in Several variables.* Preprint, 2004.

[76] M. Martin and M. Putinar: *Lectures on Hyponormal Operators.* Birkhäuser-Verlag, 1989.

[77] M. Martín and D. Vukotić: *Norms and spectral radii of composition operators acting on the Dirichlet space* To appear in J. Math. Anal. Appl.

[78] M. Martín and D. Vukotić: *Isometries of the Dirichlet space among the Composition.* To appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[79] V. Matache: *Composition operators on Hardy spaces of half plane.* Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1483-1491.

[80] V. Matache: *Numerical ranges of composition operators.* Linear Algebra Appl. **251** (2000), 837-854.

[81] R. Nevanlinna: *Analytic Functions,* Springer-Verlag, New York, 1970.

[82] E. A. Nordgren: *Composition operators,* Canad. J. Math. 20 (1968), 442-449.

[83] J. Ortega-Cerdà: *Sampling measures.* Publ. Mat. 42 (1998), 559–566.

[84] G. Pólya: *On an integral function of an integral function.* Journal London Math. Soc., Vol. 1 (1926), 12–15.

[85] W. Ross, and H. Shapiro: *Generalized Analytic Continuation.* University Lectures Series. Vol. 25. Amer. Math. Soc. (2002)

[86] P. Poggi-Corradini: *The essential norm of composition operators revisited,* Contemp. Math. 213 (1998), 167-173.

[87] D. Retsek: *The kernel supremum property and norms of composition operators ,* Thesis, Washington University, 2001.

[88] A Richman: *The Range of The Linear Fractional Maps of the Unit Ball.* `http://www.math.purdue.edu/richman/Selfmap-test.pdf`, 2004.

[89] E. Rojas: *Operadores de Composición Inducidos por Transformaciones Fraccionales Lineales de la Bola Unitaria de* $\mathbb{C}^N$*,* Tesis de Maestría, Universidad de Los Andes, 2005.

[90] S. Rolewicz: *On Orbits of Elements.* Studia Math. 33, (1969), 17-22

[91] S. Roman: *Advanced Linear Algebra.* GMT, Springer-Verlag, NY, 1992.

[92] P. Rosenthal *Review of* [**96**]*,* Bullein of Amer. Math. Soc. Volume 32, Number 1, January 1995, Pages 150-153

[93] W. Rudin: *Real and Complex Analysis.* Third edition, McGraw-Hill, New York, 1987.

[94] W. Rudin: *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$ Springer-Verlag, New York, 1980.

[95] H. J. Schwartz: *Composition operators on* H^2 , Thesis, Univ. of Toledo, 1968.

[96] J. Shapiro: *Composition Operators and Classical Function Theory.* Springer Verlag, 1993.

[97] J. Shapiro: *Notes on the numerical range.* Unpublished Notes. Available at `http://www.math.msu.edu/~ shapiro`.

[98] J. Shapiro: *The essential norm of a composition operator,* Ann. of Math. (2) 125 (1987), 375-404.

[99] J. Shapiro: *What do composition operators know about inner functions?* Monatshefte für Mathematik 130 (2000), 57–70.

[100] J. Shapiro: *Notes on the Dynamics of Linear Opertors.* Unpublished notes. Available on http://www.math.msu.edu/~ shapiro, 2001.

[101] J. Shapiro y P. Taylor: *Compact, nuclear, and Hilbert-Schmidt composition operators on* H^2*,* Indiana Univ. Math. J. 23 (1973), 471-496.

[102] D. Shoikhet: *Semigroups in geometric function theory,* Kluwer Academic Pub., Dordrecht, 2001.

[103] E. Schroeder, *Über itierte Funktionen*, Math. Ann. 3(1871), 296-322. Springer-Verlag, New York, 1993

[104] R. Singh: *Composition operators,* Thesis, Univ. of New Hampshire, 1972.

[105] A. G. Siskakis : *Semigroups of composition operators on spaces of analytic functions, a review* Studies on Composition Operators, Contemporary Math. AMS, 213 (1988) 229-252.

[106] J. Stampfli, and J. Williams: *Growth conditions and the numerical range in a Banach algebra.* Tohoku Math. J. **20** (1968), 417-424.

[107] M. Stessin y K Zhu: *Composition operators on embedded disks.* Preprint, 2004.

[108] C. Sundberg: *Measures induced by analytic functions and a problem of Walter Rudin.* J. Amer. Math. Soc. 16 (2003) 69-90.

[109] D. Vukotić: *On norms of composition operators acting on Bergman spaces,* J. Math. Anal. Appl. 291 (2004), 189-202.

[110] K. Zhu: *Operator Theory in Function Spaces.* Marcel Dekker, New York, 1990.

[111] K. Zhu: *Spaces of holomorphic functions in the unit ball.* Springer, 2005.