UNIVERSIDAD DE LOS ANDES – TÁCHIRA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
SAN CRISTOBAL

Módulo Instruccional "Derivadas"

Elaborado por:

Caballero, Karina C.I. 13.146.643

Camargo, Mayra C.I. 12.490.467

Contreras, Doray C.I. 11.112.902

San Cristóbal, Noviembre 1.998

Agradecimiento

A los profesores Alfonso Sánchez y Miguel Angel Vera, por proporcionar su tiempo y esfuerzo en la revisión de este módulo, aportando valiosas sugerencias y críticas que ayudaron a su mejoramiento. Sus útiles disposiciones y amables palabras de apoyo fueron my apreciadas.

A todos los que desde 1994 (Profesores y Compañeros de estudio) compartieron con nosotros, alegrías, sacrificios y el saber, bajo esta casa de estudios superiores, nuestra nutricia Universidad de Los Andes, Alma Máter.

"En medio de la dificultad se encuentra la oportunidad"

Albert Einstein.

Referencias de Identificación del Modulo

Título:

Derivadas

Area:

Matemática Básica

Asignatura / Código:

Introducción al Cálculo HB 7101

Pre-Requisito:

Geometría 20 HB 5104

Responsables:

Doray Contreras

Mayra Camargo

Karina Caballero

Profesor(es) Asesor(es):

Alfonso Sánchez

Miguel A. Vera

Lugar y Fecha:

San Cristóbal, Noviembre 1.998

Contenido

Agradecimiento ii

Referencias de Identificación del Modulo iii

Contenido 1

Introducción 2

Orientaciones para el Desarrollo del Módulo 3

Diagrama de Flujo 4

Objetivos del Módulo 5

Análisis de Tarea 7

Evaluación Diagnóstica 8

Matriz de Corrección 12

Estrategias de Aprendizaje 19

Sesión de Trabajo I 20

Sesión de Trabajo II 48

Sesión de Trabajo III 58

Sesión de Trabajo IV 78

Autoevaluación 102

Matriz de Corrección 104

Bibliografía 113

Introducción

Derivadas

- *Interpretación Geométrica*
- *Recta Tangente y Normal*
- *Regla de los Cinco Pasos*
- *Teoremas para el Cálculo de Derivadas*
- *Regla de la Cadena*
- *Derivación Implícita*
- *Cálculo de Derivadas de:*
  - ☑ *Funciones Trigonométricas*
  - ☑ *Trigonométricas Inversas*
  - ☑ *Funciones Logarítmicas*
- *Aplicaciones de la Derivada*

En el Siglo VI antes de Cristo el gran Pitágoras decía: Cultivad asiduamente la Ciencia de los números, porque nuestros crímenes no son más que errores de cálculo. Es por ello, que el idioma de la matemática al igual que otras ramas del saber, es un lenguaje universal que es necesario hablar, al menos lo suficiente para no ser huéspedes mudos en nuestra propia casa: La Naturaleza.

En ese gran árbol que es la matemática hay una rama muy importante que se llama la derivada, cuyo proceso para hallarla se llama derivación y es el tema que trataremos en el desarrollo del presente módulo instruccional.

La derivada es un tema que tiene muchas aplicaciones en física, economía, biología, astronomía, estadística, y demás disciplinas. Por lo tanto, su importancia como herramienta de trabajo es apreciable.

Es importante señalar que el presente módulo pretende ser una sólida plataforma que nos permita realizar estudios de mayor alcance en esta rama así como también trata de ser lo más explicativo posible de manera que su estudio sea agradable y no un trabajo tedioso que no nos permita obtener un aprendizaje significativo.

Finalmente se quiere resaltar que en la elaboración del módulo no se exponen las demostraciones correspondientes a las propiedades y teoremas correspondientes a las propiedades y teoremas acerca de la derivada, pues estas aparecen en forma detallada en la bibliografía que se recomienda. Es por ello, que sería conveniente que el lector las revisara para así obtener un mayor conocimiento y comprensión de los contenidos que se desarrollan a lo largo del mismo.

"El error más grande que una persona puede cometer, es tener miedo de cometer uno"

Elbert Hubbard.

Orientaciones para el Desarrollo del Módulo

Para el desarrollo del presente módulo instruccional es necesario que sigas las siguientes orientaciones:

1. Lee los objetivos del módulo y asegúrate de haber entendido lo que ellos expresan.

2. Desarrolla la evaluación diagnóstica, y luego compara las respuestas con el patrón de corrección. Si la respondes con una exactitud de 100% pasa a tomar la autoevaluación final.

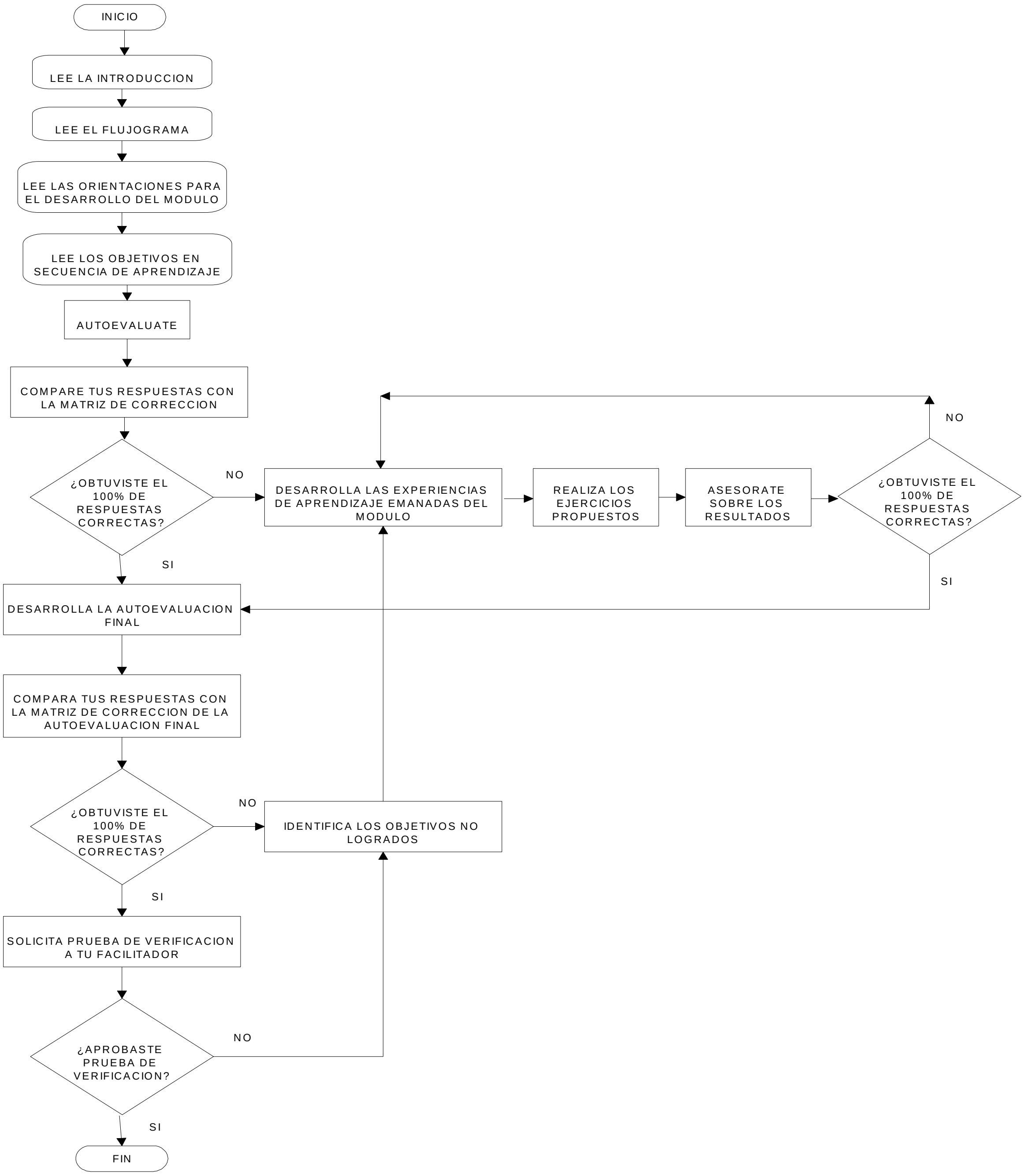
3. De no lograr el 100% de respuestas correctas, identifica los objetivos no alcanzados. Los cuales aparecen en el análisis de tarea y en la Pág. IX una vez identificados debes completarlos desarrollando las sesiones de trabajo que contempla dichos objetivos.

4. Después de haber logrado los objetivos, pasa a tomar la autoevaluación final.

5. Si respondes la autoevaluación con una exactitud de 100%, solicita a tu facilitador la prueba de verificación final; en caso de aprobarla, has finalizado con las actividades previstas en este módulo de aprendizaje.

De no lograr el 100% de respuestas correctas, debes consultar a tu facilitador para recibir las orientaciones al respecto y/o revisar nuevamente los objetivos no logrados.

FLUJOGRAMA DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:



Objetivos del Módulo

OBJETIVO TERMINAL

Durante el desarrollo de presente módulo instruccional, el participante trabajará los elementos conceptuales y procedimentales acerca de la derivada con el fin de:

Calcular la derivada de una función dada, con respecto a la variable de la misma, desarrollando habilidades y destrezas en su determinación, las cuales le permitirá combinar principios, teoremas, algoritmos y reglas para aplicarlos como herramientas de trabajo en el estudio de situaciones problemáticas en donde el concepto de derivada es de vital importancia.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para el logro del objetivo propuesto, el estudiante deberá poseer una visión integradora y un dominio conceptual, procedimental y actitudinal para:

I Sesión

1. Valorar la importancia de la interpretación geométrica de la derivada de una función, con el fin de determinar la ecuación de la recta tangente y la recta normal a una curva.
2. Formalizar y calcular por medio de la regla de los cinco pasos, la derivada de una función.
3. Formular y aplicar los teoremas sobre derivadas en la resolución de ejercicios.

II Sesión

4. Calcular la derivada de una función compuesta aplicando la regla de la cadena.
5. Aplicar el método de la derivación implícita en la determinación de la derivada de una función.

III Sesión

6. Determinar la derivada de las funciones trigonométricas y sus inversas.
7. Calcular la derivada de la función exponencial y de la función logarítmica.

IV Sesión

8. Aplicar los criterios de la primera y segunda derivada para el estudio de la gráfica de funciones, y utilizarla como herramientas de trabajo en la resolución de problemas de aplicación.

Análisis de Tarea

10 Desarrollar elementos conceptuales y procedimentales acerca de la derivada con el fin de: calcular la derivada de una función dada, combinando principios, teoremas, algoritmos y reglas prácticas para aplicarlos como herramientas de trabajo en el estudio de situaciones problemáticas en donde el concepto de derivada es de vital importancia.

9 Aplicar los criterios de la primera y segunda función derivada como herramienta de trabajo en la resolución de problemas de aplicación y para el estudio de la gráfica de funciones.

8 Calcular la derivada de la función exponencial y de la función logarítmica.

7 Determinar la derivada de las funciones trigonométricas y sus inversas.

6 Aplicar el método de la derivación implícita en la determinación de la derivada de una función.

5 Calcular la derivada de una función compuesta aplicando la regla de la cadena.

4 Formular y aplicar los teoremas sobre derivadas en la resolución de ejercicios.

3 Formular y calcular por medio de la regla de los cinco pasos a la derivada de una función.

2 Valorar la importancia de la interpretación geométrica e la derivada de una función, con el fin de determinar la ecuación e la recta tangente y la recta normal a una curva.

1 Factorización, funciones, trigonometría, gráficas, logaritmos

10 Meta Final ; 9 al 2 Sub-tareas ; 1 Pre-requisitos

VALOREMOS NUESTROS CONOCIMIENTOS PREVIOS

Instrucciones Generales:

- Los ejercicios aquí contenidos tienen como finalidad medir los conocimientos respecto a la derivada de funciones.

- Al iniciar cada parte de la prueba lee detenidamente las instrucciones y responde de acuerdo a ellas.

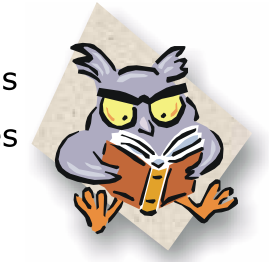
- Responde primeramente los ejercicios de menor grado de dificultad para Ud.

- Trabaje en forma ordenada y pulcra procurando llevar los términos a su mínima expresión.

Importante: No observe el patrón de corrección hasta tanto no culmines la totalidad de la evaluación.

Parte 1 (verdadero o Falso)

Instrucciones: A continuación se presentan varias afirmaciones. Analiza si cada una de ellas es verdadera o falsa. Explique su respuesta.



1. La ecuación de la recta tangente a la curva, dada por la expresión $y+\sqrt{x^2+y^2}=x+6$ en el punto P(3,4) es $9y-8x-30=0$ ( )
2. La ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $x^2-5xy+2y^2=52$ en el punto P(-2,3) es $19y+22x-13=0$ ( )
3. La derivada de la función $f_{(x)}=\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x-5}}$ es $f'_{(x)}=-\dfrac{2}{3(x-5)^2}\sqrt{\left(\dfrac{x-5}{x-3}\right)^2}$ ( )
4. La segunda derivada de la función $f_{(x)}=4e^{4x}$ es $f''_{(x)}=16e^{4x}$ ( )

¡Piensa!

Un vehículo *A* corre la mitad de un trayecto a la velocidad *x* y la otra mitad a la velocidad de *y*. Muestra que la velocidad media *V* del vehículo *A*, en todo el trayecto, verifica la relación.

$$\frac{z}{v}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

II Parte:

Instrucciones: Lee con atención cada una de las siguientes preguntas, escoge la respuesta correcta entre las cuatro que se proponen, márcala con una x. Explique su respuesta.

5. La derivada con respecto a x_1 de la función $f_{(x)}=-3x^3+6x^2-7x^{-2}+8x^{-3/4}$, es:

$f'_{(x)}=-9x^2-12x-2x^{-3}+\frac{3}{4}x^{-7/4}$ ( ) $f'_{(x)}=-9x^2+12x+14x^{-3}-6x^{-7/4}$ ( )

$f'_{(x)}=-9x^2-12x-14x^{-1}+6x^{1/4}$ ( ) $f'_{(x)}=9x^2-12x-14x^{-3}+6x^{-7/4}$ ( )

6. Aplicando el método de derivación logarítmica la derivada de $f_{(x)} = x^x$, es:

a. $f'_{(x)} = y + \text{Ln}x$ ( )

b. $f'_{(x)} = 1 + \text{Ln}x$ ( )

c. $f'_{(x)} = (1 + \text{Ln}x)y$ ( )

d. $f'_{(x)} = (1 + \text{Ln}x)x$ ( )

7. Dada la función $f_{(x)} = 3x^3 - x - 1$, los puntos críticos son:

a. x = 9 ; x = -3 ( )

b. x = 1/3 ; x = -1/3 ( )

c. x = -2 ; x = -1/3 ( )

d. x = -1 ; x = -3 ( )

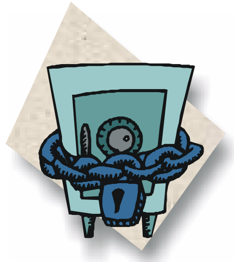
8. El punto (o los puntos) de inflexión, para la función $f_{(x)} = 3x^3 - x - 1$, es (o son):

a. x = 0 ( )

b. x = 1 ; x = -2 ( )

c. x = -1 ; x = 0 ( )

d. x = 3 ( )



Curiosidades Matemáticas

Un caracol decidió subir a un árbol de 154 m de altura. Durante cada día tenía tiempo de subir 5m. pero mientras dormía, por la noche, bajaba 4m ¿Al cabo a la cima del árbol?

III Parte.(Desarrollo)

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios en forma ordenada y detallada.

9. Dada la función $f_{(x)} = x^3 - 3x^2$. Determine
   a. Los puntos críticos de f
   b. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
   c. Los máximos y mínimos (por criterio de la segunda derivada)
   d. Los o el punto de inflexión de f
   e. Los intervalos de concavidad y convexidad.
10. Encontrar dos números positivos cuya suma sea 60 y tal que la suma de sus cuadrados sea mínima.

¡Diviértete!

Si las únicas teclas digitales que podemos utilizar en la calculadora son 0 y 1, las operaciones usuales +, x, - y ÷ y la tecla = (todos los resultados en el sistema decimal), encontrar diferentes formas de obtener como resultado los números 120, 77, 979, 1958 y 15983.

Matriz de Corrección

(EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA)

Respuestas a la evaluación diagnóstica

1. (Falso)
2. (Verdadero)
3. (Verdadero)
4. (Falso)
5. B
6. D
7. c
8. a
9. Ver solucionario
10. Ver solucionario

Solucionario a la Evaluación Diagnóstica

I Parte

1. La ecuación de la recta tangente a una curva en el punto (x_1, y_1) es: $y - y_1 = m_T(x - x_1)$ el problema se reduce a calcular y' o m_T; para ello se sigue el proceso de derivación implícita.

$$y + (x^2 + y^2)^{1/2} = x + 6 \text{ en } P(3,4)$$

$$y' + \left[\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}(2x + 2yy')\right] = 1 \Rightarrow y' + \frac{2x + 2yy'}{2(x^2 + y^2)^{1/2}} = 1$$

$$\frac{2\sqrt{x^2 + y^2}\,y' + 2x + 2yy'}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = 1$$

$$2\sqrt{x^2 + y^2}\,y' + 2x + 2yy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow y'(2\sqrt{x^2 + y^2} + 2y) = 2\sqrt{x^2 + y^2} - 2x$$

$$y' = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2} - 2x}{2\sqrt{x^2 + y^2} + 2y} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + y}$$

$$m_T = \frac{\sqrt{3^2+4^2}-3}{\sqrt{3^2+4^2}+4} = \frac{\sqrt{9+16}-3}{\sqrt{9+16}+4} = \frac{\sqrt{25}-3}{\sqrt{25}+4} = \frac{2}{9}$$

La ecuación de la recta tangente es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = \tfrac{2}{9}(x-3)$$

$$9y - 36 = 2x - 6 \quad \Rightarrow \quad 9y - 2x - 36 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{9y - 2x - 30 = 0|} \rightarrow \text{Respuesta}$$

2. La ecuación de la recta normal es: $y - y_1 = \frac{1}{m_T}(x - x_1)$

El problema se reduce a calcular y′ o m_T y para ello seguiremos el proceso de derivación implícita.

$$x^2 - 5xy + 2y^2 = 52$$

Derivando ambos miembros.

$$2x - 5xy' - 5x'y + 4yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad -5xy' + 4yy' = -2x + 5x'y$$

$$y'(4y - 5x) = 5y - 2x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{5y-2x}{4y-5x}$$

Sustituyendo, en particular, para el punto (-2,3), se tiene:

$$y' = \frac{5(3)-2(-2)}{4(3)-5(-2)} = \frac{15+4}{12+10} = \frac{19}{22}$$

$$y' = m_T = \frac{19}{22}$$

Luego $m_N = -\frac{22}{19}$

La ecuación de la recta normal es

$$y - 3 = -\frac{22}{19}(x+2) \quad \Rightarrow \quad 19y - 57 = -22x - 44$$

Luego $\underline{19y + 22x - 13 = 0|} \rightarrow$ Respuesta

¡Piensa!

Cierto número de fanáticos decidió, después de estudiar sagrados y de muchas horas de uso de un moderno y potente computador, que el fin de mundo ocurriría en el octavo año bisiesto del próximo siglo.

¿Cuál es?

3. La función dada se puede escribir en esta forma: $f_{(x)} = \left(\frac{x-3}{x-5}\right)^{1/3}$

Aplicando la regla de la cadena, se tiene que

$$f'_{(x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{x-3}{x-5}\right)^{-2/3} \cdot \left(\frac{x-3}{x-5}\right)'$$

La derivada de $\left(\frac{x-3}{x-5}\right)$ corresponde a la derivada de un cociente

$$\left(\frac{x-3}{x-5}\right) = \frac{(x-3)'(x-5)-(x-5)'(x-3)}{(x-5)^2} = \frac{(x-5)-(x-3)}{(x-5)^2} = \frac{\cancel{x}-5-\cancel{x}+3}{(x-5)^2}$$

$$\left(\frac{x-3}{x-5}\right) == \frac{-2}{(x-5)^2}$$

Luego $f'_{(x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{x-3}{x-5}\right)^{-2/3} \cdot \frac{-2}{(x-5)^2}$; o sea

$\boxed{f'_{(x)} = \frac{-2}{3(x-5)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{x-3}{x-5}\right)^2}}}$ $\to$ Respuesta

4. Hallamos en primer lugar la primera derivada de $f_{(x)} = 4e^{4x}$

$f'_{(x)} = 4e^{4x} \cdot 4$ $\to$ Por derivada de función exponencial $\to$ $f'_{(x)} = 16e^{4x}$

$f'_{(x)} = 16e^{4x} \cdot 4 = 64e^{4x}$

$\therefore$ la respuesta es falsa ya que $\boxed{f'_{(x)} = 64e^{4x}}$ $\to$ Respuesta

II Parte

5. Aplicando las reglas para derivar:

$f_{(x)} = -3x^3 + 6x^2 - 7x^{-2} + 8x^{-3/4}$

Se tiene una suma algebraica de funciones

$\boxed{f'_{(x)} = -3(3)x^{3-1} + 6(2)x^{2-1} - 7(-2)x^{-2-1} + 8(\tfrac{3}{4})x^{3/4-1}}$ $\to$ Respuesta

6. Debemos igualar $y' = f_{(x)}$

   Luego $y = x^x$

   $Ln\ y = Ln\ x^x$ Aplicamos Ln en ambos miembros

   $Ln\ y = x\ Ln\ x$ por propiedad de Ln

   $(Ln\ y)' = (x\ Ln\ x)'$ Aplicamos derivada de la función logarítmica

   $\frac{1}{y} \cdot y' = \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + Ln\ x$

   $\boxed{y' = y(1 + Lnx) = (1 + Lnx)y} \rightarrow$ Respuesta

7. Hallamos los puntos críticos mediante la derivada de la función.

   $f_{(x)} = 3x^3 - x - 1$

   $f'_{(x)} = 9x^2 - 1$

   $f'_{(x)} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 1 = 0$

   $x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{9}}$

   $\boxed{\text{Así tenemos } x = 1/3 \wedge x = -1/3 \text{ que son los puntos críticos}}$ $\rightarrow$ Respuesta

¡Diviértete!

Si es mañana es ayer, entonces hoy está muy lejos del domingo, porque hoy fue cuando ayer fue mañana. ¿Qué día es hoy?

8. Para hallar los puntos de inflexión debemos calcular $f'_{(x)}$, y verificamos en que punto $f'_{(x)} = 0$, además debemos verificar en ese punto los cambios de sentido de la concavidad.

   Así pues $f'_{(x)} = 9x^2 - 1$

   Luego $f''_{(x)} = 18x$; $f''_{(x)} = 0$

   $\Rightarrow 18x=0 \Rightarrow x=0$

Verificando la concavidad

Si $x<0 \Rightarrow 18x < 0 \Rightarrow f''_{(x)} < 0$ es $\cap$

Si $x>0 \Rightarrow 18x > 0 \Rightarrow f''_{(x)} > 0$ es $\cup$

Como hay cambio de concavidad en $x = 0$ entonces el único punto de inflexión es $x = 0$ → Respuesta

III Parte

9. Si $f_{(x)} = x^4 - 2x^2$; Dominio: f = R

a. Hallamos los puntos críticos con el criterio de la primera derivada

$f'_{(x)} = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

Hallamos los valores para los cuales $f'(x) = 0$ para hallar los puntos críticos.

$4x(x^2 - 1) \cdot (x + 1) = 0$

Factorizando, luego $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$

Despejando se obtuvieron los puntos críticos 0, 1 y −1

b. Crecimiento y decrecimiento

Con los 3 puntos críticos se forman cuatro intervalos: $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$

Averiguamos donde f es creciente hallando $f'_{(x)} > 0$ donde f es decreciente hallando $f'_{(x)} < 0$

$4x(x-1)\cdot(x+1)$

¡Piensa!

El profesor de matemáticas de grado 11 siempre anda buscando relaciones entre números; un buen día se dio cuenta de que el número formado por los últimos dos dígitos de los números telefónicos de su casa, el del colegio y del rector, eran tres números primos consecutivos, tales que al multiplicarlos daba como resultado el número telefónico de su colega de grado 10, que empieza por 6 y consta de cinco dígitos. ¿Cuál es el número de su colega?

en$(-\infty,-1) \Rightarrow$ $(-)\cdot(-)\cdot(-)$ $= - < 0 \Rightarrow$ $f'_{(x)} < 0$ ↘ decreciente

en $(-1,0)$ $\Rightarrow$ $(-)\cdot(-)\cdot(+)$ $= + > 0 \Rightarrow$ $f'_{(x)} > 0$ ↗ creciente

en $(0,1)$ $\Rightarrow$ $(+)\cdot(-)\cdot(+)$ $= - < 0 \Rightarrow$ $f'_{(x)} < 0$ ↘ decreciente

en $(-1,\infty)$ $\Rightarrow$ $(+)\cdot(+)\cdot(+)$ $= + > 0 \Rightarrow$ $f'_{(x)} > 0$ ↗ creciente

c. Máximos – Mínimos

Evaluando los puntos críticos en $f''_{(x)}$

tenemos que $f'_{(x)} = 4x^3 - 4x$

Luego $f''_{(x)} = 12x - 4$

$f''_{(0)} = 12\ (0) - 4 = -\ 4 < 0$; hay un máximo en $x = 0$

$f''_{(1)} = 12\ (1) - 4 = 8 > 0$; hay un mínimo en $x = 1$

$f''_{(\ -1)} = 12\ (-1) - 4 = -\ 16 < 0$; hay un máximo en $x = -\ 1$

d. Punto de Inflexión

Para hallar el punto de inflexión se busca donde

$f'_{(x)} = 0 \Rightarrow 12\ (x - 1/3) = 0$

Luego $x = 1/3$

e. Concavidad:

Como hay un solo punto de inflexión, revisamos la concavidad en dos intervalos:

$(-\ \infty\ ,\ 1/3\ )$ y $(\ 1/3\ ,\ \infty\ )$.

$12(x-1/3)$

En $(-\ \infty\ ,\ 1/3\ )$ $\Rightarrow (+)\ \ (-) = - < 0$; $f''_{(x)} < 0 \cap$

En $(\ 1/3\ ,\ \infty\ )$ $\Rightarrow (+)\ \ (+) = + > 0$; $f''_{(x)} > 0 \cup$

Es cóncava hacia arriba en $x < 1/3$ y cóncava hacia abajo o convexa en $x > 1/3$

10. Solución:

Llamamos "x" y "y" los números a encontrar:

$x + y = 60$

$S = x^2 + y^2$ sea mínima (S es una función)

Despejamos una variable en $x + y = 60$

$y = 60 - x$

Ahora sustituimos el valor de "y" en la suma de sus cuadrados

$S_{(x)} = x^2 + y^2$

$S_{(x)} = x^2 + (60 - x)^2$

Hallamos los puntos críticos con $S'_{(x)} = 0$

$S'_{(x)} = 2x + 2\,(60 - 6)(-1)$

$S'_{(x)} = 2x - 2(60 - x) = 2x - 120 + 2x = 4x - 120$;

$S'_{(x)} = 0 \Rightarrow 4x - 120 = 0$

$S'_{(x)} = 4(x - 30) = 0$

Luego $x = 30 \Rightarrow$ es el punto crítico.

Hallamos "y" sustituyendo "x" en: $y = 60 - x$

Se tiene $y = 60 - 30 = 30$

Verificamos ahora si hay un mínimo.

Sustituyendo el punto crítico en la segunda derivada

$S''_{(x)} = 4 > 0 \Rightarrow$ Hay un mínimo.

Y los números son $x = 30\ ;\ y = 30 \rightarrow$ Respuesta

¡Piensa!

El número 153 tiene la curiosidad de ser igual a la suma de los cubos de sus cifras: $153=1^3+5^3+3^3$ Puede comprobarse que 407 es otro número que goza de dicha propiedad. Además de la unidad, existen dos números menores que 400 que poseen dicha propiedad.

Para el logro de los objetivos propuestos en esta actividad de aprendizaje, se presentan tres alternativas que te ayudarán a desarrollarlos. Escoge la que más te beneficie y se ajuste a tus posibilidades.

Alternativa 1

Estudio del Material Bibliográfico que se señala a continuación:

PITA, C. "Cálculo de una Variable" Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. México 1998. Pág. 158 a ______

CENTENO, G - CENTENO, H. y JIMENEZ, N. "Matemática Constructiva" Editorial Libros & Libres S.A. 1994. Pág. 120 a _____

PURCEL/VARBERG "Cálculo con Geometría Analítica" Prentice Hall Hispanoamericana S.A. México 1993. Pág. 93 a 214

Consulta las páginas señaladas en la bibliografía anterior a objeto de lograr los objetivos propuestos.

Alternativa 2

Lectura y estudio del material anexo en este módulo instruccional, que se encuentra a partir de la página ______ el cual está diseñado para alcanzar los objetivos propuestos.

Alternativa 3

Una alternativa propuesta por ti, que te permita alcanzar los objetivos propuestos.

Consulta con tu facilitador, para que recibas las instrucciones al respecto.

Sesión de Trabajo I

1. *Interpretación geométrica de la derivada recta tangente y normal.*

2. *Regla de los cinco pasos.*

3. *Teoremas básicos para el cálculo de la derivada*

Objetivo Específico 1

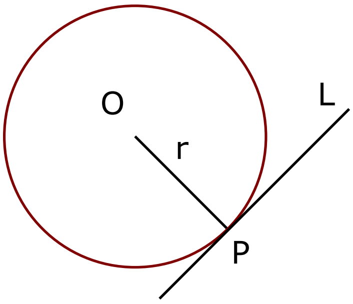
Valorar la importancia de la interpretación geométrica de la derivada de una función, con el fin de determinar la ecuación de la recta tangente y la recta normal a una curva.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

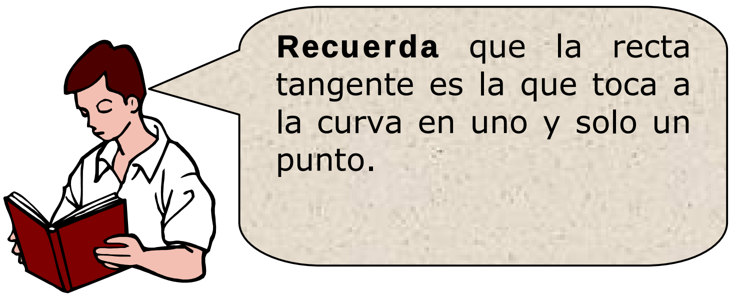
En la educación media y más aún en los cursos de geometría, fue fácil definir una recta tangente a una circunferencia en un punto P de ella, también trazar tangentes a ésta figura geométrica, bastó dibujar solamente una recta que toca dicha figura en uno y solo un punto.

¿Cómo lo hacemos?

Trazamos el radio desde el centro O al punto P y por este punto trazamos la recta L perpendicular al radio. Como vemos:

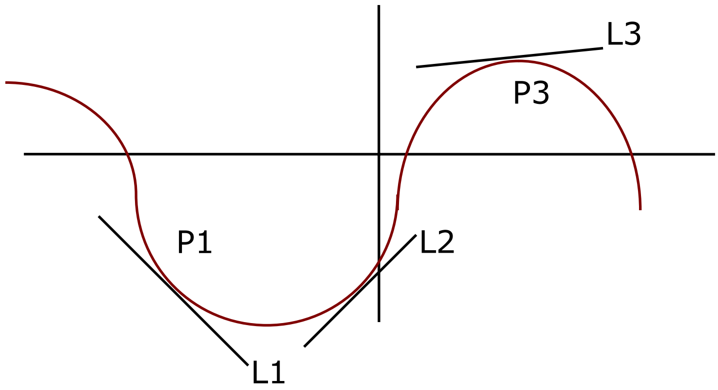


La recta L se llama tangente a la circunferencia en el punto P.



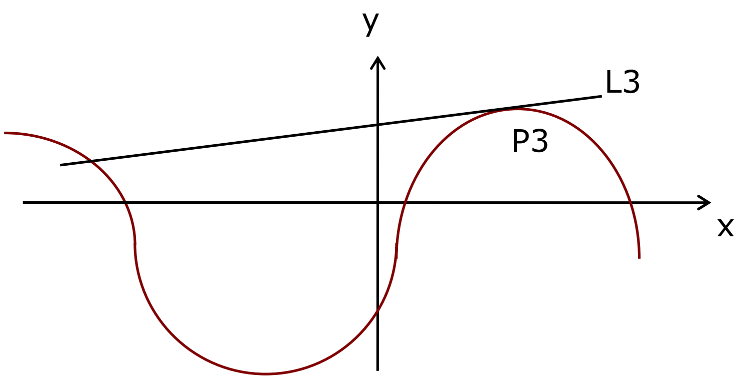
Ahora estudiaremos otro tipo de curvas en las cuales ésta definición no es del todo exacta.

Tomemos el caso de una curva continua:



Nótese que en la curva anterior pueden trazarse tangentes en cualquier punto de dicha curva, sin embargo, al prolongar las rectas L_1, L_2 y L_3, puede ocurrir que estas corten a la curva en más de un punto.

Por ejemplo la recta L_3 al prolongarse toca a la curva en varios puntos.



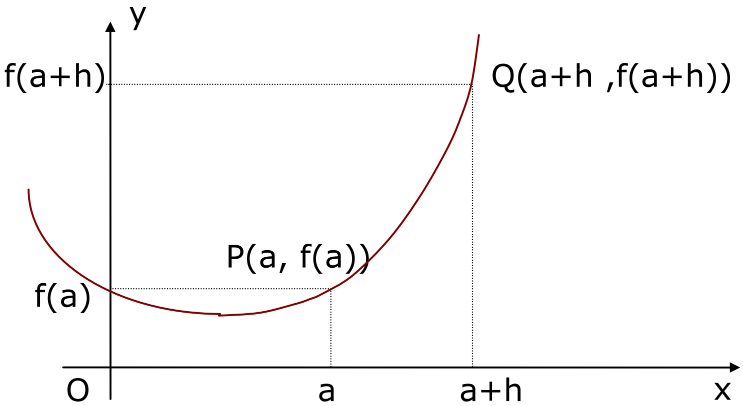
¡*Atención*! En este caso no se cumple en toda su extensión la definición de recta tangente.

PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA

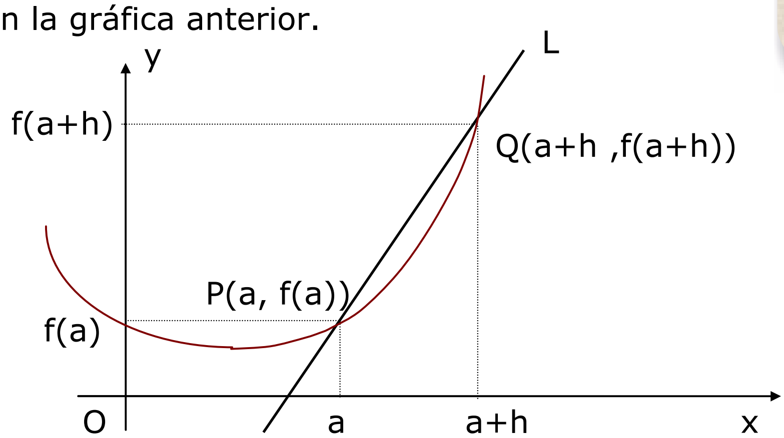
En lo expuesto hasta ahora podemos ver que mientras la definición de recta tangente a una circunferencia es muy sencilla, la definición de tangente para otra clase de curvas es más compleja y necesita de recursos adicionales como el concepto de Límite.

Para ello abordaremos el tema bajo otro punto de vista:

Sea y = f(x) (una curva cualquiera). Grafiquemos parte de ella:



Ahora tracemos una recta L que pase por los puntos P y Q dibujados en la gráfica anterior.



¡Diviértete!

El número 24 tiene la propiedad de que es "casi" un cuadrado perfecto y que su doble (48) es "casi" un cuadrado. ¿Cuál es el siguiente número que es "casi" un cuadrado?

El diagrama anterior nos muestra la recta L que pasa por P y Q, el cual la llamaremos recta secante.

Recuerde que toda recta que corta a una curva en dos puntos, se llama secante.

Supongamos que el punto P tiene coordenadas (a , f(a)) y Q tiene coordenadas (a+h , f(a+h)), con estos dos puntos se pueden obtener la pendiente de la recta que pasa por P y Q.

Recuerde que la pendiente de una recta está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{diferencia de ordenadas}}{\text{diferencia de abcisas}}$$

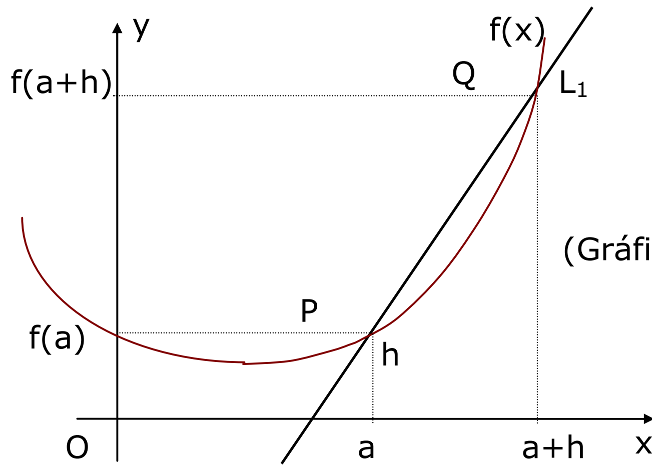
La expresión de la pendiente de la recta se puede representar de la siguiente manera:

$$m = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a-h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{\cancel{a} - h - \cancel{a}}$$

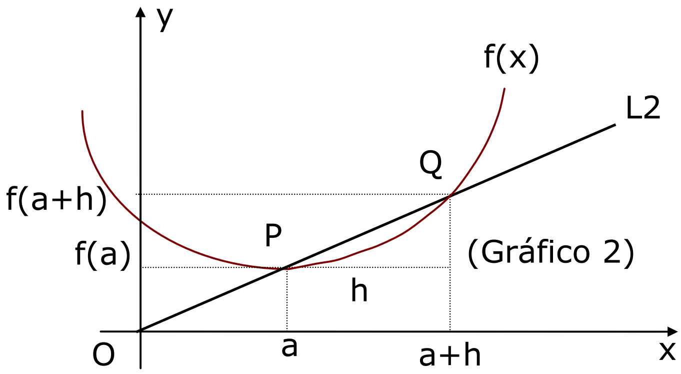
Como puede notarse la diferencia de las abscisas de los puntos P y Q es h. Por lo cual la pendiente de la recta secante PQ está definida por:

$$\overline{m}_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

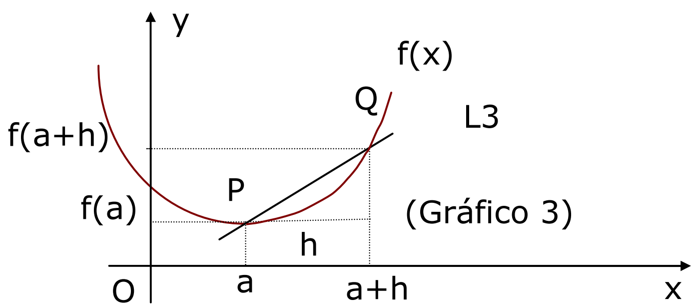
Ahora bien, si fijamos el punto P y movemos el punto Q a lo largo de la curva, hacia P, es decir, que Q se aproxime al punto P lo más que pueda, tal como lo indican las siguientes sucesiones de gráficas.



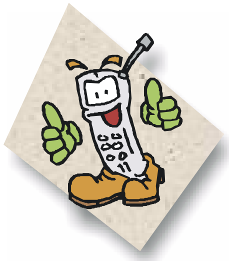
(Gráfico 1)



(Gráfico 2)

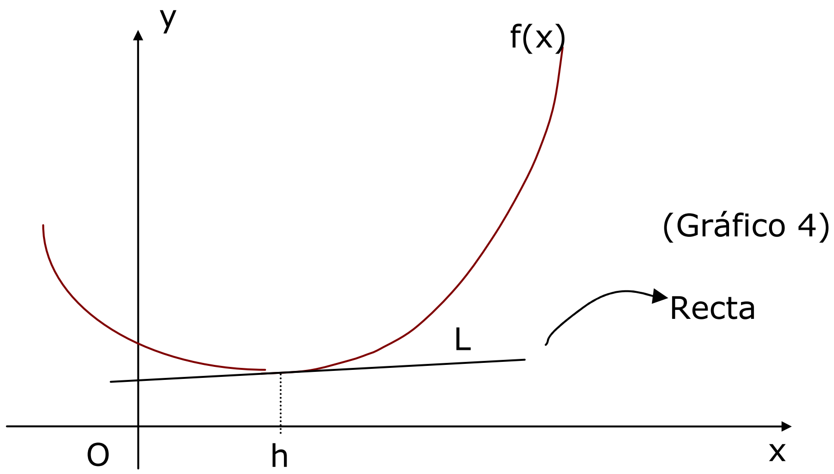


(Gráfico 3)



¡Infórmate!

Nicolás Bernoulli (1687-1759), matemático suizo, encontró las bases de la teoría de integridad de las funciones diferenciables.



Observemos que cuando el punto Q se aproxima al punto P, h se hace cada vez más pequeño, y las diferentes rectas L1, L2, Le,... mostradas en los gráficos 1, 2 y 3 tienden a una pendiente límite cuando h tiende a cero, (como lo muestra el gráfico 4) y está pendiente límite es la recta tangente T a la curva en el punto P, es decir, la recta secante tiende a convertirse en la recta tangente en el punto P, que es la derivada de la función f en ese punto.

En consecuencia, la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P, es el límite de la pendiente $\overline{m}_{pq}$ cuando h tiende a cero.

Lo antes expuesto, permite hacer la siguiente afirmación:

Definición 1:

Si f: R $\rightarrow$ R es una función continua en x = a, definimos la pendiente de la recta tangente a $f_{(x)}$ en el punto P(a , f (a)) como:

$$m_{(a)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si el límite existe

Luego la ecuación de la recta tangente a la curva $f_{(x)}$ en el punto P(a, f(a)), viene dada por:

$$y - f(a) = m(a)(x - a)$$

La ecuación anterior, es de gran utilidad para la resolución de ejercicios donde se pide hallar la ecuación de la recta tangente.

También puede escribirse como:

$$y - f_{(x_1)} = m_{(x_1)}(x - x_1)$$

Ahora estudiaremos algunos ejemplos:

<u>Ejemplo 1</u>:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $y = 2x^2 + 4$ en el punto de la curva donde $x_1 = \underline{1}$

Solución:

Tenemos que $f_{(x)} = 2x^2 + 4$ con $x_1 = \underline{1}$

Calculemos la pendiente de dicha función aplicando la definición (1).

Recuerde:

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Si el límite existe.

Sustituyendo la función en la definición

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 + 4 - (2x^2 + 4)}{h}$$

$$m_{(x_1)} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x^2+2xh+h^2)+4-(2x^2+4)}{h}$$ → resolviendo el producto notable.

$$m_{(x_1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2x^2}+4xh+2h^2+\cancel{4}-\cancel{2x^2}-\cancel{4}}{h}$$ → simplificando

$$m_{(x_1)} = \lim_{h\to 0} \frac{4xh+2h^2}{h}$$

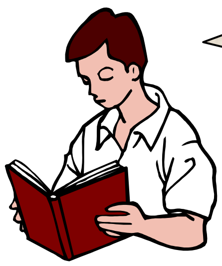
$$m_{(x_1)} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\,(4x+2h)}{\cancel{h}}$$ → segundo factor común "h" y simplificando.

$m_{(x_1)} = \lim_{h\to 0} 4x+2h$; $m_{(x_1)} = 4x \lim_{h\to 0} 2h$

como $\lim_{h\to 0} 2h = 0$ entonces $m_{(x_1)} = 4x$

Hallamos la pendiente en el punto dado $x_1 = 1$

$m_{(x_1)} = 4 \cdot 1$; $m_{(x_1)} = 4$



Recuerda: La ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_1) = m_{(x_1)}(x - x_1)$$

¡Piensa!

Cuatro cubos tienen aristas iguales a *x*, *x+1*, *x+2* y *x+3*, respectivamente, donde x es un real positivo. ¿Cuál es el valor de x para que la suma de los volúmenes de los tres primeros cubos sea igual al volumen del cubo de arista *x+3*?

Sustituyendo los valores en la ecuación de la recta tangente:

$y - 6 = 4(x - 1)$

$y - 6 = 4x - 4$

$y = 4x + 2$ → despejando y, tenemos la ecuación en forma explícita o en forma implícita de la siguiente forma:

$4x - 4 - y + 6 = 0$

$4x - y + 2 = 0$

Ejemplo 2:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f_{(x)} = 3x^3+2x^2 + x +1$ en el punto (2 , 35)

Solución:

Tenemos que $f_{(x)} = 3x^3+2x^2 + x +1$

Calculemos la pendiente de dicha función aplicando la definición (1)

$m_{(x_1)} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$ Si el límite existe.

Sustituyendo la función en la definición tenemos:

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^3 + 2(x+h)^2 + (x+h) + 1 - (3x^3 + 2x^2 + x + 1)}{h}$$

Resolviendo los productos notables

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + 2(x^2 2xh + h^2) + x + h + 1 - 3x^3 - 2x^2 - x - 1}{h}$$

Simplificando tenemos

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3x^3} + 9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 + \cancel{2x^2} + 4xh + 2h^2 + \cancel{x} + h + \cancel{1} - 3x^2 - \cancel{2x^2} - \cancel{x} - \cancel{1}}{h}$$

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 + 4xh + 2h^2 + h}{h}$$

Sacamos factor común h y simplificamos:

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(9x^2 + 9xh + 3h^2 + 4x + 2h + 1)}{\cancel{h}}$$

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} 9x^2 + 9xh + 3h^2 + 4x + 2h + 1$$

$$m_{(x_1)} = 9x^2 + 4x + 1 \lim_{h \to 0} 9xh + 3h^2 + 2h$$

como

$$\lim_{h \to 0} 9xh + 3h^2 + 2h \;\rightarrow\; 0$$

$$m_{(x_1)} = 9x^2 + 4x + 1$$

Hallamos la pendiente en el punto dado x_1 = 2

$m_{(x_1)} = 9(2)^2 + 4(2) + 1 = 36 + 8 + 1 = 45$

Sustituyendo los valores en la ecuación de la recta tangente tenemos:

$y - f(x_1) = m(x_1) \cdot (x - x_1)$

$y - 35 = 45(x - 2)$

$y - 35 = 45x - 90$

$y = 45x - 90 + 35$

$y = 45x - 55$ → (ecuación explícita)

$y - 45x + 55 = 0$ → (ecuación implícita)

RECTA NORMAL A UNA CURVA

A partir de la recta tangente a una curva se puede determinar la recta normal a dicha curva e la siguiente manera:

$$y - f(a) = -\frac{1}{m}(x - 1)$$

Observe que la pendiente de la recta tangente (M_{RT}) a una curva se utiliza para determinar la pendiente de la recta normal (M_{RN}).

Lo anterior nos permite afirmar:

Definición 2: La recta normal a una curva en un punto a, es la recta trazada por P y perpendicular a la recta tangente en a, y que forma un ángulo de 90º.

Recuerda: Dos líneas rectas son perpendiculares si:

$L1 \perp L2 \Leftrightarrow m_1 = -1/m_2$

<u>Ejemplo 3</u>:

Encontrar la ecuación de la recta normal a la curva definida por $f_{(x)} = x^3$ en $x_1 = -1$

Solución:

Calculemos la pendiente de dicha función aplicando la definición (1)

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Si el límite existe.

Sustituyendo la función en la definición tenemos:

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h}$$ Resolviendo el producto notable

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$ Simplificando

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}}$$ Sacando factor común h y simplificando

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2 \lim_{h \to 0} 3xh + h^2$$

Como

$$\lim_{h \to 0} 3xh + h^2 \rightarrow 0$$

$$m_{(x_1)} = 3x^2$$

Hallamos la pendiente en el punto dado x1 = -1

$m_{(x_1)} = 3(-1)^2 = 3(1) = 3$

$m_{(x_1)} = 3$

Sustituyendo los valores en la ecuación de la recta normal tenemos:

$$y - f_{(x_1)} = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -\frac{1}{3}(x - (-1))$$

$$y + 1 = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ $\rightarrow$ Ecuación en forma explícita

$\frac{1}{3}x + y + \frac{4}{3} = 0$ $\rightarrow$ Ecuación en forma implícita

¡Diviértete!

El número 24 tiene la propiedad de que es "casi" un cuadrado perfecto y que su doble (48) es "casi" un cuadrado. ¿Cuál es el siguiente número que es "casi" un cuadrado?

<u>Ejemplo 4</u>:

Determinar la ecuación de la recta tangente y recta normal a la curva definida por $f_{(x)} = \frac{1}{x}$ en $x_1 = 1$

Solución:

Tenemos que $f_{(x)} = \frac{1}{x}$; con $x_1 = 1$

Calculemos la pendiente de dicha función aplicando la definición (1)

$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$ Si el límite existe.

Sustituyendo la función en la definición tenemos:

$$m_{(x_1)} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x + h)} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$m_{(x_1)}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cancel{x}-\cancel{x}-h}{x^2+hx}}{h}$$ → Resolviendo la suma de fracciones

$$m_{(x_1)}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x^2+hx}}{\frac{h}{1}}$$ → Simplificando el numerador

$$m_{(x_1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x^2+hx)}$$ → Resolviendo doble c

$$m_{(x_1)}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(-1)}{\cancel{h}(x^2+hx)}$$ → Sacando factor común h

$$m_{(x_1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x^2+hx}$$ → Simplificando las h

Como

$$\lim_{h\to 0} hx \to 0$$

entonces

$$m_{(x_1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x^2}$$

Hallamos la pendiente en el punto dado $x_1 = 1$

$$m_{(x_1)}=\frac{-1}{(1)^2}=\frac{-1}{1} \quad\Rightarrow\quad m_{(x_1)}=-1$$

Sustituyendo los valores en la ecuación de la recta tangente y recta normal tenemos

$$y-f_{(x_1)}=m_{(x_1)}(x-x_1)$$

$$y-1=-1(x-1)$$

$$y-1=-x+1$$

$$y=-x+2 \to \text{Explícita}$$

$$x+y-2=0 \to \text{Implícita}$$

$$y-f_{(x_1)}=\frac{-1}{m_{(x_1)}}(x-x_1)$$

$$y-1=\frac{-1}{-1}(x-1)$$

$$y-1=x-1$$

$$y=x \to \text{Explícita}$$

$$-x+y=0 \to \text{Implícita}$$

¡Diviértete!

1
Si uno es soledad, dos, compañía, tres multitud, ¿cuatro y cinco que son?

Respuesta:

Nueve

Objetivo Específico 2

Formalizar y calcular por medio de la regla de los *cinco* pasos, la derivada de una función.

Hasta ahora hemos calculado la pendiente de la recta tangente y normal a la curva de una función en uno de sus puntos, empleando la siguiente ecuación:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A partir de esta afirmación vamos a citar la definición de la derivada de una función real:

Definición 3: Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ La derivada de la función f es aquella función (denotada por f') tal que su valor de función en cualquier número x en el dominio de f está dado por:

$$f'_{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si existe el límite.

Esto quiere decir, que asociando a cada x el número $f'_{(x)}$, construimos una nueva función que representa la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquiera de sus puntos, y esta se denomina: derivada de f.

Las notaciones más usuales para la función derivada de y = $f_{(x)}$ son: a ver a ver...

Ya! Son: $f'_{(x)}$; y'; $\frac{dy}{dx}$; D_x^y; $\frac{d[f(x)]}{dx}$

Importante: En el trabajo de este módulo utilizaremos la notación $f'_{(x)}$ para designar la derivada de $f_{(x)}$.

REGLA DE LOS CINCO PASOS

Para determinar la derivada de una función cualquiera utilizaremos un algoritmo sencillo denominado "Regla de los cinco (5) pasos".

Aunque usted lo encontrará en otros textos como regla e los 3 o 4 pasos.

Este algoritmo lo podemos describir así:

Paso 1: Escribir la función dada $[y=f_{(x)}]$

Paso 2: Incrementar la función $[f_{(x+h)}]$

Paso 3: Restarle a la función incrementada la función dada $[f(x+h) - f(x)]$

Paso 4: Dividir por h $\dfrac{[f(x+h) - f(x)]}{h}$

Paso 5: Tomar el límite cuando h tiende a cero y resolver evitando llegar a una expresión como denominador.

Ilustremos este método con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 5:

Dada $f_{(x)} = x^2 - 4x$ encontrar $f'_{(x)}$

Paso 1: $f_{(x)} = x^2 - 4x$

Paso 2: $f_{(x+h)} = (x+h)^2 - 4(x+h)$

$f_{(x+h)} = x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h$

Paso 3: $f_{(x+h)} - f_{(x)} = x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h - (x^2 - 4x)$

$f_{(x+h)} - f_{(x)} = \cancel{x^2} + 2xh + h^2 - 4\cancel{x} - 4h - \cancel{x^2} + 4\cancel{x}$

$f_{(x+h)} - f_{(x)} = 2xh + h^2 - 4h$

Paso 4: $\dfrac{[f_{(x+h)} - f_{(x)}]}{h} = \dfrac{2xh + h^2 - 4h}{h}$

$$\frac{\left[f_{(x+h)} - f_{(x)}\right]}{h} = \frac{\cancel{h}(2x+h-4)}{\cancel{h}}$$

Paso 5: $f'_{(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[f_{(x+h)} - f_{(x)}\right]}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h-4$

$f'_{(x)} = 2x-4$

¡Diviértete!

Le preguntaron a un oculista cuantas ovejas van en aquel rebaño? Y a primera vista contesta 437, como lo supo? Se les cuentan las patas y se dividió entre cuatro.

Ejemplo 6:

Dada $f_{(x)}$ = Sen x, encontrar $f'_{(x)}$

Paso 1: $f_{(x)}$ = Sen x

Paso 2: $f_{(x+h)}$ = Sen (x+h)

Recuerda:

Sen(a+h)=

Sena.Cos$b$+Cosa.Sen$b$

$f_{(x+h)}$ = senx cosh + cosx senh

Paso 3: $f_{(x+h)}$-$f_{(x)}$ = senx cosh + cosx senh - senx

$f_{(x+h)}$-$f_{(x)}$ = (senx cosh - senx) + cosx senh

Sacamos factor común

$f_{(x+h)}$-$f_{(x)}$ = sen x (cosh - 1) + cosx senh

Paso 4: $\frac{\left[f_{(x+h)} - f_{(x)}\right]}{h} = \frac{\operatorname{sen} x(\cosh - 1) + \cos x \operatorname{senh}}{h}$

Paso 5: $f'_{(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[f_{(x+h)} - f_{(x)}\right]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{senx}(\cosh - 1) + \operatorname{cosxsenh}}{h}$

Por propiedad de límites $\lim_{h\to 0} kf_{(x)} = k\lim_{h\to 0} f_{(x)}$

$= \operatorname{Senx} \lim_{h\to 0} \frac{(\cosh - 1)}{h} + \operatorname{cosx} \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{senh}}{h}$

Ya sabemos que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\text{sen}\alpha}{\alpha} = 1$

$$= \text{Senx} \lim_{h \to 0} \frac{(\cosh - 1)}{h} + \cos x \,.(1)$$

$$= \text{Senx} \lim_{h \to 0} \frac{(\cosh - 1)}{h} \frac{(\cosh + 1)}{(\cosh + 1)} + \cos x$$

$$= \text{Senx} \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cosh + 1)} + \cos x$$

Sabemos que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \; (-1)$

$-\text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha - 1$

Nos queda

$$= \text{Senx} \lim_{h \to 0} \frac{-\text{sen}^2 h}{h(\cosh + 1)} + \cos x$$

$$= \text{Senx} \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}\cancel{h}}{\cancel{h}} \cdot \frac{-\text{senh}}{(\cosh + 1)} + \cos x$$

$$= -\text{Senx} \lim_{h \to 0} \frac{\text{senh}}{(\cosh + 1)} + \cos x$$

Calculando el límite tenemos:

$$= -\text{Senx} \frac{\text{sen}\, 0}{\cos 0 + 1} + \cos x$$

$$= -\text{Senx} \frac{0}{2} + \cos x$$

$\therefore f'(x) = \cos x$

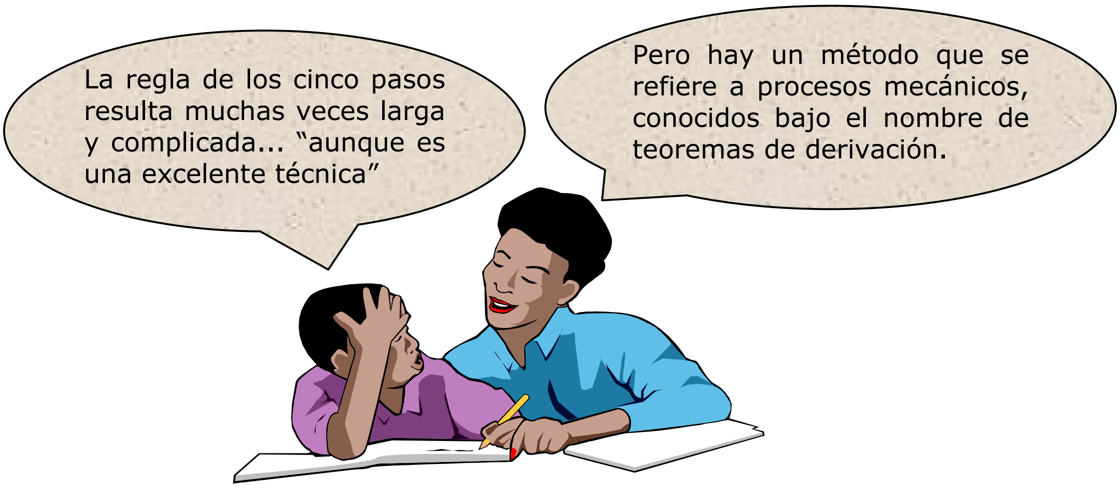
¡Diviértete!

x es inversamente proporcional a y, y x = 10, cuando y = 8. ¿Cual es el valor de x cuando y = 20.

Objetivo Específico 3	Formular y aplicar los teoremas sobre derivadas en la determinación de la derivada de una función.

TEOREMAS SOBRE DERIVADAS

El proceso que hemos utilizado hasta ahora para determinar la derivada de una función, se denomina derivación; correspondiente a la definición de derivada, el cual requiere de la aplicación de la regla de los cinco pasos.



Es necesario para resolver problemas donde interviene la derivada, tener un método que nos permita resolverlas rápidamente, corresponden a los teoremas, los cuales se aplican para derivar un gran número de funciones sin tener que recurrir a la definición de derivada. Veamos estos teoremas:

Teorema 1: Derivada de una función constante.
La derivada de una constante es igual a cero.
Simbólicamente: $f_{(x)} = k \Rightarrow f'_{(x)} = 0$; k es constante.

Ejemplo 7:

Si $f_{(x)} = 7 \Rightarrow f'_{(x)} = 0$

Ejemplo 8:

Si $f_{(x)} = \sqrt{2} \Rightarrow f'_{(x)} = 0$

Ejemplo 9:

Si $f_{(x)} = -1/3 \Rightarrow f'_{(x)} = 0$

Teorema 2: Derivada de la función identidad

La derivada de una función identidad es igual a uno.

Simbólicamente: Si $f_{(x)} = x \Rightarrow f'_{(x)} = 1$

Ejemplo 10:

Si $f_{(x)} = x \Rightarrow f'_{(x)} = 1$

Ejemplo 11:

Si $f_{(a)} = a \Rightarrow f'_{(a)} = 1$

Ejemplo 12:

Si $f_{(y)} = y \Rightarrow f'_{(y)} = 1$

Teorema 3: Derivada de la función potencia

La derivada de una función potencia, es igual a la potencia multiplicada por la base elevada al exponente menos uno.

Simbólicamente: Si $f_{(x)} = x^n \Rightarrow f'_{(x)} = nx^{n-1}$

Ejemplo 13:

Si $f_{(x)} = x^5 \Rightarrow f'_{(x)} = 5x^{5-1}$ $\Rightarrow$ aplicando el teorema 3

$\Rightarrow f'_{(x)} = 5x^4$ $\Rightarrow$ solución

Ejemplo 14:

Si $f_{(x)} = x^{3/5}$ $\Rightarrow f'_{(x)} = 3/5\ x^{3/5-1}$ $\Rightarrow$ aplicando el teorema

$\Rightarrow f'_{(x)} = 3/5x^{-2/5}$ $\Rightarrow$ solución

Ejemplo 15:

Si $f_{(x)} = \sqrt{x} \Rightarrow f_{(x)} = x^{1/2}$ $\Rightarrow$ Transformando la raíz en exponente fraccionario

$\Rightarrow f'_{(x)} = \frac{1}{2} x^{1/2-1}$ $\Rightarrow$ aplicando el teorema

$\Rightarrow f'_{(x)} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ $\Rightarrow$ solución

Teorema 4: Derivada de una Constante por una Función

La derivada de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

Simbólicamente: Si $Q_{(x)} = cf_{(x)} \Rightarrow Q'_{(x)} = cf'_{(x)}$

Ejemplo 16:

Si $Q_{(x)} = 5x$ donde $c=5$ y $f_{(x)} = x$ Entonces

$Q'_{(x)} = 5x'$

$Q'_{(x)} = 5(1)\, x^{1-1}$ $\Rightarrow$ Teorema de la función potencia

$Q'_{(x)} = 5x^0$ $\Rightarrow$ Resolviendo la resta y el producto

$Q'_{(x)} = 5(1)$ $\Rightarrow$ Aplicando la propiedad de potencia

$Q'_{(x)} = 5$ $\Rightarrow$ Resolviendo el producto

$\therefore Q'_{(x)} = 5$ $\Rightarrow$ Solución

¡Diviértete!

Si me das una naranja tendré el doble de las tuyas. Pero, si te doy una de las mías, tendremos igual cantidad. ¿Cuántas naranjas tiene cada uno? Respuesta: Yo tengo 7 y tu tienes 5.

Ejemplo 17:

Si $Q_{(x)} = \dfrac{2}{x^2}$, $x \neq 0$ donde $c = 2$ y $f_{(x)} = x^{-2}$

En primer lugar subimos el denominador cambiando su signo respectivo; como se muestra:

$Q_{(x)} = 2x^{-2}$ $\Rightarrow$ Ahora

$Q'_{(x)} = 2(x^{-2})'$

$Q'_{(x)} = (-2)(2)x^{-2-1}$ $\Rightarrow$ Teorema función potencia

$Q'_{(x)} = -4x^{-3}$ $\Rightarrow$ Resolviendo la resta y el producto

$\therefore Q'_{(x)} = -4x^{-3}$ $\Rightarrow$ Solución

Ejemplo 18:

Si $P_{(x)} = \frac{3}{2}x^{2/3}$ Donde $c = 3/2$ y $f_{(x)} = x^{2/3}$

La derivada de la función $P_{(x)}$ es:

$P'_{(x)} = \frac{3}{2}(x^{2/3})'$

$P'_{(x)} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^{2/3-1}$ $\rightarrow$ Teorema función potencia

$P'_{(x)} = x^{-1/3}$ $\rightarrow$ Resolviendo el producto y resta de fracciones

$P'_{(x)} = x^{-1/3}$ $\rightarrow$ Solución

Teorema 5: Derivada de una suma algebraica de funciones.

La derivada de una suma algebraica es igual a la suma algebraica de las derivadas.

Simbólicamente: $P_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)} \Rightarrow P'_{(x)} = f'_{(x)} + g'_{(x)}$

Ejemplo 19:

Si $P_{(x)} = x^2+2x$ Donde: $f_{(x)} = x^2$

$g_{(x)} = 2x$

Entonces:

$P'_{(x)} = (x^2+2x)'$

$P'_{(x)} = (x^2)'+(2x)' \rightarrow$ Aplicando el teorema de la suma

$P'_{(x)} = 2x^{2-1}+(1)\ (2)x^{1-1} \rightarrow$ Aplicando el teorema de la potencia y el teorema de la constante por una función.

$P'_{(x)} = 2x+2$ $\rightarrow$ Aplicando las operaciones

$\therefore$ Se tiene: $P'_{(x)} = 2x+2$ $\rightarrow$ Solución

¡Diviértete!

¿Cómo puede ser cortado un panqué cuadrado en seis pedazos, de tal forma que todos los pedazos tengan el mismo volumen e igual cantidad de crema?

Ejemplo 20:

Si $f_{(x)} = -\frac{3}{5}x^{7} - \frac{4}{3}x^{2} - \frac{4}{5}x$

Entonces :

$$f'_{(x)} = \left(-\frac{3}{5}x^{7} - \frac{4}{3}x^{2} - \frac{4}{5}x\right)'$$

$\Rightarrow f'_{(x)} = \left(-\frac{3}{5}x^{7}\right)' + \left(-\frac{4}{3}x^{2}\right)' + \left(-\frac{4}{5}x\right)' \rightarrow$ Aplicando el teorema de derivada de la suma.

$$\Rightarrow f'_{(x)} = (7)\left(-\frac{3}{5}x^{7-1}\right) + (2)\left(-\frac{4}{3}x^{2-1}\right) + (1)\left(-\frac{4}{5}x^{1-1}\right)$$

Aplicando el teorema de una constante por una función.

$\Rightarrow f_{(x)} = -\frac{21}{5}x^{6} - \frac{8}{3}x - \frac{4}{5} \rightarrow$ Aplicando las propiedades de potenciación

Se tiene: $\Rightarrow f_{(x)} = -\frac{21}{5}x^{6} - \frac{8}{3}x - \frac{4}{5} \rightarrow$ Solución

Ejemplo 21:

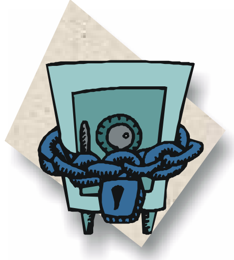
Si $f_{(x)} = x^{-2} + \frac{7}{x^{3}} - \sqrt{\frac{3}{x}} + 5$

Transformando la función de manera más simple se tiene :

$f_{(x)} = x^{-2} + 7x^{-3} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}} + 5 \rightarrow$ Aplicando la propiedad del inverso multiplicado y el cociente de una raíz.

$f_{(x)} = x^{-2} + 7x^{-3} - \sqrt{3}x^{-1/2} + 5 \rightarrow$ Transformando la raíz en exponente fraccionario y aplicando el inverso multiplicativo.

$$f'_{(x)} = \left(x^{-2} + 7x^{-3} - \sqrt{3}x^{-1/2} + 5\right)'$$



Curiosidades Matemáticas

El hijo de un albañil recibirá de su padre como regalo una caja de construcción con ladrillos de juguetes, solo si le dice cuanto pesa un ladrillo cuyo tamaño sea 5 veces menor que uno de verdad que pesa 5 Kg, siendo el juguete del mismo material. Volumen del ladrillo de verdad:

V = a.b.c.

Volumen del de juguete:

$v' = \frac{a}{5}\frac{b}{5}\frac{c}{5} =$

$\frac{a.b.c}{125} = \frac{V}{125}$

Peso del ladrillo:

5000 grs/125 = 40 grs

Rspta.=40grs

$f'_{(x)} = (x^{-2})' + (7x^{-3})' - (\sqrt{3}x^{-1/2})' + (5)'$ → Aplicando el teorema de la derivada de la suma

$f'_{(x)} = (-2)x^{-2-1} + (-3)(7)x^{-3-1} + (-\sqrt{3})(1/2)x^{-1/2-1} + 0$ → Aplicando los teoremas de la derivación de una constante por una función y el de una constante.

$f'_{(x)} = -2x^{-3} - 21x^{-4} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^{-3/2}$ → Solución

Teorema 6: Derivada del producto de funciones.
La derivada del producto de dos funciones es igual a la primera por la derivada de la segunda, más la segunda por la derivada de la primera. Simbólicamente: $P_{(x)} = f_{(x)} \cdot g_{(x)} \Rightarrow P'_{(x)} = f_{(x)} \cdot g'_{(x)} + g_{(x)} \cdot f'_{(x)}$

Ejemplo 22:

Hallar la derivada de $P_{(x)} = (3x-2x^2)(5+4x)$

Entonces :

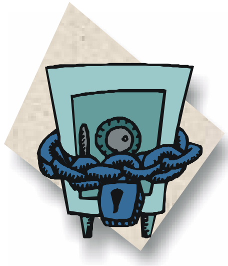
$p'_{(x)} = (3x-2x^2)(5+4x)' + (5+4x)(3x-2x^2)'$ → Aplicando el teorema 6

$p'_{(x)} = (3x-2x^2)4 + (5+4x)(3-4x)$ → Aplicando los teoremas de una función constante y de una función potencia.

$P'_{(x)} = 12x-8x^2 + 15-20x+12x-16x^2$ → Efectuando los productos

$P'_{(x)} = 4x-24x^2 + 15$ → Efectuando las operaciones

$\therefore\ P'_{(x)} = -24x^2 + 4x + 15$ → Solución



Curiosidades Matemáticas

Cuando uno entra tres veces a una habitación, ¿cuantas veces tiene que salir? Respuesta: Dos veces porque se puede quedar dentro.

Ejemplo 23:

Hallar la derivada de $P_{(x)} = 5x^{-2}(x+3)$

Entonces :

$P'_{(x)} = 5x^{-2}(x+3)' + (x+3)(5x^{-2})'$ → Aplicando el teorema 6

$P'_{(x)} = (5x^{-2})(1) + (x+3)(-2)(5)x^{-3} \rightarrow$ Aplicando el teorema de la función potencia e identidad.

$P'_{(x)} = 5x^{-2} + (x+3)(-10x^{-3}) \rightarrow$ Efectuando las operaciones indicadas

$P'_{(x)} = 5x^{-2} - 10x^{-2} - 30x^{-3} \rightarrow$ Efectuando el producto respectivo

$\therefore\ P'_{(x)} = -30x^{-3} - 5x^{-2} \rightarrow$ Solución

¡Piensa!

Se tiene una esfera situada dentro de un cilindro de manera que el cilindro tiene de altura y diámetro, el diámetro de la esfera. ¿Cual es la relación que existe entre el área de la esfera y el área total del cilindro ?

Ejemplo 24:

Hallar la derivada de $f_{(x)} = (x^5 - 3x)\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Entonces :

$f_{(x)} = (x^5-3x)(x^{-2}) \rightarrow$ Transformando la expresión

$f'_{(x)} = (x^5-3x)(x^{-2})' + (x^{-2})(x^5-3x)' \rightarrow$ Aplicando el teorema 6

$f'_{(x)} = (x^5-3x)(-2x^{-3}) + (x^{-2})(5x^4-3) \rightarrow$ Aplicando el teorema de la función potencia e identidad

$f'_{(x)} = -2x^2+6x^{-2} + 5x^2-3x^{-2} \rightarrow$ Resolvemos los productos

$\therefore$Se tiene que $f'_{(x)} = 3x^2+3x^{-2} \rightarrow$ Solución

Teorema 7: Derivada del cociente entre dos funciones.

La derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador por la derivada del numerador, menos el numerador por la derivada del denominador, dividido por el denominador al cuadrado.

Simbólicamente: si $P_{(x)} = \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} \Rightarrow P'_{(x)} = \frac{g_{(x)}.f'_{(x)} - f_{(x)}.g'_{(x)}}{[g_{(x)}]^2}$

Ejemplos donde se aplica este teorema

Ejemplo 25:

Si $f_{(x)} = \frac{x^3}{5x^2}$; hallar la derivada de f(x)

Solución:

El ejercicio nos indica el cociente entre x^3 y $5x^2$, donde x^3 es el numerador y $5x^2$ es el denominador. Entonces aplicando el teorema 7 tenemos:

$$f_{(x)} = \frac{5x^2 \cdot (x^3)' - x^3 \cdot (5x^2)'}{(5x^2)^2} \rightarrow \text{Aplicación del teorema}$$

$$f_{(x)} = \frac{5x^2 \cdot (3x^2) - x^3 \cdot (10x)}{25x^4} \rightarrow \text{Aplicación del teorema de}$$

una función potencia.

$$f_{(x)} = \frac{15x^4 - 10x^4}{25x^4} \rightarrow \text{Aplicando el producto de potencias de}$$

igual base.

$$f_{(x)} = \frac{5x^4}{25x^4} \rightarrow \text{Sumando algebraicamente las potencias de}$$

igual exponente

$$f_{(x)} = \frac{x^{4-4}}{5} \rightarrow \text{Propiedades de potenciación}$$

$f'(x) = 1/5$

Por lo tanto : $f'(x) = 1/5$

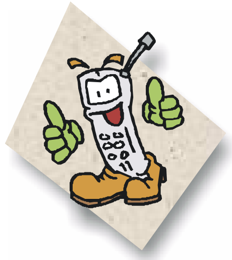
<u>Ejemplo 26</u>:

Si $f_{(x)} = \dfrac{x}{x + \sqrt[3]{x}}$; $x \neq 0$

Solución:

$$f_{(x)} = \frac{x}{x + x^{1/3}}$$

$$f'_{(x)} = \frac{x + x^{1/3}(x)' - x\left(x + x^{1/3}\right)'}{\left(x + x^{1/3}\right)^2} \rightarrow \text{Aplicando el teorema 7}$$



¡Infórmate!

Georg Friedrich Bernhard Rieman (1826-1866), matemático alemán, autor de trabajos sobre las bases de una teoría universal de las funciones y de investigaciones que abrieron nuevos campos de la geometría, fue uno de los más importantes matemáticos modernos. Algunos libros de cálculo aún usan la idea de las sumas de Rieman para definir la integral.

$$f'_{(x)} = \frac{\left(x+x^{1/3}\right)(1) - x\left[(x)' + \left(x^{1/3}\right)'\right]}{\left(x + x^{1/3}\right)^2}$$ → Aplicando el teorema de la función potencia

$$f'_{(x)} = \frac{x+x^{1/3} - x\left[1 + \frac{1}{3}x^{-2/3}\right]}{\left(x + x^{1/3}\right)^2}$$ → Resolviendo las derivadas

$$f'_{(x)} = \frac{\cancel{x}+x^{1/3} - \cancel{x} - \frac{1}{3}x^{1/3}}{\left(x + x^{1/3}\right)^2}$$ → Rompiendo el paréntesis y simplificando

$$f'_{(x)} = \frac{\frac{2}{3}x^{1/3}}{\left(x + x^{1/3}\right)^2}$$ → Solución

¡Piensa!

tres jugadores de tenis tienen dos raquetas cada una las guardan todas juntas, en un casillero del club. Si cada jugador coge al azar una raqueta de las seis, ¿Cual es la probabilidad de que ninguno de los tres coja una de sus raquetas.

Ejemplo 27

Si $f_{(x)} = \frac{(x+5)(x^2+1)}{2x+3}$

Solución:

$$f'_{(x)} = \frac{(2x+3)\left[(x+5)(x^2+1)\right]' - (x+5)(x^2+1)(2x+3)'}{(2x+3)^2}$$ → Aplicando teorema 7

$$f'_{(x)} = \frac{(2x+3)\left[(x+5)(x^2+1)'+(x^2+1)(x+5)'\right] - (x+5)(x^2+1)(2x+3)'}{(2x+3)^2}$$ →

Aplicando la derivada del producto y de una constante por una función

$$f'_{(x)} = \frac{(2x+3)\left[(x+5)(2x)+(x^2+1)(1)\right] - (x+5)(x^2+1)(2)}{(2x+3)}$$ → Resolviendo las derivadas

$$f'_{(x)} = \frac{(2x+3)\left[(2x^2+10x)+(x^2+1)\right]-(2x+10)(x^2+1)}{(2x+3)^2} \rightarrow \text{Operando}$$

$$f'_{(x)} = \frac{(2x+3)\left[(2x^2+10x+x^2+1)\right]-(2x^3+2x+10x^2+10)}{(2x+3)^2} \rightarrow \text{Resolviendo}$$

los productos.

$$f'_{(x)} = \frac{(2x+3)\left[(3x^2+10x+1)\right]-(2x^3+10x^2+2x+10)}{(2x+3)^2}$$

$$f'_{(x)} = \frac{6x^3+20x^2+2x+9x^2+30x+3-2x^3-10x^2-2x-10}{(2x+3)^2}$$

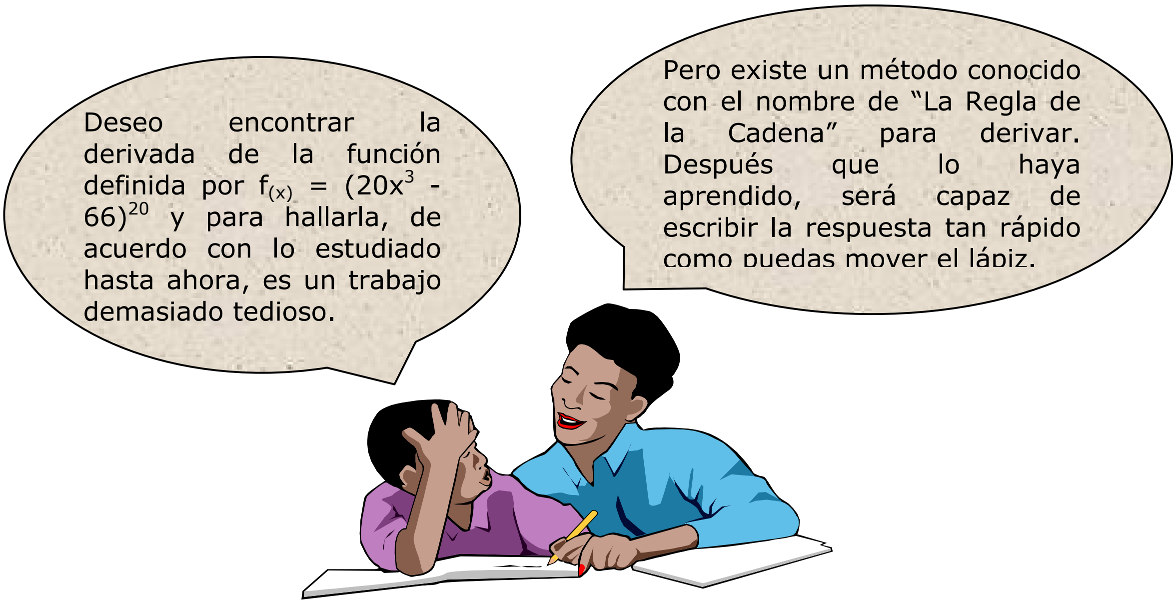
$$f'_{(x)} = \frac{4x^3+19x^2+30x-7}{(2x+3)^2}$$

4. Regla de la Cadena

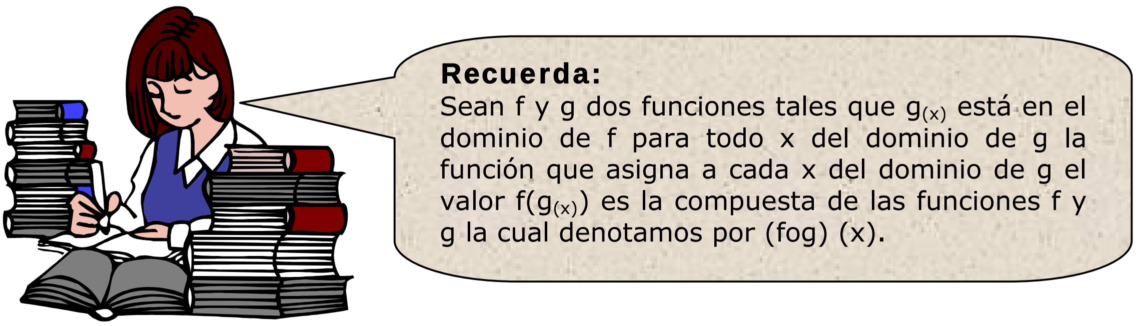
5. Derivación Implícita

Objetivo Específico 4

Calcular la derivada de una función compuesta aplicando la regla de la cadena.



En efecto, la regla de la cadena, llamada también derivación en cadena para funciones compuestas, es una herramienta muy útil e importante en el cálculo de una derivada.



Ahora presentaremos la regla de la cadena como un teorema el cual es uno de los resultados más importantes del cálculo diferencial.

Teorema 8.

Sean f, g y u funciones, y $f_{(x)}=g[u_{(x)}]$; además, g y u son derivables, entonces f es derivable y su valor es: $f'_{(x)} = g'[u_{(x)}] \cdot u'_{(x)}$

Si se toma la notación $Y = F_{(u)}$ y $u = g_{(x)}$, la regla de la cadena se expresa como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Veamos algunos ejemplos donde se aplica este teorema:

¡Piensa!

Cual es la probabilidad de que un número entre 1.000.000.000 y 9.999.999.999 (incluidos ambos) tenga todas sus cifras diferentes.

Ejemplo 28:

Determinemos la derivada de la función $f_{(x)} = (20x^3 - 66)^{20}$

Solución:

Sea $u = (20x^3 - 66)$, entonces $f_{(x)} = g(u^{20})$

Por definición de la regla de la cadena tenemos:

$f'_{(x)} = g'_{(u)} \cdot u'$

$f'_{(x)} = 20u^{19} \cdot (60x^2)$ → Aplicando teorema de la derivada función potencia

$f'_{(x)} = 20(20x^3-66)^{19} \cdot (60x^2)$ → sustituyendo el valor de u

$f'_{(x)} = 120x^2\,(20x^3-66)^{19}$

Ejemplo 29:

Determinar la derivada de la función $f_{(x)} = \left(\frac{2}{3}x + 3\right)^3$

Sea $u = \left(\frac{2}{3}x + 3\right)$, entonces $f_{(x)} = g(u^3)$.

$f'_{(x)} = g'_{(u)} \cdot u'$ → Definición regla de la cadena

$= 3u^2 \left(\frac{2}{3}\right)$ → Aplicando teorema de la derivada función potencia

$= 3\left(\frac{2}{3}x + 3\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)$ → Sustituyendo el valor de u

$= 2\left(\frac{2}{3}x + 3\right)^2$

¡Piensa!

La longitud del eje mayor de la siguiente elipse es a. Escribe una expresión en términos de a para el perímetro de cada triángulo, en el cual un vértice s uno de los focos y el lado opuesto contiene el otro foco.

<u>Ejemplo 30:</u>

Determinar la derivada de la función $f_{(x)} = \sqrt[3]{(1+x^3)^2}$

Si $f_{(x)} = \sqrt[3]{(1+x^3)^2} = (1+x^3)^{2/3}$

Sea $u = (1+x^3)$, entonces $f_{(x)} = g(u^{2/3})$

$f'_{(x)} = g'_{(u)}\, u'$ → Definición regla de la cadena

$f'_{(x)} = \frac{2}{3}u^{-1/3}.(3x^2)$ → Aplicando teorema de la derivada función potencia.

$f'_{(x)} = \frac{2}{3}(1+x)^{-1/3}.(3x^2)$ → Sustituyendo el valor de u

$f'_{(x)} = \frac{6x^2}{3\sqrt[3]{1+x}}$ → Resolviendo el producto y aplicando propiedades de radicación.

La regla de la cadena se extiende a la composición de más de dos funciones. Analicemos un ejemplo donde se aplica esta regla con más de dos funciones.

<u>Ejemplo 31:</u>

Determinar la derivada de la función $f_{(x)} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

Si $f_{(x)} = \left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^{1/2}$ sea $h(g_{(u)}) = \left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^{1/2}$;

$g_{(u)} = \sqrt{1+\sqrt{x}}$; u $\sqrt{x}$

$f'_{(x)} = h'(g_{(u)})\ .\ g'_{(u)}\ .\ u' \rightarrow$ Definición regla de la cadena

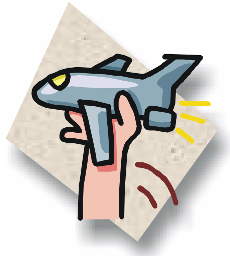
$$f'_{(x)} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^{-1/2}\ .\ \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{x}\right)^{-1/2}\ .\ \frac{1}{2}(x)^{-1/2}$$

Aplicando teorema de la derivada función potencia

$$f'_{(x)} = \frac{1}{8\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}.\sqrt{1+\sqrt{x}}.\sqrt{x}}$$ $\rightarrow$ resolviendo el producto y aplicando propiedades de radicación.

$$f'_{(x)} = \frac{1}{8\sqrt{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot x}}$$ $\rightarrow$ Aplicando introducción de radicales.

$$f'_{(x)} = \frac{1}{8\sqrt{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)\cdot\left(x+x\sqrt{x}\right)}}$$



¡Diviértete!

Determina mi edad, decía una anciana, sabiendo que al multiplicarla por su cuarta y por su sexta parte, y dividiendo el producto por sus 8/9, resultan:

243 años

Objetivo Específico 5

Aplicar el método de la derivación implícita para determinar la derivada de una función.

Todas las funciones con las que hemos trabajado hasta este momento se ven de manera explícita en la fórmula y = $f_{(x)}$, son tales que la regla por medio de la cual a cada x $\in$ R le asocia un único y $\in$ R. Un ejemplo de estas funciones es $f_{(x)} = y = x^2 - 2x + 4$, la derivada $f'_{(x)}$ se obtiene por aplicación directa de los teoremas sobre derivadas estudiados.

Observe que en la siguiente ecuación $x^2 - xy = -10$, no vemos de manera explícita lo que la función F hace con x para obtener la imagen f(x),"y" no es función de x ni "x" es función de "y". Decimos entonces que esta función está dada de manera implícita.

Si despejamos "y" en términos e "x" de la ecuación anterior $y = \dfrac{x^2 + 10}{x}$, haríamos la función implícita en explícita, sin embargo, no siempre es posible hacer explícita, una función que está dada en forma implícita, de hecho en el siguiente ejemplo: $y^5 + y + 2x = 0$, no es posible despejar a "y" en términos de "x". Hay muchas funciones importantes en matemática que se expresan implícitamente y que no pueden hacerse explícitas mediante el presente objetivo, desarrollaremos el cálculo de la derivada de tales funciones.

La técnica por medio de la cual obtenemos la derivada e una función dada en forma implícita, se conoce como derivación implícita.

El proceso que se utiliza consta de dos pasos:

a) Mediante la regla de la cadena, se derivan ambos miembros de la ecuación g(x,y) = 0
b) Se resuelve la ecuación que resulta después de la derivación, para y'.

¡Diviértete!

Encuentra tres pares de números cuya suma y producto sean iguales.

Ahora vamos a analizar algunos ejemplos donde se hace uso de la derivación implícita.

<u>Ejemplo 32:</u>

Determine y' suponiendo que existe una función derivable f(x,y), definida implícitamente por la ecuación.

$x^4 + x^2y^2 + x^2 = 10$

Solución:

Derivamos ambos miembros de la ecuación:

$4x^3+[x^2(2yy')+y^2(2x)]+2x = 0 \rightarrow$ Aplicando los teoremas de derivada de una suma, producto, y función constante.

$4x^3+2x^2yy'+2xy^2+2x = 0 \rightarrow$ Al desarrollar las operaciones indicadas.

$2x^2yy' = -4x^3-2xy^2-2x$

$y' = \dfrac{-(4x^3 + 2xy^2 + 2x)}{2x^2} \rightarrow$ Despejando y'

<u>Ejemplo 33</u>

Dado $x^5-2y^3x^2+3xy^4 + y^5 = 5$ encontrar y', mediante derivación implícita, suponiendo que "y" es una función derivables de f(x,y).

Solución:

Derivamos ambos miembros de la ecuación:

$5x^4-[(2y^3)2x+x^2 +(6y^2y')] + [3x(4y^3y')+y^4(3)] -5y^4y' = 0 \rightarrow$ Aplicando los teoremas de derivada de una suma, producto, función potencia y función constante

$5x^4-4xy^3-6x^2y^2y' +12xy^3y' + 3y^4 -5y^4y' = 0 \rightarrow$ al desarrollar las operaciones indicadas.

$(-6x^2y^2y' +12xy^3y'-5y^4y')+5x^4-4xy^3+3y^4 = 0 \rightarrow$ Agrupando términos para poder factorizar y'

$y'(-6x^2y^2+12xy^3-5y^4)= 4xy^3-5x^4-3y^4 \rightarrow$ Sacando factor común y'

$$y' = \frac{4xy^3 - 5x^4 - 3y^4}{12xy^3 - 6x^2y^2 - 5y^4} \rightarrow \text{Despejando } y'$$

Ejemplo 34

En la siguiente ecuación $2x^2-6y^2+14 = 0$ encuentre:

a) y' en función de "x" y "y" por derivación implícita.

b) Despeje "y" en función de "x" en la ecuación dada, deriva usando los teoremas vistos (Derivación explícita) y comprueba que los resultados sean iguales.

Solución:

a) Vamos a encontrar y' por derivación implícita

$2x^2-6y^2+14 = 0$

$4x-12yy'+0 = 0 \rightarrow$ aplicando teorema de la derivada de una suma, función potencia y constante.

$12yy'= 4x$

$$y' = \frac{4x}{12y} = \frac{x}{3y} \rightarrow \text{despejando } y'$$

b) Despejemos "y" de la ecuación original

$2x^2-6y^2+14 = 0$

$$y^2 = \frac{2x^2+14}{6}$$

$$y = \sqrt{\frac{2x^2+14}{6}}$$

¡Piensa!

Una calculadora que utilizaba un alumno de grado 11 tenía un circuito estropeado, de suerte que cuando debía operar con el dígito A, en su lugar lo hacía con . la calculadora funcionaba correctamente con todas las demás funciones. Con esa calculadora obtuvo los siguientes resultados:

7747-5672=12975

767x279=87717

Si esas son las cifras que aparecen en la pantalla, ¿cuál es el dígito erróneamente suprimido y por cuál ha sido sustituido? ¿Cuáles eran los resultados que realmente había calculado la máquina?

Como tenemos la ecuación en forma explícita vamos a derivarla utilizando los teoremas vistos.

$$y = \left(\frac{2x^2+14}{6}\right)^{1/2}$$ → Transformando la raíz en exponente fraccionario

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+14}{6}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{2x^2+14}{6}\right)'$$ → Aplicando regla de la cadena y derivada de la función potencia.

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+14}{6}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{x^2}{3}+\frac{7}{3}\right)'$$ → Factorizando y separando en sumas.

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+14}{6}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{x^2}{3}\right)' + \left(\frac{7}{3}\right)'$$ →Aplicando teorema de la derivada de una suma.

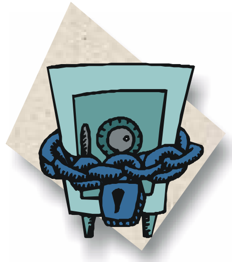
$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+14}{6}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{3}\left(x^2\right)' + 0$$ → Aplicando teorema de la derivada de una constante.

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+14}{6}\right)^{-1/2} \cdot \frac{2x}{3}$$ → Aplicando teorema de la derivada de una función potencia.

$$y' = \frac{2x}{6\sqrt{\frac{2x^2+14}{6}}}$$ →Desarrollando las operaciones indicadas.

$$\left[y' = \frac{x}{3y}\right]$$ → simplificando y sustituyendo el valor de "y"

De esta manera se ha comprobado que los resultados son iguales.



Curiosidades Matemáticas

Si hay un 22 moscas sobre una mesa y de un golpe con el periódico mató 3 cuantas quedan? Respuesta: Las dos muertas por que las demás salen volando.

Ejemplo 35

Considere la función y = $f_{(x)}$ dada implícitamente por la expresión $x^3 + 3xy^3 + y = 5$, calcule $f'_{(x)}$ en el punto (1,1)

Solución:

$x^3+3xy^3+y = 5$

Derivando a ambos miembros de la ecuación:

$3x^2+[3x(3y^2y')+y^3(3)]+y' = 0$ → Aplicando la derivada de una suma, de un producto, de la función potencia y constante.

$3x^2+9xy^2y'+3y^3+y' = 0$ → Resolviendo las operaciones indicadas.

$9xy^2y'+y'=-3y^3-3x^2$ → Agrupando los términos de y' para factorizar.

$y'(9xy^2+1)=-(3y^3+3x^2)$ → Sacando factor común y'

$y' = \dfrac{-(3y^3+3x^2)}{(9xy^2+1)}$ → Despejando

$y' = \dfrac{-(3(1)^3+3(1)^2)}{(9(1)(1)^2+1)}$ → Evaluando en el punto (1,1), es decir colocando x=1 y y=1

$y' = \dfrac{-(3+3)}{(9+1)} = \dfrac{-6}{10} = -3/5$

¡Diviértete!

En la solución de un problema de aritmética elemental se presentó el siguiente producto curioso: 159x48=7632 en el cual aparecen todos los dígitos del 1 al 9 un sola vez. Encontrar otros productos que tengan la misma propiedad.

6. Derivada de funciones trigonométricas e inversas

7. Derivada e funciones logarítmicas y trigonométricas

Sesión de Trabajo III

Objetivo Específico 6

Determinar la derivada de las funciones trigonométricas y sus inversas.

Para el estudio del presente tema es necesario recordar dos límites que son cruciales, pues estos son de mucha utilidad en las demostraciones de los teoremas sobre las derivadas de las funciones trigonométricas, así como también en la solución de problemas.

Estos límites son:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\text{Sen } \alpha}{\alpha} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\alpha \to 0} \frac{1 - \text{Cos } \alpha}{\alpha} = 0$$

Con estos dos límites, con la regla de la cadena, los teoremas de derivación y derivación implícita; tenemos las herramientas necesarias para el estudio del presente tema.

DERIVADAS TRIGONOMÉTRICAS

Teorema 9: Derivada de la función seno

Si $f_{(x)}$ = Sen x, entonces $f'_{(x)}$ = Cos x

A continuación daremos algunas expresiones donde se aplica este teorema.

¡Piensa!

Un número es tomado aleatoriamente del conjunto de enteros consecutivos de 29i - 2992 a 29i+2998. ¿Cual es la probabilidad de que dicho número sea divisible por 1995?

Ejemplo 36:

Sea $f_{(x)} = 3\text{Sen } x$, hallar $f'_{(x)}$

$f'_{(x)} = 3(\text{Sen } x)'$ $\rightarrow$ Aplicando el teorema

$f'_{(x)} = 3\text{Cos } x$ $\rightarrow$ Solución

Ejemplo 37:

Sea $f_{(x)} = 5x+\text{Sen}x$, Hallar $f'_{(x)}$

$f'_{(x)} = (5x)'+(\text{Sen}x)'$ $\rightarrow$ Teorema de una suma algebraica de funciones

$f'_{(x)} = 5+\text{Cos } x$ $\rightarrow$ Solución

$f'_{(x)} = \text{Cos } x + 5$

Ejemplo 38:

$f_{(x)} = 4x^2 \text{ Sen } x$. Hallar $f'_{(x)}$.

$f'_{(x)} = 4x^2 (\text{Sen } x)' + \text{Sen } x\, (4x^2)'$ $\rightarrow$ Teorema del producto

$f'_{(x)} = 4x^2 \text{ Cos } x + 8x\text{Sen } x$ $\rightarrow$ Solución

Teorema 10: Derivada de la función coseno

Si $f_{(x)} = \text{Cos } x$ entonces $f'_{(x)} = -\text{Sen } x$

Ahora se aplicará un proceso análogo al empleado para ejemplificar el teorema anterior.

Ejemplo 39:

Sea $f_{(x)} = 2 \text{ Cos } (2x)$. Hallar $f'_{(x)}$

$f'_{(x)} = 2(\text{Cos } 2x)'$ $\rightarrow$ Aplicando el teorema

$f'_{(x)} = 2(-\text{Sen } 2x)\,(2x)'$ $\rightarrow$ Regla de la cadena

$f'_{(x)}$ = -4Sen 2x → Derivada de una constante por una función.

$f'_{(x)}$ = -4Sen 2x → Solución

Ejemplo 40:

Sea $f_{(x)}$ = Cos 3x. Hallar $f'_{(x)}$

$f'_{(x)}$ = (Cos 3x)' → Aplicando el teorema

$f'_{(x)}$ = -Sen 3x (3x)' → Regla de la cadena

$f'_{(x)}$ = -3Sen 3x → Derivada de una constante por una función.

$f'_{(x)}$ = -3Sen 3x → Solución

Ejemplo 41:

Sea $f(x) = \dfrac{1\text{-Senx}}{1\text{-Cosx}}$

$$f'_{(x)} = \frac{(1\text{-Cosx})(1\text{-Senx})' - (1 - \text{Senx})(1 - \text{Cosx})'}{(1\text{-Cosx})^2} \rightarrow$$

Derivada de un cociente de funciones

$$f'_{(x)} = \frac{(1 - \text{Cosx})(- \text{Cosx}) - (1\text{-Senx})(\text{Senx})}{(1 - \text{Cosx})^2} \rightarrow \text{Aplicando}$$

la derivada del seno y coseno

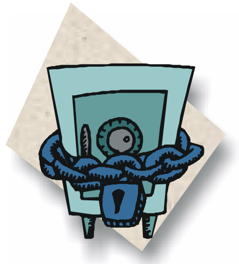
$$f'_{(x)} = \frac{\text{-Cosx} + \text{Cos}^2\text{x} - \text{Senx} + \text{Sen}^2\text{x}}{(1 - \text{Cosx})^2} \rightarrow \text{Aplicando el}$$

producto respectivo

$$f'_{(x)} = \frac{\text{Sen}^2\text{x} + \text{Cos}^2\text{x} - \text{Senx} - \text{Cosx}}{(1 - \text{Cosx})^2} \rightarrow \text{Ordenando}$$

$$f'_{(x)} = \frac{1 - \text{Senx} - \text{Cosx}}{(1 - \text{Cosx})^2} \rightarrow \text{Aplicando la identidad}$$

$\text{Sen}^2\text{x}+\text{Cos}^2\text{x} = 1$



Curiosidades Matemáticas

A un matemático le preguntaron la edad de su hermano. El contestó sibilinamente: tomad 4 veces la edad que tendría dentro de 4 años y restadle 4 veces la edad que tenía hace 4 años. Resultará la edad que tiene hora. ¿Qué edad tiene el hermano del complicado matemático? Creo, sinceramente, que estas preparado para contestar que su edad es 32 años. De todos modo, procura plantear bien la ecuación que corresponde

Teorema 11. Derivada de la función tangente

Si $f_{(x)}$ = tg x entonces $f'_{(x)} = Sec^2 x$

A continuación se presentan algunos ejemplos donde se aplica este teorema.

Ejemplo 42:

Sea $f_{(x)}$ = Sen(tgx). Hallar $f'_{(x)}$

Entonces

$f'_{(x)}$ = Cos(tgx) (tgx)' → Aplicando teorema del seno y regla de la cadena

$f'_{(x)}$ = Cos(tgx) (Sec^2x) →Aplicando el teorema de la derivada de la función tangente.

$f'_{(x)}$ = Cos (tgx) (Sec^2 x) →Solución

Ejemplo 43:

Sea $f_{(x)}$ = 3tg4x. Hallar $f'_{(x)}$.

Entonces:

$f'_{(x)}$ = (3tg4x)' → Aplicando el teorema de la función tangente

$f'_{(x)}$ = 3 Sec^2 4x (4x)' → Aplicando regla de la cadena

$f'_{(x)}$ = 3 Sec^2 4x (4) → Aplicando teorema de la derivada de una constante por una función

$f'_{(x)}$ = 12 Sec^2 4x → Solución

Ejemplo 44:

Sea $f'_{(x)} = x^2$ Sen x + Cos x; Hallar $f'_{(x)}$

Solución:

$f'_{(x)}$ = [x^2Senx]'+[Cosx]' → Aplicando la derivada de una suma algebraica de funciones

$f'_{(x)}$ = x^2(Senx)'+Senx(x^2)'+(-Senx) → Aplicando la derivada de un producto y derivada del Coseno.

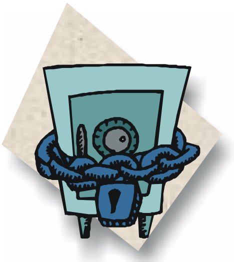
$f'_{(x)} = x^2Cosx+2xSenx-Senx \rightarrow$ Aplicando derivada del seno, coseno y de la función potencia.

$\therefore f'_{(x)} = x^2Cosx+2xSenx-Senx \rightarrow$ Solución

Teorema 12. Derivada de la función Secante

Si $f_{(x)}$ = Sec x entonces $f'_{(x)}$ = Secx tgx

Ahora daremos algunos ejemplos donde se pone en práctica este teorema



Curiosidades Matemáticas

Un sastre tiene una pieza de paño de 12 metros de longitud. Si cada día corta 2 metros, en cuantos días terminará de cortar la pieza?

Respuesta: En 5 días puesto que el quinto corte divida 4 metros

Ejemplo 45:

Sea $f_{(x)}$ = Sec 5x. Hallar $f'_{(x)}$

Solución:

$f'_{(x)}$ = 5tg5x Sec5x $\rightarrow$ Aplicando directamente el teorema

$\therefore f'_{(x)}$ = 5tg5x Sec5x $\rightarrow$ Solución

Ejemplo 46:

Sea $f_{(x)} = (1+Secx)^3$. Hallar $f'_{(x)}$

Solución

$f'_{(x)} = [(1+Secx)^3]'$

$f'_{(x)} = 3(1+Secx)^2 (1+Secx)' \rightarrow$ Aplicando regla de la cadena y derivada de la función potencia

$f'_{(x)} = 3(1+Secx)^2 [(1)'+(Secx)'] \rightarrow$ Derivada de una suma algebraica de funciones

$f'_{(x)} = 3(1+Secx)^2 [0+Secx\ tgx] \rightarrow$ Derivada de una constante y de la secante

$f'_{(x)} = 3(1+Secx)^2 (Secx\ tgx) \rightarrow$ Solución

Ejemplo 47:

Sea $f(x) = 5Secx\ (2x^2+Senx)^2$; Hallar $f'_{(x)}$

Solución:

$f'_{(x)} = 5Secx\ [(2x^2+Senx)^3]'+(2x^2+Senx)^3(5Secx)' \rightarrow$ Derivada de un producto

$f'_{(x)} = 5Secx\ [(4x+Cosx)(3(2x^2+Senx))^2]+5Secxtgx(2x^2+Senx)^3 \rightarrow$ Solución

Teorema 13. Derivada de la función Cosecante

Si $f_{(x)} = cscx$ entonces $f'_{(x)} = -cscx\ cotx$

Ejemplos donde se pone en práctica este teorema

Ejemplo 48:

Si $f_{(x)} = csc\ x$. hallar $f'_{(x)}$

Entonces:

$f'_{(x)} = \dfrac{1}{Sen\ x} \rightarrow$ Transformando en expresión seno.

$f'_{(x)} = \left(\dfrac{1}{Sen\ x}\right)' \rightarrow$ Aplicando el teorema

$f'_{(x)} = \dfrac{Sen\ x(1)' - 1(Senx)'}{Sen^2\ x} \rightarrow$ Derivada de un cociente

$f'_{(x)} = \dfrac{0 - 1(Cosx)}{Sen^2\ x} \rightarrow$ Derivada del seno

$f'_{(x)} = -\dfrac{1'}{Sen^2\ x} \cdot (Cosx) \rightarrow$ Operando

$f'_{(x)} = -\left(\dfrac{1'}{Sen\ x}\right) . \left(\dfrac{Cosx}{Senx}\right) \rightarrow$ Transformamos la expresión para obtener Cotx

$f'_{(x)} = -cscx\ cotx \rightarrow$ Solución

Ejemplo 49:

Sea $f_{(x)} = \csc(2x)tgx$. Hallar $f'_{(x)}$

Solución:

$f'_{(x)} = \csc(2x)(tgx)' + tgx\,[\csc 2x]'$ → Derivada del producto

$f'_{(x)} = \csc 2x\ Sec^2 x + tgx\,[-\csc 2x \cot 2x](2x)'$ → Derivada de la función tangente y cosecante

$f'_{(x)} = \csc 2x\ Sec^2 x + 2tgx\,[-\csc 2x \cot 2x]$ → Derivada de una constante por una función

$f'_{(x)} = \csc 2x\ Sec^2 x - 2tgx \csc 2x \cot 2x$ → Solución

Ejemplo 50:

Sea $f(x) = \csc^2 5x + Senx$. Hallar $f'_{(x)}$

$f'_{(x)} = (\csc^2 5x)' + (Sen\ x)'$ → Derivada de una suma algebraica de funciones

$f'_{(x)} = 2\csc 5x\,(5x)' + Cos\ x$ → Derivada de una función potencia, seno y regla de la cadena.

$f'_{(x)} = 10 \csc 5x + Cos\ x$ → Derivada de una constante por una función

$f'_{(x)} = 10 \csc 5x + Cos\ x$ → Solución

teorema 14. Derivada de la función cotangente

Si $f_{(x)} = Cot\ x$ entonces $f'_{(x)} = -\csc^2 x$

Ahora daremos a conocer algunos ejemplos donde se aplica este teorema

Ejemplo 51:

Sea $f_{(x)} = \cot x$. Hallar $f'_{(x)}$

Entonces:

$f_{(x)} = \dfrac{Cosx}{Senx}$ → Transformaremos la expresión

$$f'_{(x)} = \left(\frac{Cosx}{Senx}\right)' \rightarrow \text{Derivando}$$

$$f'_{(x)} = \frac{Senx(Cosx)'-Cosx(Senx)'}{Sen^2x} \rightarrow$$ Derivada de un cociente de funciones

$$f'_{(x)} = \frac{Senx(-Senx) - Cosx(Cosx)}{Sen^2x} \rightarrow$$ Derivada del seno y coseno

$$f'_{(x)} = \frac{- Sen^2x - Cos^2x}{Sen^2x} \rightarrow$$ Aplicando el producto respectivo

$$f'_{(x)} = \frac{-(Sen^2x + Cos^2x)}{Sen^2x} \rightarrow \text{Sacando factor común (-)}$$

$$f'_{(x)} = \frac{-1}{Sen^2x} \rightarrow \text{Propiedad } Sen^2x+Cos^2x= 1$$

$f'_{(x)} = -csc^2\ x \rightarrow$ Solución

¡Piensa!

Se tienen dos ollas de cobre de igual forma, con las paredes de igual espesor. Si la capacidad de la primera es ocho veces mayor que la de la segunda, ¿Cuantas veces es más pesada la primera?

Ejemplo 52:

Sea $f_{(x)} = 3\ csc\ x - 5\ cot\ x$. Hallar $f'_{(x)}$

$f'_{(x)} = 3(csc\ x)' - 5(cot\ x)' \rightarrow$ Derivada de una suma algebraica de funciones

$f'_{(x)} = 3(-csc\ x\ cot\ x) - 5(-csc^2\ x) \rightarrow$ Derivada de la función cosecante y cotangente

$f'_{(x)} = -3\ csc\ x\ cot\ x - 5\ csc^2\ x \rightarrow$ Solución

Ejemplo 53:

Sea $f_{(x)} = \frac{\cot 2x}{\operatorname{sen} 3x}$. Hallar $f'_{(x)}$

Solución:

$f'_{(x)} = \dfrac{\operatorname{sen}3x\ [ct2x]' - \cot 2x\ (\operatorname{sen}3x)'}{\operatorname{sen}^2 3x} \rightarrow$ Derivada de un cociente de funciones

$f'_{(x)} = \dfrac{\operatorname{sen}3x\ [-\csc^2 2x](2x)' - \cot 2x\ (\cos 3x)(3x)'}{\operatorname{sen}^2 3x} \rightarrow$ Derivada de la función cotangente seno y regla de la cadena.

$f'_{(x)} = \dfrac{\operatorname{sen}3x\ [-2\csc^2 2x] - 3\cot 2x\ \cos 3x}{\operatorname{sen}^2 3x} \rightarrow$ Derivada de una constante por una función

$f'_{(x)} = \dfrac{-2\csc^2 2x\ \operatorname{sen}3x - 3\cot 2x\ \cos 3x}{\operatorname{sen}^2 3x} \rightarrow$ Solución

DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Aplicando la derivación implícita es fácil determinar la derivada de las funciones trigonométricas inversas.

Teorema 16: Funciones trigonométricas inversas

a) Si $f_{(x)} = \operatorname{Sen}^{-1} x$ con $x \in [-1,1]$, entonces $f'_{(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) Si $f_{(x)} = \operatorname{Cos}^{-1} x$ con $x \in [-1,1]$, entonces $f'_{(x)} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) Si $f_{(x)} = \operatorname{Tg}^{-1} x$ con $x \in [-\infty,\infty]$, entonces $f'_{(x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$

d) Si $f_{(x)} = \operatorname{Cot}^{-1} x$ con $x \in [-\infty,\infty]$, entonces $f'_{(x)} = \dfrac{-1}{1+x^2}$

e) Si $f_{(x)} = \operatorname{Sec}^{-1} x$ con $x \in [-\infty,-1]$ u $[1, \infty]$, entonces $f'_{(x)} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

f) Si $f_{(x)} = \operatorname{Csc}^{-1} x$ con $x \in (-\infty,-1)$ u $[1, \infty)$, entonces $f'_{(x)} = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Nota: $f_{(x)} = y$

A continuación daremos algunos ejemplos donde se pone en práctica este teorema

Ejemplo 54:

Sea $y = \text{Sen}^{-1} x = \text{arc Sen } x$, entonces $x = \text{Sen } y$ aplicando derivación implícita a $x = \text{Sen } y$, obtenemos

$(x)' = (\text{Sen } y)'$

$1 = \text{Cos } y\,(y)' \rightarrow$ derivación implícita

$y' = \dfrac{1}{\text{Cos } y}$ $\text{Cos } y \neq 0 \rightarrow$ Despejando y'

Sabemos que:

$\text{Sen}^2 y + \text{Cos}^2 y = 1 \Rightarrow \text{Cos } y = \pm\sqrt{1 - \text{Sen}^2 y}$

Como $\text{Cos } y \neq 0$ y $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ entonces $\text{Cos } y > 0$

$\therefore\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{1\text{-Sen}^2 y}}$; Ahora como $x = \text{Sen } y$

Sustituimos en la expresión y tenemos que

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \rightarrow$ Solución

Ejemplo 55:

Si $y = \text{tg}^{-1} x$, encontrar y'

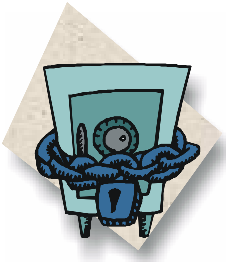
Solución

$x = \text{tg } y$ con $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$(x)' = (\text{tg } y)' \rightarrow$ Derivación a ambos lados

$1 = \text{Sec}^2 y\ y' \rightarrow$ Derivación implícita

$y' = \dfrac{1}{\text{Sec}^2 y} \rightarrow$ Despejando y'; $\text{Sec } y \neq 0$



Curiosidades Matemáticas

Pide alguien que piense un número, que lo multiplique por 2, después que le sume 20, que divida el resultado por 4 y que le preste la mitad del número pensado. El resultado será siempre 5.

$\dfrac{2n+20}{4} - \dfrac{n}{2} =$

$\dfrac{2n+20-2n}{4}$

$=5$

Como $Sec^2\ y = 1 + tg^2\ y$; y $x = tg\ y$; entonces

$$y' = \frac{1}{1 + Tg^2 y} \rightarrow \text{Sustituyendo } Sec^2\ y$$

$$y' = \frac{1}{1 + x^2} \rightarrow \text{Sustituyendo } x = tg\ y$$

$$\therefore\ y' = \frac{1}{1 + x^2} \rightarrow \text{Solución}$$

¡Piensa!

En un plano, cuatro líneas distintas dividen el interior de un círculo en regiones. Si m representa el máximo número de regiones y n el número mínimo, encuentra el valor de m+n

<u>Ejemplo 56</u>:

Si $y = csc^{-1}\ x$, encontrar y'

Solución

$x = csc\ y$

$(x)' = (csc\ y)' \rightarrow$ Derivando a ambos laos

$1 = -\ csc\ y\ cot\ y\ .\ y' \rightarrow$ Derivación implícita

$$y' = \frac{-1}{csc\,y\ \ cot\,y} \rightarrow \text{Despejando } y'$$

como $csc^2 y = 1 + cot^2 y$, y $cot\ y = \dfrac{cos\,y}{sen\,y} > 0$ entonces,

$cot\ y = \sqrt{csc^2 y - 1}$ ahora

$$y' = \frac{-1}{csc\,y\ \sqrt{csc^2\ y - 1}} \rightarrow \text{Sustituyendo coty}$$

$$y' = \frac{-1}{x\ \sqrt{x^2 - 1}} \rightarrow \text{Sustituyendo x=cscy}$$

$$\therefore\ y' = \frac{-1}{x\ \sqrt{x^2 - 1}} \rightarrow \text{Solución}$$

<u>Ejemplo 57</u>:

Sea $f_{(x)} = x^2 sec^{-1} x$, hallar $f'_{(x)}$

Solución

$y = x^3 \sec^{-1} x$

$y' = x^3 (\sec^{-1} x)' + \sec^{-1} x\ (x^3)'$ $\rightarrow$ Derivada de un producto

$y' = x^3 (\sec^{-1} x)' + \sec^{-1} x\ (x^3)'$ $\rightarrow$ Derivada de un producto

$y' = \cancel{x}^3\left(\dfrac{1}{\cancel{x}\sqrt{x^2-1}}\right) + \sec^{-1}x\left(3x^2\right)$ $\rightarrow$ Derivada de la función Sec^{-1} x y de una función potencia.

$y' = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} + 3x^2 \sec^{-1}x$ $\rightarrow$ Simplificando

$y' = \dfrac{x^2\left[1+3\sqrt{x^2-1}\sec^{-1}x\right]}{\sqrt{x^2-1}}$ $\rightarrow$ Suma de fracciones y factor común x^2

$y' = \dfrac{x^2\left[1+3\sqrt{x^2-1}\ \sec^{-1}x\right]}{\sqrt{x^2-1}}$ $\rightarrow$ Solución

Ejemplo 57:

Sea $f(x) = x \tan^{-1} x + \csc^{-1} x$

Solución:

$y = x \tan^{-1} x + \csc^{-1} x$

$y' = (x \tan^{-1} x)' + (\csc^{-1} x)'$ $\rightarrow$ Derivada de una suma algebraica de funciones.

$y' = x\ (\text{tg}^{-1} x)' + \text{tg}^{-1} x(x)'\ (\csc^{-1} x)'$ $\rightarrow$ Derivada de un producto y de $\csc^{-1}$

$y' = \dfrac{x}{1+x^2} + \text{tg}^{-1}x - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\rightarrow$ Aplicando la derivada de tg^{-1} y $\csc^{-1}$

$\therefore\ y' = \dfrac{x}{1+x^2} + \text{tg}^{-1}x - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\rightarrow$ Solución

Objetivo Específico 7

Calcular la derivada de la función exponencial y de la función logarítmica.

En cursos anteriores se estudiaron los temas referentes a las funciones exponenciales y logarítmicas. La función exponencial se definió como una ecuación donde la variable independiente aparece como exponente de una base constante.

Esta tiene la forma general:

$\{(x,y)/y=f(x)=a^x,\ a>0,\ x\in R\}$ Donde "a" es la base y "x" el exponente.

Y se llama función exponencial de base a, también se estudió la base exponencial natural; es decir la que tiene como base el número irracional positivo e= 2,71828..., que se denota como $f(x) = e^x$

La función inversa de la función exponencial de base a, se llama función logarítmica de base a y se define como $y = f(x) = \log_a x$. De la función logarítmica podemos obtener la definición de logaritmo: se dice que y es el logaritmo en base a de x si y solo si $a^y = x$ y se escribe $y = \log_a x$, con $a \in >0$.

Los logaritmos comunes son aquellos que tienen como base el número 10. Estos reciben el nombre de logaritmos decimales.

$\text{Log } x = \log_{10} x$, para todo $x>0$.

De la función exponencial natural $f(x) = e^x$, obtenemos la inversa, que es la función logarítmica natural, y de ella obtenemos los logaritmos naturales.

Se usa el símbolo Lrx, como la abreviatura de $\log_e x$ y se llama logaritmo natural de x.

$\text{Lrx} = \log_e x$ para todo $x>0$

Para el estudio del presente tema es muy importante recordar las propiedades que cumplen los logaritmos:

Si $y = \log_a x$ entonces $a^y = x$ ó $x=\log_a x \vee x>0$

$\text{Log}_a\, a=1$

$\text{Log}_a\, 1=0$

Si $y = \ln x$ entonces $x = e^y$ ó $x = e^{\ln x}$ $x>0$

$\text{Ln } e = 1$

$\text{Ln } 1= 0$

También debemos recordar que:

$Log_a (u.w) = Log_a u + Log_a w$

$Log_a (u/v) = Log_a u - Log_a w$

$Log_a (u^n) = nLog_a u, n \in R$

$Ln (u.w) = \ln u + \ln w$

$Ln (u/v) = \ln u - \ln w$

$Ln (u^n) = n \ln u, n \in R$

A continuación daremos a conocer los teoremas referidos a la función exponencial y logarítmica:

Teorema 17.

Si $y = \ln u$, siendo u una función de x entonces: $y' = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

Ejemplo 58.

Sea $y = x\sqrt{Ln\ x}$, Hallar y'

Al analizar la función dada observamos que la misma está conformada por un producto de funciones y por tanto sabiendo que:

i) $u = x \rightarrow u' = 1$ $\rightarrow$ Regla de la potencia

ii) $v = \sqrt{Ln\ x} \rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{\ln\ x}} \cdot \frac{1}{x}$ $\rightarrow$ Por teorema

Ya podemos aplicar la regla del producto de funciones, de la siguiente manera:

Como $(u.v)' = u.v' + v.u'$, sustituyendo cada uno de estos términos se tiene que:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} + 2\sqrt{\ln x} \, . \, 1$$

Simplificando se obtiene

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} + \sqrt{\ln x}$$

Resolviendo la operación indicada se tiene

$$y' = \frac{1 + 2\sqrt{\ln x} \cdot \sqrt{\ln x}}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1 + 2\ \ln\ x}{2\sqrt{\ln x}} \rightarrow \text{Solución}$$

Ejemplo 59. Sea yLnx + y^2 = 0 Hallar y'.

Este ejercicio se diferencia del anterior en que las variables están relacionadas mediante una ecuación. Cuando así es el caso se debe hacer uso de la derivación implícita como se muestra a continuación:

Al observar detenidamente la ecuación dada, nos podemos dar cuenta de que existe un producto de funciones. Haciendo uso de un procedimiento similar al del ejercicio anterior tenemos que:

u = y

v = lnx

Se tiene:

y' . Lnx + y/x + 2y.y' = 0 → Aplicando la regla del producto y el teorema

y' . Lnx + 2y.y' = -y/x → Agrupando términos semejantes

y' (Lnx + 2y) = -y/x → Sacando factor común y'

$$y' = \frac{-y}{x(\ln x + 2y)}$$ → Despejando obtenemos la solución

Ejemplo 60: Sea y = Ln $\sqrt{x}$ Hallar y'

Como u = $\sqrt{x}$ = $x^{1/2}$

¡Piensa!

un cubo pintado de rojo, es dividido en 64 cubos pequeños. ¿Cuantos de los cubos pequeños tienen una cara pintada de rojo? ¿dos caras ? ¿cuatro caras ? ¿ninguna cara ?

$$du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \rightarrow \text{ Aplicando el teorema}$$

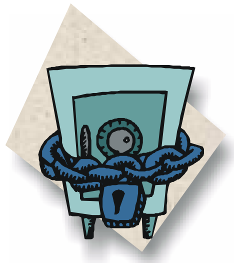
$$y' = \frac{1}{2\left(\sqrt{x}\right)^2} \quad \rightarrow \text{ Multiplicación de igual base}$$

$$y' = \frac{1}{2x} \quad \rightarrow \text{ Simplificando obtenemos la solución}$$

Teorema 18.

Si u es una función de "x" y $f(x) = e^u$ Entonces: $y' = e^u \cdot \dfrac{du}{dx}$

A continuación daremos algunos ejemplos donde se pone en práctica el teorema enunciado:



Curiosidades Matemáticas

Un candado y su llave cuestan 1050 Bs., si el candado vale 100 Bs. más que la llave, cuanto cuesta el candado? Respuesta : 1025 Bs.

Ejemplo 61. Sea Lny = xLnx hallar y'

Para resolver este ejercicio basta aplicar el hecho de que las funciones logarítmicas y exponenciales son inversas, para obtener:

Colocando el número "e" como base $e^{\ln y} = e^{x\ln x}$

En el término de la izquierda simplificando a "e" con el "ln" $y = e^{x\ln x}$

Aplicando el teorema $y' = e^{x\ln x}(\ln x+1)$

Pero $y = e^{x\ln x}$ entonces $y' = y(\ln x+1)$

$y' = y(\ln x+1)$ solución

Ejemplo 62. Sea $y = x^2 e^2$ hallar y'

Aplicando la regla del producto de funciones se tiene que:

$u = x^2$ $\qquad u' = 2x$

$v = e^x$ $\qquad\qquad v' = e^x$

Entonces $y' = 2xe^x + x^2e^x$

Sacamos factor común xe^x obtenemos la solución $\quad y' = x\, e^x\,(2+x)$

$y' = xe^x\,(x+2)$

Teorema 19:

Si $y = \log_a x$ entonces $y' = \dfrac{1}{u\ \ln\ a} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Ejemplos donde se pone en práctica el teorema anterior.

Ejemplo 63. Sea $y = \log_3 x$; hallar y'

$y' = \dfrac{1}{x(\ln\ 3)}$ → Aplicando directamente el teorema

Ejemplo 64. Sea $y = \log_5 \sqrt{x^2\text{-}1}$; Hallar y'

Sea $u = \sqrt{x^2\text{-}1}$

$u = (x^2 - 1)^{1/2}\ 2x$

Aplicando el teorema, se tiene que:

$$y' = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)(\ln 5)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^{1/2}}$$

$$y' = \frac{x}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2(\ln 5)} \quad \rightarrow \quad \text{Operando}$$

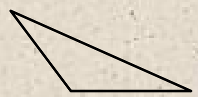
$$y' = \frac{x}{\left(x^2-1\right)(\ln 5)} \quad \rightarrow \quad \text{Solución}$$

Ejemplo 65. Sea y $\log_2\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$ Hallar y'

$$u = \frac{x^2}{x-1}$$

¡Diviértete!

Descompón el siguiente triángulo, que tiene un ángulo obtuso, en toros triángulos con ángulos agudos. ¿Cuál es el mínimo número de triángulos en que se puede descomponer?



Sea $v = x^2$ $v' = 2x$

$w = x\text{-}1$ $w' = 1$

$$\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} \rightarrow \text{Aplicando la derivada del cociente}$$

Entonces

$$y' = \frac{1}{\left(\frac{x^2}{x-1}\right)\ln 2} \cdot \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} \rightarrow \text{Aplicando el teorema}$$

$$y' = \frac{1}{x^2(\ln 2)} \cdot \frac{x^2-2x}{(x\text{-}1)^2} \rightarrow \text{Operando}$$

$$y' = \frac{1}{x^2(\ln 2)} \cdot \frac{x(x-2)}{(x\text{-}1)} \rightarrow \text{Simplificando}$$

$$y' =. \frac{x-2)}{x(x-1)(\ln 2)} \rightarrow \text{Solución}$$

Sesión de Trabajo IV

8. Aplicaciones de la Derivada

Objetivo Específico 8

Aplicar los criterios de la primera y segunda función derivada como herramienta de trabajo en la resolución de problemas de aplicación y en la construcción de gráfica de funciones.

La derivada es una herramienta fundamental en la solución de problemas en casi todas las ciencias del saber humano, pues ésta tiene múltiples aplicaciones en diferentes áreas.

Empezaremos por presentar la aplicación que tiene la derivada en la construcción de gráfica de funciones.

Vamos entonces a estudiarle a una función los valores críticos de f

- El crecimiento y decrecimiento de f.
- Los valores máximos y mínimos de f.
- El punto de inflexión de f y
- La concavidad de la función.

Este estudio requiere del conocimiento del criterio de <u>las derivadas de orden superior</u> específicamente de orden 1 y 2. Así pues tenemos la función $f_{(x)} = 4x^3+5x^2-7x-1$; y se calcula $f'_{(x)}$

Resulta:

$f'_{(x)} = 12x^2+10x-7$, la cual es también una función y se llama derivada de f(x) o primera función derivada (orden 1).

Esta función, $f'_{(x)}$, también puede ser derivable y en ese caso, a la derivación obtenida se le llama segunda función derivada (o derivada de orden 2) la cual se denota por $f''_{(x)}$ y se lee “f biprima de x”.

Así en el ejemplo propuesto $f''_{(x)} = 24x + 10$; la cual a su vez es otra función y por tanto, puede tener derivada.

Si está derivada existe, se le llama tercera función derivada y se denota por $f'''_{(x)}$ y se lee “f triprima de x” en el ejemplo propuesto $f'''_{(x)} = 24$;

¡Piensa!

El número de tres dígitos 2 a 3 al ser sumado con el número 326 da como resultado el número de tres dígitos 5b9. Si 5b9 es divisible por 9, ¿Cual es el valor de a+b ?

En general:

La derivada de orden n, donde n es un entero positivo mayor que 1, es la derivada de la función derivada de orden (n-1) y se denota por f^n.

En el ejemplo propuesto, la función es derivable hasta orden cuatro, ya que a partir de éste, el resto de las derivadas son iguales a cero (0).

Así se tiene que $f''''_{(x)} = 0$

Para el estudio de la gráfica de funciones solo necesitamos los criterios de la primera y segunda función derivada.

COMENCEMOS LAS APLICACIONES DE LA DERIVADA CON EL TRAZADO DE GRÁFICAS

Utilizaremos un teorema básico conocido como valores extremos cuyo enunciado es:

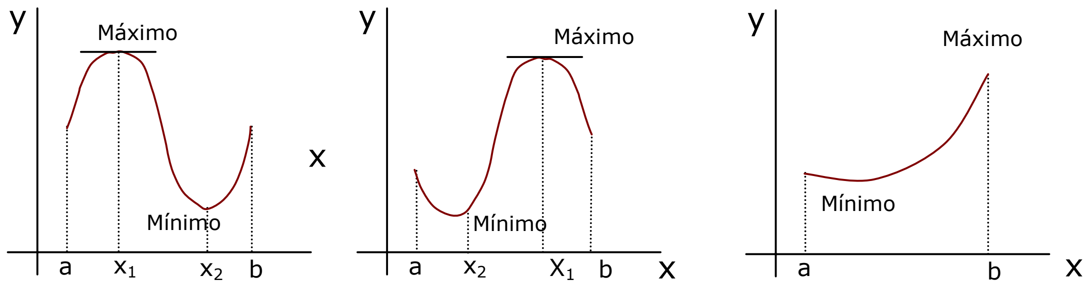
Teorema 20:

Si f es una función definida en un intervalo cerrado [a,b], existe (por lo menos) un punto en [a,b] (por ejemplo x_1) en el cual f toma el mayor valor y existe (por lo menos) un punto en [a,b] (por ejemplo x_2) en el cual f toma el menor valor.

Recuerde que: una función es continua si la podemos realizar de un solo trazo (sin interrupciones).

De acuerdo con el teorema a medida que nos desplazamos a lo largo de la curva desde a hasta b, debe existir un punto donde la curva tiene un valor más alto (valor máximo), y debe existir también un punto donde la curva tiene su valor más bajo (valor mínimo).

Observemos las gráficas siguientes:



En conclusión:

Toda función que sea continua en un intervalo alcanza, su máximo y mínimo en él.

Importante: para que la función tenga máximo y mínimo f debe ser continua y definida en un intervalo cerrado.

El caso en que el máximo o el mínimo ocurra en el interior el intervalo es tan importante, que se puede enunciar como un teorema.

Teorema 21:

Sea f una función continua en un intervalo y teniendo su máximo o su mínimo, en un punto cualquiera (por ejemplo x_o) interior al intervalo, si $f'_{(x_o)}$ existe, entonces $f'_{(x_o)}=0$

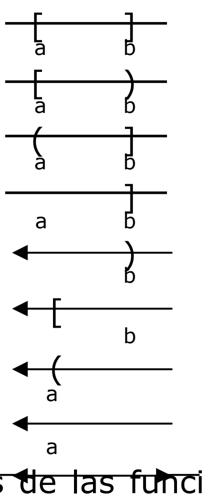
Los valores máximo y mínimo de una función se suelen llamar valores extremos.

Ahora bien:

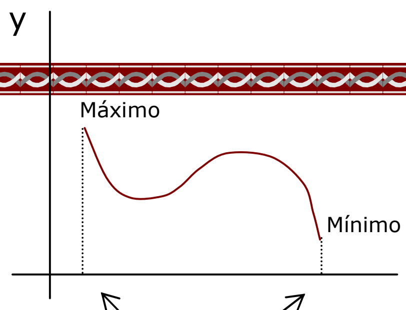
¿Donde se presentan los valores extremos?

Por lo general una función que queremos maximizar o minimizar tiene como dominio un intervalo I. Pero ese intervalo puede ser de cualquiera de los siguientes 9 tipos:

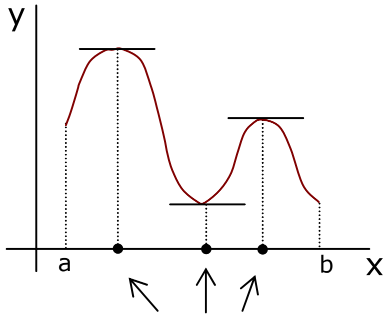
1. $(a,b) = \{x/a<x<b\}$ ( ) No incluye los extremos
2. $[a,b] = \{x/a\leq x\leq b\}$ Incluye los extremos
3. $[a,b) = \{x/a\leq x<b\}$
4. $(a,b] = \{x/a<x\leq b\}$
5. $(-\infty,b] = \{x/x\leq b\}$
6. $(-\infty,b) = \{x/x<b\}$
7. $[a,\infty) = \{x:x\geq a\}$
8. $(a,\infty) = \{x:x>a\}$
9. $(-\infty,\infty) = R$



Los valores extremos de las funciones definidas en intervalos cerrados, a menudo se presenta en los puntos frontera. Observe la gráfica siguiente:

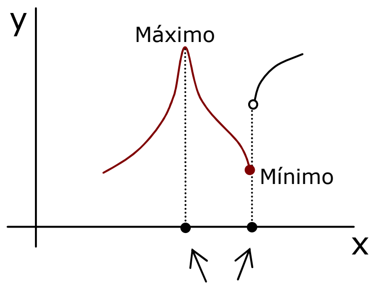


Los valores extremos se presentan también en los puntos estacionarios. Llamaremos así a un punto donde la gráfica de f se nivela, dado que la tangente es horizontal, es decir donde f’(c) = 0 observe la gráfica siguiente.



Puntos estacionarios

También los extremos se presentan en los puntos singulares; es un punto donde la función tiene tangente vertical, o tal vez da un salto, o tiene un vértice agudo. (picos) es decir el punto c donde no es diferenciable la función (f’(c) no existe) observe la gráfica siguiente.



Puntos Singulares

Estas tres clases de puntos (frontera, estacionarios y singulares) son la clave de la teoría de máximos y mínimos.

Cualquier punto del dominio de una función f que sea frontera, estacionario o singular se llama **punto crítico** de f. Veamos ahora algunos ejemplos:

Ejemplo 66.

Encuentre los puntos críticos de la función $f(x) = 3x^2+6x+1$ en el intervalo $-2 \leq x \leq 0$

Solución:

Como la función tiene dominio en el intervalo [-2,0] incluye los extremos entonces -2 y 0 son puntos críticos (Frontera)

-. Calculamos ahora los puntos estacionarios hallamos la derivada:

$f'_{(x)} = 6x+6$

Igualamos la derivada a cero

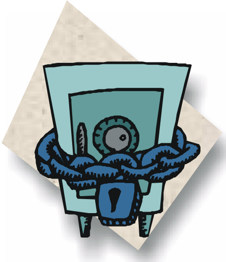
$f'_{(x)} = 0 \therefore 6x + 6 = 6$ Resolviendo

$6x = -6$

$x = -1$

No hay puntos singulares por lo tanto los puntos críticos son -2, 0 y 1

Como ya sabemos identificar los puntos críticos: entonces vamos a establecer un procedimiento muy simple para encontrar. Los valores máximos y mínimos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado I



Curiosidades Matemáticas

En una biblioteca se colocan 4 tomos ordenadamente. Las tapas de los tomos miden 1 cm de espesor cada una y las páginas de cada tomo ocupan 8 cm ¿Que distancia hay desde la primera página del tomo 1 hasta la última del tomo IV? Si cada tomo tiene 150 hojas y una polilla comienza por perforar la primera hoja del tomo I y prosigue horizontalmente hasta la última hoja del último tomo, ¿Cuantas hojas taladra? Respuesta 22 cm.

Paso 1. Encuentre los puntos críticos de f sobre el intervalo

Paso 2. Evalúe f para cada uno de estos puntos críticos. El mayor de esos valores será el máximo; el menor será el mínimo.

¡Diviértete!

Organiza 9 esferas en 4 cajas de forma que cada una tenga un número impar de esferas y distinto del de cada una de las otras

__Ejemplo 67.__

Encuentre el máximo y el mínimo valor que `puede tomar $f_{(x)} = 1/3x^3-2x^2+3x$, en el intervalo cerrado [-1,3].

Solución

Como la función es continua en el intervalo [-1,3] y, por tanto, la existencia del máximo y del mínimo absoluto está garantizada, (por teorema 21).

Paso 1. Encontrar los puntos críticos de f: -1 y 3 son puntos críticos por medio de la derivada de f.

$f'_{(x)} = 3/3\ x^2 - 4x + 3 = x^2 -4x+3 \rightarrow$ Factorizando

ahora $f'_{(x)} = 0 \Rightarrow (x-1)\ (x-3) = 0 \Rightarrow x=1,\ x=3$

1 y 3 son también puntos críticos (pts estacionarios)

No existen puntos singulares

Luego los puntos críticos son: -1, 1 y 3

Paso 2: Evaluando la función en los puntos críticos obtenidos

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - 2(-1)^2+3(-1) = -16/3$$

$$f(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - 2(1)^2+3(1) = 4/3$$

$$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - 2(3)^2+3(3) = 0$$

Luego: el máximo absoluto está en f(1) = 4/3 porque es el mayor de los valores obtenidos.
Y el mínimo absoluto está en f(-1) = -16/3 porque es el menor de los valores obtenidos.

Ya hemos visto que una función definida en un intervalo puede alcanzar su máximo y mínimo valor en él, a estos valores se les llama máximo y mínimo absoluto. Pero interior a este intervalo también pueden existir otros intervalos que contienen valores que alcanzan máximo y mínimo en ellos, estos valores se les llama máximo y mínimo relativos, veamos las definiciones:

Definición 4.

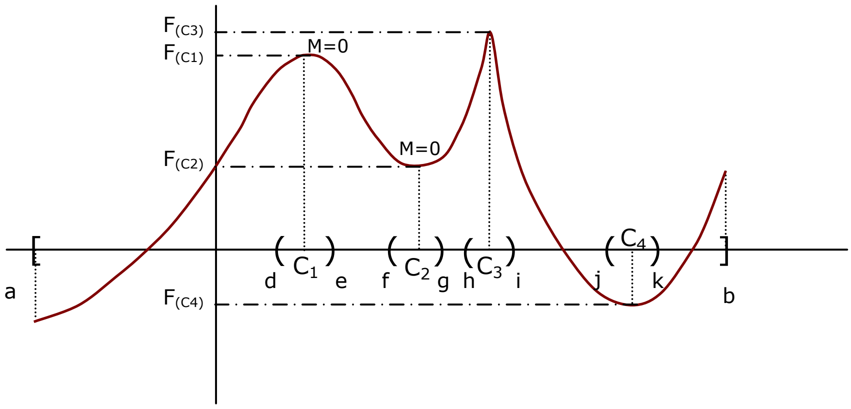
Una función f tiene un máximo relativo en x_o si existe un intervalo que contiene a x_o como punto interior, tal que $f(x_o)$ es el máximo de f en ese intervalo.

Definición 5:

Una función f tiene un mínimo relativo en x_o si existe un intervalo que contiene a x_o como punto interior, tal que $f_{(x_0)}$ es el mínimo de f en ese intervalo.

Interpretemos estas definiciones con la ayuda de una representación gráfica.

Sea f una función definida por y = $f_{(x)}$ y supongamos que la siguiente figura muestra la gráfica representativa de la función dada. f es continua en el intervalo [a,b].



Vemos que: f(c1) es el mayor valor que toma la función en el intervalo abierto (d,e); f(c1) es un mínimo relativo (aquí m=0, esto es $f'_{(x)} = 0$).

f(c3) es el mayor valor que toma la función en el intervalo abierto (h,i). Sin embargo la derivada de $f_{(x)}$ en ese punto no existe (la tangente es una recta paralela al eje y). Lo cual nos muestra que un punto máximo relativo no necesariamente la derivada es cero.

¡Piensa!

¿Cuales pueden ser las dimensiones de un rectángulo para que no cambie de área, si se disminuye en 5 cm su base y se aumenta en 5 cm su altura ?

También se observa que $f(c_2)$ y $f(c_4)$ son los menores valores que toma f en los intervalos (f,g) y (j,k) respectivamente, entonces $f(c_2)$ y $f(c_4)$ son los valores mínimos relativos.

Ahora si consideramos todos los valores que toma la función en el intervalo [a,b] nos damos cuenta de que el menor de los valores es f(a) y el mayor de $f(c_3)$.

Por tanto f(a) es el mínimo absoluto y $f(c_3)$ es el máximo absoluto ($f(c_3)$ es máximo relativo y absoluto a la vez.

De otra forma, existe un criterio que permite determinar los máximos y mínimos relativos de una función; a este se le conoce como criterio de la segunda derivada para máximos o mínimos relativos.

Vamos a enunciarlo como un teorema.

Teorema 22:

Sea f una función tal que c es un punto crítico, es decir $f'_{(c)} = 0$ y $f''_{(c)}$ existe en un intervalo abierto que contiene a c.

a) Si $f''_{(c)} > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en c.

b) Si $f''_{(c)} < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en c.

Importante

Cuando $f''_{(c)} = 0$ el criterio de la segunda derivada no se puede aplicar; en tal caso el criterio de la primera derivada se aplica para máximos y mínimos relativos siguiendo los pasos 1 y 2 como lo establecimos anteriormente.

Veamos un ejemplo donde se aplica este teorema.

Ejemplo 68.

Tomemos la misma función estudiada en el ejemplo 67 $f_{(x)} = 1/3x^3-2x^2+3x$, encuentre el máximo y el mínimo en el intervalo [-1,3].

Aplicando el criterio de la segunda derivada, o teorema 22.

Solución:

Hallamos la derivada de f

$f'_{(x)} = x^2-4x+3 = (x-1)\ (x-3)$;

$f'_{(x)} = 0 \Rightarrow\ (x-1)\ (x-3) = 0$

$x-1 = 0 \vee\ x-3 = 0$ resolviendo

$x=1\ \vee\ x= 3$ Despejando

Luego los puntos críticos son: 1 y 3

Calculamos ahora la segunda derivada de f

$f''_{(x)} = 2x - 4$, $\rightarrow$ evaluamos los puntos críticos aquí

$f''(1) = 2(1) -4 = -2 \rightarrow f''(1) < 0$ (En x=1, existe un máximo)

$f''(3) = 2(3) -4 = 2 \rightarrow f''(3) > 0$ (En x=3, existe un mínimo)

Ya sabemos que la derivada es de mucha utilidad. Pero para formarnos una idea más clara sobre la forma que tiene la gráfica de una función vamos a establecer otros teoremas que nos sirven para este propósito.

Empezaremos con:

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

Existe una forma rápida de encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, empleando por supuesto la derivada de una función, a este teorema se le conoce como criterio de la primera derivada.

Teorema 23:

Sea f una función continua en un intervalo cerrado[a,b] y derivable en el intervalo abierto (a,b)

i) f es creciente en [a,b] si $f'(x) > 0$, para todo $x \in (a,b)$

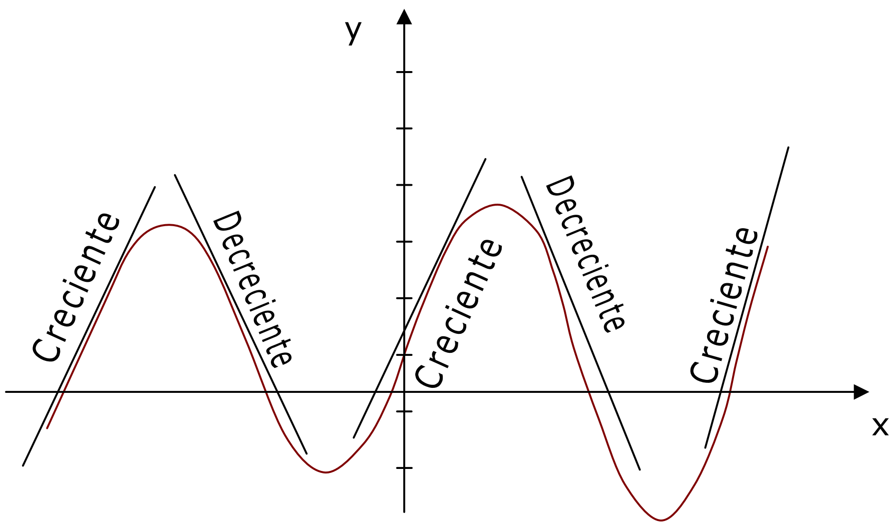
ii) f es decreciente en [a,b] si $f'(x) < 0$, para todo $x \in (a,b)$

Una explicación geométrica de este teorema lo ilustra las siguientes figuras, donde se observa que:

Si $f'(x) > 0$, la pendiente es positiva ↗

si $f'(x) < 0$, la pendiente es negativa ↘

y Si $f'(x) = 0$ la función es constante



Ejemplo 69.

Encuentre donde es creciente y decreciente la función

$f(x) = 1/3x^3 - x^2 - 3x + 4$, el intervalo $(-\infty,\infty)$.

Solución:

Hallamos la derivada de $f_{(x)}$

$f'_{(x)} = 3/3\ x^2 - 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3$

Encontramos los puntos críticos, resolviendo $f'_{(x)} = 0$

Por tanto $f'_{(x)} = x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x+1)(x-3) = 0$ Factorizando

$x+1 = 0$ ó $x-3 = 0$ Resolviendo

$x = -1$ ó $x = 3$ Despejando

Luego los puntos críticos son: -1 y 3 ahora averiguamos donde la derivada es positiva ($f'_{(x)}>0$) y donde es negativa ($f'_{(x)} <0$) es decir; $(x+1)(x-3) > 0$ y $(x+1)(x-3) < 0$

Como tenemos 2 puntos críticos 1 y -3 ellos dividen el eje en tres partes $(-\infty,-1)$ $(-1,3)$ $(3, \infty)$ Verifiquemos

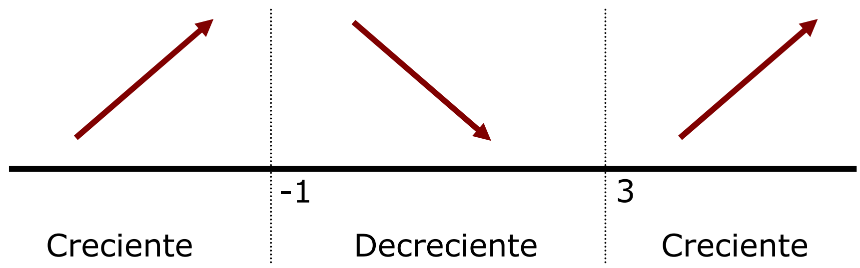
$(x+1)(x-3)$

$(-\infty,-1) \Rightarrow (-) \cdot (-) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ es creciente $\nearrow$

$(-1,3) \Rightarrow (+) \cdot (-) < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ es decreciente $\searrow$

$(3, \infty) \Rightarrow (+) \cdot (+) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ es creciente $\nearrow$

Luego en la gráfica:



Ejemplo 70.

Sean $f_{(x)} = x^4 - 2x^3 + 2x - 2$ determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento aplicando el criterio de la primera derivada

Solución:

Aplicando el criterio de la primera derivada, calculamos $f'(x)$ y analizamos $f'_{(x)} > 0$ y $f'_{(x)} < 0$

$f'_{(x)} \quad = 4x^3-6x^2+2$

$= 2(x^3-3x^2+1)$ Factor común 2

$= 2(x-1)\ (2x^2-x-1)$ Factorizando el polinomio

$= 2(x-1)\ (x^2-½x-½) \div 2$

$= 2(x-1)\ (x-1)\ (x+½)$ Factorizando

Ahora para hallar los puntos críticos $f'_{(x)} = 0$

$2(x-1)\ (x-1)\ (\ x+ ½) = 0$

Se tiene despejando $x = 1$, $x=-1/2$, luego los puntos críticos son 1 y -1/2, los cuales forman los intervalos $(-\infty,-1/2)$ $(-1/2,1)$ $(1,\infty)$ luego probamos los signos en esos intervalos

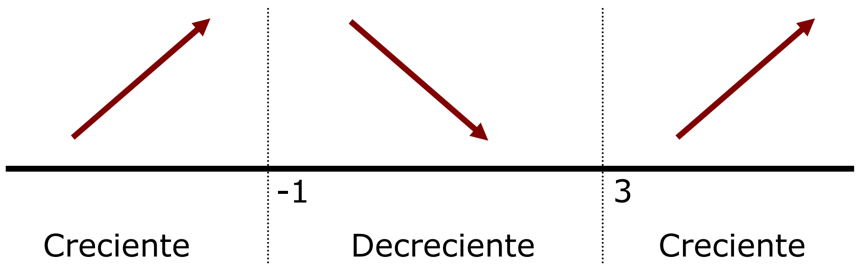
$2(x-1)\ (x-1)\ (\ x+ ½) = 0$

en $(-\infty,-1/2) \Rightarrow (-)$ $(-)$ $(-) = - < 0$; $f'_{(x)} < 0$ es decreciente ↘

en $(-1/2,1) \Rightarrow (-)$ $(-)$ $(+) = + > 0$; $f'_{(x)} > 0$ es creciente ↗

en $(1, \infty) \Rightarrow (+)$ $(+)$ $(+) = + > 0$; $f'_{(x)} > 0$ es creciente ↘

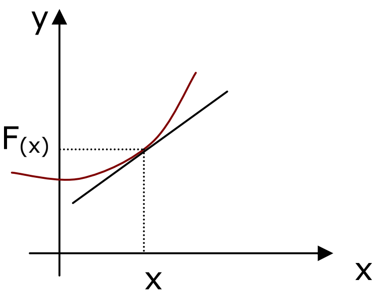
Luego en la gráfica

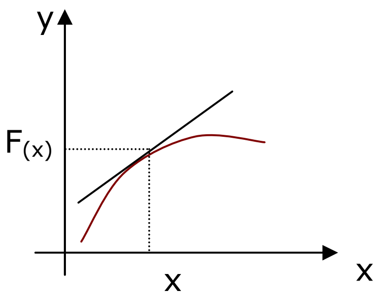


Ahora vamos a estudiar otro concepto de gran importancia en el análisis de una gráfica

LA CONCAVIDAD DE UNA FUNCIÓN

Si se tiene una función f derivable en un punto x, puede ocurrir que la recta tangente en el punto $(x,f_{(x)})$ se encuentre por encima o por debajo de la curva como en la figura.





Según sea el caso si la recta tangente está por debajo de la curva, la curva representativa de la función se dice cóncava hacia arriba, y si la recta tangente está por encima la función se dice cóncava hacia abajo o convexa.

Pero ayudados por la derivada enunciaremos un teorema para la concavidad con el criterio de la segunda derivada.

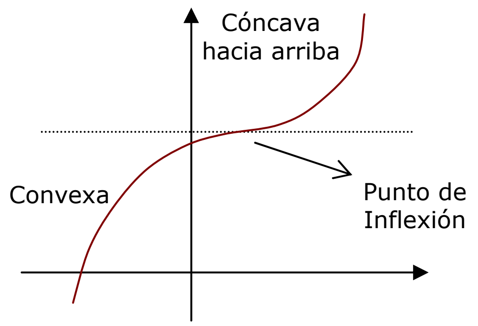
<u>Teorema 24:</u> Sea f una función cuya segunda derivada existe en el intervalo (a,b):

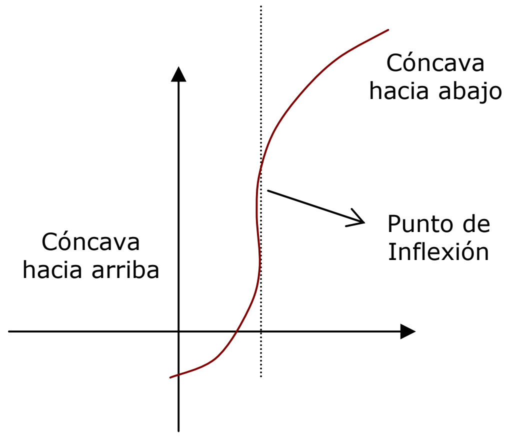
I. La gráfica de f es cóncava hacia arriba si $f''_{(x)} > 0$ per todo $x \in$ (a,b)

II. La gráfica de f es cóncava hacia abajo s $f''_{(x)} < 0$ para todo $x \in$ (a,b)

¡Atención! Pueden existir puntos sobre la curva en los que la concavidad a la izquierda del punto cambia respecto a la derecha a los que yo llamo PUNTO DE INFLEXION

Observemos las siguientes gráficas.





Analizando las gráficas vemos que lo que hace el punto de inflexión es cambiar el centro de curvatura en un sitio determinado a partir de esto daremos la siguiente definición:

Definición 6

Un punto cualquiera x=c de una curva es un PUNTO DE INFLEXION si $f''_{(x)} = 0$ en ese punto, y si la gráfica es cóncava hacia arriba en un lado de él y cóncava hacia abajo en el otro lado y viceversa.

Estudiemos un ejemplo:

Ejemplo 71

Sea $f_{(x)} = x^4 - 2x^3 + 2x - 2$. Determinemos los intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

Solución :

La concavidad la determinaremos con la segunda derivada de la función de acuerdo al teorema

$f'_{(x)} = 4x^3 - 6x^2 + 2$ luego la segunda derivada

$f''_{(x)} = 12x^2 - 12x$

Los puntos de inflexión los obtenemos con las soluciones de la ecuación $f''_{(x)} = 0$

Entonces $f''_{(x)} = 12x^2 - 12x$

Luego

$12x^2 - 12x = 0$

$12x(x-1) = 0$ factorizando

$x = 0$ ó $x = 1$ despejando

Luego, hay dos puntos de inflexión (PI) o y 1 los cuales forman tres intervalos;

$(-\infty,0)$ $(0,1)$ $(1,\infty)$

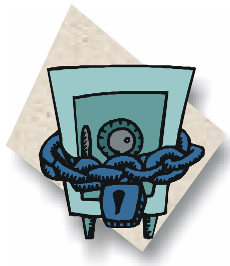
Analicemos los intervalos en los cuales $f''_{(x)} > 0$ y $f''_{(x)} < 0$

$12x^2 - 12x = 0$

en $(-\infty,0)$ $\Rightarrow$ $(-)$ $(-) = + > 0$; $f''_{(x)} > 0$ es cóncava hacia arriba

en $(0,1)$ $\Rightarrow$ $(+)$ $(-) = - < 0 < 0$; $f''_{(x)} < 0$ es convexa

en $(1,\infty)$ $\Rightarrow$ $(+)$ $(+) = + > 0$; $f''_{(x)} > 0$ es cóncava hacia arriba



Curiosidades Matemáticas

1
Como es posible, que al salir 2 padres y dos hijos de una población su número de habitantes disminuya solamente tres.
Respuesta: Cuando son padre, hijo y nieto.

Además (0,$f_{(c)}$) y (1,$f_{(c)}$) son los puntos de inflexión

Como ya sabemos hallar:

- Los puntos críticos de una función
- Los puntos máximos y mínimos de f
- El crecimiento y decrecimiento de f
- La concavidad de f y puntos de inflexión

Estamos preparados ahora si para determinar la curva representativa de una función en su forma exhaustiva.

¡Piensa!

Halla tres enteros consecutivos tales que cuando se forman todas las fracciones posibles, tomadas de dos en dos, la suma de las seis fracciones es un entero.

Veremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 72.

Estudiar y graficar la curva cuya función es $f_{(x)}=x^3-3x^2+2$, calcular dominio, intersección con los ejes de coordenadas, asíntotas, puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximas y mínimos, puntos de inflexión, concavidad y convexidad, y por último realice a curva representativa.

Solución:

El cálculo del dominio de f, la intersección con los ejes y las asíntotas, fueron tratados en el módulo anterior. Aquí vamos a aplicar esos conocimientos previos.

1) Dominio $f_{(x)}$:

Dom f = R

2) Corte con los ejes

Corte con eje x : (y=0) $f_{(x)} = y$

$x^3-3x^2+2 = 0$

Aplicamos Ruffini

	1	-3	0	2
1		1	-2	-2
	1	-2	-2	0

Queda $(x-1)(x^2-2x-2) = 0$ por ecuación de 2º grado

x1 = 1 ; x2 = 2,73 ; x3 = -0,73

Luego corte con x: P((-0,73,0) ;P(2,73,0), P(1,0)

Corte con eje y x=0

$f(0) = (0)^3-3(0)^2+2$

y = 2 , Luego P(0,2)

3) Asintotas:

Dado que es una función polinomia con Domf=R, no hay asíntotas de ningún tipo

4) Puntos críticos

Solo hay puntos estacionarios $f'_{(x)} = 0$Calculamos la derivada de f

$f'_{(x)} = 3x^2-6x = 3x(x-2)$

$= 3x(x-2) = 0$

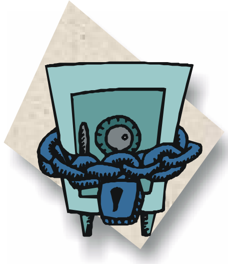
$3x=0 \vee x-2 = 0$ Resolviendo

$x=0 \vee x=2$ Despejarlo

Luego los puntos críticos son 0 y 2

5) Crecimiento y Decrecimiento

Se forman los intervalos $(-\infty,0)$ $(0,2)$ $(2, \infty)$



Curiosidades Matemáticas

Si un reloj tarda 5 segundos en dar 6 campanadas, ¿Cuantos tardará en dar 12? Respuesta: 11 segundos porque corresponde a los intervalos entre las campanadas.

3x(x-2)

en $(-\infty,0) \Rightarrow (-)\ \ (-) = + > 0$; $f'_{(x)} > 0$ es creciente

en $(0,2) \Rightarrow (+)\ \ (-) = - < 0$; $f'_{(x)} < 0$ es decreciente

en $(2, \infty) \Rightarrow (+)\ (+) = + > 0$; $f'_{(x)} > 0$ es creciente

6) Máximos y Mínimos

Con el criterio de la segunda derivada

$f''_{(x)} = 6x-6$ evaluamos los puntos críticos en $f''_{(x)}$

$f''_{(0)} = 6(0)-6 = -6 < 0$ hay un máximo en $x = 0$

$f''_{(2)} = 6(2)-6 = 6 > 0$ hay un mínimo en $x = 2$

Para ubicar el punto crítico en la gráfica evaluamos

$f_{(x)} = 3x^2-3x^2 +2$

$f_{(0)} = 2$ P (0,2) es el máximo

$f_{(2)} = -2$ P (2,-2)es el mínimo

1

7) Punto de Inflexión

$f''_{(x)} = 0 \Rightarrow 6x -6 = 0$

$x = 6/6 \Rightarrow x = 1$

8) Concavidad

Como el punto de inflexión es 1 se toman 2 intervalos $(-\infty,1)$ $(1, \infty)$ estudiemos los intervalos en los cuales $f''_{(x)} > 0$ y $f''_{(x)} < 0$.

6(x-1)

en $(-\infty,1) \Rightarrow (+)\ \ (-) = (-) < 0$; $f''_{(x)} < 0$ es $\cap$ cóncava hacia abajo

en $(1, \infty) \Rightarrow (+)\ \ (+) = (+) > 0$; $f''_{(x)} > 0$ es $\cup$ cóncava hacia arriba

Ubicando el punto de inflación

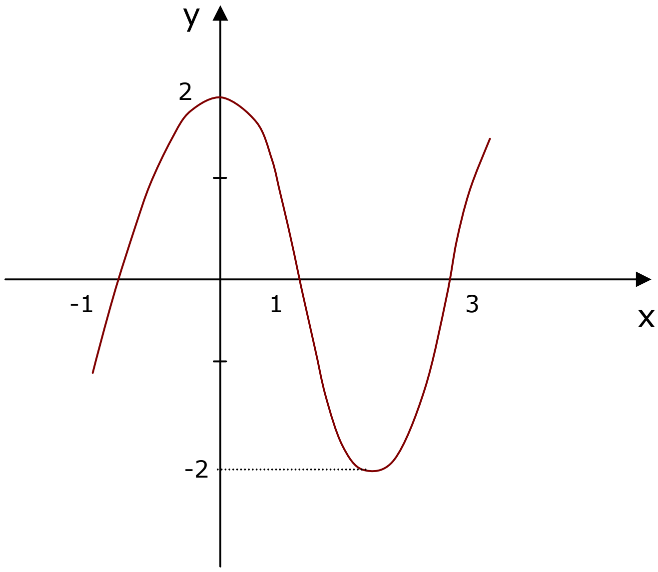
$f_{(1)} = (1)^3-3(1)^2 + 2$

¡Piensa!

Se tiene un cuadrado de lado 1m. Se colocan al lado dos cuadrados de lado ½, después 3 cuadrados de lado $(12)^2$ y así sucesivamente hasta n cuadrados de lado $(1/2)^{n-1}$. Calcula el área total de la figura

$f_{(1)} = 0$ Luego P.I (1,0)

9) Gráfica de la función $f(x) = 3x^2-3x^2 +2$



Ejercicios Propuestos

Determinar la gráfica de las siguientes funciones aplicando el procedimiento anterior

a) $f_{(x)} = \dfrac{x}{x^2+1}$

d) $f_{(x)} = -x^3+4x$

b) $f_{(x)} = x^4-2x^3+2x-2$

e) $f_{(x)} = \dfrac{4}{x^2+1}$

c) $f_{(x)} = -(x-3)^2+1$

f) $f_{(x)} = \dfrac{x^2+1}{x}$

APLICACIONES DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

La derivada no solo tiene aplicabilidad en el trazo de curvas, sino también en temas de otras áreas. Donde se presentan problemas en los cuales es necesario maximizar o minimizar funciones.

Estudiaremos este tema en base a un ejemplo.

Ejemplo 73

Encontrar dos números positivos cuya suma sea 8 y su producto sea el máximo.

Solución :

Sean los números x y y

Hallamos el producto M que hay que maximizar $M = x.\, y \rightarrow$ maximizar

M depende de dos variables pero con los datos del problema la podemos expresar en función de una sola variable

Como $x+y = 8$ entonces $y = 8-x$ reemplazando este valor en la expresión original $M = x(8-x)$

$M = 8x - x^2$; $0<x<8$

Hallamos ahora el máximo de M con la primera derivada

$M'_{(x)} = 8-2x$

Los puntos críticos son las soluciones de $M'_{(x)} = 0$ entonces $8-2x = 0$

$-2x = -8 \Rightarrow x = 4$

Hay un solo valor crítico $x= 4$

Ahora verifiquemos el máximo (con el criterio de la segunda derivada).

$M''(x) = -2 < 0$ M tiene un máximo

Curiosidades Matemáticas

Un borracho apoyado en la esquina de una casa intenta llegar a la esquina de la casa situada al otro lado de la calle. La separación de la misma es de 9 m. El borracho avanza a razón de 3 m en un minuto, y a causa de su estado, retrocede 1,5 m en un minuto. ¿Cuanto tiempo tardará en llegar a la esquina opuesta? Procura resolver este problema sirviéndote de una representación gráfica lineal. Quizá te extrañe la respuesta esta es 9 minutos.

Como $M''(4) < 0$ entonces M tiene un máximo en $x = 4$ el otro número es

$y = 8-x$ sustituye el valor de x

$y = 8-4 \Rightarrow 4=4$

Los números buscados son $x = 4$ y $y = 4$

Comprobación

Enunciado dl problema $x + y = 8$; $4 + 4 = 8$

$M = x.y$

$M = (4)(4)$

$M = 16$ es el máximo

Autoevaluación

1. Defina derivada de una función

2. En los siguientes ejercicios encuentre la ecuación de la recta tangente y normal a la curva dada por la expresión en el punto indicado (mediante derivación implícita).

a) $y^3-3x^2y+x^2 = 3$ P(1,1)

b) $e^{2x+2y} = -1+2x$ P(1,2)

3. Aplicando el criterio de los cinco pasos, determine la derivada de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{4x^2 - x}{x}$

4. En los siguientes ejercicios hallar la derivada de la función dada:

a) $f(x) = \mathrm{Ln}(e^{-x^2})$

b) $f(x) = (2x+1)(x-3)^2$

c) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$

d) $f(x) = \mathrm{sen}(3x+1)\cos(5x)$

e) $f(x) = \tan(x^2+4)$

f) $f(x) = \mathrm{Ln}\left(x^2 - \sqrt[5]{x-1}\right)$

g) $f(x) = e^{\cos\frac{\pi}{2}}$

h) $f(x) = 2e^{-2x}+3x-\ln x^x$

5. Determinar f'(x) y f''(x) de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3\ \text{sen} 3x$

b) $f(x) = \text{Ln}\ (x^2-1)^2$

c) $f(x) = e^{\text{sen}^2(\ln e)}$

d) $f(x) = e^x\ \text{sen}\ x$

Matriz de Corrección

(Autoevaluación Final)

Pregunta 1

1. Sea F una función de dominio en R y "a" un punto que pertenece al dominio de "f". La función f se dice derivable en "a" si:

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f(a+h) - f(a)]}{h} \text{ existe}$$

Pregunta 2

2. a. $y^3+3x^2y+x^2-2xy = 3$ P(1,1)

Solución:

$3y^2y'+6xy+3x^2y'+2x-2y-2xy' = 0$

$y' [3y^2+3x^2-2x] = -6xy-2x+2y$

$$y' = \frac{-6xy - 2x + 2y}{3y2 + 3x2 - 2x}$$

Pendiente de la recta tangente

$$m_t = \frac{-6(1)(1) - 2(1) + 2(1)}{3(1)^2 + 3(1)^2 - 2(1)} = \frac{-6 - 2 + 2}{3 + 3 - 2} = \frac{-6}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

Pendiente de la recta normal

$$m_n = \frac{2}{3}$$

Ecuación de la recta tangente

$y-y1 = m (x-x1)$

$y-1 = -3/2 (x-1)$

$2y-2 = -3x+3$

$$y = \frac{-3x+5}{2}$$

Ecuación de la recta normal

$y-y_1 = m\ (x-x1)$

$y-1 = 2/3\ (x-1)$

$3y-3 = 2x-2$

$$y = \frac{2x+1}{3}$$

2.b. $e^{2x+2y} = -1 + 2x$ P(1,2)

Solución:

$e^{2x+2y}\ [2+2y'] = 2$

$2e^{2x+2y} + 2y'e^{2x+2y} = 2$

$e^{2x+2y} + y'\ e^{2x+2y} = 1$

$$y' = \frac{1-e^{2x+2y}}{e^{2x+2y}}$$

Pendiente de la Recta Tangente

$$m_t = \frac{1-e^{2x+2y}}{e^{2x+2y}} = \frac{1-e^6}{e^6} = \frac{1-403{,}42}{403{,}42} = \frac{-402{,}42}{403{,}42} = -0{,}997$$

Pendiente de la Recta Normal

$$m_n = \frac{1}{0{,}997}$$

Ecuación de la Recta Tangente

$y-y_1 = m\ (x-x1)$

$y-2 = -0{,}997\ (x-1)$

$y-2 = -0{,}997x+-0{,}997$

$y = -0{,}997x+2{,}997$

¡Piensa!

En un plano, cuatro líneas distintas dividen el interior de un círculo en regiones. Si m representa el máximo número de regiones y n el número mínimo, encuentra el valor de m+n.

Ecuación de la recta normal

$y-y_1 = m\,(x-x1)$

$y-2 = \frac{1}{0{,}997}\,(x-1)$

$0{,}997y = x+0{,}994$

$y = \frac{x + 0{,}994}{0{,}997}$

Pregunta 3

3.a. $\sqrt[3]{x+3}$

Solución :

Paso 1: $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$

Paso 2: $f(x+h) = \sqrt[3]{(x+h)+3}$

Paso 3: $f(x+h)-f(x) = \sqrt[3]{(x+h)+3} - \sqrt[3]{x+3}$

$= \sqrt[3]{x+h+3} - \sqrt[3]{x+3}$

Paso 4: $\frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} = \sqrt[3]{x+h+3} - \sqrt[3]{x+3}$

Paso 5: $\lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h+3} - \sqrt[3]{x+3}}{h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h+3} - \sqrt[3]{x+3}}{h} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+h+3)^2} + \sqrt[3]{(x+h+3)\,(x+3)} + \sqrt[3]{(x+3)^2}}{\sqrt[3]{(x+h+3)^2} + \sqrt[3]{(x+h+3)\,(x+3)} + \sqrt[3]{(x+3)^2}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x+h+3} \cdot \sqrt[3]{x+3}\right)^3}{h\left(\sqrt[3]{(x+h+3)^2} + \sqrt[3]{(x+h+3)\,(x+3)} + \sqrt[3]{(x+3)^2}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{h} + \cancel{3} - \cancel{x} - \cancel{3}}{\cancel{h}\left(\sqrt[3]{(x+h+3)^2} + \sqrt[3]{(x+h+3)\,(x+3)} + \sqrt[3]{(x+3)^2}\right)} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{(x+h+3)^2} + \sqrt[3]{(x+h+3)\,(x+3)} + \sqrt[3]{(x+3)^2}\right)} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+3)^2} + \sqrt[3]{(x+3)^2} + \sqrt[3]{(x+3)^2}} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}$$

3.b. $\dfrac{4x^2 - x}{x}$ Solución:

Paso 1: $f(x) = \dfrac{4x^2 - x}{x}$

Paso 2: $f(x+h) = \dfrac{4(h+x)^2 - (x+h)}{(x+h)}$

Paso 3: $f(x+h)-f(x) = \dfrac{4(h+x)^2 - (x+h)}{(x+h)} - \dfrac{4x^2 - x}{x}$

$$= \frac{4(x^2 + 2xh + h^2) - x - h}{(x+h)} - \frac{4x^2 - x}{x}$$

$$= \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 - x - h}{(x+h)} - \frac{4x^2 - x}{x}$$

$$= \frac{x(4x^2 + 8xh + 4h^2 - x - h) - (4x^2 - x)(x+h)}{(x+h)x}$$

$$= \frac{x(4x^2 + 8xh + 4h^2 - x - h) - (4x^3 + 4x^2h - x^2 + xh)}{(x+h)x}$$

$$= \frac{4x^3 + 8x^2h + 4xh^2 - x^2 - xh - (4x^3 + 4x^2h - x^2 + xh)}{(x+h)x}$$

$$= \frac{\cancel{4x^3} + 8x^2h + 4xh^2 - \cancel{x^2} - \cancel{xh} - \cancel{4x^3} + 4x^2h + \cancel{x^2} + \cancel{xh}}{(x+h)x}$$

$$= \frac{4x^2h + 4xh^2}{(x+h)x}$$

$$= \frac{\cancel{x}(4xh + 4h^2)}{\cancel{x}(x+h)} =$$

Paso 4: $\dfrac{[f(x+h)-f(x)]}{h} = \dfrac{\dfrac{(4xh+4h^2)}{(x+h)}}{h}$

$$= \frac{4xh + 4h^2}{h(x+h)}$$

$$= \frac{\cancel{h}(4x+4h)}{\cancel{h}(x+h)}$$

Paso 5 : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[f(x+h) - f(x)]}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4x+4h}{x+h} = \dfrac{4x+4(0)}{x+0} =$

$= \dfrac{4x}{x} = 4$

Pregunta 4

4.a. $f(x) = Ln(e^{-x^2})$; Hallar $f(x)'$

Solución : $f'(x) = \dfrac{1}{u} \dfrac{du}{dx}$

$u = e^{-x^2}$

$du = -2xe^{-x^2}$

$f'(x) = 1/e^{-x^2} \; (-2x) \; e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x$

4.b. Sea $f(x) = (2x+1)(x-3)^2$ Hallar $f(x)'$

$f(x)' = (2x+1) \, [(x-3)^2]' + (x-3)^2 \, [(2x+1)]'$

$f(x)' = (2x+1) \, [2(x-3)(x-3)'] + (x-3)^2 \, (2)$

$$f(x)' = (2x+1)\,[2(x-3)] + 2(x-3)^2$$

$$f(x)' = (2x+1)\,(2x-6) + 2[x^2-6x+9]$$

$$f(x)' = (2x+1)\,(2x-6) + 2x^2-12x+18$$

$$f(x)' = 2x^2-12x+2x-6 + 2x^2-12x+18$$

$$f(x)' = 6x^2-22x+12$$

4.c. Sea $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$ Hallar $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(3)'-3(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

4.d. Sea $f(x) = sen(3x+1)\cos(5x)$ Hallar $f'(x)$

$$f'(x) = sen(3x+1)\,[\cos(5x)]' + \cos 5x\,[sen(3x+1)]'$$

$$f'(x) = sen(3x+1)\,[-sen(5x)5] + \cos 5x\,[\cos(3x+1)3]$$

$$f'(x) = sen(3x+1)\,(-5sen5x) + \cos 5x\,(3\cos(3x+1))$$

$$f'(x) = -5sen5x \,.\, sen(3x+1) + 3\cos(3x+1) \,.\, \cos 5x$$

4.e. Sea $f(x) = \tan(x^2+4)$ Hallar $f'(x)$

$$f'(x) = \sec^2(x^2+4)\,(x^2+4)'$$

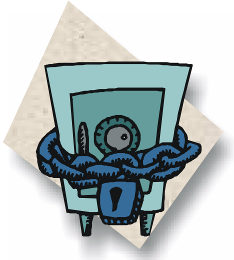
$$f'(x) = \sec^2(x^2+4)\,(2x)(x)'$$

$$f'(x) = \sec^2(x^2+4)\,(2x)$$

$$f'(x) = 2x\sec^2(x^2+4)$$

4.f. Sea $f(x) = \operatorname{Ln}\left[x^2 - \sqrt[5]{x-1}\right]$ Hallar $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{\left[x^2 - \left(\sqrt[5]{x-1}\right)\right]'}{x^2 - \sqrt[5]{x-1}}$$



Curiosidades Matemáticas

Un arquitecto, muy original, se le ocurrió construir una casa cuadrada, con una ventana en cada pared de tal suerte que las cuatro ventanas mirarán hacia el sur. Esto fue posible, pero en que sitio tuvo que ubicarla. Respuesta : En el centro del polo norte.

$$f'(x) = \frac{\left[\left(x^2\right)' - \left(\sqrt[5]{x-1}\right)'\right]}{x^2 - \sqrt[5]{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{\left[\left(x^2\right) - \left(\frac{1}{5}(x-1)^{-1/5}\right)\right]}{x^2 - \sqrt[5]{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{\left[x^2 - \frac{1}{5\sqrt[5]{(x-1)^4}}\right]}{x^2 - \sqrt[5]{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{10x\sqrt[5]{(x-1)^4} - 1}{5\sqrt[5]{(x-1)^4}}\right]}{x^2 - \sqrt[5]{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{10x\sqrt[5]{(x-1)^4} - 1}{\left(x^2 - \sqrt{x-1}\right)\left(5\sqrt[5]{(x-1)^4}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{10x\sqrt[5]{(x-1)^4} - 1}{5x^2\sqrt[5]{(x-1)^4} - 5x - 5}$$

4.g. Sea $f(x) = e^{\cos\frac{\pi}{2}}$

$$f'(x) = e^{\cos\frac{\pi}{2}} \,.\, [\cos \pi/2]'$$

$$f'(x) = e^{\cos\frac{\pi}{2}} \,.\, \text{sen}\ \pi/2\ .0$$

$$f'(x) = 0$$

4.h. Sea $f(x) = 2e^{-2x} + 3x - \ln x^x$

$$f'(x) = 2e^{-2x} + 3x - \frac{x.x^{x-1}.1 + x^x.\ln x.1}{x^x}$$

¡Piensa!
un cubo pintado de rojo, es dividido en 64 cubos pequeños. ¿Cuantos de los cubos pequeños tienen una cara pintada de rojo? ¿dos caras ? ¿cuatro caras ? ¿ninguna cara ?

$$f'(x) = -4xe^{-2x} + 3x - \frac{x^x + x^x . \ln x}{x^x}$$

$$f'(x) = -4xe^{-2x} + 3x - \frac{\cancel{x}^x (1 + \ln x)}{\cancel{x}^x}$$

$$f'(x) = -4xe^{-2x} + 3 - [1 + Lnx]$$

$$f'(x) = -4xe^{-2x} + 3 - 1 - Lnx$$

$$f'(x) = -4xe^{-2x} + 2 - Lnx$$

Pregunta 5

5.a. $f(x) = 3\ \text{sen}3x$

Solución :

$f'(x) = 3\cos 3x\ .\ 3$

$f'(x) = 9\cos 3x$

$f''(x) = 9\,(-\text{sen}3x)\ 3$

$f''(x) = -27\text{sen}3x$

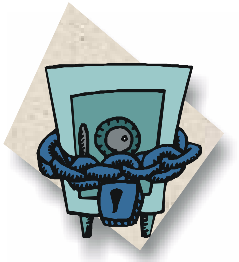
5. b. $f(x) = Ln\,(x^2-1)^2$

$$f'(x) = \frac{\left[(x^2-1)^2\right]'}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x}{(x^2-1)}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2-1)(4x)' - (x^2-1)'(4x)}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4x^2 - 4 - 2x(4x)}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4x^2 - 4 - 8x^2}{(x^2-1)^2}$$



Curiosidades Matemáticas

Un sastre tiene una pieza de paño de 12 metros de longitud. Si cada día corta 2 metros, en cuantos días terminará de cortar la pieza? Respuesta: En 5 días puesto que el quinto corte divida 4 metros.

$$f''(x) = \frac{-4x^2 - 4}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

Bibliografía

- PURCEL, Edwin J. & VARBERG, Dale (1993) "Cálculo con Geometría Analítica" Sexta Edición, Prentice Hall Hispanoamericana S.A. México.

- LEITHOLD Louis (1973). "El Cálculo" Segunda Edición, Harla S.A. México.

- PITA, C. (1998) "Cálculo de una Variable" Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. México.

- CENTENO, G - CENTENO, H. y JIMENEZ, N. (1994) "Matemática Constructiva" Editorial Libros & Libres S.A. Bogotá.