Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes[1]

Josep Gascón[2]

[Trabajo en proceso de revisión por la revista RELIME]

RESUMEN

En este trabajo pretendemos poner de manifiesto hasta qué punto el *modelo epistemológico de las matemáticas*, implícito pero dominante en una institución escolar, puede influir sobre las características del *modelo docente*, esto es, sobre la manera sistemática y compartida de organizar y gestionar el proceso de enseñanza de las matemáticas en dicha institución. Se postula que la práctica profesional del profesor de matemáticas en el aula sólo se podrá cambiar de una manera persistente si, correlativamente, se modifica el *modelo epistemológico ingenuo* que, como dice Brousseau (1987), está en la base de los *modelos docentes habituales*.

ABSTRACT

In this work we pretend to show up to which point the *mathematical epistemologic model*, implicit though dominant in scholar institution, has an influence on the *docent model* characteristics. That is, on the systematic and shared manner of organizing and managing of mathematics teaching process in such institution. The article sets demands for the need of a change in the *ingenious epistemologic model*, as said by Brousseau (1987), which are at the root of *usual docent models*, to achieve a persistent change in mathematics professors' professional practise in the classroom.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous prétendons mettre en évidence jusqu'à quel point le *modèle épistémologique des mathématiques*, implicite mais dominant dans une certaine institution scolaire, peut influer sur les caractéristiques du *modèle enseignant*, c'est-à-dire sur la manière systématique et partagée d'organiser et gérer les processus d'enseignement des mathématiques dans cette institution. Nous postulons que la pratique professionnelle de l'enseignant de mathématiques dans la classe ne peut être changée d'une manière durable que si, corrélativement, on change le *modèle épistémologique* "*naïf* " qui est, comme le dit Brousseau (1987), à la base des *modèles enseignants habituels*.

RESUMO

Neste trabalho, pretendemos mostrar até que ponto o *modelo epistemológico das matemáticas*, implícito apesar de dominante numa dada instituição escolar, pode influenciar as características do *modelo docente*, isto é, a maneira sistemática e partilhada de organizar e de gerir o processo de ensino da matemática nessa instituição. Postulamos assim que a prática professional do professor de matemática na aula só se poderá mudar duma maneira duradoira se se modificar, em correlação, o *modelo epistemológico* "*ingénuo*" que, como diz Brousseau (1987) está na base dos *modelos docentes habituais*.

---

[1] Las primeras descripciones de los *modelos docentes* (llamados inicialmente "*paradigmas*") fueron publicadas en Gascón (1992 y 1994). Su dependencia respecto del modelo epistemológico dominante en la institución escolar fue presentada por primera vez en el marco del Seminario de Didáctica de las Matemáticas "*Anàlisi didàctica de l'activitat matemàtica: confluència entre el problema epistemològic i el problema didàctic*" correspondiente al curso académico 1993/1994. Dicho Seminario formaba parte del Programa de Doctorado de Matemáticas de la Universitat Autònoma de Barcelona.

[2] Departamento de Matemáticas, Universitat Autònoma de Barcelona, Edificio C, 08193 Bellaterra (Barcelona) Spain; Fax: 34 93 581 27 90; E-Mail: gascon@mat.uab.es

Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes

Para empezar a describir y explicar la práctica profesional del profesor de matemáticas en el aula, podemos situarnos en diferentes perspectivas teóricas[3]. Por nuestra parte abordaremos esta problemática desde la perspectiva que proporciona el Programa Epistemólogico de Investigación en didáctica de las matemáticas[4] y, más en concreto, desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)[5]. Aceptamos de antemano que nuestra perspectiva, como cualquier otra perspectiva particular, será forzosamente sesgada y nos permitirá describir y explicar únicamente determinados aspectos de la práctica profesional del profesor, en detrimento de otros.

Al situarnos en el Programa Epistemológico necesitamos proponer *modelos epistemológicos explícitos de los diferentes ámbitos de la actividad matemática* que permitan "construir" los fenómenos y los problemas didácticos y, además, sirvan para dar cuenta de los aspectos cognitivo e instruccional. Esto significa que para cada proceso de estudio particular, relativo a una organización matemática O^M concreta, que se desarrolla en el seno de una institución I determinada, la descripción de la práctica profesional del profesor de matemáticas debería hacerse partiendo del *modelo epistemológico específico* de O^M, dominante en I. Hemos de reconocer que estamos lejos de poder describir con tanto detalle la práctica docente del profesor de matemáticas en el aula[6]; éste es un objetivo muy ambicioso al que no podemos aspirar todavía debido, entre otras razones, al insuficiente desarrollo de la TAD y, en particular, al carácter todavía excesivamente descriptivo de la *teoría de los momentos didácticos* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

En este trabajo, forzosamente preliminar y mucho más humilde, queremos únicamente empezar a estudiar cómo se corresponden muchas decisiones y actuaciones docentes, y hasta ciertos *modelos docentes* relativamente estructurados, con los *modelos epistemológicos generales* que han existido a lo largo de la historia de las matemáticas y que, en cierta forma, perviven entremezclados en las diferentes instituciones didácticas.

Para ello distinguiremos, en primera instancia, entre dos grandes grupos de *teorías epistemológicas generales* o patrones de la organización matemática considerada como un todo: *teorías euclídeas y teorías cuasi-empíricas*, según la caracterización realizada por Lakatos (1978a). Para completar este esquema añadiremos un tercer grupo de teorías epistemológicas, las *teorías constructivistas*. Siguiendo este criterio, propondremos una *reconstrucción racional* (Lakatos, 1971) de la *evolución del problema epistemológico* y, paralelamente, describiremos los rasgos fundamentales de algunos modelos docentes asociados a cada uno de los modelos epistemológicos que irán apareciendo. Obtendremos de esta forma, al lado de la evolución del problema epistemológico, una descripción paralela de la evolución racional del *problema docente*. En la última parte de este trabajo mostraremos la necesidad de proponer nuevos modelos epistemológicos de las matemáticas capaces de servir de referencia a modelos docentes menos reduccionistas.

---

[3] Así, por ejemplo, Llinares (1999, p. 109) propone "buscar una complementariedad entre puntos de vista cognitivos sobre el conocimiento del profesor y puntos de vista socioculturales relativos a la práctica del profesor como una manera de dar cuenta de ciertos aspectos de lo que sucede en las aulas de matemáticas".

[4] Asumimos la reconstrucción de la evolución de la didáctica de las matemáticas que contempla dos Programas de Investigación (Lakatos, 1978b): el Cognitivo y el Epistemológico (Gascón, 1998 y 1999a).

[5] En Chevallard (1997 y 1999); Chevallard, Bosch y Gascón (1997); Gascón (1998 y 1999a) y Bosch y Chevallard (1999), se presentan los últimos desarrollos de la TAD.

[6] El trabajo que estamos desarrollando sobre el *álgebra escolar* podría ser considerado como una aportación en esta dirección (Bolea, Bosch y Gascón, 1998).

1. El euclidianismo como modelo general del saber matemático

Según Lakatos, en *epistemología de las matemáticas* la controversia entre *dogmáticos* y *escépticos* se plantea en términos de la posibilidad o imposibilidad de establecer de modo conclusivo el *significado* y la *verdad*. Esta controversia tiene profundas raíces filosóficas y es, en realidad, un capítulo especial del gran esfuerzo racionalista por superar el escepticismo y demostrar la posibilidad de conocer.

Los argumentos escépticos son muy potentes: si intentamos fijar el significado de un término definiéndolo por medio de otros términos nos vemos abocados a un *regreso infinito*. Si intentamos resolver esta dificultad utilizando "*términos* (*primitivos*) perfectamente bien conocidos" entonces el abismo del regreso infinito se abre de nuevo porque ¿son "perfectamente bien conocidos" los términos que constituyen la expresión "términos perfectamente bien conocidos"? Siendo este argumento aparentemente irrefutable, no es el único que esgrimen los escépticos. Aún aceptando la posibilidad de tener conceptos exactos, ¿cómo podemos probar que una proposición es *verdadera*? ¿cómo evitar el *regreso infinito en las pruebas*? La posición escéptica parece demostrar de modo concluyente que el *significado* y la *verdad* de una proposición sólo pueden transferirse no establecerse y, por lo tanto, *no podemos conocer*.

Así pues el ***problema epistemológico*** se plantea inicialmente en estos términos: ¿Cómo detener el regreso infinito en las definiciones y en las pruebas y llevar a cabo una justificación lógica de las teorías matemáticas? Esta formulación del problema la simbolizaremos mediante las siglas **PE^1** porque la consideraremos como el punto de partida de la reconstrucción racional que, siguiendo a Lakatos, expondremos a continuación. La respuesta a esta pregunta es el objetivo de lo que habitualmente se denomina "*fundamentos de las matemáticas*".

PE^1 (Euclidianismo): *¿Cómo detener el regreso infinito y llevar a cabo una justificación lógica de las teorías matemáticas?*

El *Programa Euclídeo* fue la primera gran empresa racionalista que intentó a lo largo de más de dos mil años detener ese doble regreso infinito y dar una base firme al conocimiento. Para ello el *Programa Euclídeo* propone que todo conocimiento matemático puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (*axiomas*) que constan de términos perfectamente conocidos (*términos primitivos*). La verdad de los axiomas fluye entonces desde los axiomas hasta los teoremas por los canales deductivos de transmisión de verdad (*pruebas*). Se trata en resumen de un *Programa de Trivialización del Conocimiento Matemático*; pretende detener los dos descensos infinitos de la duda escéptica mediante el significado y el valor de verdad ubicados en los axiomas e iluminados por la luz natural de la razón en forma de *intuición aritmética*, *geométrica* o *lógica* (Lakatos, 1978a).

Pero la crítica escéptica es persistente e incansable: ¿Son perfectamente conocidos los términos primitivos? ¿Son realmente verdaderos los axiomas? ¿Son nuestros canales deductivos absolutamente seguros?

La historia del euclideanismo es la historia de las sucesivas batallas defensivas para proteger el núcleo firme del programa: el descubrimiento de los irracionales hizo que los griegos abandonaran la presunta certeza absoluta de la *intuición aritmética* y la cambiaran por la *intuición geométrica*; para ello elaboraron la teoría de las proporciones. El siglo XIX, con la clarificación del concepto de número irracional se restableció la *intuición aritmética* como intuición fundamental "absolutamente segura". Sucesivamente diferentes tipos de intuiciones se disputaron este papel: la *intuición conjuntista* de Cantor, la *intuición lógica* de Russell, la *intuición global* de Hilbert y la *intuición constructivista* de Brouwer.

Desde el punto de vista de Lakatos (1978a) los tres modelos clásicos de la epistemología de las matemáticas: el *logicismo* de Russell (1903 y 1919), el *formalismo* de Hilbert (1923) y el *intuicionismo* de Brower (1952)[7] pueden ser considerados como diferentes *teorías euclídeas* del saber matemático; las tres pretenden detener el regreso infinito mediante diferentes formas de trivialización del conocimiento matemático: el logicismo pretende la *trivialización lógica* de las matemáticas, el formalismo pretende construir una *meta-teoría trivial* y el intuicionismo, por fin, pretende recortar el conocimiento matemático hasta alcanzar su *médula trivialmente segura*.

Pero la pretendida *trivialización lógica* de las matemáticas degeneró en un sistema sofisticado que incluía axiomas no trivialmente verdaderos como el de *infinitud* y el de *elección*, así como la *teoría ramificada de los tipos lógicos* que lejos de ser trivial es un verdadero laberinto conceptual. Además, términos primitivos como "clase" y "relación de pertenencia" resultaron ser oscuros y ambiguos, muy lejos de ser "perfectamente conocidos". Incluso se hizo necesaria una prueba de consistencia para asegurar que los "axiomas trivialmente verdaderos" no se contradijesen entre sí, en flagrante contradicción con el espíritu del Programa Euclídeo. El fracaso de la trivialización lógica del conocimiento nos lleva, pues, al *formalismo*.

La teoría de Hilbert se basaba en la idea de una axiomática formal en el sentido de un *sistema formal consistente* (no contradictorio), en el que todas las verdades aritméticas puedan ser deducidas formalmente y tal que exista una meta-teoría (perteneciente a una nueva rama de la matemática: la *meta-matemática*) capaz de probar la *consistencia* y *completitud* de los sistemas formales. La meta-matemática debería estar constituida por teorías con axiomas trivialmente verdaderos, términos perfectamente bien conocidos e inferencias trivialmente seguras. Según Hilbert, la verdad aritmética -y debido a la aritmetización de la matemática, todo tipo de verdades matemáticas- descansaría así sobre una firme intuición "global" y, en consecuencia, sobre la "verdad absoluta".

Los trabajos de Gödel (1931) significaron el *derrumbe del programa hilbertiano* de trivialización en el meta-nivel. De hecho si nos negamos a extender la intuición infinitamente, hemos de admitir que la meta-matemática no detiene el regreso infinito en las pruebas puesto que éste reaparece ahora en una jerarquía infinita de *meta-meta-meta-...-teorías* cada vez más ricas y complejas (menos "triviales").

En un intento desesperado por detener el regreso infinito, Kleene (1952) se ve obligado a considerar que la prueba última de si un método es admisible en meta-matemática es que sea "*intuitivamente convincente*", pero entonces –argumenta Lakatos- ¿porqué no detenerse en un paso anterior y decir que para que un método sea admisible en aritmética ha de ser intuitivamente convincente? Podríamos evitar así la meta-matemática. De hecho ésta es una contradicción en la que caen los tres modelos del euclideanismo, no sólo el formalista: aunque los tres tienen su origen en la crítica de la "intuición ingenua", nos piden que aceptemos su intuición como prueba última y definitiva, cayendo de esta forma en el mismo subjetivismo que empezaron atacando.

¿Significa esto que los escépticos han ganado la batalla y han demostrado la imposibilidad del conocimiento matemático? ¿No será que el ***problema epistemológico*** está mal planteado? ¿Porqué tenemos que aceptar el "dilema euclidiano": o trivialidad y certeza o imposibilidad del conocimiento matemático? Quizá esta necesidad de trivialidad y de certeza deba ser considerada como una enfermedad infantil del conocimiento y no como su característica definitoria. ¿Porqué empeñarse en pruebas últimas y definitivas? ¿Porqué no admitir honestamente la *falibilidad matemática* e intentar defender la dignidad del *conocimiento falible* contra el escepticismo? (Lakatos 1978a, p.41).

[7] Para una introducción al intuicionismo, ver Heyting (1956).

2. Trivialización del proceso de enseñanza de las matemáticas

Antes de contestar estas preguntas, detengámonos un momento en la narración de la evolución racional del *problema epistemológico* para analizar las consecuencias del *euclideanismo* sobre algunas formas de interpretar el saber matemático dentro del sistema de enseñanza y sobre los *modelos docentes* que crecen y se desarrollan a la luz de los correspondientes *modelos epistemológicos implícitos*. Cambiamos por tanto de escenario y nos sumergimos de lleno en el ámbito tradicionalmente reservado a la didáctica de las matemáticas: el *sistema de enseñanza de las matemáticas*.

Hemos visto que una de las características principales de los *modelos epistemológicos euclidianos* consiste en que pretenden trivializar el conocimiento matemático. Veremos que cuando esta manera de interpretar el saber matemático penetra en el Sistema de Enseñanza de las Matemáticas puede dar origen a dos tipos de *modelos docentes* (o formas sistemáticas y compartidas de gestionar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas) aparentemente muy diferentes entre sí, pero que tienen en común la *trivialización del proceso de enseñanza*. Se trata del ***teoricismo*** y del ***tecnicismo*** que son dos formas de materializar los que podríamos denominar "modelos docentes clásicos", muy simplistas y fuertemente arraigados en la cultura común, según los cuales *el proceso de enseñanza es un proceso mecánico y trivial, totalmente controlable por el profesor*.

2.1. Enseñar matemáticas es "mostrar" teorías cristalizadas: el teoricismo

Denominaremos ***modelos docentes teoricistas*** o, simplemente ***teoricismo***, a los que están basados en una concepción del saber matemático que pone el acento en los conocimientos acabados y cristalizados en "teorías", al tiempo que se pone entre paréntesis la *actividad* matemática y sólo toma en consideración el fruto final de esta actividad. Se trata de modelos docentes que se basan en uno de los principales rasgos del *Euclideanismo*, el que pretende reducir todo conocimiento matemático a lo que puede deducirse de un conjunto finito de proposiciones trivialmente verdaderas (*axiomas*) y que pueden enunciarse utilizando únicamente términos perfectamente conocidos (*términos primitivos*).

Cuando en un sistema de enseñanza predomina el teoricismo se da una gran preeminencia al momento en el que los alumnos se encuentran por primera vez con los objetos matemáticos que le presenta el profesor. Se produce una fuerte concentración de los esfuerzos didácticos en ese momento del proceso de enseñanza -que llamamos "*momento del primer encuentro*" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997)- y que tradicionalmente se ha identificado con el momento en que el profesor presenta a los alumnos un cuerpo de conocimientos cristalizados en una teoría más o menos acabada. La razón es sencilla: para el teoricismo que identifica "*enseñar y aprender matemáticas*" con "*enseñar y aprender teorías acabadas*", el proceso didáctico empieza, y prácticamente acaba, en el momento en que el profesor "enseña" (en el sentido de "muestra") estas teorías a los alumnos (Gascón, 1994).

Tenemos, en resumen, el siguiente silogismo trivializador: dado que las teorías matemáticas son *triviales* (en el sentido de que se deducen por canales deductivos a partir de un conjunto de axiomas trivialmente verdaderos en los que sólo figuran términos perfectamente conocidos) y dado que enseñar matemáticas es *mostrar estas teorías,* resulta que *la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debería ser, también, un proceso trivial*. Esta conclusión choca frontalmente con todos los datos empíricos disponibles y es especialmente paradójica precisamente en las instituciones en las que predomina el teoricismo. En estas instituciones es muy difícil dar razón de las enormes

dificultades que tienen los estudiantes para *utilizar adecuadamente un teorema*, *aplicar una técnica matemática* o *comprobar si un objeto matemático cumple o no cumple las cláusulas de una definición*.
En cuanto a la resolución de problemas, hay que decir que en el teoricismo es considerada como una *actividad secundaria* dentro del proceso didáctico global y, en todo caso, como *auxiliar en el aprendizaje de las teorías*.
Una característica importante del teoricismo radica en el supuesto implícito de que los problemas son relativamente ajenos a las teorías matemáticas o, en todo caso, no juegan ningún papel importante en su constitución ni en su estructura. Los problemas se pueden utilizar para *aplicar*, *ejemplificar* o *consolidar* los conceptos teóricos e, incluso, para *motivarlos*, *introducirlos* o *justificarlos* pero, en cualquier caso, estas funciones de los problemas son consideradas como meramente *pedagógicas* en el sentido negativo de "no constitutivas del conocimiento matemático" propiamente dicho. En los casos extremos puede llegarse a concebir la ejercitación en la resolución de problemas como una concesión hecha con la única finalidad de que el alumno adquiera un cuerpo de conocimientos que forman una teoría predeterminada de antemano. En coherencia con todo ello, es claro que el proceso de constitución de esta teoría no sólo no se cuestiona, sino que puede ignorarse completamente.
En particular, el teoricismo ignora las tareas dirigidas a elaborar estrategias de resolución de problemas complejos y, por tanto, cuando aparece un problema que no puede resolverse mediante la aplicación inmediata de un teorema, entonces *el teoricismo trivializa los problemas mediante la descomposición en ejercicios rutinarios* lo que comporta, no sólo la eliminación de la dificultad principal del problema sino, incluso, la desaparición del propio problema (Gascón,1989, p. 3 y ss.).
Esta manera de trivializar la actividad de resolución de problemas, propia del teoricismo, proviene del dogma epistemológico euclidiano según el cual tanto los problemas (o "ejercicios") que se utilizan como los conocimientos que el alumno ha de emplear, están absolutamente determinados a priori por la teoría a la que sirven. Se supone que en dicha "teoría" están contenidos esencialmente todos los conocimientos que el estudiante necesita. En el teoricismo se considera que, a lo sumo, resta la dificultad de elegir cuál es el teorema adecuado o la definición pertinente en cada caso, pero una vez se ha dado con ellos la actividad matemática que se ha de realizar es prácticamente nula. La característica esencial del teoricismo la situaremos, por tanto, en que ignora absolutamente los procesos de la actividad matemática como tal y, en consecuencia, no concede ninguna importancia -epistemológica ni didáctica- a la *génesis y el desarrollo de los conocimientos matemáticos*.
En la medida en que el teoricismo predomina en una institución, se originan fenómenos que no pueden ser explicados desde dentro del sistema y entre los que hay que destacar, como ya hemos dicho, aquellos que están relacionados con el presunto carácter trivial del conocimiento matemático y de su aprendizaje[8]. Se ha dado el caso de profesores que por *coherencia teoricista* han sentido la necesidad de llegar a trivializar efectivamente la matemática enseñada. Esta coherencia les ha empujado, por ejemplo, a explicitar el teorema de la función inversa mediante una farragosa sucesión de símbolos lógicos que, además de ocupar una extensión desmesurada, resultó mucho menos "trivial" que las versiones usuales.

[8] Postulamos que este prejuicio, característico del euclideanismo, que contra toda evidencia presupone que el proceso de enseñanza de las matemáticas es un proceso mecánico y trivial completamente controlable por el profesor, dificulta que la comunidad matemática nuclear (constituida por los productores del conocimiento matemático) pueda tomar seriamente en consideración los problemas didáctico-matemáticos como problemas científicos no triviales.

2.2. Entrenar en el uso de algoritmos: el tecnicismo

Dado que el teoricismo identifica "aplicar una técnica matemática" con "realizar una actividad absolutamente predeterminada por la teoría", resulta que en las instituciones en las que impera este modelo docente es muy difícil imaginar la posibilidad de que una técnica se desarrolle en manos del alumno, a espaldas de la teoría. Así se tiende a menospreciar el dominio más o menos robusto que pueda tener el estudiante de las técnicas matemáticas, ignorándose las posibles funciones de esta robustez en el proceso de aprendizaje. Este punto de vista puede provocar una catástrofe didáctica que es especialmente visible cuando afecta a los niveles más elementales de la enseñanza de las matemáticas. En la enseñanza primaria, en efecto, el menosprecio del dominio de las técnicas puede provocar un "vacío" del contenido de la enseñanza hasta el punto de que al final del proceso didáctico los alumnos no puedan mostrar ningún aprendizaje efectivo, ni siquiera el dominio de las operaciones aritméticas. En este punto parece natural el grito defensivo de ¡*volver a lo básico*! para no perderlo todo. Surgen así modelos docentes que enfatizan los aspectos más rudimentarios del *momento del trabajo de la técnica* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Los denominaremos ***modelos docentes tecnicistas*** o, más brevemente, ***tecnicismo***.

Las tendencias tecnicistas aumentan después de épocas fuertemente teoricistas (como la que marcó el apogeo de la "*matemática moderna*" en los años sesenta y setenta) y, en general, en periodos de fuerte contestación social al aumento del fracaso escolar en matemáticas (por ejemplo en épocas de extensión brusca de un cierto tramo de la enseñanza obligatoria). Hay que contemplar dichas tendencias y el hecho de que muchos profesores se vean abocados al tecnicismo como lo que son, como un *fenómeno didáctico* esencialmente independiente de la voluntad y de la formación de los profesores. Como dice Brousseau, cuando 200.000 profesores se comportan de una misma manera que puede ser considerada desde cierto punto de vista como "simplista", no parece pertinente intentar explicar lo que pasa diciendo que hay 200.000 "tontos"; es más prudente científicamente postular la existencia de un fenómeno, que no depende de las características personales de los profesores, y que hemos de intentar explicar.

La defensa que hace el tecnicismo del dominio de las técnicas es ingenua y está poco fundamentada; de hecho, el tecnicismo corre el peligro de caer en una *apología del dominio de las técnicas* -especialmente de las *algorítmicas* que son las más visibles- hasta el punto de tomarlas como objetivo último del proceso didáctico. Este extremismo tecnicista conduce directamente a un "operacionismo" estéril (Gascón, 1994).

El modelo docente tecnicista identifica implícitamente "enseñar y aprender matemáticas" con "*enseñar y aprender técnicas* (*algorítmicas*)" por lo que constituye otra forma extrema de *trivializar el proceso de enseñanza de las matemáticas*. Dado el énfasis tan exclusivo que pone en las técnicas "simples", el tecnicismo tiende a olvidar los "auténticos" problemas que son aquellos cuya dificultad principal consiste en escoger las técnicas adecuadas para construir una "estrategia de resolución". En este sentido puede decirse que *el tecnicismo comparte con el teoricismo la trivialización de la actividad de resolución de problemas*.

El tecnicismo parte de ciertas técnicas algorítmicas y plantea solamente aquellos ejercicios que sirven como "entrenamiento" para llegar a dominarlas; de esta forma excluye de su repertorio de técnicas las estrategias de resolución complejas y no algorítmicas. La *trivialización de los problemas* no proviene aquí de una descomposición abusiva del proceso de resolución ni de adjudicar a la actividad de resolución de problemas un papel auxiliar sino, simplemente, de una fijación tan fuerte en las técnicas elementales que impide tomar en consideración problemas matemáticos no rutinarios.

Los modelos docentes teoricistas y tecnicistas comparten una *concepción psicologista ingenua* del proceso didáctico que tiene en el *conductismo* su referente más claro. En ambos casos se concibe el *proceso de enseñanza* como un *proceso mecánico y trivial totalmente controlable por el profesor*: el teoricismo tiende a concebir al alumno como una "*caja vacía*" que debe llenarse a lo largo de un proceso gradual que parte de los conceptos lógicamente más simples hasta llegar, paso a paso, a los sistemas conceptuales más complejos; el tecnicismo, por su parte, considera al alumno como un "*autómata*" que mejora el dominio de las técnicas mediante la simple repetición que proporciona un entrenamiento concienzudo. Por todas estas razones llamaremos "*clásicos*" a ambos modelos docentes en contraposición a los "*modernistas*" que describiremos más adelante y que interpretaremos como resultado de una doble influencia: por un lado como reacción a los modelo docentes clásicos y, por otra, como consecuencia de un cambio radical en el modelo epistemológico de las matemáticas dominante en la institución.
Para acabar de caracterizar el papel que juega la actividad de resolución de problemas en los modelos docentes clásicos, hay que decir que uno de los defectos más graves que comparten es el de tratar los problemas matemáticos como si estuviesen *aislados* y *descontextualizados*. Esto significa, por una parte, que los problemas se tratan individualmente y nunca como representantes de ciertas *clases de problemas* (excepto el caso trivial de las clases algorítmicas del tecnicismo) y, por otra, que se tiende a presentar los problemas separados de su contexto, sin ninguna conexión con el sistema (matemático o extramatemático) a partir del cual surgen en el seno de una actividad matemática (excepto la contextualización trivial que se da en el teoricismo cuando se utiliza un ejercicio para introducir o para aplicar un concepto). El *aislamiento* y la *descontextualización* de los problemas serán analizados con más detalle en lo que sigue.

3. Modelos epistemológicos cuasi-empíricos

El fracaso del *Programa Euclídeo* llevó a la convicción progresiva de que tanto el origen como el método de la matemática e incluso su propia justificación ha de provenir, como en el caso de las otras ciencias, de la "experiencia", aunque sin tomar esta noción en el sentido empirista más elemental, sino más bien en un sentido más sofisticado de "*experiencia matemática*" (en este sentido pueden darse referencias de Russell y Quine, entre otros). Se constató, en efecto, que la matemática considerada globalmente, al igual que las demás ciencias, estaba organizada en *sistemas deductivos no euclideanos* puesto que en los sistemas matemáticos efectivamente construidos no se da una inyección de verdad indudable en los axiomas para que esta verdad fluya por los canales de las inferencias seguras e inunde todo el sistema.
Por contra, cuando analizamos las teorías matemáticas efectivamente construidas, nos encontramos con sistemas deductivos en los que la inyección crucial del valor de verdad, esto es, aquellas proposiciones matemáticas que son "indudablemente verdaderas" y que constituyen la auténtica roca firme sobre la que se construye el sistema deductivo no son los axiomas sino un conjunto especial de teoremas que Lakatos (1978a) denomina *enunciados básicos*. Esto significa que lo que justifica una teoría matemática no es que los axiomas sean indudablemente verdaderos ni siquiera que sean no contradictorios entre sí, sino que permita deducir efectivamente algunos resultados esenciales que queremos que sean deducibles. Para convencerse de esta afirmación basta imaginar qué justificación matemática tendría una teoría puramente tautológica o una geometría lógicamente impecable que no permitiese deducir el teorema de Pitágoras.

Este descubrimiento provocó un giro revolucionario en la epistemología de las matemáticas puesto que comportó el abandono del ideal euclídeo que había sido perseguido a lo largo de más de dos mil años de historia de las matemáticas, y la consiguiente aceptación de que las matemáticas no constituyen una *teoría euclídea* (en el sentido de "conjunto de proposiciones que se deducen de axiomas trivialmente verdaderos y que están formulados con términos perfectamente conocidos").

Históricamente el punto de inflexión de la epistemología de las matemáticas tuvo lugar a partir de la década de los setenta gracias, especialmente, a los trabajos de Imre Lakatos. Para las denominadas "ciencias experimentales" el cambio se produjo antes (en la década de los cincuenta) y consistió esencialmente en el abandono del ideal "inductivista" gracias a la influencia de la obra precursora de Popper (1934 y 1972) y a los historiadores de la ciencia (a la vez que epistemólogos) Kuhn (1957 y 1962), Lakatos (1971, 1976, 1978a y 1978b), Feyerabend (1970), y Toulmin (1972), entre otros[9].

Lakatos (1978a, pp. 47 y ss.) caracteriza las *teorías cuasi-empíricas*, en contraposición a las teorías euclídeas, como sigue: si llamamos *enunciados básicos* a los enunciados de un sistema deductivo a los que se inyecta inicialmente valores de verdad, entonces *un sistema es euclídeo si es la clausura deductiva de los enunciados básicos que se asumen como verdaderos. En caso contrario, es un sistema cuasi-empírico.*

De una teoría euclídea puede afirmarse que es "*verdadera*" en el sentido de que está "*probada*" por los enunciados básicos verdaderos que son los axiomas. Por contra, de una teoría cuasi-empírica puede decirse, a lo sumo, que está "*bien corroborada*" pero sin dejar nunca de ser *conjetural*; de hecho en una teoría cuasi-empírica los enunciados básicos verdaderos (que no son los axiomas) son simplemente "*explicados*" por el resto del sistema en el sentido de que forman un todo coherente y no contradictorio.

Las teorías matemáticas en periodo de desarrollo (y todas las teorías pasan por dicho periodo) son *informales* y es en esta etapa de teorías informales en las que se plantean los problemas más interesantes tanto desde el punto de vista histórico como epistemológico (se trata de los problemas que provienen de la exploración de las regiones fronterizas de los conceptos, del cuestionamiento de la extensión de los mismos y de la diferenciación de conceptos anteriormente amalgamados). Por esta razón el estudio de la naturaleza del conocimiento matemático pasa forzosamente por el *estudio del desarrollo de las teorías matemáticas informales* (esto es, antes de ser formalizadas).

Utilizando la noción de *teoría matemática informal* podemos decir que el hecho de que la matemática sea cuasi-empírica significa que toda teoría matemática axiomático-formal debe ser considerada como la formalización de alguna teoría matemática informal por lo que se acepta la posibilidad de que existan *falsadores heurísticos* de una teoría matemática formal. Esta propiedad es la que justificaría el nombre de "teoría cuasi-empírica" que, por tanto, no hace ninguna referencia a ningún tipo de "empirismo" entendido en el sentido usual. Por contra, para el euclideanismo una teoría matemática formal define implícitamente su objeto y, por tanto, los únicos *falsadores matemáticos potenciales* son *los falsadores lógicos*. Esta reducción de los falsadores potenciales conlleva la identificación de la "*verdad*" con la "*consistencia*".

El modelo cuasi-empírico provoca la *destrivialización del conocimiento matemático* al enfatizar el papel esencial del *proceso de descubrimiento* y pone de manifiesto (en contraposición al modelo euclídeo) que el análisis de dicho conocimiento no puede reducirse al estudio de la *justificación de las teorías matemáticas*.

---

[9] En Gascón (1993, pp. 297-299) se describe con cierto detalle lo que llamamos la "primera ampliación de la epistemología clásica" para las ciencias experimentales. Dicha ampliación tuvo su origen en el derrumbe del empirismo clásico y es una consecuencia de la crítica de Popper al empirismo lógico de Carnap.

Se produce en este punto un cambio importante en la forma de plantear el problema epistemológico: mientras que el euclideanismo el problema epistemológico era esencialmente un problema lógico: la *justificación lógica de las teorías matemáticas;* la epistemología cuasi-empírica plantea y pretende resolver un problema más amplio y de naturaleza no estrictamente lógica: el problema del *desarrollo del conocimiento matemático.* Tenemos aquí por tanto una importante reformulación del ***problema epistemológico*** que ahora se plantea en los siguientes términos:

PE^2 (Modelos cuasi-empíricos): *¿Cuál es la lógica del desarrollo del conocimiento matemático*? *¿Cómo se establece si una teoría* T' *es superior a otra teoría* T*?*

Desde esta nueva perspectiva, el punto central que distingue las teorías *cuasi-empíricas* de las *euclídeas* radica en la forma esencialmente distinta de concebir el desarrollo de una teoría matemática:

(i) El *desarrollo de una teoría euclídea* se reduce prácticamente a la búsqueda de un método de decisión para la elaboración de teoremas, esto es, un método de algoritmización. Naturalmente antes tienen lugar otras etapas: una primera precientífica, ingenua, de ensayo y error, y una segunda de carácter fundacional en la que se reorganiza la disciplina y se limpia de los bordes oscuros.

(ii) Pero ese patrón no da cuenta del desarrollo real de las matemáticas, esa no es la *lógica del descubrimiento matemático*. Para Lakatos las matemáticas (informales) se desarrollan siguiendo un patrón muy distinto, el patrón de las teorías cuasi-empíricas, que es el *patrón de las conjeturas, pruebas y refutaciones* (Lakatos, 1976). Es un patrón en el que siempre se parte de un problema y donde la atención se centra siempre en los bordes oscuros de la teoría en formación. Lo esencial son aquí los procedimientos (no algorítmicos): conjeturar, probar tentativamente, contrastar, refutar, buscar contra-ejemplos, modificar un poco el problema original, cambiar las definiciones, etc.

Desde este punto de vista, *se destrivializa el contenido de la matemática*, porque no es tautológico pero, sobre todo, *se destrivializa la actividad matemática* porque es heurística en el sentido de "no algorítmica".

4. Recuperación de la actividad matemática

En este punto debemos detener de nuevo la narración de la evolución del problema epistemológico para analizar las consecuencias de los modelos cuasi-empíricos sobre los *modelos docentes* imperantes, esto es, sobre las nuevas maneras de gestionar de forma compartida y sistemática la enseñanza de las matemáticas en el seno de las instituciones didácticas. Para ello necesitamos cambiar otra vez de escenario. Antes de analizar los detalles, puede decirse que cuando este nuevo modelo epistemológico penetra en el Sistema de Enseñanza de las Matemáticas provoca una tendencia a identificar el saber matemático con la *actividad matemática exploratoria* característica del *desarrollo de las teorías matemáticas informales*. Esta será, por tanto, la principal influencia general de los modelos epistemológicos cuasi-empíricos (de las matemáticas) sobre los "nuevos" modelos docentes: ***modernismo*** y ***procedimentalismo***. No hay que olvidar, sin embargo, que esta influencia no actúa aisladamente; entre otras, hay que subrayar la gran presión que ejercen sobre los nuevos *modelos docentes* los antiguos *modelos docentes*. Esta presión puede ser tanto en sentido "positivo", de mantenimiento de una tradición, como en sentido "negativo", de reacción en contra de un tipo de prácticas docentes que se consideran "arcaicas" y que, por tanto, deben ser "renovadas".

4.1. Aprender mediante una exploración *libre* y *creativa*: el modernismo

Las formas extremas de los *modelos docentes clásicos* presentan incoherencias y limitaciones evidentes en la gestión del proceso de estudio de las matemáticas. En particular, la asunción acrítica -y normalmente implícita- de los postulados docentes "clásicos" choca frontalmente con la abrumadora cantidad de datos empíricos que ponen de manifiesto que el proceso de estudio de las matemáticas es un *proceso no trivial, no mecánico e incontrolable por el profesor*.

Especialmente inadecuada es la forma como los citados modelos docentes clásicos se ven llevados a considerar la actividad de resolución de problemas dentro del proceso didáctico. Así, por ejemplo, el engaño que consiste en "motivar" y "justificar" la introducción de nuevos conceptos mediante problemas que están destinados a desaparecer de la escena, la trivialización de los problemas, la excesiva algoritmización de los conocimientos evaluables y, en definitiva, el fracaso absoluto de los alumnos cuando se enfrentan con problemas matemáticos no estandarizados, pueden provocar una situación insostenible en las instituciones en las que predominan dichas prácticas docentes.

Esta situación puede llevar a la necesidad de *rescatar la actividad de resolución de problemas* en sí misma, escandalosamente ignorada en los modelos docentes clásicos, y a tomarla como eje y finalidad de la actividad matemática y, por tanto, de todo el proceso didáctico. Denominaremos ***modelos docentes modernistas*** o, simplemente ***modernismo***, a esta forma de considerar el proceso didáctico que surge inicialmente como reacción a las evidentes limitaciones de los modelos clásicos. En las instituciones en las que predomina el modernismo se tiende a identificar la actividad matemática con la *exploración de problemas no triviales*, es decir con las tareas que se realizan cuando todavía no se sabe gran cosa de la solución; entonces se tantean algunas técnicas, se intenta aplicar éste o aquel resultado, se buscan problemas semejantes, se formulan conjeturas, se buscan contraejemplos, se intenta cambiar ligeramente el enunciado del problema original, etc.

En otras palabras, el modernismo (del que hemos tenido, y todavía tenemos, múltiples muestras) se caracteriza por conceder una preeminencia absoluta al ***momento exploratorio*** (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997); esto significa que identifica "enseñar" y "aprender matemáticas" con *enseñar y aprender esta actividad exploratoria*, *libre y creativa*, *de problemas no triviales*.

La anterior caraterización del modernismo pone de manifiesto su clara dependencia de un modelo epistemológico cuasi-empírico de las matemáticas y enfatiza hasta qué punto los cambios en los *modelos docentes*, que implican cambios importantes en la forma de gestionar la enseñanza de las matemáticas, en los objetivos que ésta persigue y que pueden comportar un giro radical en la práctica docente del profesor de matemáticas en el aula, pueden estar (parcialmente) explicados por un cambio de *modelo epistemológico general del saber matemático* predominante en la institución. Así, el *modernismo* reacciona contra la visión simplista de la enseñanza considerada como un proceso trivial, mecánico y totalmente controlable por el profesor. Traslada el centro de gravedad del proceso didáctico al *aprendizaje* y considera que dicho *proceso de aprendizaje* es un *proceso de descubrimiento inductivo y autónomo*.

El adjetivo "no trivial" con el que se quiere caracterizar a los "auténticos" problemas, pretende rescatar el sentido original de la noción de "problema" trivializada por los modelos docentes clásicos contra los cuales el modernismo es una reacción.

Una definición muy precisa de lo que se entiende dentro del modernismo por "exploración de problemas no triviales" se puede encontrar, por ejemplo, en Arsac (1988) cuando define "*problema abierto*" y describe la "*práctica del problema abierto*".

Se trata de problemas en cuyos enunciados no se sugiere el procedimiento de resolución (prohíbe explícitamente descomponer el problema en ejercicios) y que se encuentran en un dominio conceptual con el que los alumnos tienen cierta familiaridad. Así pueden tomar fácilmente "posesión" de la situación y empezar a hacer ensayos, proponer conjeturas, llevar a cabo proyectos de resolución y contraejemplos, que constituyen tareas típicas de la actividad exploratoria de resolución de problemas.

Una forma complementaria de conceptualizar los problemas "no triviales" es mediante la noción de "*problemas tipo olimpiadas*". Callejo (1991) caracteriza este tipo de problemas como sigue: (a) Para resolverlos se debe utilizar una *combinación original de técnicas*; (b) Inicialmente no se sabe como atacarlos por lo que es habitual tener que trabajar sobre ellos durante *largo tiempo*; (c) Aunque las técnicas y los conocimientos necesarios para resolver los problemas "olímpicos" suelen figurar en los libros de texto y en los programas de estudio, *no es habitual encontrar problemas semejantes en los manuales*; (d) Se trata de problemas que *aceptan varias estrategias de resolución*, aunque algunas de ellas son muy originales. Incluso *suelen ser resolubles en más de un dominio matemático*. Algunos ejemplos de problemas "olímpicos" son los siguientes:

(1) Para cada punto P interior a un triángulo equilátero, se consideran las distancias x, y, z del punto P a los lados del triángulo. Demostrar que la suma $x + y + z$ es constante para cada triángulo equilátero.
(2) Se considera el conjunto $S_n = \{1, 2, 3, 4, 5, ... , n\}$. ¿Para qué enteros n se puede dividir S_n en dos conjuntos disjuntos cuyos elementos sumen lo mismo?
(3) Tres circunferencias del mismo radio pasan por un punto P. Demostrar que los tres puntos de intersección de cada dos circunferencias determinan una cuarta circunferencia del mismo radio que las tres primeras.

La dispersión de los contenidos de estos problemas no se debe a que hayamos tomado ejemplos al azar, es una condición perseguida explícitamente por el modernismo para evitar que los problemas aparezcan demasiado ligados a una teoría determinada o a un conjunto concreto de técnicas; en el modernismo es esencial que la exploración sea realmente "libre" -también de las teorías y de las técnicas matemáticas- para que sea más "creativa", en el sentido cultural de "no repetitiva", "sorprendente" y "original".

Con riesgo de simplificar abusivamente podría decirse que, aunque el modernismo pretende superar al *conductismo* clásico, coloca en su lugar una especie de "*activismo*" que no deja de constituir otra modalidad de psicologismo ingenuo fundamentada, en este caso, en una interpretación muy superficial de la *psicología genética* de Piaget. Por lo que respecta al *aislamiento* y la *descontextualización* de los problemas, que ya era preocupante en los modelos docentes clásicos, podemos decir que no hacen más que agravarse en el modernismo.

Tenemos, en resumen, que teoricismo, tecnicismo y modernismo constituyen *modelos docentes extremadamente reduccionistas*. Cada uno de ellos *enfatiza una única dimensión de la actividad matemática, ignorando los restantes*. Al desconocer las relaciones funcionales entre dichas dimensiones, no pueden integrarlos en un único proceso en el que se relacionen y complementen (Gascón, 1994).

4.2. Aprender a utilizar una "directriz heurística": el procedimentalismo

La *destrivialización del conocimiento matemático* llevada a cabo por el modernismo es artificial porque se fundamenta en una "ocultación" del entorno matemático (clases de problemas y técnicas matemáticas necesarias para resolverlos) en el que viven los problemas. Esta ocultación se realiza, eso sí, con la (¿buena?) intención de asegurar que la exploración sea "libre" (sobre todo de las técnicas matemáticas potencialmente útiles, para que éstas no disminuyan los grados de libertad del "explorador") y "creativa" en el sentido cultural de "sorprendente" y "no rutinaria", antes citado.

Pero existe una forma más acorde con la actividad matemática de *destrivializar el uso de las técnicas matemáticas*: pasa por enfatizar que el conocimiento e incluso *el dominio de ciertas técnicas básicas no implica, en absoluto, la posibilidad de elaborar autónomamente estrategias heurísticas complejas de resolución de problemas.*

De hecho, ni el modernismo ni ninguno de los modelos docentes clásicos se plantean el difícil problema de cómo guiar al alumno en la elección de la técnica adecuada, cómo crear las condiciones que le permitan construir una estrategia de resolución de un problema mediante una combinación adecuada de técnicas, o cómo hacer posible el desarrollo interno de una técnica en manos de los alumnos. Llamaremos ***modelos docentes procedimentalistas*** o, mejor, ***procedimentalismo***, al que sitúa como principal objetivo del proceso didáctico el *dominio de sistemas estructurados de técnicas heurísticas* (en el sentido de no algorítmicas).

Mientras la destrivialización del conocimiento matemático llevada a cabo por el modernismo se basaba en la dificultad de descubrir la estrategia matemática adecuada para abordar un problema, dentro de un universo de problemas potencialmente infinito, el procedimentalismo empieza acotando un *campo de problemas* y pone el énfasis en la dificultad de elaborar y de interiorizar una *estrategia de resolución compleja* útil para abordar los problemas de dicho campo.

El procedimentalismo puede ser interpretado como la *completación del tecnicismo* en cuanto que reacción al teoricismo: en el procedimentalismo también se pone entre paréntesis la "teoría", enfatizando el trabajo de la técnica mucho más allá de las técnicas simples. Además, el procedimentalismo completa y mejora la *destrivialización del conocimiento matemático* iniciada por el modernismo. Por todo ello podemos considerar que el procedimentalismo es un modelo docente de *segundo orden*, puesto que relaciona funcionalmente dos dimensiones (o momentos) de la actividad matemática: el *momento exploratorio* y el *momento del trabajo de la técnica* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

En el procedimentalismo no se pretende analizar el papel que juegan las teorías matemáticas cristalizadas en el aprendizaje de las matemáticas ni, en particular, su relación con la actividad de resolución de problemas. Se parte de un *alumno hipotético* (Gascón, 1989) que, se supone, ha adquirido los conocimientos necesarios y domina las técnicas básicas para abordar los problemas de una cierta clase. En estas condiciones el procedimentalismo se centra en el problema didáctico de *posibilitar el diseño, la utilización y el dominio de estrategias complejas de resolución de problemas*.

Su principal limitación consiste en que trata únicamente con clases prefijadas de problemas como consecuencia del olvido del momento teórico. Por tanto, el procedimentalismo *no puede tomar en consideración el desarrollo de las técnicas en manos del alumno ni la correspondiente ampliación de las clases de problemas exploradas.*

En aquellas instituciones didácticas en las que predomina el procedimentalismo, la resolución de problemas se utiliza como una estrategia didáctica encaminada a que el alumno llegue a dominar sistemas estructurados de procedimientos matemáticas que pueden cristalizar, o no, en un *patrón de resolución* en el sentido de Polya (1945, 1954 y 1962-65). Este punto de vista comporta necesariamente trabajar con "clases de problemas" (noción dual, aunque relativamente secundaria, de la de "patrón de resolución") y pone de relieve una cuestión central: *¿cómo determinar la amplitud más adecuada en cada caso de la clase de problemas que se tomará como base para enseñar un patrón de resolución*?

Si se quieren enseñar, por ejemplo, técnicas de resolución de “*problemas de contar*”, ¿*qué clase de problemas es la más adecuada*?, ¿*la clase de los problemas de* “*variaciones*”?, ¿*la de problemas de contar* “*simples*” (*que la incluye*) *o, incluso, la de todos los problemas de contar* “*descomponibles*” *en una cadena de problemas simples?* ¿*Cómo se relacionan entre sí las correspondientes técnicas de resolución*? (Gascón, 1989, pp. 59-65).

En resumen, si nos fijamos ahora en los tipos de problemas tomados en consideración en cada uno de los modelos docentes descritos hasta aquí, el *procedimentalismo* puede interpretarse, por una parte, como una *completación del tecnicismo* que sólo toma en consideración clases algorítmicas de problemas, excesivamente cerradas y, por otra, como una *reacción al modernismo* que parece no querer poner ningún límite al universo de problemas potencialmente utilizables, en una exploración descontrolada que, en la práctica, es equivalente a considerar cada problema absolutamente aislado de los otros. Podemos decir, por tanto, que *con el procedimentalismo se rompe definitivamente el aislamiento tradicional de los problemas*; tanto el aislamiento clásico que encerraba los problemas en clases algorítmicas independientes, como el aislamiento modernista que prohíbia agrupar los problemas en clases (con sus técnicas matemáticas asociadas) para asegurar que la exploración fuese “libre” y “creativa” (Gascón, 1994).

5. Epistemología constructivista: el desarrollo psicogenético como nueva base empírica de la epistemología

Empezaremos resumiendo brevemente las dos primeras etapas de la reconstrucción racional que estamos haciendo de la *evolución de la epistemología de las matemáticas* que, no hay que olvidarlo, sólo puede entenderse *en el marco de la epistemología de las ciencias* en la que está inmersa. En la primera etapa -el *euclideanismo*- teníamos una *epistemología sin ninguna base empírica* que asumía, a priori, el ideal de la *trivialización del conocimiento matemático* así como la irrelevancia del proceso de descubrimiento para justificar la validez de las teorías matemáticas. En este sentido podemos considerar la epistemología euclídea como una parte de la filosofía.[10]

En la segunda etapa (la de los *modelos cuasi-empíricos*) se toman los datos que proporciona la historia de la ciencia (y, en particular, la historia de las matemáticas) como la base empírica de la epistemología. Sin embargo, y a pesar de coincidir en este punto, se produce una gran dispersión (que llega a ser abierta discrepancia) entre los diversos autores citados (Popper, Lakatos, Kuhn, Feyerabend, Toulmin) cuando intentan describir los mecanismos del desarrollo del conocimiento científico. Una primera conjetura para explicar esta falta de acuerdo es la insuficiencia de los datos históricos (de la historia de las ciencia) como base empírica de la epistemología. Esta presunta insuficiencia es, precisamente, uno de los puntos de partida de la *epistemología constructivista* de Piaget (1972 y 1975), que culmina en Piaget y García (1982).

De hecho, la discrepancia es tan profunda que ni tan sólo hay acuerdo respecto a la posibilidad o imposibilidad de interpretar racionalmente el desarrollo de la ciencia. No todos los autores que toman la historia de la ciencia como base empírica de la epistemología encuentran algún tipo de racionalidad en el desarrollo del conocimiento científico. De entre los citados, tan sólo Popper y Lakatos distinguen claramente entre *ciencia* y *pseudo-ciencia* y se atreven a formular *normas metodológicas* para establecer la

[10] No debería ser necesario aclarar que esta consideración de la epistemología euclidea como una parte de la filosofía, no tiene ninguna connotación peyorativa.

aceptabilidad o el rechazo de una teoría (Popper, 1934) o a dar criterios para decidir la superioridad de un *programa de investigación* sobre otro (Lakatos, 1978b).
Para Piaget y García (1982, p. 243) nunca hasta aquí se trató el verdadero *problema epistemológico* que, según ellos debería formularse como sigue:

PE^3 (Constructivismo): *¿En qué consiste el paso de una teoría* T *de nivel inferior, a otra teoría* T', *de nivel superior*? *¿Cuáles son los mecanismos del desarrollo del conocimiento científico* (*y, en particular, matemático*)?

Se trata, en realidad, de un problema distinto del planteado por Lakatos que se refería a *¿cómo se establece si* T' *es superior o no es superior a* T?, pero no deja de ser una nueva (re)formulación del problema epistemológico en clara continuidad con las anteriores. Simbolizaremos mediante **PE^3** esta reformulación constructivista del problema epistemológico. La tesis central de la epistemología constructivista podría formularse como sigue: *para abordar el problema epistemológico es imprescindible utilizar como base empírica, al lado de los hechos que proporciona la historia de la ciencia, los que proporciona el estudio del* ***desarrollo psicogenético***. La razón de ello reside en que los hechos históricos sólo pueden mostrarnos la realidad factual del desarrollo científico y las diversas formas que toma dicho conocimiento en cada periodo histórico; pero para conocer los *instrumentos y mecanismos del desarrollo científico* (y abordar así el "verdadero" problema epistemológico) es preciso recurrir a los datos empíricos de la psicogénesis.
La tesis anterior descansa, naturalmente, sobre el postulado de que los *instrumentos* y *mecanismos* que determinan el paso de un periodo (de la historia de la ciencia) al siguiente son análogos a los que determinan el paso de un estadio psicogenético al estadio siguiente. ¿En qué consisten estos instrumentos y mecanismos del desarrollo, presuntamente comunes a la historia de la ciencia y a la psicogénesis?
En el caso de las matemáticas, que es el que nos interesa aquí, podríamos citar dos instrumentos de construcción de conocimientos matemáticos que según Piaget y García aparecen tanto en la historia de las matemáticas como en la psicogénesis de los conocimientos matemáticos (cuya fuente común son los procesos de *asimilación* y *acomodación*): dichos instrumentos son la *abstracción reflexiva* y la *generalización completiva*.
La *abstracción reflexiva* extrae sus informaciones a partir de las acciones y operaciones del sujeto (y no de los objetos mismos como es el caso de la "abstracción empírica"). Este instrumento también podría denominarse *tematización reflexiva* porque consiste en la conceptualización exhaustiva de las entidades matemáticas construidas progresivamente, y esto aún antes de que éstas se plasmen en axiomatizaciones. Un ejemplo muy característico de estas construcciones y tematizaciones sucesivas nos lo da el desarrollo de la actividad matemática que ha desembocado en la teoría de grupos:
(a) Los primeros grupos, debidos a Galois, fueron referidos a permutaciones, centrándose la atención en el estudio de éstas.
(b) Con F. Klein y los grupos de transformaciones geométricas, se pone el énfasis en el estudio de los invariantes, esto es, en la estructura concreta e implícita de grupo.
(c) Se elabora por fin la noción de grupo abstracto que tiene como base un conjunto cualquiera, pasando a ser la propia estructura explícita de grupo (tematizada) el objeto de estudio.
La *generalización completiva* constituye una síntesis nueva en el seno de la cual las leyes particulares antiguas adquieren nuevas significaciones. Así decimos que hay "generalización completiva" cuando una estructura, conservando sus caracteres

esenciales se ve enriquecida por nuevos subsistemas que se agregan sin modificar los precedentes. Por ejemplo la incorporación de las álgebras no conmutativas que completan a las conmutativas.

Esta descripción de los instrumentos de construcción del conocimiento matemático proporciona una nueva interpretación sobre la *naturaleza de los objetos matemáticos* como extraídos de las *acciones u operaciones del sujeto* en lugar de ser *entidades lógicas, lingüísticas, ideales* o *cuasi-empíricas*. Decir que los objetos matemáticos son construidos por las acciones del sujeto no es metafórico, significa:

(a) Que las acciones del sujeto nunca son aisladas, están coordinadas con otras acciones.

(b) Que de estas coordinaciones se extraen formas que pueden desprenderse de sus contenidos.

(c) Y que estas formas se coordinan a su vez para dar nacimiento, por reflexión, a las operaciones fundamentales que constituyen el punto de partida de las estructuras lógico - algebraicas (Piaget y García, op. cit. p. 248).

En cuanto a los *mecanismos de desarrollo comunes a la historia de las matemáticas y a la psicogénesis* hay que subrayar un proceso de naturaleza completamente general que conduce de lo *intra-objetal* (o análisis de los objetos), a lo *inter-objetal* (o estudio de las relaciones y transformaciones entre dichos objetos) y de allí a lo *trans-objetal* (o estudio de las estructuras construidas tomando como soporte dichas transformaciones). Se trata de una triada dialéctica que se reencuentra en todos los dominios y en todos los niveles tanto de la historia de las matemáticas como de la psicogénesis del pensamiento matemático (Piaget y Garcia, op. cit. p. 33).

Así, por ejemplo, el *desarrollo histórico de la geometría* se inicia con el estudio de las relaciones internas entre los elementos de las figuras, sin tomar en consideración el espacio como tal ni las transformaciones de las figuras en el interior de un espacio: es la etapa *intra-figural*. Es una larga etapa dominada por la geometría euclídea clásica. Viene a continuación una etapa en la que se estudian las relaciones entre las diversas figuras geométricas y, en especial, el estudio de las transformaciones que relacionan unas figuras con otras. Históricamente corresponde al periodo en el que predomina la geometría proyectiva (Poncelet y Chasles). Constituye la etapa *inter-figural*. Por fin tenemos una tercera etapa llamada *trans-figural* caracterizada por el predominio de las estructuras geométricas; esto es el estudio y clasificación de las geometrías que, históricamente, coincide con el Programa de Erlangen de Félix Klein.

El desarrollo histórico del álgebra considerada globalmente constituye otro ejemplo del mecanismo general del desarrollo ***intra-***, ***inter-***, ***trans-***, aunque éste es un caso mucho más complejo que el de la geometría. Cuando el álgebra se constituyó como disciplina su tema central de estudio era la resolución de ecuaciones. Durante el primer periodo se trata de la resolución de ecuaciones específicas mediante métodos empíricos; estamos en una etapa *intra-operacional*. En una segunda etapa, que históricamente comienza en el siglo XVIII, el objeto central del estudio del álgebra pasan a ser las transformaciones que pueden convertir una ecuación no resoluble en otra resoluble estudiándose, por lo tanto, los propios criterios de resolubilidad. Estamos así en una etapa *inter-operacional* que históricamente estuvo muy influenciado por la obra de Lagrange y Gauss. Con Galois y el desarrollo de la teoría de grupos, que es la primera estructura tematizada en matemáticas, culmina la historia de la resolución de ecuaciones y comienza el predominio del análisis de estructuras algebraicas. Es el punto de partida de un largo y muy complejo periodo *trans-operacional* (Piaget y García, op. cit.pp. 156-157).

Faltaría, para acabar de resolver el problema epistemológico tal como lo plantean Piaget y García, dar cuenta de los *principios motores* de tales construcciones cuyos instrumentos y cuyos mecanismos de desarrollo se han descrito. El más importante de dichos principios es la *búsqueda de razones* que incluye pero va más alla que la mera descripción de fenómenos. Así, las "razones" de las propiedades de los objetos que se descubren en el periodo *intra-* se encuentran precisamente en las transformaciones de dichos objetos que son características del nivel *inter-*. A su vez, las propiedades de las transformaciones son "explicadas" por las estructuras globales propias de la etapa *trans-*. Tanto el matemático como el niño que ha llegado a cierto nivel, no se contentan jamás con comprobar o descubrir. En cada etapa buscan llegar a las razones de aquello que han encontrado (Piaget y García, op. cit. p. 159).

En resumen, *la epistemología constructivista pretende explicar el desarrollo del conocimiento matemático mediante nociones análogas a las utilizadas para describir el desarrollo psicogenético*. En particular tiende a identificar el saber matemático con la actividad histórico-psicogenética de construcción de estructuras matemáticas cada vez más complejas mediante un proceso que usa como instrumento la *tematización reflexiva* que desemboca en la *generalización completiva*, y cuyo mecanismo principal de desarrollo viene marcado por la sucesión de etapas *intra-*, *inter-* y *trans-*, presentes en todos los dominios y en todos los niveles.

6. El aprendizaje de las matemáticas como construcción de conocimientos

Detengámonos de nuevo en la narración de la evolución del *problema epistemológico* para analizar algunas consecuencias de la incidencia de la epistemología constructivista sobre los modelos docentes imperantes en el Sistema de Enseñanza de las Matemáticas. Cambiamos otra vez de escenario y nos volvemos a sumergir en el ámbito tradicionalmente reservado a la didáctica.

Analizaremos dos nuevos *modelos docentes* que, por depender de la epistemología constructivista, denominaremos respectivamente ***constructivismo psicológico*** y ***constructivismo matemático***. Mostraremos que ambos relacionan -aunque sea parcialmente- el *momento exploratorio*, esto es, la dimensión exploratoria de la actividad matemática, con el *momento tecnológico-teórico*, es decir, aquel momento de la actividad matemática en el que se elaboran justificaciones e interpretaciones de la práctica matemática. Al mismo tiempo, esa dependencia condiciona un cierto olvido del *momento del trabajo de la técnica*, esto es, del trabajo técnico que empieza siendo rutinario, pero que a medida que se desarrolla juega un papel más y más importante como integrador de las otras dimensiones de la actividad matemática (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

Repitamos una vez más que los ***modelos docentes***[11] que estamos describiendo no existen en estado puro. Las prácticas docentes efectivamente existentes en las instituciones didácticas participan en mayor o menor medida de los diversos modelos docentes descritos, por lo que siempre tienen un carácter mixto y complejo.

[11] La propia noción de "*modelo docente*" tal como la estamos utilizando, esto es, como conjunto de *prácticas docentes* compartidas que permiten organizar y gestionar el proceso de enseñanza de las matemáticas en una institución determinada, es voluntaria e inevitablemente ambígua. No deberíamos olvidar, sin embargo, que la noción de "*modelo epistemológico*" de las matemáticas tal como ha sido utilizada aquí, y tal como se utiliza habitualmente, no es mucho más precisa. En la sección 7 apuntaremos la necesidad de avanzar en la descripción de los componentes básicos de ambos tipos de "modelos" entendidos como *sistemas de prácticas* (matemáticas o docentes) y postularemos para ambos una estructura común, la descrita por las ***praxeologías*** (Chevallard, 1997 y 1999).

6.1. Génesis cognitiva de conocimientos: constructivismo psicológico

Incluiremos dentro de los ***modelos docentes constructivistas*** todas aquellas maneras de interpretar el proceso de enseñanza-aprendizaje que identifican "enseñar matemáticas" con posibilitar que los estudiantes "*construyan*" *los conocimientos matemáticos*.
Cuando no se hace ninguna referencia explícita a la naturaleza matemática de la propia actividad de construcción ni al contexto en el que se realiza dicha construcción y cuando, además, no se para mucha atención a la naturaleza del proceso de construcción porque, implícitamente, y en concordancia con los postulados de la *epistemología constructivista*, se supone que se trata de un *proceso psicológico* y no de una actividad con relevancia matemática en sí misma, entonces diremos que el modelo docente en cuestión es el ***constructivismo psicológico***. En particular, dentro de esta forma de constructivismo, se instrumentaliza la resolución de problemas como un simple medio para "construir" conocimientos nuevos.
Hay que decir que los modelos docentes influenciados por el *modelo epistemológico constructivista* son muchos y complejos. Existe una enorme variedad de maneras diferentes de entender la "construcción" de los conocimientos matemáticos así como el papel que desempeña la resolución de problemas en esa construcción. Aquí describiremos dos variantes ideales extremas: empezaremos por la modalidad más simplista de los modelos docentes fundamentados en una epistemología constructivista, esto es, por la que postula implícitamente que la construcción de los conocimientos matemáticos se lleva a cabo mediante un *proceso puramente psicológico*. En la próxima sección describiremos otra modalidad de modelo docente constructivista que es más sofisticada porque toma en cuenta que el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos es un *proceso de modelización matemática* explicitable, controlable y de gran interés en sí mismo.
Todos los modelos docentes fuertemente influenciados por una epistemología *constructivista* suelen ir acompañados de una teoría del aprendizaje que puede resumirse en un pequeño conjunto de hipótesis tomadas precisamente de la *psicología genética* y, en parte, de la *psicología social* que le proporcionan una base psicológica mucho más sólida de la que tenían el teoricismo, el tecnicismo y el modernismo.
Para simplificar, tomaremos la descripción que hacen algunos autores de lo que denominan una "*situación problema*" (ver, por ejemplo, Douady, 1986). Esta caracterización nos servirá para entender mejor el papel que juega la actividad matemática en general y la actividad de resolución de problemas en particular, dentro del constructivismo psicológico.

(i) El alumno debe poder introducirse en la resolución del problema y ha de poder considerar lo que es una *solución posible*.

(ii) Los conocimientos del alumno tienen que ser, en pricipio, *insuficientes* para resolver el problema.

(iii) La "situación problema" debe permitir al alumno decidir si una solución determinada es *correcta o no*.

(iv) El conocimiento que se desea que el alumno adquiera ("construya") tiene que ser la herramienta más adecuada para resolver el problema propuesto, al nivel de los conocimientos del alumno. (En la construcción de este conocimiento radica el objetivo fundamental de toda la actividad).

El avance fundamental del constructivismo psicológico, respecto de los modelos docentes "unidimensionales", consiste en que relaciona funcionalmente dos dimensiones diferentes de la actividad matemática: el *momento exploratorio* con el *momento tecnológico-teórico*

(Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), dando gran importancia al papel de la actividad de resolución de problemas aunque sólo sea como *instrumento de la génesis de los conceptos*. Continúa ignorando, sin embargo, la función del *trabajo de la técnica* en el aprendizaje de las matemáticas en general y en la resolución de problemas en particular.

Dado que las "*situaciones-problema*" se eligen en función del concepto o "conocimiento" que se quiere que el alumno "construya", resulta que el constructivismo psicológico está más cerca del teoricismo que del tecnicismo aunque, como ya hemos dicho, se sustenta en una base psicológica más sólida (la psicología genética) y, también, en un modelo epistemológico (la epistemología *constructivista*) mucho más elaborado que el *euclidianismo* que servía de base a los modelos docentes clásicos.

Lo anterior no impide que el constructivismo psicológico presente los problemas matemáticos tan aislados como el teoricismo y el tecnicismo y casi tanto como el modernismo. Pero el *sistema conceptual* en el que el concepto a construir ocupará su lugar, constituye un cierto contexto de la situación problema que se ha elegido como instrumento de construcción de dicho concepto y permite decir que incluso en esta variante del constructivismo, los problemas se presenten bastante más contextualizados que en los modelos docentes unidimensionales descritos anteriormente.

6.2. Génesis de conocimientos mediante modelización: constructivismo matemático

Si llamamos *descontextualización de un problema de matemáticas* a la separación entre el problema propiamente dicho y el sistema (matemático o extramatemático) a partir del cual el problema se genera de una manera natural -en el seno de una determinada actividad matemática-, parece claro que en el teoricismo los problemas están más descontextualizados que en el constructivismo psicológico.

Llamaremos ***modelo docente modelizacionista*** o, simplemente, ***modelizacionismo***, al que interpreta "aprender matemáticas" como un proceso de construcción de conocimientos matemáticos (relativos a un *sistema* matemático o extramatemático) que se lleva a cabo mediante la utilización de un modelo matemático de dicho sistema. De esta forma, casi por definición, resulta que en el modelizacionismo la descontextualización de los problemas desaparece hasta el punto de llegar a identificarse el *objetivo de la resolución de los problemas*, con la *obtención de conocimientos sobre el sistema modelizado*. La actividad de resolución de problemas se engloba, por tanto, en una actividad más amplia que podemos llamar *actividad de modelización matemática* y que esquematizaremos en cuatro estadios, sin entrar en detalles ni querer prejuzgar una sucesión temporal lineal entre ellos (Chevallard, 1989).

Primer estadio: El punto de partida o primer estadio de la modelización matemática lo constituye una *situación problemática* en la que pueden formularse preguntas y conjeturas, normalmente con poca precisión, y en la que se pueden llegar a detectar y formular provisionalmente algunos problemas matemáticos.

Aunque tradicionalmente se han considerado preferentemente sistemas extramatemáticos (principalmente físicos) como candidatos a ser modelizados matemáticamente, no hay ninguna razón intrínseca para que esto sea así. Desarrollaremos a continuación un ejemplo de sistema matemático (se trata, en concreto, de un *sistema aritmético*) cuya modelización matemática permite "construir" (o "producir") conocimientos matemáticos relativos a dicho sistema.

Puede surgir una situación problemática delante del hecho siguiente: algunos alumnos aún aplicando una técnica incorrecta para sumar dos fracciones, obtienen el resultado correcto. Así, por ejemplo, escriben:

$$\frac{10}{51}+\frac{13}{-64}=\frac{10+13}{51\cdot(-64)}=\frac{23}{51\cdot(-64)}$$

Esta situación pone en evidencia un fenómeno aritmético que es problemático puesto que provoca cuestiones cuya respuesta no es inmediata: ¿Porqué sucede esto? *¿Debe haber alguna relación especial entre los numeradores*? *¿Y entre los denominadores*? *¿Deben ser fracciones irreducibles*? *¿Qué relación debe darse entre dos fracciones para que puedan sumarse de esta extraña manera*?

Segundo estadio: Engloba la *definición o delimitación del sistema* subyacente a la situación problemática y la *elaboración del modelo matemático* correspondiente. El disponer del lenguaje y de las técnicas propias del modelo matemático, permitirá formular con más precisión los problemas enunciados provisionalmente en el estadio anterior. Para delimitar el sistema a modelizar se eligen las variables que consideraremos "relevantes" para describir el fenómeno.

En nuestro caso tomaremos como variables del sistema los numeradores a, b y los denominadores c, d de las fracciones. El modelo algebraico del sistema viene dado entonces por la ecuación diofántica:

$$ad+bc=a+b$$

en la que todas las variables pueden jugar indistintamente el papel de "datos" o de "incógnitas". Este modelo general permite formular con precisión diferentes problemas matemáticos:

(i) *Dados los numeradores a y b, ¿cómo están relacionados los denominadores de las fracciones cuya suma correcta se obtiene mediante la regla falsa*?
(ii) *Dada una fracción a/c, ¿cómo construir todas las fracciones que pueden sumarse con ella mediante la regla en cuestión*?
(iii) *Dados los denominadores c y d, ¿cómo están relacionados los numeradores de dichas fracciones para que se puedan sumar mediante la regla falsa*?

Tercer estadio: Incluye, además del *trabajo técnico* dentro del modelo, la *interpretación* de este trabajo y de sus resultados *dentro del sistema modelizado*.

Para el primer problema, suponiendo que los numeradores a y b son dados, no nulos y primos entre sí, se obtiene una ecuación diofántica que tiene como solución particular trivial (*se obtiene para* $z = 0$) $c = d = 1$, *y cuya solución general viene dada por:*

$$\frac{a}{1+za}+\frac{b}{1-zb} \qquad (z\in \mathbb{Z})$$

Para el segundo problema, dada la fracción a/c se obtiene una solución particular b/d = 0/1 *y, suponiendo que a y* 1 – *c son primos entre sí, se obtiene la solución general:*

$$\frac{a}{c}+\frac{za}{1+z(1-c)} \qquad (z\in \mathrm{Z})$$

Por fin, si conocemos los denominadores c y d, tenemos la solución particular (*para z* = 0) *a = b = 0 y, suponiendo que c* – 1 *y d* – 1 *son primos entre sí, tenemos la solución general:*

$$\frac{z(c-1)}{c}+\frac{z(1-d)}{d} \qquad (z\in \mathrm{Z})$$

Cuarto estadio: En este último estadio de la actividad de modelización matemática se pueden *enunciar problemas nuevos* cuya resolución permitirá responder a cuestiones, relativas al sistema, difícilmente formulables antes de la elaboración del modelo matemático. En este estadio los problemas pueden independizarse del sistema inicial.

Algunas de dichas cuestiones, en nuestro ejemplo, podrían ser: *¿es posible que las dos fracciones tengan el mismo signo*? *¿cómo han de ser las fracciones si los numeradores son iguales*? *¿es posible que la suma de los inversos de dos enteros sea, a su vez, el inverso de otro entero*? *¿cuando sucede esto*?

Resulta, en definitiva, que en el *modelizacionismo* el objetivo de la actividad matemática -y por tanto el de la enseñanza de las matemáticas- es la *obtención de conocimientos relativos a un sistema modelizado* que, en principio, puede ser tanto matemático como extramatemático. Los problemas sólo adquieren pleno sentido en el contexto de un sistema; así la resolución de un problema pasa siempre por la *construcción explícita de un modelo del sistema subyacente* y tiene como objetivo la producción de conocimientos relativos a dicho sistema.

El modelizacionismo perfecciona, en cierta forma, al constructivismo psicológico ya que, al igual que éste, concibe la actividad matemática como una *actividad de construcción de conocimientos matemáticos nuevos*; pero el modelizacionismo profundiza en el significado de “construir conocimientos nuevos” al referirlos a sistemas concretos y operativizar esta construcción mediante la elaboración de un modelo matemático y el trabajo dentro del mismo. Además, el modelizacionismo lleva hasta sus últimas consecuencias la *contextualización de los problemas* que era sólo incipiente en el constructivismo psicológico.

Debemos añadir, para acabar, que el modelizacionismo cuando toma en consideración la modelización de sistemas matemáticos (y no tan sólo extramatemáticos), también conecta funcionalmente el *momento exploratorio* con el *momento tecnológico-teórico*. Se trata de una conexión mucho más “equilibrada” que la realizada en el constructivismo psicológico puesto que en el modelizacionismo la actividad de “construcción” tiene interés matemático en sí misma, no se toma como un mero instrumento al servicio de las nociones a construir. La relación entre el *sistema a modelizar* y el *modelo matemático* de dicho sistema es relevante matemáticamente porque produce conocimientos matemáticos relativos al sistema. Por todas estas razones, el modelizacionismo, que también se fundamenta en la epistemología constructivista, puede ser considerado como un ***constructivismo matemático***. Sus limitaciones más importantes tienen relación, de nuevo, con el *olvido del momento del trabajo de la técnica* y del papel del *desarrollo de las técnicas matemáticas* en la actividad matemática (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

7. Evolución del problema docente y necesidad de nuevos modelos epistemológico-didácticos

Hasta aquí hemos descrito una *reconstrucción racional de la evolución del problema epistemológico* (de las matemáticas) que podemos resumir como sigue:

PE^1		**PE^2**		**PE^3**
¿Cómo detener el regreso infinito y llevar a cabo una justificación lógica de las teorías matemáticas?	→	¿Cuál es la lógica del desarrollo del conocimiento matemático?	→	¿Cuáles son los instrutos y mecanismos (comunes a la historia y a la psicogénesis) del desarrollo del conocimiento matemático?
Euclideanismo		**Modelos cuasi-empíricos**		**Constructivismo**

Esta evolución, que puede interpretarse como una *ampliación sucesiva del objeto de estudio* de la epistemología, está ligada asimismo a la *ampliación de su base empírica* provocada por la evidente inadecuación de ésta para abordar el problema que la epistemología plantea en cada momento.

Hemos visto que los modelos epistemológicos situados dentro del *euclideanismo* tenían como único objetivo la justificación lógica de las teorías matemáticas (no necesitaban ninguna base empírica); los modelos epistemológicos *cuasi-empíricos* pretendían resolver el problema más amplio del *desarrollo del conocimiento matemático* (por esta razón requieren la utilización, como base empírica, de los datos históricos); por fin la epistemología *constructivista* pretendía explicar no sólo cómo se establece que una teoría científica es superior a otra sino, también, cuáles son los instrumentos y los mecanismos que provocan el paso de una teoría de nivel inferior a otra de nivel superior. Este objetivo más amplio requiere utilizar como base empírica los datos de la psicogénesis, además de los que proporciona la historia de la ciencia, aunque en realidad se interpreta la historia de las ciencias y, en particular, la de las matemáticas, a imagen y semejanza del desarrollo psicogenético del niño.

El resumen anterior pone de manifiesto que la naturaleza del problema epistemológico **PE** ha ido evolucionando: comenzó siendo un problema puramente *lógico* **PE**^{1}, se convirtió después en un problema *histórico* **PE**^{2}, y parece que ha acabado siendo un problema esencialmente *cognitivo* **PE**^{3}.

Paralelamente hemos esquematizado una *reconstrucción racional* (*no histórica*) *de la evolución* de lo que hemos denominado, de forma voluntariamente ambigua, "*modelos docentes*" *ideales* que, repitámoslo una vez más, se encuentran entremezclados en las actuales instituciones didácticas y, por tanto, no existen –ni han existido nunca- en estado puro. Hemos definido cada uno de los modelos docentes a partir de la dimensión (o dimensiones) del proceso de estudio de las matemáticas que dicho modelo enfatiza y hemos mostrado que éste énfasis estaba fuertemente asociado, en cada caso, a un modelo epistemológico general de las matemáticas. Hemos empezado a mostrar que cada modelo docente condiciona, aunque sea a un nivel muy general, la forma de organizar y gestionar el proceso de enseñanza de las matemáticas incidiendo, por tanto, sobre la práctica profesional del profesor de matemáticas en el aula. En particular el modelo docente imperante en una institución didáctica determina grandemente *el papel que el profesor deberá asignar a la actividad de resolución de problemas de los alumnos* y, en consecuencia, ningún aspecto del proceso de estudio de las matemáticas es ajeno a su influencia.

Podríamos hablar, por tanto, de la "***evolución del problema docente***", interpretando el *problema docente* como el que se plantean las instituciones que tienen la responsabilidad de llevar a cabo el proyecto social de la enseñanza de las matemáticas. Podemos considerar que la forma de plantearse (implícitamente) el problema docente por parte de las instituciones y cuyas formulaciones sucesivas denominaremos, respectivamente, **PD**^{1}, **PD**^{2} y **PD**^{3}, queda reflejada en los tres grandes tipos de modelos docentes –*clásicos*, *modernistas* y *constructivistas*- ya que éstos pueden ser considerados, respectivamente, como las *respuestas institucionales* a la correspondiente formulación del problema docente.

PD^{1}
¿Cómo mecanizar y controlar la transmisión de teorías y el entrenamiento en el uso de técnicas algorítmicas?
Modelos docentes clásicos

→

PD^{2}
¿Cómo gestionar el proceso de descubrimiento inductivo y autónomo de los alumnos?
Modelos docentes modernistas

→

PD^{3}
¿Cómo posibilitar que los alumnos construyan los conocimientos matemáticos siguiendo ciertas etapas en dicho proceso de construcción?
Modelos docentes constructivistas

La cuestión que nos planteamos para terminar, y cuya respuesta sólo apuntaremos aquí, se refiere a la interrelación entre ambos problemas (epistemológico y docente):

PE/PD: *¿Qué nuevas teorías epistemológicas generales deberían proponerse* (*como respuesta a qué nuevas reformulaciones del problema epistemológico*), *si queremos que puedan servir de base a modelos docentes que superen las limitaciones de los modelos docentes habituales y, en particular, de los modelos docentes constructivistas*?

Podemos resumir las limitaciones de los modelos docentes descritos hasta aquí como sigue:

(a) Modelos docentes de *primer orden*: Los modelos docentes *clásicos* y el *modernismo* son extremadamente reduccionistas porque enfatizan una única dimensión de la actividad matemática; por esta razón pueden ser considerados de primer orden. Así, el teoricismo se centra en el momento *tecnológico-teórico*, el tecnicismo en el *trabajo de la técnica* y el modernismo en el momento *exploratorio*, ignorando en todos los casos los restantes momentos de la actividad. Los tres presentan los problemas matemáticos muy aislados y fuertemente descontextualizados.

(b) Modelos docentes de *segundo orden*: El *procedimentalismo* y los *modelos docentes constructivistas* pueden ser considerados como modelos docentes de segundo orden puesto que toman en consideración y conectan dos momentos o dimensiones de la actividad matemática. Así, el procedimentalismo desarrolla el *trabajo de la técnica* que sólo era incipiente en el tecnicismo y lo relaciona con el momento *exploratorio*, llevando a cabo una exploración controlada de determinadas clases de problemas (superando así el aislamiento de éstos). Los modelos docentes constructivistas, por fin, conectan los momentos *exploratorio* y *tecnológico-teórico* pero, por el contrario, continúan ignorando las funciones del *trabajo de la técnica* en el proceso de estudio.

Desde el punto de vista de la teoría de los momentos didácticos (Chevallard, 1997 y 1999) se requiere un modelo docente que además de relacionar funcionalmente los momentos *exploratorio, tecnológico-teórico* y del *trabajo de la técnica* (lo que se conseguiría integrando el *procedimentalismo* y el *modelizacionismo*), no olvide los tres momentos restantes: el del *primer encuentro,* el de la *institucionalización* y el de la *evaluación*. A pesar de que se han realizado algunos avances en esta dirección (Bosch y Gascón, 1994), debemos reconocer que estamos todavía lejos de disponer de la caracterización de un modelo docente que integre funcionalmente todas las dimensiones de la actividad matemática.

Volviendo a la cuestión **PE/PD**, debemos preguntarnos: ¿cómo modificar el *modelo epistemológico ingenuo* que, como dice Brousseau (1987), está en la base de los *modelos docentes habituales*? o, en otros términos, ¿cómo debería ampliarse el objeto de estudio de la epistemología y cómo debería ampliarse correlativamente su base empírica, a fin de que el nuevo modelo epistemológico pueda sustentar modelos docentes menos simplistas que los descritos hasta aquí?

En un trabajo anterior, (Gascón, 1993, pp. 299-303), hemos mostrado que la base empírica utilizada por el constructivismo para abordar el problema epistemológico presenta graves deficiencias respecto del objetivo del problema que pretende abordar. Incluso suponiendo que el problema epistemológico consistiese en explicar los mecanismos del desarrollo del conocimiento matemático, es fácil mostrar que los datos de la psicogénesis (completados con los que proporciona la historia de las matemáticas) son radicalmente insuficientes para dar cuenta de la génesis y el desarrollo de los conocimientos matemáticos.

Partiendo de la crítica de Vygotsky a la separación (e incluso oposición) que Piaget propugna entre "instrucción" y "desarrollo" (Vygotsky, 1934, p. 133), hemos puesto de manifiesto que la *base empírica minimal para abordar el problema epistemológico* (incluso si aceptamos la versión restringida del mismo que plantea el constructivismo), debe incluir los "hechos" que se producen en las instituciones didácticas. No basta con los datos empíricos obtenidos en el estudio del desarrollo psicogenético porque la epistemología deber dar cuenta de fenómenos que dependen esencialmente de la institución didáctica en el seno de la cual tiene lugar la denominada génesis "personal" de los conocimientos matemáticos. Hemos aportado nuevos argumentos para reforzar la tesis antropológica (Chevallard, 1991) según la cual no puede separarse el estudio de la *génesis y el desarrollo de los conocimientos matemáticos* del estudio de la *comunicación, la utilización* y la *transposición institucional* de los mismos.

Hemos mostrado, en definitiva, la necesidad ineludible de una nueva ampliación del objeto de estudio de la epistemología de las matemáticas. Tendremos, por tanto, una nueva reformulación del problema epistemológico, que denominaremos $\mathbf{PE^4}$, y una respuesta tentativa en forma de nuevo modelo epistemológico general del conocimiento matemático, que denominaremos "*modelo antropológico*":

$\mathbf{PE^4}$ **(Modelo antropológico):** ¿*Cuáles son las leyes que rigen la producción, la comunicación y la utilización del saber matemático en el seno de una institución, así como su transposición entre las diferentes instituciones*?

Es en este punto en el que, en cierto sentido, confluyen ambos problemas (el epistemológico y el docente[12]) y parecen confundirse en cuanto a sus necesidades empíricas. Históricamente este momento se corresponde con las primeras formulaciones

[12] En rigor habría que decir que confluyen el problema *epistemológico* y el problema *didáctico* en el que ha desembocado el problema *docente* inicial. En Gascón (1999b) se explícita en qué forma la problemática *docente* inicial (también denominada *problemática del profesor de matemáticas*) evoluciona hasta convertirse en la *problemática didáctica*, esto es, en el objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) propuestas por Guy Brousseau[13]. No es casual que en esta primera etapa de la didáctica de las matemáticas Brousseau denominara “epistemología experimental” a esta nueva disciplina.

Utilizando el esquema propuesto en Gascón (1999b) podríamos decir que el Programa Epistemológico de Investigación en didáctica de las matemáticas surgió en el momento en que confluyeron el problema epistemológico y el problema didáctico, lo que comportó, simultáneamente, una importante ampliación del objeto de estudio de ambas disciplinas. En particular la didáctica de las matemáticas aceptó la responsabilidad de utilizar modelos epistemológicos del saber matemático (elaborados por la propia didáctica) como nueva vía para el estudio de los fenómenos didácticos y, correlativamente, se puso de manifiesto que la epistemología de las matemáticas tenía necesidad de utilizar, como parte esencial de su base empírica, los hechos que se producen en los sistemas didácticos.

A partir de este punto de la evolución, siguiendo la lógica interna de nuestra reconstrucción racional ya no puede hablarse de “*modelos docentes*” independientes de la naturaleza de la disciplina objeto de estudio (puesto que la dimensión epistemológica ya no puede ser ignorada en el problema didáctico) ni de “*modelos epistemológicos*” que pretendan dar cuenta únicamente de la estructura, la génesis y el desarrollo del conocimiento matemático a un nivel lógico, histórico y psicogenético; es imprescindible incluir la dimensión didáctica dentro del problema epistemológico. Lo característico del Programa de Investigación (Lakatos, 1978b) en didáctica de las matemáticas que hemos llamado “Epistemológico”[14], es precisamente la elaboración y utilización de modelos epistemológico-didácticos como puerta de entrada al análisis didáctico. La descripción del modelo epistemológico-didáctico general que propone la TAD[15] como respuesta a la nueva formulación (**PE^4**) del problema epistemológico, no tiene cabida aquí. Deberá ser objeto de un trabajo posterior.

Una lectura retrospectiva de este trabajo nos permite reconocer que al utilizar únicamente modelos epistemológicos *generales* (esto es, patrones de la organización matemática considerada como un todo) no hemos podido mostrar con detalle su incidencia sobre las características de los “modelos docentes”. Se necesitarán muchas más investigaciones[16] para precisar la dependencia mutua entre los modelos epistemológicos “*específicos*” (esto es, modelos de las diferentes organizaciones matemáticas que se estudian en las instituciones escolares) y los “modelos docentes” que, de una forma más o menos implícita, guían la práctica profesional del profesor de matemáticas.

Poble Nou, noviembre de 2000

---

[13] El lector puede encontrar una recopilación de los principales trabajos de Guy Brousseau publicados entre 1970 y 1990, en Brousseau (1997). Existe la versión francesa de esta obra: Brousseau (1998).

[14] El Programa Epistemológico de Investigación en didáctica de las matemáticas fue inaugurado por la TSD y en él se sitúa, inequívocamente, la TAD.

[15] Una descripción más detallada de este modelo en formación se encuentra en Chevallard (1997 y 1999); Chevallard, Bosch y Gascón (1997); Gascón (1998 y 1999a); y Bosch y Chevallard (1999).

[16] El trabajo de tesis de Pilar Bolea, que estamos finalizando, podría considerarse como una de dichas investigaciones. Pretende mostrar la incidencia del *modelo epistemológico del álgebra escolar*, dominante en la ESO, sobre los *modelos docentes* imperantes en dicha institución. De esta manera, interpretamos el modelo epistemológico específico (del álgebra escolar, en este caso) como parte esencial de la “*tecnología didáctica*”, esto es, del discurso justificativo-interpretativo-generador de las técnicas didácticas que utiliza el profesor para organizar y gestionar el proceso de estudio de las matemáticas en el seno de la institución. Se abre así el camino para analizar la influencia de la tecnología didáctica sobre las prácticas docentes y para describir dichas prácticas en términos de *tareas* y *técnicas didácticas* entendidas, en sentido técnico, como componentes de las *praxeologías didácticas* (Chevallard, 1997 y 1999).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARSAC, G. y otros (1988): *Problème ouvert et situation-problème*, IREM de Lyon.
BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J., (1998): The role of algebraization in the study of a mathematical organization, CERME-1, Osnabrueck, Germany.
BOSCH, M. y CHEVALLARD, Y. (1999): La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 77-124.
BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1994): La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), 314-332.
BROUSSEAU, G. (1987): Représentation et didactique du sens de la division, in G. Vergnaud, G. Brousseau et M Hulin (ed.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Actes du colloque du Sèvres, pp. 47-64, La pensée sauvage: Grenoble.
BROUSSEAU, G. (1997): *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, Eds. and Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
BROUSSEAU, G. (1998): *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield, Eds.). La pensée sauvage: Grenoble.
BROUWER, L. E. J. (1952): Historical Background, Principles and Methods of Intuitionisme, *South African Journal of Science*, 49, 139-146.
CALLEJO, M. L. (1991): *Las representaciones gráficas en la resolución de problemas de tipo olimpiadas*, Tesis Doctoral, Universidad París VII.
CHEVALLARD, Y. (1989)*: Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications nº 16 de l'IREM Aix-Marseille.
CHEVALLARD, Y. (1991): *Didactique, anthropologie, mathématiques*, Postfacio a la 2ª edición de *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée Sauvage: Grenoble.
CHEVALLARD, Y. (1997): Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3, 17-54.
CHEVALLARD, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221-266.
CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori: Barcelona.
DOUADY, R. (1986): Jeu de Cadres et Dialectique Outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-32.
FEYERABEND, P. K. (1970): Against Method, Minnesota Studies en the Philosophie of Science, vol. IV, Minnesota.
GASCÓN, J. (1989): *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.
GASCÓN, J. (1992): Què s'enten per *Resolució de Problemes de Matemàtiques*?, *Biaix*, 2, 10-17.
GASCÓN, J. (1993): Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de Análisis-Síntesis a la génesis del lenguaje algebraico, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13/3, 295-332.
GASCÓN, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas, *Educación Matemática*, 6/3, 37-51.
GASCÓN, J. (1998): Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1, 7-34.
GASCÓN, J. (1999a): "Didactique fondamentale" versus "Advanced Mathematical Thinking": ¿Dos Programas de Investigación inconmensurables? *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Tome II, pp. 152-170. Editeur: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).
GASCÓN, J. (1999b): Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas, en Ortega, T. (Editor): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, Valladolid, 129-150.

GÖDEL, K. (1931): Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, 173-198
HEYTING, A. (1956): *Intuitionism. An introduction*, North Holland: Amsterdam. [Trad. española de Victor Sanchez de Zavala: *Intuicionismo*, Tecnos: Madrid, 1976].
HILBERT, D. (1923): Die Logischen Grundlagen der Mathematik, *Mathematische Annalen,* 88, pp. 151-165.
KHUN, T. S. (1957): *The Copernican Revolution*, [Versión castellana de Domènec Bergadà: *La revolución copernicana*, Ariel: Barcelona, 1978]
KHUN, T. S. (1962): *The Structure of Scientific Revolutions*, 2ª ed., University Press: Chicago (1970). [Trad. española de Agustín Contín, Fondo de Cultura Economica: México, 1979].
KLEENE, S. C. (1952): *Introduction to Metamathematics*, North Holland: Amsterdam. [Versión castellana de M. Garrido: *Introducción a la metamatemática*, Tecnos: Madrid, 1974]
LAKATOS, I. (1971): *History of Science and its Rational Reconstructions*, en R. C. Buck y R. S. Cohen (eds.): *P.S.A.*., 1970, Boston Studies in the Philosophy of Science, 8, pp. 91-135. Dordrecht: Reidel [Trad. española: *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales*, Tecnos: Madrid, 1974].
LAKATOS, I. (1976): *Proofs and Refutations: The logic of mathematical discovery* (J. Worrall and E. Zahar, Eds.). Cambridge University Press.
LAKATOS, I. (1978a): *Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers*, vol 2, Cambridge, University Press. [Trad. española: *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza:Madrid, 1981].
LAKATOS, I. (1978b): *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Philosophical Papers Volume I, Cambridge University Press: Cambridge. [Trad. española: *La metodología de los programas de investigación científica*, Alianza: Madrid, 1983].
LLINARES, S. (1999): Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas, en: *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália*, Actas da Escola de Verão de 1999, Ed. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciêncas de Educação, pp.109-132.
PIAGET, J. (1972): *The Principles of Genetic Epistemology*, London: Routledge y Kegan Paul.
PIAGET, J. (1975): *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo*, Madrid: Siglo XXI (1978).
PIAGET, J. GARCIA, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*, Siglo XXI (4a. edición): México, DF.
POLYA G. (1945). *How to Solve It*, 2a. ed., (1957) Doubleday: Princeton. [Trad. española: *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas: México, (1981)].
POLYA, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning*, 2 vols., Princeton University Press: Princeton, NJ.
POLYA, G. (1962-65): *La découverte des mathématiques* (2 vols.), Dunod, Paris, (1967).
POPPER, K. R. (1934): *The Logic of Scientific Discovery*, [Trad. española de Victor Sanchez de Zavala: *La lógica de la investigación científica*, Madrid: Tecnos (1973)].
POPPER, K. R. (1972): *Objective Knowledge*, [Trad. española de Carlos Solís Santos: *Conocimiento objetivo*, Madrid: Tecnos (1988)].
RUSSELL, B (1903): *The principles of mathematics*, 2 ed.(1937) [Trad. española de Juan Carlos Grimberg, *Los principios de las matemáticas*, Espasa.Calpe: Madrid, 1967].
RUSSELL, B. (1919): *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen and Unwin: Londres. [Trad. española de J. B. Molinari, *Introducción a la filosofía matemática*, Ed. Losada, 1945].
TOULMIN, S. (1972): *Human understanding*, vol. 1, Princeton University Press. [Trad. española: *La comprensión humana.* Vol 1. *El uso colectivo y la evolución de los conceptos*, Alianza: Madrid, 1977].
VYGOTSKY, L. S. (1934): *Pensamiento y lenguaje*, Traducción española de María Margarita Rotger, Ed. La Pléyade: Buenos Aires, 1987.