Matrices y sistemas lineales

Christian Páez Páez
Escuela de Matématica,
Instituto Tecnológico de Costa Rica

4 Sistemas lineales

Hallar el valor de incógnitas con la finalidad que se satisfagan, simultáneamente, determinado número de condiciones será una de las tareas que se presentan con mayor frecuencia en contenidos propios de álgebra lineal; al abordar este tipo de problemas, resulta pertinente el uso de matrices en procesos de solución.

4.1 Definiciones básicas

Se definen conceptos relacionados con sistemas lineales que permitan el desarrollo de métodos matriciales para hallar su conjunto solución.

Definición 4.1 (Sistemas lineales)

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es todo conjunto de m ecuaciones, que restringen valores que pueden asumir las n variables y para el que se desea determinar los valores de dichas incógnitas para los que satisfacen, simultáneamente, todas las ecuaciones; un sistema de ecuaciones es de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son las incógnitas y $b_i, a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Observe que el elemento a_{ij} representa el coeficiente de la incógnita j de la i-ésima ecuación.

Ejemplo 4.1

Un sistema de dos ecuaciones con x_1, x_2 y x_3 como incógnitas es el siguiente: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$

Definición 4.2 (Matriz asociada de algún sistema de ecuaciones lineales)

La matriz asociada de todo sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

es la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2

La matriz asociada del sistema de ecuaciones del ejemplo 4.1 está dada por $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Definición 4.3 (Representación matricial de sistemas de ecuaciones lineales)

Si A es la matriz asociada del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

su representación matricial se define como $Ax = b$, donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.3

Una representación matricial del sistema ecuaciones del ejemplo 4.1 está dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Observe que estas representaciones son equivalentes, ya que

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} (2)(x_1) + (-3)(x_2) + (1)(x_3) \\ \\ (1)(x_1) + (0)(x_2) + (-1)(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Definición 4.4 (Sistema de ecuaciones lineales homogéneo)

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo si es de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Definición 4.5 (Matriz aumentada de algún sistema de ecuaciones lineales)

Si $Ax = b$ es representación matricial de algún sistema de ecuaciones lineales, la matriz aumentada correspondiente con dicho sistema se define como la matriz $(A|b)$

Ejemplo 4.4

Considerando la representación matricial del ejemplo 4.3 para el sistema de ecuaciones lineales del ejemplo 4.1, la matriz aumentada de dicho sistema está dada por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Definición 4.6 (Solución de sistemas de ecuaciones lineales)

Si $Ax = b$ es la representación de algún sistema de m ecuaciones con n incógnitas, una solución de dicho sistema es toda matriz de la forma $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}^t$, donde $k_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$ con $1 \leq i \leq n$, si al sustituir x por $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}^t$ se satisface la igualdad $Ax = b$.

Al conjunto conformado por todas las soluciones del sistema[a] se le llama conjunto solución[b] del sistema y, usualmente, es denotado con la letra S.

[a] Si se considera la representación de la definición 4.1, las soluciones del sistema también se pueden representar como n-tuplas de la forma $(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n)$

[b] Resolver un sistema de ecuaciones será *hallar su conjunto solución*.

Nota: Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es *consistente* si su conjunto solución S no es vacío; en caso contrario, se dice que el sistema de ecuaciones es *inconsistente*.

Ejemplo 4.5

Una solución del sistema de ecuaciones del ejemplo 4.1 está dada por $\begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}^t$ ya que

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Veamos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (2)(2) + (-3)\left(\frac{4}{3}\right) + (1)(2) \\ (1)(2) + (0)\left(\frac{4}{3}\right) + (-1)(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 - 4 + 2 \\ 2 + 0 - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6

1. Considere el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-y=3 \end{cases}$

   Despejando x en la segunda ecuación y sustituyendo esta variable en la primera ecuación se obtiene que $y=-2$. Con base en este resultado se obtiene que $x=1$; de esta manera, para el sistema $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ se tiene que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es una solución (la única).

2. Considere el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ y-2z=3 \end{cases}$

   Una representación matricial para este sistema de ecuaciones lineales está dada por $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Este sistema de ecuaciones lineales posee muchas soluciones; tres de estas están dadas por $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Considere el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} x+y=-2 \\ x+y=3 \end{cases}$

   Este sistema de ecuaciones es inconsistente, ya que no hay alguna pareja de números reales que sumados den como resultado dos números distintos.

Los tres ejemplos anteriores dan evidencia de que todo sistema de ecuaciones lineales puede tener una única solución, tener muchas soluciones o, simplemente, no poseer solución alguna (ser inconsistente).
Para el caso de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos, se pueden presentar únicamente dos posibilidades: que posean solución única (la solución trivial) o que posean infinito número de soluciones.

Ejercicio 4.1

Para cada uno de los sistemas de ecuaciones que se enuncian, determine su representación matricial $Ax=b$, considerando la matriz x que se indica, y verifique que la matriz u dada es una solución de la ecuación $Ax=b$

1. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1-3x_2+x_3=11 \end{cases}$ $\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad u=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4.1 - continuación

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix}$

Definición 4.7 (Sistemas de ecuaciones equivalentes)

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si poseen el mismo conjunto solución.

Teorema 4.1

Sean $Ax = b$ la representación matricial de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y C una matriz invertible, tal que $C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. El sistema $(CA)x = Cb$ es equivalente con el sistema $Ax = b$.

Demostración

Para demostrar que los sistemas $(CA)x = Cb$ y $Ax = b$ son equivalentes, se debe probar que ambos sistemas de ecuaciones lineales poseen el mismo conjunto solución.
Si S es el conjunto solución del sistema de ecuaciones $Ax = b$ y S' es el conjunto solución del sistema de ecuaciones $(CA)x = Cb$, se demostrará que $S = S'$; específicamente, se demostrará que $S \subseteq S'$ y que $S' \subseteq S$
Por una parte, si $u \in S$ es claro que $Au = b$; luego,

$$\begin{aligned} Au = b \quad &\Rightarrow \quad C(Au) = Cb \\ &\Rightarrow \quad (CA)u = Cb \end{aligned}$$

Así, $u \in S'$; de esta manera, $S \subseteq S'$.
Por otra parte, si $u \in S'$ es claro que $(CA)u = Cb$; luego,

$$\begin{aligned} (CA)u = Cb \quad &\Rightarrow \quad C^{-1}((CA)u) = C^{-1}(Cb) \\ &\Rightarrow \quad C^{-1}(C(Au)) = C^{-1}(Cb) \\ &\Rightarrow \quad \left(C^{-1}C\right)(Au) = \left(C^{-1}C\right)b \\ &\Rightarrow \quad I_m(Au) = I_m b \\ &\Rightarrow \quad Au = b \end{aligned}$$

Así, $u \in S$; de esta manera, $S' \subseteq S$.
Como $S \subseteq S'$ y $S' \subseteq S$, se concluye que $S = S'$; es decir, los sistemas de ecuaciones lineales $(CA)x = Cb$ y $Ax = b$ son equivalentes (poseen el mismo conjunto solución).

Corolario 4.1 *Sea $Ax = b$ la representación matricial de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si $\left(A'|b'\right)$ se obtiene de $(A|b)$ después de aplicarle un finito número de operaciones elementales sobre sus filas, entonces el sistema representado por $A'x = b'$ es equivalente con el sistema $Ax = b$.*

Ejercicio 4.2

Demuestre el corolario 4.1 del teorema 4.1.

4.2 Método de Gauss–Jordan

A continuación se describe una técnica basada en el corolario 4.1 que permite resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales; dicha técnica se podría enunciar, en términos generales, de la manera siguiente:

1. Representar el sistema de ecuaciones en la forma matricial $Ax = b$.

2. A partir de la matriz aumentada $(A|b)$, obtener la matriz $\left(A'|b'\right)$ en la que A' es la matriz escalonada reducida por filas equivalente con A.

3. Resolver el sistema de ecuaciones representado por $A'x = b'$.

4. Enunciar el conjunto solución del sistema de ecuaciones original (dado que los sistemas representados por $Ax = b$ y $A'x = b'$ son equivalentes, este conjunto es el mismo conjunto solución encontrado en el paso anterior).

Ejemplo 4.7

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $\begin{cases} -3x + y - 5z - w = 4 \\ x + 2y + 11z = 2 \\ -2x + 2y + 2z = -4 \end{cases}$

Una representación matricial para dicho sistema de ecuaciones lineales está dada por

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 11 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.7 - continuación

Considerando la matriz aumentada del sistema $\left(\begin{array}{rrrr|r} -3 & 1 & -5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right)$ (basada en la representación matricial anterior) se tiene que:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -3 & 1 & -5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right) \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -5 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{3F_1+F_2 \\ 2F_1+F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 28 & -1 & 10 \\ 0 & 6 & 24 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{-F_3+F_2}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 11 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 6 & 24 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-2F_2+F_1 \\ -6F_2+F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 2 & -18 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -60 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{6}F_3}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 2 & -18 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-2F_3+F_1 \\ F_3+F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right)$$

De esta manera, $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 11 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ tiene la misma solución que el sistema de ecuaciones representado por $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} x+3z=2 \\ y+4z=0 \\ w=-10 \end{cases}$ se tiene que $\begin{cases} x=2-3z \\ y=-4z \\ w=-10 \end{cases}$ con $z \in \mathbb{R}$.

O bien, tomando $z=t$ se podría escribir $\begin{cases} x=2-3t \\ y=-4t \\ w=-10 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

Así, el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -3x+y-5z-w=4 \\ x+2y+11z=2 \\ -2x+2y+2z=-4 \end{cases}$ está dado por

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2-3t \\ -4t \\ t \\ -10 \end{pmatrix} \Big/ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejemplo 4.7 - continuación

Observe que dicho sistema de ecuaciones lineales posee infinito número de soluciones.
El conjunto S recibe el nombre *solución general*; si se asignan valores arbitrarios al parámetro t se obtiene lo que se denominan *soluciones particulares*; por ejemplo, si $t = 0$, entonces $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema de ecuaciones en cuestión; si $t = 1$, entonces $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix}$ es otra solución particular de dicho sistema de ecuaciones; si $t = -8$, entonces $\begin{pmatrix} 26 \\ 32 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}$ es, también, solución particular del sistema de ecuaciones lineales en estudio.

El procedimiento seguido para la obtención de la solución del sistema de ecuaciones del ejemplo 4.7 es conocido como *método de Gauss–Jordan*, método que se considera en el ejemplo 4.8 para la resolución del sistema de ecuaciones que se enuncia.

Ejemplo 4.8

Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $\begin{cases} 5x - 15y + 4z = 7 \\ 2x - 6y + 4z = 12 \\ 3x - 9y + 4z = 11 \end{cases}$

Solución

Una representación matricial para dicho sistema de ecuaciones lineales está dada por $\begin{pmatrix} 5 & -15 & 4 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}$

Considerando la matriz aumentada del sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -15 & 4 & 7 \\ 2 & -6 & 4 & 12 \\ 3 & -9 & 4 & 11 \end{array}\right)$ (basada en la representación matricial anterior) se tiene que:

Ejemplo 4.8 - continuación

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -15 & 4 & 7 \\ 2 & -6 & 4 & 12 \\ 3 & -9 & 4 & 11 \end{array}\right) \underset{\sim}{-2F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & -17 \\ 2 & -6 & 4 & 12 \\ 3 & -9 & 4 & 11 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{-2F_1+F_2 \\ -3F_1+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 12 & 46 \\ 0 & 0 & 16 & 62 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\frac{1}{12}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{23}{6} \\ 0 & 0 & 16 & 62 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\substack{4F_2+F_1 \\ -16F_2+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -\dfrac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{23}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{2}{3} \end{array}\right)$$

De esta manera, $\begin{pmatrix} 5 & -15 & 4 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}$ tiene la misma solución que el sistema de ecuaciones representado por $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{23}{6} \\ \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$

Dado que el sistema $\begin{cases} x - 3y = -\dfrac{5}{3} \\ z = \dfrac{23}{6} \\ 0 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ es inconsistente, ya que $0 = \dfrac{2}{3}$ es una igualdad que nunca se cumplirá (siempre falsa), se tiene que el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 5x - 15y + 4z = 7 \\ 2x - 6y + 4z = 12 \\ 3x - 9y + 4z = 11 \end{cases}$ está dado por $S = \varnothing$.

Ejercicio 4.3

Utilizando el método de Gauss–Jordan, resuelva los sistemas de ecuaciones lineales siguientes:

1. $$\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+8z=4 \\ 3x+2y+17z=1 \end{cases}$$ Pista: dependencia de un parámetro.

2. $$\begin{cases} 4x+y-z+w=3 \\ x+y+w=5 \\ 3x-z=-2 \end{cases}$$ Pista: dependencia de dos parámetro.

3. $$\begin{cases} 2x-y+z=2 \\ x+2y-z=3 \\ 3x+y+2z=-1 \end{cases}$$ Pista: solución única.

4. $$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+y-2z=4 \\ x-5z=15 \end{cases}$$ Pista: sistema inconsistente.

5. $$\begin{cases} 4x+y-z+w=3 \\ x+y+w=5 \\ -2x+z-w=4 \end{cases}$$ Pista: dependencia de un parámetro.

Ejercicio 4.4

Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $\begin{cases} 2x+3y+z+2w=3 \\ 4x+6y+3z+4w=5 \\ 6x+9y+5z+6w=7 \\ 8x+12y+7z+\alpha w=9 \end{cases}$

Con base en el método de Gauss–Jordan, determine el(los) valor(es) para el parámetro α, en caso de existir, de manera que dicho sistema de ecuaciones lineales:

1. Posea solución única.
2. Sea inconsistente.
3. Posea infinito número de soluciones que dependan de un parámetro.
4. Posea infinito número de soluciones que dependan de dos parámetros.

Pista: con $\alpha \neq 8$ dependencia de un parámetro; con $\alpha = 8$ dependencia de dos parámetros.