

Conjuntos Abiertos y Cerrados

1. (a) En la prueba de que la intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, ¿dónde se usó la hipótesis de que la colección es finita?
- (b) De un ejemplo de una colección infinita de conjuntos abiertos anidados

$$O_1 \supset O_2 \supset O_3 \supset O_4 \supset \cdots,$$

cuya intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ sea cerrada y no vacía.

2. Sea

$$B = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Encuentre los puntos límites de B .
 - (b) ¿Es B un conjunto cerrado?
 - (c) ¿Es B un conjunto abierto?
 - (d) ¿Contiene B puntos aislados?
 - (e) Encuentre $\overline{B}$.
3. Decida cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos, cerrados o ninguna de los dos. Si un conjunto no es abierto encuentre un punto en el conjunto para el cual ninguna ϵ -vecindad de ese punto, este contenida en el conjunto. Si un conjunto no es cerrado, encuentre un punto límite que no pertenezca al conjunto.
 - (a) $\mathbb{Q}$
 - (b) $\mathbb{N}$
 - (c) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
 - (d) $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$
 - (e) $\{1 + 1/4 + 1/9 + \cdots + 1/n^2 : n \in \mathbb{N}\}$

4. **Teorema:** Un punto x es un punto límite de un conjunto A si y sólo si $x = \lim a_n$ para alguna sucesión $\{a_n\}$ contenida en A con $a_n \neq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En clase se probó la necesidad de la condición indicada. Pruebe Ud. la suficiencia, es decir que si $x = \lim a_n$ para alguna sucesión $\{a_n\}$ contenida en A con $a_n \neq x$, entonces x es un punto límite de A .

5. Sea $a \in A$. Recuerde que a es un punto aislado de A si no es un punto límite de A . Pruebe que x es punto aislado de A si y sólo si existe una vecindad $V_\epsilon(a)$ tal que $V_\epsilon(a) \cap A = \{a\}$.
6. Demuestre que un conjunto $F \subset \mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si para cada sucesión convergente contenida en F se cumple que el límite es también un elemento de F .

7. Sea $x \in O$, donde O es un conjunto abierto. Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente a x , pruebe que todos, menos un número finito de términos de $\{x_n\}$ deben estar contenidos en O .
8. Dado $A \subset \mathbb{R}$, sea L el conjunto de los puntos límite de A .
 - (a) Pruebe que el conjunto L es un conjunto cerrado.
 - (b) Muestre que si x es un punto límite de $A \cup L$, entonces x es un punto límite de A . Use esta observación para dar una prueba completa del siguiente Teorema cuya prueba fue esbozada en clase: Para cada $A \subset \mathbb{R}$, la clausura $\overline{A}$ es un conjunto cerrado y de hecho es el menor conjunto cerrado que contiene a A .
9.
 - (a) Si y es un punto límite de $A \cup B$, pruebe que y es punto límite de A o punto límite de B (o de ambos).
 - (b) Pruebe que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
 - (c) ¿Puede extenderse el resultado anterior para uniones infinitas de conjuntos?
10. (a) **Las leyes de Morgan:** Pruebe que dada una colección de conjuntos $\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ se cumple que:

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda^c \quad \text{y} \quad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda^c.$$

- (b) Use las leyes de Morgan para probar en detalle las siguientes propiedades de los conjuntos cerrados: la unión de una colección finita de conjuntos cerrados es cerrada y la intersección de una colección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.
11. Sea A un conjunto acotado superiormente. Si $s = \sup A$, pruebe que $s \in \overline{A}$.
12. Decida en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa. De contraejemplos para aquellas que sean falsas y pruebas para aquellas verdaderas.
 - (a) Para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}$, $\overline{A}^c$ es abierto.
 - (b) Si un conjunto A tiene un punto aislado, A no puede ser abierto.
 - (c) Un conjunto A es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$.
 - (d) Si A es un conjunto acotado, entonces $s = \sup A$ es un punto límite de A .
 - (e) Cada conjunto finito es cerrado.
 - (f) Un conjunto abierto que contiene a todos los números racionales es necesariamente todo $\mathbb{R}$.

13. Pruebe que los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son tanto abiertos como cerrados son $\mathbb{R}$ y $\emptyset$.
14. Un conjunto A es un llamado un conjunto F_σ si puede ser escrito como unión numerable de conjuntos cerrados. Un conjunto B se dice que es un conjunto G_δ si puede ser escrito como intersección numerable de conjuntos abiertos.
 - (a) Pruebe que un intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto G_δ .
 - (b) Pruebe que el intervalo semi-abierto $(a, b]$ es tanto G_δ como F_σ .
 - (c) Pruebe que $\mathbb{Q}$ es un conjunto F_δ y el conjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$ es un conjunto G_δ . (Puede probarse que $\mathbb{Q}$ *no* es un G_δ , ni $\mathbb{I}$ es un F_σ .)

Conjuntos Compactos

1. Pruebe que si K es compacto entonces $\sup K$ e $\inf K$ existen ambos y son elementos de K .
2. Pruebe la parte del Teorema de Heine-Borel que no se hizo en clase, esto es muestre que si un conjunto $K \subset \mathbb{R}$ es cerrado y acotado entonces es compacto.
3. Pruebe que si K es compacto y F es cerrado entonces $K \cap F$ es compacto.
4. Decida cuales de los siguientes conjuntos son compactos. Para aquellos que no sean compactos muestre que la Definición de conjunto compacto dada en clase no se cumple, esto es, encuentre un ejemplo de una sucesión contenida en el conjunto dado que no posee subsucesiones convergentes a un límite en el conjunto.
 - (a) $\mathbb{Q}$.
 - (b) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.
 - (c) $\mathbb{R}$.
 - (d) $\mathbb{Z} \cap [0, 10]$.
 - (e) $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}$.
 - (f) $\{1, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \dots\}$.
5. Decida si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Si la afirmación es verdadera de una prueba y si es falsa de un contraejemplo.
 - (a) La intersección arbitraria de conjuntos compactos es compacta.
 - (b) Sea $A \subset \mathbb{R}$ arbitrario y sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Entonces la intersección $A \cap K$ es compacta.
 - (c) Si $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset F_4 \supset \dots$ es una sucesión anidada de conjuntos cerrados no vacíos, entonces la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

- (d) Un conjunto finito siempre es compacto.
 - (e) Un conjunto numerable siempre es compacto.
6. Considere cada uno de los conjuntos listados en el Ejercicio 4. Para cada uno de los que no son compactos encuentre un cubrimiento abierto que no posea subcubrimientos finitos.
 7. Digamos que un conjunto es *clompacto* si cada cubrimiento cerrado admite un subcubrimiento finito. Describa los conjuntos clompactos de $\mathbb{R}$.

Conjuntos Perfectos y Conjuntos Conexos

1. Un conjunto $P \subset \mathbb{R}$ es perfecto si es cerrado y no contiene puntos aislados. Si P es perfecto y K es compacto, la intersección $P \cap K$ ¿es siempre compacto? ¿siempre perfecto?
2. ¿Existe un conjunto perfecto conteniendo sólo números racionales?
Ayuda: Ver S. Abbott. Th. 3.4.3.
3. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Pruebe que si existen conjuntos disjuntos abiertos U y V con $A \subset U$ y $B \subset V$ entonces A y B son separados.
4. Pruebe que un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si para todos los conjuntos no vacíos disjuntos A y B tales que $A \cup B = E$, existe siempre una sucesión convergente $x_n \rightarrow x$ con $\{x_n\}$ contenida en uno de los conjuntos A o B y x un elemento del otro.
5. (a) Encuentre un ejemplo de un conjunto desconexo cuya clausura sea conexa.
(b) Si A es conexo, ¿es $\overline{A}$ necesariamente conexo? Si A es perfecto, ¿es $\overline{A}$ necesariamente perfecto?
6. Un conjunto E es *totalmente desconexo* si dados dos puntos $x, y \in E$, existen conjuntos separados A y B con $x \in A$, $y \in B$ y $E = A \cup B$.
(a) Pruebe que $\mathbb{Q}$ es totalmente desconexo.
(b) ¿Es el conjunto de los números irracionales totalmente desconexo?
7. Recordemos la definición del conjunto de Cantor: sea $C_0 = [0, 1]$ y definamos C_1 como el conjunto que resulta cuando el tercio medio abierto es removido, esto es

$$C_1 = C_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left[0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1 \right].$$

Ahora, construimos C_n de modo similar, removiendo los tercios medios abiertos de cada uno de los dos componentes de C_1 :

$$C_2 = \left(\left[0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right] \right) \cup \left(\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1 \right] \right).$$

Continuando el proceso inductivamente para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ obtenemos un conjunto C_n consistente de 2^n intervalos cerrados cada uno de longitud $1/3^n$. Finalmente definimos el conjunto de Cantor C como la intersección

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

- (a) En clase mostramos que el conjunto de Cantor tiene longitud cero, pero que sin embargo es no numerable. Revise los argumentos dados.
- (b) Es inmediato chequear que C es compacto. Verifíquelo.
- (c) Veamos que de hecho C es perfecto. Debemos comprobar que no contiene puntos aislados. Sea $x \in C$ arbitrario, debemos construir una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de C , diferentes de x , que converja a x . Sabemos que C contiene los puntos finales de los intervalos que conforman a C_n . Complete el siguiente argumento que termina la prueba:
 - i. Como $x \in C_1$ muestre que hay un $x_1 \in C \cap C_1$ con $x_1 \neq x$ que cumple $|x - x_1| < 1/3$.
 - ii. Finalice la prueba mostrando que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in C \cap C_n$ diferente de x con $|x - x_n| < 1/3^n$.

Límites de Funciones

1. Use la definición de límite para probar cada afirmación:
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 4) = 8$.
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$.
 - (c) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$.
 - (d) $\lim_{x \rightarrow \pi} [x] = 3$, donde $[x]$ denota el mayor entero menor o igual que x .
2. Decida cuál afirmación es verdadera:
 - (a) Asuma que un $\delta > 0$ particular ha sido escogido como respuesta a un particular ϵ . Entonces cualquier δ más grande es también suficiente.
 - (b) Asuma que un $\delta > 0$ particular ha sido escogido como respuesta a un particular ϵ . Entonces cualquier δ más pequeño, es también suficiente.
3. Use la caracterización de límites de funciones por sucesiones para demostrar que los siguientes límites no existen.
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 0} |x|/x$,

- (b) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ donde g es la función de Dirichlet definida en clase por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

4. Recuerde la definición de la función de Thomae

$$t(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0 \\ 1/n, & \text{si } x = m/n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ es fracción irreducible con } n > 0 \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (a) Construya tres sucesiones diferentes $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ que converjan a 1, sin usar al número 1 como término de la sucesión.
 - (b) Ahora calcule $\lim t(x_n)$, $\lim t(y_n)$ y $\lim t(z_n)$.
 - (c) Haga una conjetura sobre $\lim_{x \rightarrow 1} t(x)$ y use la definición de límite para verificar la conjetura. (*Ayuda:* Dado $\epsilon > 0$ considere el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : t(x) \geq \epsilon\}$. Muestre que todos los puntos en ese conjunto son aislados.)
5. Pruebe el Teorema sobre operaciones algebraicas con límites de funciones directamente (sin apelar a la caracterización de límites por sucesiones).
6. Sea $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ y asuma que f es una función acotada en $A \subset \mathbb{R}$. Sea c un punto límite de A . Pruebe que si $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ entonces también $\lim_{x \rightarrow c} g(x)f(x) = 0$.
7. (a) La afirmación $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2 = \infty$ es intuitivamente razonable. Formule una definición rigurosa, en el estilo de nuestra definición de límite, para la afirmación $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ y úsela para probar rigurosamente nuestra afirmación inicial.
- (b) Construya ahora una definición para la afirmación $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. Pruebe que $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$.
- (c) Formule una definición para $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$. De un ejemplo de tal límite.
8. Asuma que $f(x) \geq g(x)$ para todo x en algún conjunto A en el cual f y g estén definidos. Pruebe que para cada punto límite c de A se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

9. Sean f , g y h funciones que satisfacen $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x en un dominio común A . Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$ en algún punto líte c de A , pruebe que también $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$.

Funciones Continuas

1. Sea $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

- (a) Pruebe que g es continua en $c = 0$.
 - (b) Pruebe que g es continua en un punto $c \neq 0$. *Ayuda:* Use la identidad $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
2. **Teorema:** Dadas $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$, asuma que el rango $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ está contenido en el dominio B y por tanto la composición $g \circ f(x) = g(f(x))$ está bien definida en A . Si f es continua en $c \in A$ y si g es continua en $f(c) \in B$, entonces $g \circ f$ es continua en c .
- (a) Pruebe el Teorema anterior usando la caracterización ϵ - δ de continuidad.
 - (b) De otra prueba de este teorema usando la caracterización secuencial de continuidad.
3. Usando la caracterización ϵ - δ de continuidad pruebe que la función lineal $f(x) = ax + b$ es continua en cada punto de $\mathbb{R}$.
4. (a) Pruebe que cada función f con dominio $\mathbb{Z}$ es necesariamente continua en cada punto de su dominio.
- (b) Pruebe, en general, que si c es un punto aislado de $A \subset \mathbb{R}$, entonces $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en c .
5. Nuestro teorema sobre operaciones algebraicas con funciones continuas establece que $f(x)/g(x)$ es continua en c si tanto f como g lo son, suponiendo además que el cociente está definido. Pruebe que si g es continua en c y $g(c) \neq 0$ existe un intervalo abierto conteniendo a c en el cual $f(x)/g(x)$ está definido.
6. (a) Refiriéndose a los teoremas adecuados, pruebe formalmente que la función de Dirichlet no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$.
- (b) Revise la definición de la función de Thomae y demuestre que esta función no es continua en ningún número racional.
- (c) Pruebe que la función de Thomae es continua en cada número irracional. (Dado $\epsilon > 0$ considere el conjunto de los puntos $\{x \in \mathbb{R} : t(x) \geq \epsilon\}$. Muestre que todos los puntos en ese conjunto son aislados).
7. Asuma que $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}$ y sea $K = \{x : h(x) = 0\}$. Pruebe que K es un conjunto cerrado.
8. (a) Pruebe que si f es una función continua en todo $\mathbb{R}$ e igual a 0 en cada punto racional, entonces debe ser idénticamente 0 en todo $\mathbb{R}$.
- (b) Si f y g son continuas en todo $\mathbb{R}$ y $f(r) = g(r)$ en cada punto racional, ¿deben ser f y g la misma función ?

9. Sea f una función definida en todo $\mathbb{R}$ y asuma que existe una constante c tal que $0 < c < 1$ y

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

- (a) Pruebe que f es continua en $\mathbb{R}$.
- (b) Escoja un punto $y_1 \in \mathbb{R}$ y construya la sucesión

$$y_1, f(y_1), f(f(y_1)), \dots$$

En general $y_{n+1} = f(y_n)$. Pruebe que la sucesión resultante $\{y_n\}$ es de Cauchy. Por tanto existe $y = \lim y_n$.

- (c) Pruebe que y es un punto fijo de f , es decir $f(y) = y$, y que es el único punto fijo de f .
 - (d) Finalmente, pruebe que si x es *cualquier* punto de $\mathbb{R}$, la sucesión $x, f(x), f(f(x)), \dots$ converge al punto y definido en (b).
10. Sea f una función definida en todo $\mathbb{R}$ que cumple la condición aditiva $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
- (a) Pruebe que $f(0) = 0$ y que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
 - (b) Pruebe que si f es continua en 0 , entonces f es continua en cada punto de $\mathbb{R}$.
 - (c) Sea $k = f(1)$. Pruebe que $f(n) = kn$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y entonces pruebe que $f(z) = kz$ para todo $z \in \mathbb{Z}$. Ahora pruebe que $f(r) = kr$ para cada número racional r .
 - (d) Use (b) y (c) para concluir que cualquier función aditiva, continua en 0 debe necesariamente ser una función lineal que pasa por el origen.
11. Para cada una de las siguientes elecciones del conjunto A , construya una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea discontinua en cada punto de A y continua en A^c .
- (a) $A = \mathbb{Z}$
 - (b) $A = \{x : 0 < x < 1\}$
 - (c) $A = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$
 - (d) $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$

12. Sea C el conjunto de Cantor y $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in C, \\ 0, & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

- (a) Pruebe que g no es continua en los puntos de C .
- (b) Pruebe que g es continua en cada punto $c \notin C$.

Funciones Continuas en Conjuntos Compactos

1. (a) Pruebe que $f(x) = x^3$ es continua en todo $\mathbb{R}$.
(b) Muestre que f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.
(c) Pruebe que f es uniformemente continua en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.
2. Pruebe que $f(x) = 1/x^2$ es uniformemente continua en el conjunto $[1, \infty)$ pero no en el conjunto $(0, 1]$.
3. Pruebe que si f es continua en $[a, b]$ con $f(x) > 0$ para todo $a \leq x \leq b$, entonces $1/f$ es acotada en $[a, b]$.
4. De un ejemplo de cada una de las siguientes situaciones o establezca que lo requerido es imposible.
 - (a) Una función continua $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ y una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ tal que $\{f(x_n)\}$ no es una sucesión de Cauchy.
 - (b) Una función continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ tal que $\{f(x_n)\}$ no es una sucesión de Cauchy.
 - (c) Una función continua $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ tal que $\{f(x_n)\}$ no es una sucesión de Cauchy.
 - (d) Una función continua acotada f en $(0, 1)$ que alcanza su máximo valor en este intervalo abierto pero no un valor mínimo.
5. Asuma que g esta definida en el intervalo abierto (a, c) y es conocido que es uniformemente continua en $(a, b]$ y $[b, c)$, donde $a < b < c$. Pruebe que g es uniformemente continua en (a, c) .
6. (a) Asuma que $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en cada punto de su dominio. Pruebe que si existe un $b > 0$ tal que f es uniformemente continua en el conjunto $[b, \infty)$, entonces f es uniformemente continua en $[0, \infty)$.
(b) Pruebe que $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua en $[0, \infty)$.
7. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada *Lipschitz* si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M.$$

para todo $x, y \in A$. Geometricamente hablando, una función f es Lipschitz si hay una cota uniforme sobre las magnitudes de las pendientes de rectas dibujadas a través de cualquier par de puntos en el gráfico de f .

- (a) Pruebe que si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz, entonces es uniformemente continua en A .
- (b) ¿Todas las funciones uniformemente continuas son necesariamente Lipschitz ?

8. Si f es uniformemente continua en un conjunto acotado A , ¿es $f(A)$ necesariamente acotado?
9. **Caracterización topológica de la continuidad.** Sea g definida en todo $\mathbb{R}$. Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$, defina el conjunto

$$g^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in A\}.$$

Pruebe que g es continua si y sólo si $g^{-1}(O)$ es abierto cuando $O \subset \mathbb{R}$ es abierto.

10. **Teorema de la Extensión Continua.**

- (a) Pruebe que una función uniformemente continua preserva sucesiones de Cauchy; esto es, si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua y $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy contenida en A , entonces pruebe que $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy.
- (b) Sea g una función continua en el intervalo abierto (a, b) . Pruebe que g es uniformemente continua en (a, b) si y sólo si es posible definir valores $g(a)$ y $g(b)$ en los puntos extremos tal que la función extendida g sea continua en $[a, b]$. (En la dirección $(\Rightarrow)$, produzca primero candidatos para $g(a)$ y $g(b)$ y entonces pruebe que la g así extendida es continua.

El Teorema de los Valores Intermedios

1. Decida la validez de las siguientes conjeturas,
 - (a) Las funciones continuas envían intervalos abiertos acotados a intervalos abiertos acotados.
 - (b) Las funciones continuas envían intervalos abiertos acotados a conjuntos abiertos.
 - (c) Las funciones continuas envían intervalos cerrados acotados a intervalos cerrados acotados.
2. ¿Existe una función continua en todo $\mathbb{R}$ con rango $f(\mathbb{R})$ igual a $\mathbb{Q}$?
3. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$ con rango también contenido en $[0, 1]$. Pruebe que f debe tener un punto fijo; es decir, pruebe que $f(x) = x$ para al menos un valor de $x \in [0, 1]$.