UNIVERSIDAD DE LOS ANDES-TÁCHIRA

DEPARTAMENTO DE PEDAGOGÍA

MODULO INSTRUCCIONAL

INTEGRACION DE FUNCIONES REALES

Integrantes:
Contreras L, Jonnart
Vivas V, Marilyn
Vivas E, Wilmer
Vivas V, Karin

Asesor:

Prof. Miguel Vera

San Cristóbal, mayo de2002

INTRODUCCIÓN

El ritmo acelerado del mundo ha producido cambios fundamentales, y a exigido que uno de sus agentes de transformación, la educación sea concebida como un proceso permanente de aprendizaje, sin embargo, esta premisa no se a logrado consolidar como tal, el hecho educativo ha transcendido como un mero instrumento de transmisión de conocimientos, y ha perdido su carácter formativo, para proyectar sólo un carácter informativo.

En el marco de la estructura social, la educación como organización, debe proyectarse en sentido coherente y uniforme a establecer un ideal más humano que abarque al hombre en toda su plenitud en relación con sus exigencias, aspiraciones y posibilidades, puesto que el proceso educativo debe estar estrechamente vinculado con el desarrollo del país. Las exigencias de una educación y formación de alta calidad, debe estar determinada por una eficiente aplicación del aprendizaje, en consecuencia, la asunción en ejecutar estrategias educativas que faciliten al alumno un aprendizaje significativo.

Por todos estos motivos, los módulos instruccionales, representa una alternativa para el discente, que aspiran aprender una materia en especial, facilitando de alguna manera estrategias. El modulo instruccional para el aprendizaje del calculo integral fue realizado siguiendo ciertas pautas, como por ejemplo explicar cada ejercicios con su detalle.

CAPITULO I

EL PROBLEMA

1.1.- Planteamiento Del Problema

La educación se concibe en términos generales, como un proceso que apunta hacia el cambio de la conducta y la transformación del educando. En este sentido, Gil (1980) expresa:

> La educación es un proceso espontáneo planificado, de aprendizaje, de transmisión y asimilación cultural, que permite a las sociedades a la vez conservarse y transformarse modelando y emancipando individuos y generaciones según finalidades que surgen de realidades políticas, económicas, morales, tecnológicas, intelectuales, y otras, de la vida social. (p. 57)

Sin embargo, según lo afirma Guzmán (1993)

> La aparición de herramientas tan poderosas como la calculadora y el ordenador actuales, está comenzando a influir fuertemente en los intentos por orientar la educación matemática. Es claro que, por diversas circunstancias tales como costo, inercia, novedad, impreparación de profesores, hostilidad de algunos,..., aún no se ha logrado encontrar modelos plenamente satisfactorios. (p. 4)

En relación con la cita anterior, es importante destacar los siguientes aspectos: La inercia del modelo tradicional, que a juicio de Rosado (1979) aún se mantiene vigente en el 95 % de las instituciones educativas del mundo, es un elemento a considerar puesto que constituye un gran obstáculo para que se produzca la transformación o el cambio mencionado en los párrafos anteriores.

Una de las razones que se pueden conjeturar para justificar las hostilidades que algunos profesores manifiestan, cuando se les pide que asuman la realidad educativa actual, es la propuesta por Rosado (1979), cuando expresa "es difícil la asimilación de una instrumentación nacida al margen de la enseñanza y fuertemente aceptada por la sociedad". (p. 329)

La comunidad matemática internacional está realizando esfuerzos para establecer modelos o métodos que permitan adaptar la educación matemática a la realidad educativa actual

Un análisis del modelo de enseñanza tradicional de la matemática se hace aquí pertinente, ya que justamente dicho modelo, constituye una de las variables que influye de manera decisiva en el proceso de enseñanza de cualquier ciencia. Con el propósito de problematizar dicho análisis se proponen las siguientes interrogantes:

✓ ¿Será qué el modelo tradicional de la enseñanza de la matemática toma en cuenta los deseos e intereses del alumno y establece claramente cómo, cuándo, qué y para qué aprende el estudiante?.

- ✓ ¿Prevee el mencionado modelo los medios para desarrollar eficazmente el proceso de enseñanza de la Matemática?
- ✓ ¿Serán los Módulos Instruccionales, la herramienta mediante la cual se puede diseñar un conjunto adecuado de estrategias que regulen el proceso de enseñanza de ciertos contenidos matemáticos, de tal manera que sean tomados en cuenta los intereses y deseos de quienes aprenden?

La experiencia que todo docente posee, por ser participante activo del acto educativo, permite establecer ciertas premisas básicas que posibilitarán el desarrollo de las etapas o fases constitutivas de la investigación que será desarrollada posteriormente. Entre ellas podemos mencionar las siguientes:

El modelo que se emplea tradicionalmente para la enseñanza de la matemática a dominado durante muchos años el ámbito educativo de la mencionada ciencia. De allí la resistencia al cambio, producto (como se mencionó antes) de la inercia de un sistema fuertemente establecido.

En nuestra cultura la frase "proceso enseñanza-aprendizaje" a cobrado una fuerza increíble y se ha enraizado tan profundamente en la estructura mental del educador, que lo a llevado a pensar realmente en un proceso único cuando en realidad de acuerdo con la psicología y la neurociencia se trata de dos procesos diferentes los cuales están íntimamente ligados. Debido a ello y a la masificación, el profesor se considera responsable sólo del material que debe organizar y no de lo que debe aprender el estudiante.

El profesor emplea la mayor parte del tiempo de clase, suministrando información y por tanto se desarrolla un proceso que en un alto porcentaje es unidireccional, fomentando así la actitud pasiva del estudiante.

Guzmán (1993) expresa: "La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos del pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos como un campo de operaciones con el propósito de adquirir formas de pensamiento eficaces" (p7), esto se contrapone a la práctica docente tradicional, en la cual el profesor confunde un ejercicio de matemática con una situación problemática real, proponiendo a sus estudiantes lo que él considera como un problema pero que generalmente no posee los elementos básicos para ser considerado como tal, como mucho llega a ser un seudo-problema.

Es típico observar, a lo largo de la actividad desarrollada en el aula de clase, que por lo general, el estudiante recibe un entrenamiento algorítmico para la resolución de situaciones sencillas y luego se le valora cuantitativamente, en un lapso de tiempo relativamente corto, con el planteamiento de situaciones complejas en las cuales se ha entrenado muy poco o nada, razón por la cual experimenta una sensación de impotencia lo cual incide negativamente en su rendimiento. Esto es contrario a lo que recomienda Ruiz (1999) cuando expresa: "Debemos entrenar a nuestros alumnos en la resolución de problemas y en el análisis crítico de situaciones complejas que no se presten a tratamientos automáticos". (p. 4)

Tal vez producto de la automatización y la mecanización es el resultado desalentador que arrojó la primera evaluación que aplicó el Ministerio de Educación a una población aproximada de 100 mil estudiantes venezolanos de escuelas públicas y privadas. Tabuas en artículo publicado en el Diario El Nacional, sección vida contemporánea, el Viernes 02 de julio de 1999, señala que la mencionada prueba detectó lo siguiente "a medida que aumenta el grado de instrucción disminuye el nivel de logro de los alumnos"

Parafraseando a Rosado (1979), se puede establecer que en el modelo tradicional la práctica de una evaluación continua es infrecuente y se estila la aplicación de un número insuficiente de pruebas parciales que buscan evaluar cantidades muy extensas del contenido programático impartido.

En 1998, la Comisión Internacional sobre la Educación de la UNESCO planteó que "enfrentar los desafíos educativos en los países en desarrollo era una tarea particularmente difícil, porque por la penuria de recursos no se podían satisfacer todas las demandas". En Venezuela se están realizando una serie de esfuerzos por mejorar la calidad de la educación, es por ello que se han organizado una serie de eventos, congresos y asambleas nacionales en las que diferentes sectores se unen para enfrentar los problemas de la misma.

En la Asamblea Nacional de Educación de 1998, se llegó a la conclusión de que "La importancia de la educación, en cuanto problema y en cuanto la vía para asegurar ya no sólo la participación política sino el desarrollo económico, ocupa el primer plano en la conciencia nacional".

La Matemática a pesar de ser una de las disciplinas más simples creada por el hombre, ha sido por mucho tiempo la que más problemas le ha traído a estudiantes de todos los niveles. Según Kline (1974), algunas de las dificultades son superficiales; una de ellas es el vocabulario, porque los matemáticos usan palabras que para muchos resultan extrañas y que posiblemente no se encuentran en muchas áreas del saber. Otras dificultades en el aprendizaje de las matemáticas que tal vez sean más substanciales son que la educación elemental, secundaria y superior tienen por finalidad prepararnos para la vida y es mucho lo que hay que aprender.

Guzmán (1993) expresa: "La complejidad de la Matemática y de la educación sugiere que los teóricos de la educación Matemática, y no menos los agentes de ella, deban permanecer constantemente atentos y abiertos a los cambios profundos que en muchos aspectos la dinámica rápidamente mutante de la situación global venga exigiendo" (p. 46). Esto quiere decir que los profesores deben ser entes innovadores de la enseñanza aceptando los retos que las nuevas realidades les presente, combatiendo así la fuerte resistencia al cambio.

Ya en la década del setenta hacen su aparición en el ámbito escolar los Módulos Instruccionales, éstos fueron creados gracias a Keller quien diseñó el conocido Plan Keller apoyado casi en su totalidad en las ideas conductuales de Skinner, como una manera para proponer soluciones prácticas a los problemas educativos.

En Venezuela el Instituto Universitario Pedagógico de Caracas y la Universidad Nacional Abierta, implementaron en los pensa de algunas de sus carreras el uso de módulos instruccionales, sin embargo debido a la novedad y a la falta de preparación del cuerpo profesoral no se producen los resultados esperados.

Desde 1994, en la ULA-Táchira se han diseñado y utilizado con fines didácticos un conjunto de Módulos Instruccionales en las áreas de Álgebra y Cálculo Diferencial. Actualmente se nota un resurgir de estos modelos debido a un conjunto de modificaciones que gracias a la tecnología educativa a sido posible incorporar a su estructura básica.

Estos Módulos reformulados y dotados de una diagramación dinámica y un lenguaje sencillo sin menoscabo de lo riguroso, buscan reforzar, complementar o servir de material didáctico en una o más asignaturas. De esta manera, en forma general, se propicia el mejoramiento de las prácticas pedagógicas, los modos de transmitir y adquirir conocimientos, se estimulan las capacidades y se desarrollan las habilidades de los alumnos. También ayudan a desarrollar talentos especiales así como remediar situaciones en que los alumnos necesitan un ritmo de aprendizaje diferente.

Aparte de aplicar el principio de aprender haciendo y de aprendizaje a su propio ritmo, el rasgo más sobresaliente de los mencionados Módulos es la presentación de información en pequeñas porciones, seguido de un conjunto de situaciones problemáticas que por una parte ejemplifiquen y que por la otra exijan del estudiante el desarrollo de procesos cognitivos tales como: Observación, comparación, relación, clasificación, análisis, síntesis, generalización y transferencia.

Indudablemente que la configuración del aparato mental que un individuo adquiere al entrenarse en los mencionados procesos, no solo va a posibilitarle comprender y obtener mejores resultados en matemática, sino que le va a dotar de un perfil adecuado para enfrentar con éxito su carrera profesional y su entorno social.

De acuerdo con la Asamblea Nacional de Educación. Propuestas para Transformar la Educación. Caracas 1998, la enseñanza de la matemática, especialmente a nivel universitario, es quizás una de las áreas en las cuales la utilización de esta herramienta educativa es altamente beneficiosa, más aún en aquellas disciplinas que utilizan los principios, fundamentos y propiedades matemáticas como herramienta para explicar situaciones y /o resolver problemas variados.

Dentro de estas disciplinas está incluida la Administración y Contaduría. Un análisis de los pensa de estudios de esta carrera en la ULA-TACHIRA, refleja un buen porcentaje de contenido matemático con especial énfasis en el cálculo Integral y diferencial.

Por todo lo anteriormente expuesto se propone, como una alternativa a la referida situación de enseñanza tradicional, el diseño de un Módulo Instruccional, en el cual se ilustre un conjunto de situaciones problemáticas relativas a la Integración de funciones reales, dirigido a estudiantes de Administración de la ULA-Táchira

1.2.- Objetivos

Objetivo General:

Diseñar un Módulo Instruccional basado en estrategias andragógicas donde se presenten los métodos esenciales de Integración de funciones reales para que el participante obtenga un aprendizaje significativo.

Objetivos Específicos:

✓ Diseñar estrategias andragógicas que permita la prosecución de un aprendizaje constructivo y significativo, apoyado en el principio de aprender haciendo.

✓ Determinar la factibilidad de la aplicación del módulo instruccional.

✓ Elaborar un módulo instruccional con los tópicos previstos en el programa de Matemática II, referente a los métodos esenciales de integración de funciones reales.

1.3.- Justificación

El diseño del Módulo Instruccional que se propone, queda totalmente justificado por formar parte del conjunto de actividades previstas por una línea de investigación, presentada ante las instancias respectivas por los profesores Alfonso Sánchez y Miguel Vera, la cual contempla el desarrollo de:

- Módulos para la enseñanza de Matemática 11, elaborados por el Prof. Alfonso Sánchez.
- Módulos para la enseñanza de Matemática 21, realizados parcialmente por el Prof. Miguel Vera y Alfonso Sánchez quedando pendiente los módulos aplicaciones de integrales de funciones reales, que es justamente el que se piensa desarrollar mediante el presente trabajo.
- Libros electrónicos para la enseñanza del Precálculo y el Cálculo diferencial.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1.- Antecedentes:

La universidad nacional abierta promueve los módulos instruccinales como herramienta de aprendizaje a distancia.

Matemática III : Ingeniería /Universidad nacional Abierta

Caracas: UNA.1985.3V. en 1"Área de matemática"

Matemática III : Universidad Nacional Abierta

Caracas: UNA,1980.3V. en 1

Matemática 20/ Villamizar V.Saul/ Universidad de los Andes

2.2.- Bases Legales:

Las bases legales de la Educación universitaria y por lo tanto del material de apoyo bibliográfico como el módulo a proponer en este trabajo para el aprendizaje significativo de la Matemática se encuentran en los mismos fundamentos teóricos del sistema educativo venezolano: la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela, la Ley Orgánica de Educación y su Reglamento, el Reglamento del Ejercicio de la Profesión Docente, decretos, resoluciones y circulares.

La Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999), en sus artículos 102 y 103 establece los fines de la educación, señala como y con quienes lograr esos fines y la obligatoriedad de colegiarse y el para qué señalando el fomento de la cultura en todas sus manifestaciones así como, el desarrollo del espíritu de solidaridad humana y la formación de ciudadanos aptos para el ejercicio de la vida democrática. Para contribuir al logro de los fines y objetivos de la educación en Venezuela, es necesaria la elaboración de material bibliográfico, basado en estrategias acordes a la edad y nivel de estudio, tal el caso del módulo a proponer en esta investigación, basado en estrategias andragógicas para orientar el aprendizaje comprensivo de la Matemática específicamente en lo que respecta a los métodos esenciales de Integración de funciones reales en el nivel ya referido.

Prosiguiendo este estudio se tiene que la Ley Orgánica de Educación, (1980); se ajusta a lo establecido en la Constitución Bolivariana de la República de Venezuela y dentro de su articulado señala en los artículos 102 y 103, el destino y objeto de la educación.

La correspondencia existente entre la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela, Ley Orgánica de Educación y su Reglamento, la Ley de Universidades, garantizan al facilitador la libertad para la elaboración de material bibliográfico de apoyo, ajustado a las normas, que tenga como propósito contribuir a lograr los fines y objetivos del sistema educativo de Venezuela por ejemplo, el módulo ya referido.

De acuerdo a lo anterior puede decirse que la Educación universitaria está suficientemente normada por la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999) y la Ley de Universidades.

Para el logro de lo señalado en el último de los artículos anteriores, es preciso que el participante alcance Aprendizajes Significativos y para cumplir este propósito, el facilitador puede elaborar material de apoyo, cómo el módulo a proponer en este trabajo, basado en los métodos esenciales de Integración de funciones reales.

Fundamentación teórica:

2.3.- Planificación Educativa:

La planificación consiste en la aplicación de la inteligencia para tratar los hechos y las situaciones como son y para encontrar una manera de hallar la solución y resolver los problemas, es entonces, la planificación lo más lejano que se conoce de la improvisación, para la solución de problemas institucionales y en el presente caso educativos. Puede también interpretarse la planificación como lo hacen Matute y Flores, (1990); para quienes es: “el conocimiento que media entre la decisión y la acción, es un acto fundamental de precisión.” (p. 10).

Esto lo convierte en instrumento fundamental no sólo para la alta gerencia en la educación sino también para el docente de aula.

En atención a lo anteriormente expuesto es conveniente recordar a Flores (1995); cuando señala que:

> La planificación en cierto sentido es mucho más compleja de lo que parece a primera vista y tiene muchas implicaciones sobre la sociedad en general, esto no deja de ser una contradicción porque la planificación es algo muy práctico, se refiere al cálculo que precede y preside la acción. (p. 13)

Siguiendo el curso de la exposición se aprecia que los investigadores en el campo de la planificación suelen considerar tres vertientes: la administrativa, la normativa y la estratégica. A cada una de ellas corresponde un tipo de planificación Corredor (1996), las presenta en un amplio estudio del cual, para la primera vertiente, se puede extraer la de Terry: "Es la selección y relación de hechos así como la formulación y uso de suposiciones con respecto al futuro en la visualización y formulación de las actividades propuestas que se creen necesarias para alcanzar los resultados deseados" (p. 18). Se aprecia en esta concepción que: La certeza o probabilidad de acontecimientos futuros motivan la planificación:

El plan es la expresión de la afinidad existente entre los actores y la institución; el planificador pone en juego su pensamiento reflexivo, la imaginación y la previsión; el plan soluciona problemas del presente y hace previsiones respecto problemas potenciales; es un proceso continuo e involucra a todos los integrantes de la institución. Para la planificación normativa expresa que es en la práctica una planificación del desarrollo, en la cual la participación del Estado es determinante para su análisis y aplicación.

Con relación a la planificación estratégica menciona el Proyecto Formulación de una Metodología de la Planificación de Mediano Plazo (F.O.R.M.E.P.L.A.N.), para el cual la "planificación estratégica propone, estudia y conduce las acciones con una perspectiva de cambios sustanciales de la situación" (p. 74).

Continuando la breve referencia a la planificación estratégica, Matute y Flores, (1990); señalan como características de esta planificación:

La identificación de planificación con dirección y gobierno.

La planificación se realiza en situaciones de poder compartido.

La planificación es diferente al diseño normativo.

La planificación es un cálculo situacional complejo.

La exigencia de una situación y el uso de la simulación humana.

La estimación de categorías de situación, problema y oportunidades como básicas.

La consideración de diferentes escenarios de cálculo.

Estima cuatro instancias temporales y formalizadas: planificación en la coyuntura, planificación anual operativa, planificación mediano plazo y planificación a largo plazo.

Para Briceño 1997), esta planificación presenta cuatro momentos: en el explicativo se caracteriza el problema, sus características negativas que puedan ser cambiadas, evitadas o inaceptadas; el normativo corresponde el conjunto de operaciones que podrían resolver el nudo crítico; el estratégico comprende los criterios generales y específicos del proyecto, los cuales determinan por qué se seleccionó el mismo, el táctico operacional, es el momento de las decisiones y la actuación.

A menudo cuando se leen estos conceptos no se aprecia que la planificación está precedida de un estudio minucioso de la problemática que se quiere solucionar, ello implica la realización de un diagnóstico fruto generalmente de una investigación de campo, el estudio de proposiciones alternativas de solución y su jerarquización, el conocimiento de las debilidades y fortalezas con las cuales habrá que contar y del diseño de estrategias para la realización y ejecución del plan que ha de concluir con la solución del problema.

En concordancia con lo anteriormente expuesto todo plan debe constar de un conjunto de requisitos entre los cuales pueden mencionarse: identificación y documentación de las necesidades, fruto de una investigación; selección de las necesidades prioritarias atendiendo a una metodología apropiada; especificación de los resultados deseados para el logro de las necesidades a solucionar; establecer las acciones para satisfacer cada necesidad considerando tanto las debilidades como las fortalezas; indicar la secuencia de los resultados deseables para satisfacer las necesidades diagnosticadas e identificadas con precisión; determinar las estrategias alternativas e instrumentos necesarios para satisfacer las necesidades considerando las ventajas y desventajas de cada conjunto de estrategias e instrumentos.

Junto a todo lo anterior es útil la reflexión De Bono (1997):" en un mundo que se mueve a toda velocidad, los planes son casi siempre erróneos porque hay que basarlos en el presente y en la extrapolación de las tendencias actuales" (p. 145). El mismo razona que la falibilidad de los planes no implica ignorarlos sino una advertencia para tener en cuenta una de sus características la flexibilidad.

Para el presente trabajo la investigación, con el propósito de encontrar y precisar los ejes críticos del aprendizaje significativo. A partir de este conocimiento se planificará, diseñará un módulo basado en Estrategias Andragógicas orientadas a lograr aprendizajes significativos en la asignatura Matemática II en los métodos esenciales de Integración de funciones reales.

Estrategias Andragógicas para orientar el Aprendizaje Significativo sobre los métodos esenciales de Integración de funciones reales.

Iparraguirre, (1998), define las estrategias como: "Las secuencias integradas de procedimientos o actividades que se eligen con el propósito de facilitar la adquisición, el almacenamiento y/o la utilización de la información o conocimientos". (p. 1). Los conocimientos en este caso estarán referidos a la Matemática de acuerdo al programa oficial de Matemática II. Para Ruiz (1992); estrategia es: "...el conjunto de actividades para alcanzar un saber..." (p 137). De acuerdo a Wood citado por I.N.S.T.I.A. (1993), "Las estrategias son medios para alcanzar metas" (p. 1-2). Esto quiere decir que las estrategias son las acciones efectuadas para lograr las metas previamente planificadas.

Prosiguiendo el curso de la exposición, el mismo autor realiza un detenido estudio acerca de las estrategias desde los puntos de vista militar, empresarial y educacional. Con relación a esta última analiza numerosas definiciones para mencionar finalmente a Husc (1992), quien considera que modernamente el significado de estrategia abarca los aspectos: producto a obtener características de los estudiantes; recursos a emplear; tiempo disponible; secuencia de las operaciones; así como los objetivos a lograr.

Prosiguiendo el análisis, es conveniente aclarar que el modelo andragógico es bidireccional y debe considerar los principios de horizontalidad y participación, los objetivos perseguidos, la experiencia de aprendizajes y el tiempo de los participantes, por todo esto será preciso combinar y crear estrategias adecuadas al estudiante adulto, buscando incluso, durante los “encuentros educativos” en el aula romper la bidireccionalidad para alcanzar la multidireccionalidad, a fin lograr responsabilidad compartida en el proceso de evaluación.

Las Estrategias Andragógicas, en las cuales se basará el módulo a proponer en este trabajo, serán flexibles por cuanto se comparte con Nieves (1997), que la orientación del aprendizaje es un proceso divergente, en el cual se generan contradicciones internas y externas, dudas, interrogantes, polémicas, decisiones, errores y aciertos, fruto de la relación facilitador-participante, participante-facilitador, las cuales permiten el conocimiento, aprendizaje, desarrollo del pensamiento y la comunicación. Estas estrategias se caracterizarán por:

-. Orientar la necesidad de los participantes de autodirigirsen; despertar y orientar la actitud de los participantes hacia el aprendizaje significativo a fin de enfrentar satisfactoriamente las tareas y problemas de la vida cotidiana; estar centradas en la realización de actividades de formación teórica y solución de problemas; propiciar un ambiente de respeto mutuo, confiable, colaborador y participativo; promover como actividades de aprendizaje la investigación bibliográfica y la solución de problemas; fundamentar la evaluación por evidencias reunidas por el participante y validada por el grupo; promover el aprendizaje significativo como recursos para la solución de problemas y ascenso personal.

Lo expuesto permite decir que las estrategias andragógicas en las cuales se basará el módulo a proponer, en esta investigación constituirán un conjunto de procedimientos o actividades orientadas al logro de aprendizajes significativos sobre los métodos esenciales de Integración de funciones reales, el cual se evidenciará en el mejoramiento del rendimiento académico, constatado en las evaluaciones aplicadas durante los encuentros educativos o por la aplicación de los nuevos conocimientos en las actividades cotidianas para obtener una elevación en sus condiciones de vida.

La Andragogía

Para Knowles citado por I.N.S.T.I.A. (1993): "la Andragogía es la ciencia y el arte de ayudar a los adultos a aprender, en contraste con la pedagogía, como el arte y la ciencia de enseñar a niños". (p. 66). Esta definición implica clarificar el problema evidenciado en la pregunta: ¿A quién se enseña? y en función de la misma deslindar la Pedagogía de la Andragogía. El niño y el adolescente constituyen una realidad biológica, psicológica y social diferente al adulto, tanto en su estructura como en su comportamiento. El niño y el adolescente están en crecimiento. El adulto es un ser maduro. Su crecimiento biológico ha terminado, pero su capacidad y necesidad de aprender se acrecienta con la experiencia. Esto justifica el desarrollo de la Andragogía como ciencia de la Educación de Adultos.

En este mismo orden de ideas, el aprendizaje en los adultos se caracteriza por la confrontación de experiencias, la racionalidad, su capacidad de abstracción, de integración y aplicabilidad. La integración de experiencias viejas y nuevas y su aplicación al cuerpo social permite al hombre renovar su conocimiento, contribuir al bienestar propio y al de la sociedad. Adam (1989); citado por I.N.S.T.I.A., al estudiar el proceso andragógico señala en él las siguientes fases:

- Mantener, consolidar y enriquecer los intereses, motivaciones o necesidades del adulto; orientar los nuevos rumbos y promover en él la idea: "Educarse es progresar"; actualizar al adulto, renovar sus conocimientos para continuar aprendiendo; proyección humana, permite interpretar lo que fuimos, somos y seremos de acuerdo a la esencia del hombre.

En correspondencia con lo anterior, la Andragogía para la orientación del proceso de aprendizaje desarrolló dos principios básicos. El principio de horizontalidad, entendido como una relación entre iguales, una relación compartida de actitudes, responsabilidades y de compromisos hacia logros y resultados exitosos y el principio de participación como la acción de tomar decisiones en conjunto o tomar parte con otros en la ejecución de una determinada tarea.

En Educación superior, para planificar el aprendizaje significativo de cualquier asignatura, es conveniente utilizar el modelo andragógico, precisar las actividades a seguir, esto implica conocer los principios sobre los cuales se basará. En este sentido, Díaz (1996), al estudiar la Teoría sinérgica considera que la metodología del aprendizaje se fundamenta en tres principios: el primero, asigna a la sinergía una dirección significativa. El aprendizaje diseñado permite estructurar el proceso y plantear los pasos para que el participante y facilitador interactuen y realicen confrontación de experiencias. El segundo principio, hace referencia a que la sinergía transmite cooperación entre los integrantes del grupo; compartimiento de experiencias y de conocimientos, estimulando el crecimiento personal de los participantes.

El tercer principio, señala que la sinergia establece que en ciertas condiciones el todo es superior la suma de sus partes. El trabajo en grupo permite la confianza y compenetración entre sus integrantes, la estimulación de iniciativas, la responsabilidad sumando esfuerzos para el logro de objetivos comunes. En correspondencia con lo anterior el andragogo sustentará la planificación en los principios y modelo andragógico. Este modelo se presentará en el cuadro Nº 1.

CUADRO N º 1

MODELO ANDRAGÓGICO

AMBIENTE	Relajado confiable. Mutuamente respetuoso. Informal cálido. Colaboración apoyados.
PLANIFICACIÓN	Mutuamente por educandos y facilitador
DIAGNÓSTICO DE NECESIDADES	Por mutua valoración
FIJACIÓN DE OBJETIVOS	Por negociación mutua.
DISEÑO DE PLANES DE APRENDIZAJE	Contratos de aprendizajes. Proyectos de aprendizaje. Secuenciados por disposición.
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	Proyectos de investigación. Estudios Independientes. Técnicas de experiencias.
EVALUACIÓN	Por evidencia reunida por el participante, validada por sus compañeros, facilitador y expertos.

FUENTE: Instituto Internacional de Andragogía. I.N.S.T.I.A. Bases Teóricas de la Andragogía.

Según lo expuesto, de acuerdo al enfoque andragógico, para contribuir al logro de los objetivos comunes, a quienes participan en el proceso de orientación del aprendizaje, el facilitador de matemática II debería reunir al menos las siguientes condiciones: planificar atendiendo a los principios y modelo andragógico para facilitar el logro de objetivos comunes a los participantes y facilitador.

Tener conocimiento y dominio del programa pertinente.

Estar en capacidad de interpretar y aplicar las estrategias contenidas en el módulo propuesto en este trabajo u otras que se adecuen a los contenidos.

Aplicar la evaluación para el mejoramiento personal y basarse en la multidireccionalidad de este proceso.

En opinión de Hernández (1999) "la educación del tercer milenio será una educación a lo largo de la vida, que cultive el intelecto, valores y principios y nos conduzca a la disciplina de los modelos mentales, aprendizaje continuo y trabajo en equipo" (p.21). Esto confiere a la Andragogía una gran relevancia social y un futuro promisorio, por cuanto será ésta, la encargada de ayudar al adulto a su realización y una sociedad que logre tal propósito, en sus habitantes, probablemente tendrá desarrollo y paz social garantizada.

Teorías del Aprendizaje

Teoría de Ausubel

Al estudiar la adquisición y uso de los conceptos, Ausubel (1998), plantea que los seres humanos interpretan las experiencias perceptuales de acuerdo a su estructura cognitiva y que los conceptos son el fundamento para el aprendizaje y la resolución significativa de los problemas. En su teoría se pueden distinguir las siguientes etapas:

Reconciliación Integrativa: Ausubel (1998) la define como: "La recombinación de los elementos que existen en la estructura cognoscitiva" (p. 117) y considera que esta fase del aprendizaje significativo alcanza su mayor logro cuando el facilitador o el material didáctico eliminan las fuentes de confusión.

Inclusión o Subsunción: Ausubel (1986) considera la inclusión como una estrategia de carácter cognitivo la cual permite al aprendiz, a partir de aprendizajes anteriormente establecidos, englobar nuevos conocimientos, más específicos o subordinados a los ya poseídos.

Asimilación o Proceso de Afianzamiento: Para Ausubel (1998) "la asimilación de conceptos se caracteriza por ser un proceso activo de relación, diferenciación e integración con los conceptos pertinentes que ya existen" (p. 96), es decir, se necesita que el aprendiz de significado, sentido, a los contenidos por aprender para que estos sean incorporados como una unidad ideacional al constructo o estructura cognoscitiva establecida en el aprendiz.

Diferenciación Progresiva: Ausubel (1998), dice que: "la asimilación secuencial de nuevos significados produce la diferenciación progresiva de conceptos o proposiciones" (p. 120). De aquí la conveniencia de presentar al aprendiz inicialmente las nuevas ideas en forma general para que él progresivamente las organice e incorpore a su estructura cognitiva.

Consolidación: Los participantes estarán en capacidad de repetir los contenidos aprendidos y dominar los conceptos básicos de tales contenidos, dando de ellos una explicación lógica. Este proceso se logra por medio de la confirmación, la corrección, la diferenciación y con retroalimentación en el aula o con el material de aprendizaje.

El aprendizaje significativo exige, según Ausubel (1998), la existencia de conocimientos previos; una actitud de aprendizaje significativo o disposición del participante para relacionar sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva; el material por aprender debe ser potencialmente significativo, es decir, relacionable con la estructura cognoscitiva del participante.

Respecto a la evaluación Ausubel (1998), se manifiesta contrario a “las prácticas evaluativas que exigen la repetición exacta de la información o ideas aprendidas” (p.122). Se explica su posición señalando que las referidas prácticas desalientan a los participantes para el logro de aprendizajes significativos. Para superar este inconveniente, es útil la recomendación de Calzadilla (1995), el facilitador debe manejar preguntas de memoria para estimular los recuerdos; de análisis para promover las explicaciones; de evaluación para motivar la emisión de juicios de valor y creativas para que el participante se proyecte en las respuestas.

Otro autor, Morles (1995), expresa su punto de vista respecto al aprendizaje como proceso e indica que el mismo cumple con las siguientes etapas: Asimilación: consiste en la captación y comprensión de lo que se ha de aprender; retención: fijación y conservación de las experiencias. Puede mejorarse con la ejercitación; integración: consiste en la organización de los conocimientos nuevos para combinarlos con los anteriores y crear así nuevos conocimientos. Se desarrolla con la práctica de la reflexión y la actitud crítica; aplicación: solución de problemas basándose en los aprendizajes realizados. Este enfoque de Morles es muy sencillo y en él se aprecia la influencia de Ausubel pero ordenada y presentada de acuerdo a su propia visión.

Continuando el estudio del aprendizaje se encuentra a Piaget (1982), quien enfatiza el concepto de equilibrio el cual es considerado como la adaptación a través de la asimilación de elementos ambientales y la acomodación y modificación de los esquemas y estructuras mentales existentes como resultado de nuevas experiencias. Al respecto plantea, en todos los casos en los cuales hay construcciones nuevas, la equilibración se presenta de tres maneras diferentes: por relación entre sujeto y objetos. Por coordinación de subsistemas y por equilibración entre las diferenciaciones y las integraciones, las cuales consisten en la regulación de las interdependencias y de la construcción de nuevas habilidades.

Espíndola (1996), al estudiar a Piaget, lo señala como: "el fundador de la teoría genética de la inteligencia y tal vez el más influyente psicólogo de nuestra época en el campo de la psicología educativa y del aprendizaje" (p.17). En su teoría se sustenta básicamente el constructivismo, ósea la necesidad de que el participante invente o reinvente el conocimiento en lugar de aprenderlo de memoria y sin significado.

Continuando el curso de la exposición, Barriga y Hernández citan a Coll para quien la concepción constructivista considera: al alumno como responsable último de su propio aprendizaje, él es quien construye o reconstruye los saberes de su grupo cultural; la actividad mental constructiva del alumno se aplica a contenidos que ya poseen un grado considerable de elaboración, esto significa que el alumno generalmente reconstruye conocimientos ya existentes en la sociedad; la función del docente es engarzar los procesos de construcción del alumno con el saber colectivo culturalmente organizado, es decir el docente propiciará y orientará intencionalmente las condiciones de aprendizaje.

Al estudiar el constructivismo, Gallego (1998), plantea que, el facilitador debe propiciar situaciones de aprendizaje para generar experiencias de aprendizaje, las cuales permitan a los participantes, una autotransformación de las mismas de manera que se aproximen críticamente a las que manejan los integrantes de la comunidad y las superen rigurosamente. Se trata de lograr Aprendizaje Significativo y lo define diciendo que "un aprendizaje es significativo cuando una nueva información adquiere significado para el aprendiz a través de una especie de anclaje en los aspectos relevantes de la estructura cognoscitiva preexistente en el alumno" (p.285) e inmediatamente lo califica de constructivista.

En concordancia con lo anterior, Barriga y Hernández, (1997); plantean que los constructivistas señalan un conjunto de principios los cuales pueden aplicarse al aprendizaje significativo, entre estos:

El aprendizaje es un proceso constructivo.

El grado de aprendizaje depende del nivel de desarrollo cognitivo.

El punto de partida del aprendizaje son los conocimientos previos.

El aprendizaje se facilita gracias a la mediación o interacción con otros.

El aprendizaje implica un proceso de reorganización interna de esquemas.

El aprendizaje se produce cuando entra en conflicto lo que el alumno ya sabe con lo que debe saber. La búsqueda de este aprendizaje, procura direccionar el proceso de su orientación en el sentido que le asigna Ugas al aprendizaje, (1997); "hacia la formación–creación" (p. 35), para que sus logros sean vitales, sin la pretensión de que los contenidos sean verdaderos o falsos, solo enunciados epocales sujetos a la dialéctica del progreso y por tanto perfectibles.

En la reseña anterior se puede apreciar que en lo esencial para este trabajo, Ausubel coincide con Morles y los constructivistas, por cuanto busca el aprendizaje comprensivo en lugar del memorístico y por considerar a los conocimientos previos y a la actitud, de capital importancia para el logro del aprendizaje significativo.

El campo de la educación como el de todas las ciencias sociales es muy dinámico. Este dinamismo produce cambios y evolución permanente en las teorías. En educación surgen interrogantes como ¿Qué puede ser aprendido?. Gagné, según opinión de Zuarez (1996), considera que a este cuestionamiento responden la información, las destrezas intelectuales, las estrategias cognoscitivas, actitudes y las destrezas psicomotoras, entendiendo por información: la retención por medio de la memoria de hechos y principios dentro de un contexto significativo con el cual se pude asociar e incorporar.

Destrezas Intelectuales: referidas a la comprensión de significados y la utilización adecuada de los conceptos, reglas por medio de la discriminación, el análisis, la síntesis, la aplicación y la generalización.

Estrategias Cognoscitivas: hacen referencia al aprender a aprender, a la metodología, técnicas de solución de problemas, aspectos éstos aprendidos a partir de la ejercitación orientada por los docentes.

Las Actitudes: se engloba aquí maneras de ser, actuaciones, confianza en sí mismo, honestidad, interés por los demás. Estas se acrecientan con el ejemplo y las experiencias de grupo.

Destrezas Motoras: aprendidas por medio de las demostraciones, la actividad, información verbal y por medio de la solución de problemas.

Araujo y Chadwick (1993), distingue en la Teoría de Gagné las siguientes fases para el aprendizaje: motivación, comprensión, adquisición, retención, recordación (recuperación), generalización, evaluación del desempeño y la retroalimentación (afirmación). Cada fase del aprendizaje de esta teoría, es tenida muy en cuenta por Gagné (1997), al desarrollar los acontecimientos de la orientación del aprendizaje. La función que desempeñan estos acontecimientos en cada encuentro educativo en el aula y su relación con las fases del aprendizaje son las siguientes: Gagne (1997), considera que las comunicaciones tienen el propósito de facilitar el aprendizaje, por tanto deben planificarse y ajustarse a las circunstancias para que puedan lograr su cometido. Estima que la orientación del aprendizaje debe atender a:

Informar los objetivos: El facilitador está en la obligación de informar al participante acerca de la conducta esperada como evidencia del logro del aprendizaje buscado. Estimulación del recuerdo de conocimientos previos requeridos: gran parte del aprendizaje nuevo es fruto de la combinación de ideas. Los conocimientos previos deben ser recordados, actualizados inmediatamente antes de alcanzar el nuevo conocimiento. Se aprecia que estas fases constituyen la motivación para el aprendizaje.

Presentación del material de estudio: es necesario presentar al participante los estímulos adecuados para promover el aprendizaje: se le presenta el estímulo, al obtener la respuesta correcta se le proporciona el reforzamiento para facilitar el incremento de la frecuencia de esta respuesta. Se orienta así, al participante a la comprensión de los contenidos.

Orientación del aprendizaje: el facilitador debe guiar el aprendizaje, estimular al participante, adaptarse a él, a sus conocimientos previos para ayudarlo a pensar y codificar la información a almacenar en la memoria a corto plazo. Esta fase está orientada a facilitar la adquisición o almacenamiento de la información.

Producir o instigar la conducta: cuando el participante a logrado comprender y almacenar en la memoria a corto plazo, es necesario pedirle que demuestre su recuerdo y hacerle profundizar un poco en el mismo pidiéndole ejemplos similares o relacionados con lo recordado para mejorarlo y procurar que lo adquirido sea retenido, es decir, pase a la memoria a largo plazo.

Retroalimentar las conductas correctas: esta permite al participante percibir el logro de la conducta deseada. La retroalimentación puede ser automática. Otra forma de retroalimentación puede ser una palabra, una sonrisa o una inclinación de cabeza por parte del facilitador, en fin todo cuanto se haga para darle al participante información acerca de la propiedad de su conducta. Constituye una forma de retroalimentación y sirve para afirmar el aprendizaje.

Evaluación del desempeño: El aprendizaje deseado se logra cuando se es capaz de producir la conducta esperada. Para que el aprendizaje logrado sea confiable, el participante debe ser capaz de mostrar ejemplos diferentes y realizar problemas también diferentes y la validez se logrará cuando el aprendiz muestre esos logros sin caer en deformaciones, tales como: memorización de la respuesta o recuerdos previos.

Mejorar la retentiva y la transferencia: debe procurarse que el participante realice repasos sistemáticos semanales o mensuales para que la retentiva sea recuperada y empleada. Para lograr la transferencia será necesario colocarle actividades que le exijan al participante, la aplicación de lo aprendido, a situaciones diferentes a la original, pero que estén íntimamente relacionadas y obedezcan a la naturaleza general de la solución esperada. Esta fase se dirige a que el participante logre la recuperación y transferencia de información y por ende su generalización.

Por lo visto, Gagné al igual que Ausubel, Morles y Shuell, procura el aprendizaje comprensivo y coinciden al dar prioridad a los conocimientos previos. Otra coincidencia de Gagne con Ausubel es la referida a la instrucción programada, al respecto escribe: “la experiencia con la enseñanza programada y otros métodos, nos sugiere que la enseñanza individualizada no solo es más eficaz que la de grupo, sino también más sensible a las necesidades del estudiante" (p.207).

La consideración anterior la fundamenta en que es más humana que los métodos de grupo porque facilita el establecimiento de metas por parte del estudiante; proporciona diversidad de materiales para el logro de la meta; hace más fluido el tratamiento individual y privado del participante ante alguna dificultad; le permite aprender a su propio ritmo y proporciona retroalimentación individual y constante.

El conjunto de aspectos de la teoría de Gagne, aquí mencionados constituye el principal soporte para la realización de este trabajo, en el cual se procurará orientar el proceso de aprendizaje de los participantes de Matemática II sobre los métodos esenciales de Integración de funciones reales.

Para visualizar fácilmente la relación entre las etapas del proceso de orientación del aprendizaje y las fases de éste en la Teoría de Gagne se elaboró el cuadro Nº 1 y para resumir el pensamiento de los autores más importantes consultados para la realización de la presente investigación se elaboró el cuadro Nº 2.

CUADRO N ° 2

CUADRO RE S U M E N

AUTOR	APRENDIZAJE	PROCESO	QUE HACER	COMO Verificarlo
SKINNER	Respuesta esperada a un estímulo	Estímulo-res-puesta ESPE-rada	Producir el reforzamiento de manera contingente a la respuesta esperada	Evaluación de resultados.
AUSUBEL	El aprendizaje del salón de clase se ocupa principalmente de la adquisición, retención	Reconciliación integrativa. Inclusión. Asimilación. Diferenciación progresiva. Consolidación	Generar interés por la materia de estudio, inspirar el empeño por aprender, motivar a los alumnos y ayudarlos a inducir aspiraciones realistas de logro educativo. (p. 23.	Evaluación del desempeño haciendo preguntas para: estimular re-cuerdos, motivar, expli-caciones,

MORLES	y uso de aprender cuerpos de información potencialmente significativa	Asimilación, retención. Integración. Aplicación.	Conservar la salud. Despertar el interés. Utilizar material de aprendizaje significativo. Seleccionar el ambiente de estudio.	promover la emisión de juicios de valor y para la creación.
SHUELL		Fase inicial. Fase intermedia. Fase final.	Repasar mapas conceptuales. Solucionar problema. Responder preguntas.	

GAGNE		Motivación. Comprensión. Adquisición. Retención. Retroalimentación y afirmación del aprendizaje. Evaluación del desempeño. Recordación, recuperación general.	Cambiar estímulos. Informar objetivos. Estimular el recuerdo... Presentar el material de estudio. Orientar el aprendizaje. Producir la conducta. Retroalimentar Evaluar el desempeño. Mejorar la retentiva.	

FUENTE: Instituto Internacional de Andragogía. I.N.S.T.I.A. Bases Teóricas de la Andragogía.

Modulo Instruccional sobre los métodos esenciales de Integración de funciones reales.

El Módulo Instruccional sobre los métodos esenciales de Integración de funciones reales, desarrollará entre otros aspectos: Definición de integral, integración por sustitución simple, por parte, por fracciones parciales y por sustitución trigonométrica.

De acuerdo a esta reseña el módulo es muy ambicioso, de ahí su extensión y el forzoso tratamiento superficial, dejando sobre el participante la responsabilidad de profundizarlo según sus intereses y disposición personal. Este es un aspecto a considerar en el momento de evaluar pues debe recordarse que, en andragogía el propósito no es verificar el logro de los objetivos programáticos sino los avances y progreso personal del participante, así como los aportes recibidos de la experiencia profesional del facilitador.

Definición de Términos Básicos

Actitud: Disposición del ánimo manifestado interiormente. (Diccionario Enciclopédico Océano Uno. Color, 1996)

Aplicación: Solución de problemas basándose en los aprendizajes realizados. (Morles, 1995).

Aprendizaje: Proceso mediante el cual se obtienen nuevas conocimientos, habilidades o actitudes a través de experiencias vividas que producen algún cambio en nuestro modo de ser o actuar. (Michel, 1997).

Asimilación: Proceso activo de relación, diferenciación e integración con los conceptos que ya existan. (Ausubel, 1986).

Condicionamiento Operante: Proceso de aprendizaje mediante el cual se hace que una respuesta llegue a ser más probable o frecuente. (Bigge, 1975).

Destrezas Motoras: Se aprenden por medio de las demostraciones, la actividad, la información verbal y mediante la solución de problemas. (Suárez, 1996).

Módulo Instruccional:

Conjunto de medios didácticos que ayudan a conseguir la instrucción. En la unidad base de recursos didácticos que sirven al alumno y al profesor para lograr que el proceso instructivo se desarrolle eficientemente. (Diccionario Océano, 1999).

BIBLIOGRAFÍA

DE GUZMÁN, Miguel.(1993).Tendencias Innovadoras En Educación Matemática. Editorial Popular. España.

GIL, José y otros.(1980).Terminología Básica De Curriculo Con Bibliografía Anexa. Editorial Eneva. Caracas.

HOFFMANN, Laurence y otros.(1999). “Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales. Sexta Edición. Editorial McGraw Hill. México.

ROSADO, Luis. Didáctica .(1979.De La Física. Editorial Luis Vives. España.

RUIZ, Angel. Material bajado de Internet: “A propósito del Constructivismo”. Universidad de Costa Rica.

TABUAS, Mireya. Articulo del Diario “El Nacional”. Lenguaje y Matemáticas tiñen de rojo las boletas.

Módulos Instruccionales:

- ✓ FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL.
- ✓ LIMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES.
- ✓ DERIVADAS DE FUNCIONES REALES.

CAPITULO III

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES – TÁCHIRA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS
SAN CRISTÓBAL

Módulo Instruccional

"INTEGRACIÓN DE FUNCIONES REALES"

Elaborado por:
Contreras Jonnart
Vivas Wilmer
Vivas Marilyn
Vivas Karin
Asesor:
Miguel Vera

IDENTIFICACIÓN DEL MÓDULO

Carrera:

EDUCACIÓN MENCIÓN MATEMÁTICA

Título:

Integración de funciones reales

Área:
Cálculo

Cátedra:

Análisis Matemático.

Elaborado por:
Contreras Jonnart
Vivas Wilmer
Vivas Marilyn
Vivas Karin
Asesor:
Miguel Vera

Diseño Curricular:
Alfonso Sánchez

Lugar y Fecha:

San Cristóbal, Mayo del 2002

Contenido

Introducción

Integración

- *Integración por Fórmulas*
- *Integración por Sustitución Simple*
- *Integración por Partes*
- *Integración por Sustitución Trigonométrica*
- *Integración Para Funciones Racionales*

El sistema educativo requiere cambios, fundamentalmente los referentes a capacitación y actualización, que han tomado una importancia significativa en los últimos tiempos. Estas transformaciones exigen que el docente a través de módulos instruccionales este incorporado y comprometido con la reforma educativa, tendiente a lograr mayor eficacia.

Este módulo permite, a quienes se desempeñan en la educación superior, crear estrategias y técnicas para lograr el éxito del manejo educativo, con la finalidad de obtener conocimientos.

Es conveniente proseguir la reforma educativa orientándola hacia un cambio en el sistema y en el modelo, como una alternativa válida en el cuestionamiento de la sociedad actual. Estas revoluciones se refieren a la eficiente estructura del hecho educativo, por ello, se debe incorporar el módulo instruccional de " Integración de Funciones Reales ", para asegurar la mayor participación, democratización y responsabilidad, con el fin de responder a los propósitos de esta investigación.

"Es una reflexión penosa para un hombre considerar lo que ha hecho, comparando con lo que debió hacer"

Sam Johnson

Orientaciones para el Desarrollo del Módulo

Para el desarrollo del presente módulo instruccional es necesario que sigas las siguientes orientaciones:

1. Lee los objetivos del módulo y asegúrate de haber entendido lo que ellos expresan.

2. Desarrolla la evaluación diagnóstica, y luego compara las respuestas con el patrón de corrección. Si la respondes con una exactitud de 100% pasa a tomar la autoevaluación final.

3. De no lograr el 100% de respuestas correctas, identifica los objetivos no alcanzados. Los cuales aparecen en el análisis de tarea y en la Pág. una vez identificados debes completarlos desarrollando las sesiones de trabajo que contempla dichos objetivos.

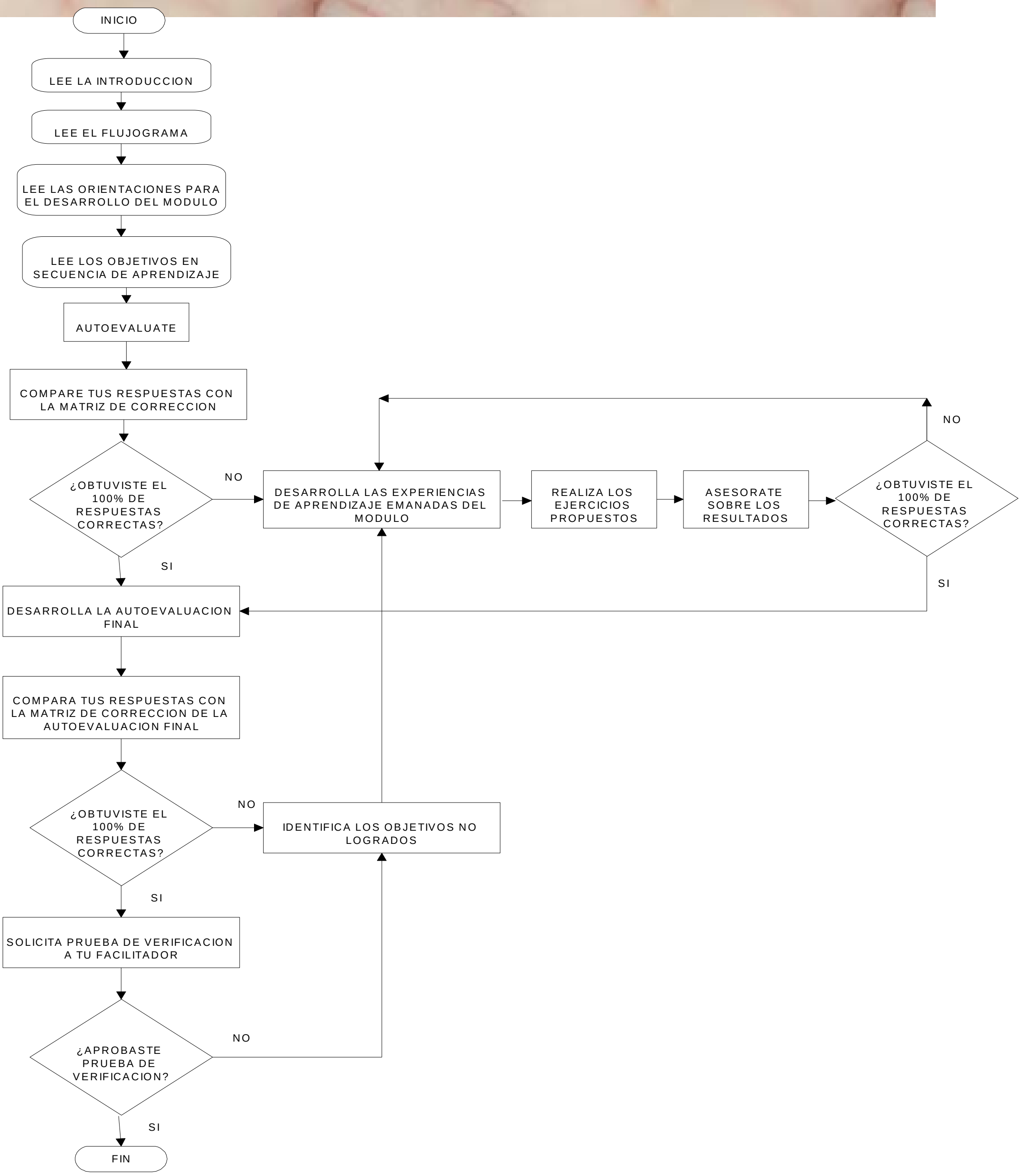
4. Después de haber logrado los objetivos, pasa a tomar la autoevaluación final.

5. Si respondes la autoevaluación con una exactitud de 100%, solicita a tu facilitador la prueba de verificación final; en caso de aprobarla, has finalizado con las actividades previstas en este módulo de aprendizaje.

De no lograr el 100% de respuestas correctas, debes consultar a tu facilitador para recibir las orientaciones al respecto y/o revisar nuevamente los objetivos no logrados.

Diagrama de Flujo

FLUJOGRAMA DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE:



Objetivos del Módulo

OBJETIVO GENERAL

Durante el trabajo permanente y responsable de este módulo instruccional, el estudiante desarrollará habilidades y destrezas mediante la comprensión, ejecución de la integración a través del esfuerzo, dedicación, disciplina y trabajo organizado que le permita combinar principios, teoremas, técnicas y artificios (elementos conceptuales, procedímentales y actitudinales) para aplicar sus conocimientos a problemáticas posteriores.

Objetivos Específicos

Para el logro del objetivo propuesto, el estudiante deberá poseer una visión integradora y un dominio conceptual, procedimental y actitudinal para:

I Sesión

1. Adquirir el concepto de la integral indefinida o primitiva de una función.
2. Plantear y resolver problemas en las que se apliquen el método de integración por sustitución simple.
3. Calcular las integrales mediante el método de cambio de variables.

II Sesión

4. Calcular integrales mediante el método de la integración por partes.
5. Calcular intégrales trigonométricas

III Sesión

6. Aplicar las técnicas de descomposición en fracciones parciales para el cálculo de integrales de funciones racionales.

Análisis de Tarea

8 Durante el trabajo permanente de este módulo instruccional, el estudiante desarrollará habilidades y destrezas en el estudio de integrales de funciones reales a través del esfuerzo, disciplina y trabajo organizado,

7 Aplicar las técnicas de descomposición en fracciones parciales para el cálculo de integrales de funciones racionales.

6 Calcular intégrales trigonométricas

5 Calcular integrales mediante el método de la integración por partes.

4 Aplicar las propiedades de las primitivas en el cálculo de integrales indefinidas.

3 Calcular las integrales mediante el método de cambio de variables.

2 Plantear y resolver problemas en las que se apliquen el método de integración por sustitución simple

1 Adquirir el concepto de la integral indefinida o primitiva de una función.

Evaluación Diagnóstica

VALOREMOS NUESTROS CONOCIMIENTOS PREVIOS

Instrucciones Generales:

- Los ejercicios aquí contenidos tienen como finalidad medir los conocimientos respecto a la derivada de funciones.

- Al iniciar cada parte de la prueba lee detenidamente las instrucciones y responde de acuerdo a ellas.

- Responde primeramente los ejercicios de menor grado de dificultad para Ud.

- Trabaje en forma ordenada y pulcra procurando llevar los términos a su mínima expresión.

***Importante*:** No observe el patrón de corrección hasta tanto no culmines la totalidad de la evaluación.

I PARTE (VERDADERO O FALSO)

***Instrucciones*:** A continuación se presentan varias afirmaciones. Analiza si cada una de ellas es verdadera o falsa. Explique su respuesta. Cada respuesta correcta tiene el valor de un punto (1 Pto.)

1)Las integrales definidas surgen del concepto de antiderivación.. ( )

2)Sea la formula $\int du = u + c$ se puede decir que es... ......( )

3) Dada la formula $\int \cos u du = \cos u + c$ entonces es...................... ( )

4) La identidad trigonométrica $\mathbf{sen}^2 x = \mathbf{cos}^2 x - 1$ es...................... ( )

5)La integral de $\int x^5 dx = 5x + c$ se dice que es............................( )

II PARTE: COMPLETACIÓN

***Instrucciones*:** en cada una de las siguientes preguntas escribe el termino que el da un significado verdadero a la proposición. Cada respuesta correcta tiene el valor un punto (1 Pto.)

6) Dada $\int \mathbf{sen}\, u du =$ ___________________________

7) Sea $tag^2 x =$ _______________________________

8) La integración de expresiones de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ donde el grado de $P(x)$ ___________________________________

9) La integral por partes $\int u dv =$ __________________

III Parte: SELECCIÓN SIMPLE

Instrucciones: En cada una de las siguientes ítems selecciona la alternativa que consideres correcta. Cada respuesta correcta tiene valor de un punto.

10) La siguiente integral $\int 9x^2 dx =$

a) $9x + c$

b) $9x^5 + c$

c) $x^5 + c$

d) $9\frac{x^3}{3} + c$

e) $9\frac{x^2}{3} + c$

11)La siguiente fórmula $\int u^n du =$

a) $\frac{u^{n+5}}{5} + c$

b) $\frac{u^{n+5}}{5u} + c$

¡Piensa!
Una sección del liceo tiene 37 alumnos y se requiere formar equipos de básquet (5 jugadores) equipos de fútbol (11 jugadores) sin que sobre ni falte nadie. ¿cuál debe ser el número total de equipos?

c) $\dfrac{u^{3n+5}}{u}+c$

d) $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+c$

12) La Identidad Trigonométrica $\tan x \cot x =$

a) $\mathbf{sen}\, x$

b) $\mathbf{sen}\, x + \mathbf{cos}\, x$

c) 1

d) 9

13) integral $\int \dfrac{7}{x^5} dx$

a) $5x^4 + c$

b) $\dfrac{x^3}{4} + c$

c) $7\left(\dfrac{x^{-4}}{-4}\right) + c$

d) $\left(\dfrac{x^{-4}}{-4}\right) + c$

14) dada la integral $\int 2dx$

¡Diviértete!

Dos números cumplen las siguientes condiciones: la suma de ellos cuadruplica al menor y su producto duplica al mayor de ellos ¿Cuáles son los números?

a) $2x^2 + c$

b) $x^2 + c$

c) $2x + c$

d) $2x^3 + c$

IV PARTE. (DESARROLLO)

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios en forma ordenada y detallada.

15.- Resolver la siguiente integral $\int \frac{dx}{x^3}$

16.- Hallar la siguiente integral $\int \frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x}$

17.- Determinar $\int \frac{x}{1 + x^2} dx$

18.- Obtener $\int sen^3 x \cos x dx$

19- Calcular $\int \mathbf{arcsen}\, x dx$

20- Determinar $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$

¡Piensa !

Juan y Pedro hacen apuestas mutuas. Inicialmente entre ambos tenían Bs. 1.000 y al perder Juan un medio de lo que tenía y luego un medio a lo anterior iguala a lo que tenía Pedro al comienzo. ¿cuántos bolívares tenían Juan y Pedro, respectivamente, al comienzo del juego?

Matriz de Corrección

Respuestas a la evaluación diagnóstica

I PARTE: VERDADERO O FALSO

1) Las integrales definidas surgen del concepto de antiderivacion...(v)

Respuesta:
Si, porque la integración es lo inverso de la derivación.

2) Sea la formula $\int du = u + c$ se puede decir que es....................(v)

Respuesta:

Es una fórmula de la tabla de integración

3) Dada la formula $\int \mathbf{cos}\, u du = \mathbf{cos}\, u + c$ entonces es........................(F)

Respuesta:

Porque la solución de la integral anterior es $\mathbf{sen}\, u + c$

4) La identidad trigonométrica $\mathbf{sen}^2 x = \mathbf{cos}^2 x - 1$ es.................... (F)

Respuesta:

La identidad trigonométrica es: $\mathbf{sen}^2 x + \mathbf{cos}^2 x = 1$

5) La integral de $\int x^5 dx = 5x + c$ es.. (F)

Respuesta:

La solución es $\frac{x^6}{6} + c$

II PARTE: COMPLETACION

6) Dada $\int \mathbf{sen}\, u du = \underline{-\mathbf{cos}\, u + c}$

7) Complete la siguiente identidad $tan^2 x$ +1

Respuesta:

$\underline{\mathbf{sec}^2 x}$

8) La integración de expresiones de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ donde el grado de $P(x)$ <u>es menor que Q(X).</u>

9) La fórmula por partes es:

Respuesta:

$\int udv = uv - \int vdu$

III PARTE: SELECCIÓN SIMPLE

10) Dada la siguiente integral $\int 9x^2dx =$

d) $9\frac{x^3}{3}+c$

$\int 9x^2dx =$ Sacando la constante de la integral, nos queda.

$9\int x^2dx = 9\frac{x^3}{3}+c$ Resolviendo la integral

11) La siguiente fórmula $\int u^n du =$

d) $\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$

12) La Identidad Trigonométrica $\tan x \cot x =$

c) 1

$\tan x \cot x = 1$

$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 1$

13) La integral $\int \frac{7}{x^5}dx$

c) $7\left(\frac{x^{-4}}{-4}\right)+c$

$$\int \frac{7}{x^5}dx = 7\int \frac{dx}{x^5} = 7\int x^{-5}dx = -7\left(\frac{x^{-4}}{4}\right)+c$$

14) Dada la integral $\int 2dx$

c) $2x+c$

$\int 2dx = 2\int dx$ Sacando la constante de la integral

$2x+c$ Integrando

IV PARTE: DESARROLLO

PROBLEMA # 15: $\int \frac{dx}{x^3}$

Solución:

El denominador pasa al numerador, con exponente negativo, esto es por propiedad de potenciación

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx$$

haciendo uso de la formula Nº 2

$$x^{-3+1}+c = \frac{x^{-2}}{-2}+c$$

Luego, aplicando propiedades de potenciación

$= -\frac{1}{2x} + c$

PROBLEMA # 16:

$= \int \frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x} \quad = \int \frac{x^4}{x} dx + \int \frac{3x^2}{x} dx - \int \frac{5}{x} dx$ (Aplicando las propiedades de las integrales)

$= \int x^3 dx + 3\int x dx - 5\int \frac{dx}{x}$ (Por propiedades de potenciación)

$= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - 5L|x| + c$ (por formula 2 y 7)

Solución del ejercicio #17 $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ Lo primero que hacemos va ha ser el cambio de variable y llamaremos $t = 1 + x^2$ luego derivamos esta función y nos queda;

$dt = 2xdx$ hay que observar que el no esta en la función original, por esto dividimos y multiplicamos por 2 para no alterar la integral.

$\int \frac{x}{1+x^2}dx$ = $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$ sustituyendo el cambio de variable nos queda:

$\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$ y aplicando la formula # 2 de toda la tabla nos queda

$\frac{1}{2}\ln t + c$ y sustituimos de nuevo la variable nos queda

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

Solución del ejercicio # 18 : $\int sen^3 x \cos x dx$

Realizamos el cambio de variable, $u = \mathbf{sen}\, x$, donde la derivada es $du = \mathbf{cos}\, x dx$

Y sustituyendo la integral original tenemos:

$$\int sen^3 x \cos x dx = \int (senx)^3 \cos x dx = \int u^3 du$$

y aplicamos la formula #1 $\frac{u}{3+1}^{3+1} + c$

nos quedas $\frac{u^4}{4}+c$ y restituyendo la variable

$$\frac{(senx)^4}{4}+c \Rightarrow \frac{sen^4 x}{4}+c$$

Solución del ejercicio #19 $\int x^2 e^{x^3} dx$

Sabemos que $u = x^3$ y la derivada $u = x^3 dx$

$= \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3} dx$ (y haciendo cambios de variable tenemos)

$= \frac{1}{3}\int e^u du$ (esta es una integral conocida enumerada # 5)

$= \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3} e^u + c$

y luego restituyendo la variable nos queda

$= \frac{1}{3} e^{x^3} + c$

Solución de la integral # $\int \textbf{arcsen}\, x dx$

Haciendo $u = \textbf{arcsen}\, x, du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ y $dv = dx, v = x$

$= \int \textbf{arcsen}\, x dx = x\,\textbf{arcsen}\, x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (Aplicando la formula por partes)

$= x\,\textbf{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2} + c$ (integrando el segundo termino)

Determinar $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$

Solución del # 20**:** Sea $x=5\sec\theta$, donde $0<\theta<\frac{\Pi}{2}$ si $x>5$ y $\Pi<0<\frac{3}{2}\Pi$ si $x<-5$. Entonces, $dx=5\sec\theta tag\theta d\theta$ y

$\sqrt{x^2-25}=\sqrt{25\sec^2\theta-25}$ (Sustituyendo x por $5\sec\theta$)

$=\sqrt{25(\sec^2 x-1)}$ (Sacando factor común)

$=5\sqrt{tag^2\theta}$ (Por identidad trigonométrica)

$=5tag\theta$ (Simplificando el radical)

Por lo tanto,

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}=\int \frac{5\sec\theta tan\theta d\theta}{5tan\theta}$ (Ahora la integral original se sustituye por los cambios realizados)

$=\int \sec\theta d\theta$ (Simplificando)

$=\ln|\sec\theta+tan\theta|+c$ (Por tabla de integrales)

¡Piensa!

Un número entero se llama **capicúo** Si leído en el orden normal (de izquierda a derecha) o leído en el orden inverso (de derecha a izquierda) el no cambia. Así por ejemplo 121 es capicúo pero 122 no lo es. ¿Cuántos números capicúos hay entre 500 y 1.000?

Estrategias de Aprendizaje

Para el logro de los objetivos propuestos en esta actividad de aprendizaje, se presentan tres alternativas que te ayudarán a desarrollarlos. Escoge la que más te beneficie y se ajuste a tus posibilidades.

Alternativa 1 Estudio del material bibliográfico que se señalan a continuación:

EDWARDS Y PENNEY. (1994) "Cálculo con Geometría Analítica" Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. México Pág. 481 a 508.

LEITHOLD LOUIS (1992) " Cálculo con Geometría Analitica" Harla S.A. de C.V México, Pág. 687 a 712.

GRANVILLE/ LONGLEY. (1967) "Calculo Diferencial e IntegraL " Uteha. S.A. España Pág. 227 a 274.

Consultas las paginas señalas en la bibliografía anterior a objeto de lograr los objetivos propuestos.

Alternativa 2

Lectura y estudio del material anexo en este módulo instruccional, que se encuentra a partir de la página ---- el cual esta diseñado para alcanzar los objetivos propuestos.

Alternativa 3

Una alternativa propuesta por ti, que te permita alcanzar los objetivos propuestos.

Consultar con tu facilitador, para que recibas las instrucciones al respecto.

Sesión de Trabajo I

Concepto de la Integral Indefinida o Primitiva de una Función

Método de integración por sustitución simple

Integración mediante el Método del Cambio de Variables.

Objetivo Específico *1*

Adquirir el concepto de integral indefinida o primitiva de una función.

Definición

La integración es el proceso inverso a la derivación. Esto quiere decir:
Sea y = f(x) una función. Sea y' = g(x) la derivada de y = f(x) Si calculamos la integral de la función g(x), obtendremos como resultado f(x).
Sin embargo, esta definición de integral es poco desarrollada (esto quiere decir que nos hemos quedado como estábamos). Se comprende mejor el concepto de integral sabiendo que surgió (fue descubierto por Leibnitz y Newton) para resolver problemas de medidas (medir longitudes de curvas, superficies, volúmenes).
La integración es una suma (el signo de integral surgió como deformación del signo sumatorio).

En el siguiente trabajo se puede encontrar algunas de fórmulas de integración. Es probable que la integral que tengas que resolver esté en una de esas fórmulas, pero si utilizas las fórmulas no aprenderás a integrar.

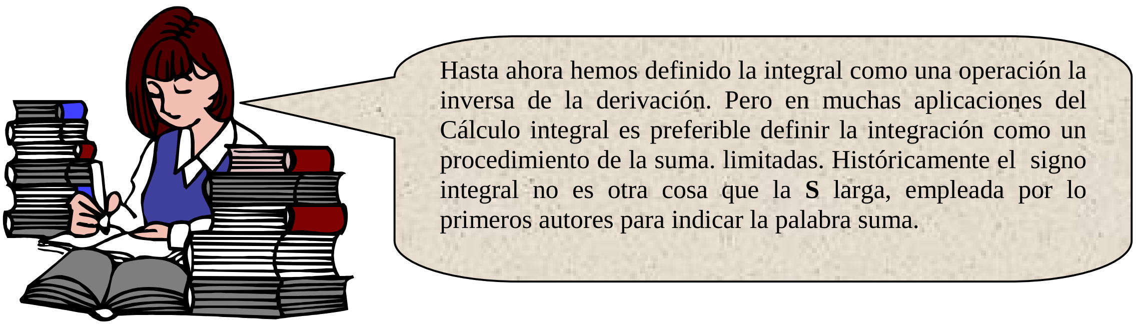
Sólo debes saber las integrales más elementales (las que se derivan directamente de las fórmulas de las derivadas equivalentes), las demás se obtienen aplicando métodos muy variados.

Método de cambio de variable: Es el método más frecuente. Consiste en hacer una expresión (elegirla es lo difícil) igual a una nueva variable (por ejemplo t), calcular la derivada de esta nueva variable y sustituir estos datos en la expresión que queremos integrar. En muchas ocasiones las integrales que se obtiene es más sencilla que la original y así podemos integrarla.

Observa la expresión que tienes que integrar con detenimiento. Este es el mejor consejo. Si ves que la expresión se puede descomponer en dos partes y una de ellas es la derivada de la otra, iguala esta última expresión a t, a continuación deriva esta expresión y sustituyes todo en la integral.

Si la expresión a integrar tiene una raíz cuadrada con dos términos (si son cuadrados perfectos es probable que sea el método más adecuado) sumados, dibuja un triángulo rectángulo y pon la raíz en la hipotenusa y en los catetos la raíz cuadrada de cada uno de los sumandos. A continuación llama t a uno de los ángulos agudos del triángulo y utiliza las relaciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) para hacer las sustituciones.

Si la expresión a integrar tiene una raíz cuadrada con dos términos (si son cuadrados perfectos es probable que sea el método más adecuado) restados, dibuja un triángulo rectángulo y



pon la raíz cuadrada del término positivo en la hipotenusa y en los catetos la raíz cuadrada de cada uno de los sumandos. A continuación llama t a uno de los ángulos agudos del triángulo y utiliza las relaciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) para hacer las sustituciones.

Si la integral es trigonométrica debe tener en cuenta las siguientes **identidades:**

$sen^2x + cos^2x = 1$
$1 + tag^2x = sec^2x$
$1 + cot^2x = csc^2x$
$sen^2x = 1/2(1 - cos2x)$
$cos^2x = 1/2(1 + cos2x)$
sexcosx = 1/2sen2x
sexcosy = 1/2[sen(x - y) + sen(x + y)]
sexseny = 1/2[cos(x - y) - cos(x + y)]
cosxcosy = 1/2[cos(x - y) + cos(x + y)]
$1 - cosx = 2sen^21/2x$
$1 + cosx = 2cos^21/2x$
1 + sen x = 1 + cos(1/2 - x)
1 - sen x = 1 - cos(1/2 - x)

Método de integración por partes:

La fórmula de la derivada de un producto de funciones u y v es:
d(u.v) = u.dv + v.du
Si integramos esta ecuación nos queda:
u.v = ò u.dv + ò v.du
ò u.dv = uv - ò v.du
Supongamos que tenemos que integrar una expresión y hacemos una parte de la expresión igual a u y la otra parte igual a dv. Si podemos calcular du, v y ò v.du, tendremos resuelta la integral.

Método de las fracciones simples:

Al aplicar este método si no ha funcionado los otros dos.
Si tenemos que integrar una fracción de polinomios, y el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador, descomponed el polinomio en factores.
Se pueden dar los siguientes casos:
Todos los factores son distintos y de la forma ax + b
Los factores son de la forma ax + b pero hay algunos factores iguales.

Todos los factores son distintos y de la forma $ax^2 + bx + c$
Los factores son de la forma $ax^2 + bx + c$ pero hay algunos factores iguales.
Fórmulas de integración

TABLA DE INTEGRALES

(1) $\int dx = x + c$

(2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

(3) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c$

(4) $\int -\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x} + c$

(5) $\int e^x dx = e^x + c$

(6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{La} + c$

(7) $\int \frac{dx}{x} = L|x| + c$

(8) $\int senx dx = -\cos x + c$

(9) $\int \cos x dx = senx + c$

(10) $\int \tan x dx = \int \frac{senx}{\cos x} dx = -L|\cos x| + c$

(11) $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{senx} dx = L|senx| + c$

(12) $\int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c$

(13) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

(14) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsenx + c$

(15) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c$

(16) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

(17) $\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = arccosecx + c$

(18) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = arc\sec x + c$

(19) $\int \frac{-1}{1+x^2} dx = arc\cot x + c$

NOTA: La constante arbitraria C, es una constante de integración y es una cantidad independiente de la variable de integración.

METODO DE INTEGRACIÓN SIMPLE

Es un método que nos ayuda a resolver integrales de una manera muy simple utilizando la tabla de integración, por lo tanto es recomendable aprenderse las formulas más importante ya que nos facilitara él calculo. La integración depende de ultima instancia del empleo de una tabla de integrales. Cuando en un caso dado no se encuentre en la tabla ninguna forma semejante a la integral dada, a menudo es posible transformar la integral de manera que se puedan aplicar las formulas de la tabla.

Infórmate!
La integración aunque no con ese nombre la abordo en la antigüedad Arquímedes (¿287-212? a.c); sin embargo, el desarrollo sistemático del calculo se atribuye a Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz , muchas mentes esclarecidas, pedro de Fermat, Galileo Galilei, Juan Kepler contribuyeron al nacimiento del Cálculo y a Isaac Barrow un profesor de Newton le Falto poco para comprender la intima relación que existe la derivada y la integración.

Teorema 1: La integral indefinida de la suma algebraica de dos o varias funciones es igual a la suma algebraica de sus integrales.

$$\int [f1(x)+f2(x)]dx = \int f1(x)dx + \int f2(x)dx$$

Teorema 2: El factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral, es decir, sí a = constante, entonces:

$$\int afCx)dx = a\int f(x)dx$$

Objetivo Específico ***2***

Aplicar las propiedades de las primitivas en el cálculo de integrales indefinidas

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN SIMPLE:

EJEMPLO 1: $\int \left(a+bx^{3}\right)^{2} dx$

Solución:

$\int \left(a^{2}+2abx^{3}+b^{2}x^{6}\right)dx$ (Resolviendo el producto notable)

$\int a^{2}dx+\int 2abx^{3}dx+\int b^{2}x^{6}dx$ (Aplicando las propiedades de la integración, el teorema # 1)

$a^{2}\int dx+2ab\int x^{3}dx+b^{2}\int x^{6}dx$ (Por tabla de integrales, formula # 2)

$a^{2}x+\frac{2abx^{4}}{4}+\frac{b^{2}x^{7}}{7}+c$ (Resolviendo cada integral)

EJEMPLO 2: Encontrar $\int \sqrt{2px}dx$

Solución:

$\int \sqrt{2px}dx=\int \left(\sqrt{2p}*\sqrt{x} \right)dx$ (Separando ambos factores)

$=\int \sqrt{2p}*x^{\frac{1}{2}}dx$ (Llevando a exponente fraccionario el radical)

$= \sqrt{2p}\int x^{1/2}dx$ (Por propiedades de integración, teorema 2)

$= \sqrt{2p}\,\dfrac{x^{1/2+1}}{1/2+1}$ + c (Por tabla de integración, formula 2)

$= \dfrac{2}{3}\sqrt{2p}x^{3/2}$ + c (Efectuando operaciones)

$= \dfrac{2}{3}\sqrt{2px^3}$ +c (Introduciendo x bajo el signo radical)

$= \dfrac{2}{3}x\sqrt{2px}$ +c (Simplificando el radical)

EJEMPLO 3: $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$

Solución:

$\int (x\sqrt{x} - \sqrt{x^2} + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 1)dx$ (Aplicando la propiedad distributiva)

$= \int (x\sqrt{x} - x + x + 1)dx$ (agrupando los términos semejantes y simplificando)

$= \int x\sqrt{x}dx + \int dx$ (Aplicando las propiedades de la integral, teorema # 1)

$= \int x * x^{1/2} dx + \int dx$ (Convirtiendo el radical en exponente fraccionario)

$= \int x^{3/2} dx + \int dx$ (Resolviendo la adición de los exponentes)

$= \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + x + c$ (Por fórmula # 2)

$= \frac{x^{5/2}}{5/2} + x + c$ (Efectuando la adición)

EJEMPLO Nº 4: Encontrar: $\int tag^2 xdx$

Solución:

$\int tag^2 5xdx = \int (\sec^2 x - 1)dx$ (Por identidad trigonométrica)

$\int \sec^2 xdx - \int dx$ (Separando cada termino)

$tagx - x + c$ (Resolviendo la integral)

EJEMPLO Nº 5 ENCONTRAR: $\int 3x^5 dx$

Solución:

$\int 3x^5 dx = 3\int x^5 dx$ (Por propiedad de la constante)

$= \frac{3}{6}x^6 + c$ (Resolviendo por propiedades de integración)

$= \frac{1}{2}x^6 + c$ (Simplificando)

EJEMPLO 6: ENCONTRAR: $\int \left(1 + \sqrt{x}\right)^3 dx$

Solución:

$\int dx + \int 3\sqrt{x}dx + \int 3xdx + \int \sqrt{x^3}dx$ (Se desarrolla el producto notable Aplicando el teorema Nº 1de la integración a cada término)

$= \int dx + 3\int x^{1/2}dx + 3\int xdx \int x^{3/2}dx$ (Convirtiendo los radicales en exponentes fraccionarios y aplicando propiedad de integrales)

$$= x + \frac{3x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{3x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{\frac{3}{3}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c$$ (Por la tabla de integrales)

$$= x + 3 * \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x^{2} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c$$ (Resolviendo las adiciones)

$$= x + 2\sqrt{x^3} + \frac{3}{2} x^{2} + \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + c$$ (Llevando los exponentes fraccionarios a

radicales)

Objetivo Específico 3

Calcular las integrales mediante el método de cambio de variables

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Supongamos, que es preciso hallar la integral:

$$\int f(x)dx$$

Pero, no podemos elegir inmediatamente la función primitiva para *f (x),* aunque sabemos que esta exista.

Realicemos el cambio de variable, en el elemento de integración haciendo.

$$x = y.(t)$$

donde *y (t)* es una función continua, lo mismo que su derivada, y tiene una función inversa, entonces $dx = y'(t)\,dt$.

Aquí se sobreentiende, que la variable *t* será sustituida después de la integración del segundo miembro de la igualdad, por su expresión en función de x.

La sustitución es transformar la integral dada a una integral conocida. Con frecuencia se puede transformar una integral que no aparezca en alguna tabla de intégrales en otra que si está.

EJEMPLO # 1: ENCONTRAR : $\int xsen(1-x^2)\ dx$

Solución :

$$\int xsen(1-x^2)\ dx$$

Como puede observarse la integral no es inmediata, por lo tanto tenemos que hacer un cambio de variable para poder resolver la integral, procederemos así:

La sustitución es: ***u*** = *1 – x ²* y luego se deriva esta función ***du*** = *- 2xdx*

Hay que observar que el **2** no esta en función original por lo tanto hay que dividirlo por **2** para no alterar la función.

$$\mathbf{\frac{du}{2} = - xdx}$$

$$\textbf{luego } \int xsen(1-x^2)dx = -\tfrac{1}{2}\int(-2x)sen(1-x^2)dx$$

entonces queda, sustituyendo

$$-\tfrac{1}{2}\int senudu$$

y es una formula conocida que la Nº 8

$$-\tfrac{1}{2}(-\cos u)+c$$

Sustituyendo, nos queda:

$$=\tfrac{1}{2}\cos(1-x^2)+c$$

$$\int \left(x^2+1\right)2xdx$$

Haciendo el cambio de variable en la integral original

$u=\left(x^2+1\right)$

$du=2xdx$

$\int \left(x^2+1\right)2xdx=\int udu=\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)+c$

Sustituyendo el cambio de variable en la integral.

$=\left(\frac{x^2+1}{2}\right)+c$ Restituyendo la variable original.

Aplicando la fórmula # 2

EJEMPLO # 2: ENCONTRAR : $\int x\cot g(x^2+1)dx$

Solución:El procedimiento es muy parecido a la anterior.Llamamos **u** = x^2+1 y la derivada es **du** = $2xdx$ como se puede observar el **2** no esta en la función original por lo tanto hay que dividirla y multiplicarla por **2** para que no se altere la integral.

$$\int x\cot g(x^2+1)dx=\tfrac{1}{2}\int 2x\cot g(x^2+1)dx$$

luego sustituimos por le cambio de variables y nos queda

$$\tfrac{1}{2}\int \cot gudu\ ,$$

esta ya es una integral conocida y se busca en la tabla, que es la # 9 y queda:

$$\frac{1}{2}\ln|senu| + c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|sen(x^2+1)| + c$$

EJEMPLO # 3 : ENCONTRAR $\int x^2 e^{x^3} dx$ Solución:

Como puede observarse en esta integral ***e*** esta elevado a la x^3, si llamamos :

$$u = x^3$$

La derivada es $du = 3x^2 dx,$ como puede observarse hay que multiplicar y dividir por tres y nos queda:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 . e^{x^3} dx$$

sustituyendo la variable, y usando la tabla que es la # 5 resulta

$$\frac{1}{3}\int e^u du \Rightarrow \frac{1}{3}e^4 + c \Rightarrow \frac{1}{3}e^{x^4} + c \Rightarrow \frac{1}{3}e^{x^3} + c$$

EJEMPLO # 4:ENCONTRAR $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$

Solución:

Como puede ver la integral es una división de polinomios, por lo tanto hay que resolver primero la división, por lo tanto se procede así tomando en cuenta lo siguiente.

Cuando el grado del polinomio dividendo es mayor o igual que el grado del polinomio divisor, es necesario ejecutar previamente la división del polinomio.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^2 + 1 & x - 1 \\
\cline{3-3}
 & \underline{-x^2 + x} & x + 1 \\
 & x + 1 & \\
- & \underline{x + 1} & \\
 & 2 &
\end{array}
$$

D= d.c +R

$$x^2 + 1 = (x-1)(x+1) + 2 \div (x-1)$$

$$\frac{x^2+1}{x-1} = (x+1) + \frac{2}{x-1}$$ Al ejecutar la división nos queda

$x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$, *luego nos queda*

$$\int \frac{x^2+1}{x-1} dx = \int \left(x + 1 + \frac{2}{x-1} \right) dx$$

la integral se convierte

$$\int x dx + \int dx + 2 \int \frac{dx}{x-1}$$

La primera y la segunda integral son directas aplicando la fórmula la #2 y #1

En la tercera hay que hacer una sustitución y llamar $u = x - 1$ y la derivada $du = 1dx$ y la integral nos queda

$$2\int \frac{dx}{x-1} = 2\int \frac{du}{u}$$

y al resolver y aplicar la formula conocida

$$2\ln|u| + c$$

$$\int xdx + \int dx + 2\int \frac{dx}{x-1} = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + c$$

la respuesta es $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + c$

EJEMPLO Nº 5: ENCONTRAR: $\int (x^2 + 2)sen(x^2 + 4x - 6)dx$

Solución:

Para resolver la integral procedemos así:

Primero llamamos ***u*** **=** $x^2 + 4x - 6$

Y aplicamos la derivada

du **=** $2x + 4$

Luego factorizamos

du= 2 (x+2) y dividimos y multiplicamos por 2 para que no se altere la función y el integral queda:

$$\int (x^2+2)sen(x^2+4x-6)dx \;=\; \frac{1}{2}\int 2(x+2)sen(x^2+4x-6)dx$$

Luego se tiene

$\frac{1}{2}\int senu.du$, lo que implica que es una integración inmediata.

$$\frac{1}{2}\int senu.du \;=\; \frac{1}{2}\int(-\cos u)+c \Rightarrow \frac{1}{2}\cos u + c$$

Sustituyendo los valores de ***u*** nos queda

$$-\frac{1}{2}\cos(x^2+4x-6)+c$$

EJEMPLO Nº 6: ENCONTRAR. $\int\sqrt{senx.}\cos xdx$

Haga la sustitución *t* = *senx* y su derivada es

dt = *cosx.dx* y por lo tanto la integral

$\int\sqrt{senx.}\cos xdx \;=\; \int\sqrt{t}\,.dt$ que es igual a

$\int t^{1/2}.dt$ aplicando la ecuación # de la tabla nos queda

$$\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$$

lo que queda es igual a

$$\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}+c$$

Sustituyendo la variable original queda

$$\frac{2}{3}sen^{\frac{3}{2}}x+c$$

EJEMPLO # 7: ENCONTRAR $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Resolviendo llamamos ***u =*** x^2+1 siendo su derivada ***du =*** $2x$

Como el no esta en la función principal multiplicamos y dividimos por 2 y nos queda:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}}$$

como hay que llevarlo a una formula conocida y resolviendo nos queda

$$\frac{1}{2}\frac{u^{1/2}}{1/2}=\frac{2}{2}u^{1/2}+c$$

y sustituimos variable nos queda

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^{2+1}}+c$$

Sesión de Trabajo I

Se

Sesión de Trabajo II

4. Integrales por Partes.

5. Integrales trigonométricas..

Objetivo Específico 4

Calcular integrales mediante el método de la integración por partes.

INTEGRACIÓN POR PARTES

De la fórmula para la derivada del producto de dos funciones se obtiene el método de integración por partes. Si f y g son funciones diferenciables, entonces.

$$Dx\left[f(x)g(x)\right]= f(x)g'(x)+g(x)f'(x) \Leftrightarrow f(x)g'(x)=Dx\left[f(x)g(x)-g(x)f'(x)\right]$$

Al integrar en cada miembro de esta ecuación se obtiene.

$$f(x)g'(x)dx = \int Dx\ [f(x)\ g(x)]\ dx - \int g(x)f'(x)dx$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)\ g(x) - \int g(x)f'(x)dx \quad (\text{ Ecuación I })$$

La Ecuación (I) se llama fórmula para integración por partes; una manera más adecuada de escribir esta fórmula se obtiene al hacer.

$u = f(x)$ y $v = g(x)$

$du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$

Así que la ecuación (I) se transforma en

$$\int udv = uv - \int vdu$$

La ecuación (I) expresa la integral udv en términos de otra integral, $\int$vdu. Por medio de una elección adecuada de u y dv puede ser más fácil evaluar la segunda integral que la primera, para ello aplicamos la palabra ILATE que significa lo siguiente.

I : Funciones Inversas.

L : Funciones Logarítmicas.

A : Funciones Algebraicas.

T : Funciones Trigonométricas.

E : Funciones Exponenciales.

Recuerde:
La técnica ILATE es una ayuda, pero no resuelve todos los problemas, ya que no es una técnica general.

Se aplica de la siguiente manera, se observa las dos funciones llamándose dv aquella que este más a la derecha de la palabra ILATE.

También es conveniente tener en cuenta los dos criterios siguientes:

1. la parte que se iguala a dv debe ser fácilmente integrable.
2. $\int vdu$ no debe ser más complicada que $\int udv$

Ejercicios:

1) $\int$ xlnxdx

Aplicamos la palabra ILATE

Observemos $\int x \ln x \, dx$

La función logarítmica va primero que la función algebraica en la palabra ILATE por consiguiente llamamos u a lnx y a dv a xdx.

Es decir $u = \ln x$ $\quad dv = xdx$

Derivamos (u) $du = (1/x)\, dx$ $\quad$ Integramos (dv) $\quad \int dv = \int xdx$
$v = (x^2/2)$

Sustituimos en la ecuación (I) $\quad \int dv = \int uv - \int vdu$

$$\int udv = \underbrace{\ln x}_{u}\ \underbrace{(x^2/2)}_{v} - \int \underbrace{(x^2/2)}_{v}\underbrace{(dx/x)}_{du}$$

$\int x \ln x \, dx = (x^2/2)\ln x - \int (x/2)dx$ $\quad$ por propiedad de potenciación

$= (1/2)\, x^2 \ln x - (1/2)\int x\, dx$ $\quad$ por teorema # 2 y aplicando la formula # 2

$= (1/2)\, x^2 \ln x - (1/2)(x^2/2) + c$

$= (1/2)\, x^2 \ln x - (1/4)(x^2) + c$

2) $\int x \cos x \, dx$

Aplicamos la palabra ILATE

Observemos: $\int \underbrace{x}_{\text{algebraica}} \; \underbrace{\cos x}_{\text{trigonométrica}} dx$

La función algebraica va primero que la función trigonométrica en la palabra ILATE por consiguiente llamamos u = x y a dv = cosxdx.

Derivamos (u) du = dx   Integramos (dv) $\int dv = \int \cos x dx$

v = senx

Sustituimos en la ecuación $\int u\,dv = u.v - \int v.du$

$\int udv = \underbrace{x}_{u} \; \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v} - \int \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v} \; \underbrace{dx}_{du}$ resolviendo la integral queda:

$\int x \cos x \, dx = x \operatorname{sen} x - (-\cos x) + c = x \operatorname{sen} x + \cos x + c$

3) $\int \text{Tan}^{-1}x\, dx$

Aplicamos la palabra ILATE

Observemos : $\int \text{Tan}^{-1}x \quad dx$

algebraica

Inversa

La función inversa va primero que la función algebraica en la palabra ILATE por consiguiente llamamos $u = \text{Tan}^{-1}x$ y $dv = dx$.

Es decir $u = \text{Tan}^{-1}x \quad dv = dx$

Derivamos (u) $du = (dx/1+x^2)$ Integramos (dv) $\int dv = \int dx$

$v = x$

Sustituimos en la ecuación $\int u\, dv = uv - \int vdu$

$\int udv = \text{Tan}^{-1}x \quad (x) - \int x \quad (dx/1+x^2)$ Aplicando la formula por parte

u v v du

usando tabla integrales, la # 1

$\int \; Tan^{-1}x \, dx = x \, Tan^{-1}x \; - (1 / 2) \, (\ln (1+x^2)) + c$

4) $\int \; \mathbf{x^2e^xdx}$

Aplicamos la palabra ILATE

Observemos $\int \underbrace{x^2}_{u} \; \underbrace{e^x \, dx}_{dv}$

La función algebraica va primero que la función exponencial en la palabra ILATE por consiguiente llamamos u a x^2 y a dv a $e^x \, dx$

Es decir $u = x^2$ $\qquad dv = e^x \, dx$

Derivamos $du = 2xdx$ $\qquad$ Integramos (dv) $\int dv = \int \; e^x \, dx$

$v = e^x$

Sustituimos en la ecuación $\int \; udv = udv - \int \; vdu$

$$\int \; udv = \underbrace{x^2}_{u} \; \underbrace{e^x}_{v} - \int \; \underbrace{e^x}_{v} \; \underbrace{2xdx}_{du} \; = \; x^2 \, e^x - 2 \int \; e^x \, x \, dx$$

Aparte resolvemos la integral $\int \; e^x \, x \, dx$ $\qquad u_1 = x$ $\qquad dv_1 = e^x \, dx$

$du_1 = dx$ $\qquad \int \; dv_1 = \int \; e^x \, dx = \; e^x$

$$\int \; e^x \, x \, dx \; = \; x \, e^x - \int \; e^x \, dx = \; x \, e^x - \; e^x + c \qquad (\text{ Integral II})$$

Sustituimos la Integral II en la Integral I

$\int$ x^2 e^x dx = x^2 e – 2 (x e^x - e^x) + c = x^2 e - 2 x e^x + 2 e^x + c

6.- .CALCULAR: $\int \mathbf{arcsen}\, x dx$

Lo importante de esta integral es identificar, cual es la función derivable y cual es la que vamos a integrar.
Aquí aplicamos los criterios 1 y 2 y procedemos.
Como puede observarse es fácil derivar la función arcsenx y la integración dv=dx

$u = \mathbf{arcsen}\, x, du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ y $dv = dx, v = x$

Aplican

$$= \int \mathbf{arcsen}\, x dx = x\, \mathbf{arcsen}\, x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Como puede observarse la integral que nos queda es por Sustitución simple que estudiamos en la Sesión II.

$= x\, \mathbf{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2} + c$ (integrando el segundo termino)

7.- Calcular $\int \mathbf{sen}^2 x dx$

Solución: Como se puede observar, no se puede aplicar I.L.A.T.E, es decir, aplicamos los criterios 1 y 2

Haciendo $u = \mathbf{sen}\, x, du = \mathbf{cos}\, x dx$ y $dv = \mathbf{sen}\, x dx, v = -\mathbf{cos}\, x$

$= \int \mathbf{sen}^2 xdx = -\mathbf{sen}\, x \cos x + \int \cos^2 xdx$ (Aplicando la fórmula por partes)

$= -\mathbf{sen}\, x \cos x + \int (1 - \mathbf{sen}^2 x) dx$ (Por sustitución de identidad trigonométrica)

$= -\frac{1}{2}\mathbf{sen} 2x + \int dx - \int \mathbf{sen}^2 xdx$ (Por sustitución de identidad trigonométrica y haciendo uso de propiedades de integrales)

$= 2\int \mathbf{sen}^2 xdx = -\frac{1}{2}\mathbf{sen} 2x + x + c$ y $\int \mathbf{sen}^2 xdx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\mathbf{sen} 2x + c'$ (Pasando al primer miembro la integral del segundo)

8.- Calcular: $\int \sec^3 xdx$

Solución: Nos podemos dar cuenta que esta integral no se puede resolver por I.L.A.T.E. luego aplicamos los criterios 1 y 2.

Haciendo $u = \sec x, du = \sec x tagx dx$ y $dv = \sec^2 xdx, v = tagx$

$\int \sec^3 xdx = \sec x tagx - \int \sec x tag^2 xdx$ (Aplicando la fórmula por partes)

$= \sec x tagx - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx$ (Por identidad trigonométrica)

$= \sec x tagx - \int \sec^3 xdx + \int \sec xdx$ (Por propiedad distributiva)

$2\int \sec^3 xdx = \sec x tagx + \int \sec xdx$ (llevando el segundo término al primer miembro)

Luego,

$$\sec^3 xdx = \frac{1}{2}\left\{ \sec x tagx + \ln\left|\sec x + tagx\right| \right\} + c$$

Objetivo Específico **5**

Calcular integrales por sustitución trigonométricas

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Si el integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2-u^2}, \sqrt{a^2+u^2}, \sqrt{u^2-a^2}$,donde a>0. Donde a es una constante, puede transformarse en otras formas a bases de funciones trigonométricas de una nueva variable z. Consideramos cada forma como un caso separado.

Caso I

El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$, donde a>0. Introducimos una nueva variable z haciendo u = a senz, donde.

$0 \le z \le (1/2)\pi$ si u ≥ 0 y $(-1/2)\pi \le z \le 0$ si u < 0

Entonces, du = a cosz dz, y

$$\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{a^2-a^2 sen^2 z} = \sqrt{a^2\left(1-sen^2 z\right)} = a\sqrt{\cos^2 z}$$

Como $(-1/2)\pi \le z \le (1/2)\pi$, cosz $\ge$ 0

Por tanto, $\sqrt{\cos^2 z} = \cos z$, y $\sqrt{a^2-u^2} = a\cos z$

Ya que senz = u/a y $(-1/2)\pi \leq z \leq (1/2)\pi$, se concluye que z = sen$^{-1} u/a$

<u>Para a</u> <u>Cambios</u>

$\sqrt{a^2 - u^2}$ u = a senz

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos z$$

Ejercicio para el Caso I

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx$$

Solución Sea x = 3 senz , donde $0 < z \leq (1/2)\pi$ si x > 0 y $(-1/2)\pi \leq z < 0$

si x < 0. Entonces, dx = 3 cosz dz y

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9sen^2 z} = 3\sqrt{\cos^2 z} = 3\cos z$$

Por lo tanto

$$\int (\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}) dx = \int \frac{3\cos z}{9sen^2 z}(3\cos z dz) = \int \cot^2 z dz = \int (\csc^2 z - 1) dz =$$

= - cotz – z +c

Ya que senz = $(1/3)$x y $(-1/2)\pi \leq z < (1/2)\pi$ z = sen$^{-1}(1/3)$x.

Para encontrar cot z, consultamos las figuras 1 (para x > 0) y la figura 2 (para x < 0). Vemos que $z = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

Por lo tanto $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - sen^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$

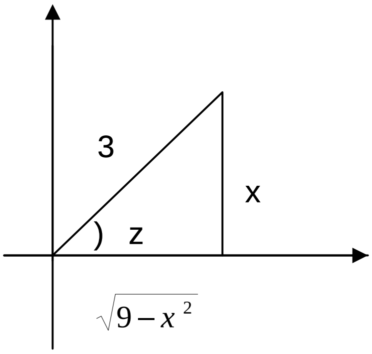


Figura 1 (x>0)

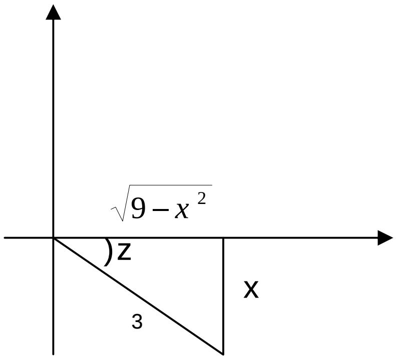


Figura 2 (x<0)

Caso II

El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2+u^2}$ donde a > 0. Introducimos una nueva variable z haciendo u = a tanz, donde.

$0 \le z < (1/2)\pi$ si u ≥ 0 y $(-1/2)\pi < z < 0$ si u < 0

Entonces du = a $\sec^2 z dz$, y

$$\sqrt{a^2+u^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2 z} = a\sqrt{1+\tan^2 z} = a\sqrt{\sec^2 z}$$

Ya que $(-\tfrac{1}{2})\pi < z < (\tfrac{1}{2})\pi$, secz ≥1; de este modo $\sqrt{\sec^2 z} = \sec z$

Y $\sqrt{a^2+u^2} = a\sec z$

Ya que tanz = (u/a) y $(-\tfrac{1}{2})\pi < z < (\tfrac{1}{2})\pi$, se concluye que z = $\tan^{-1}(u/a)$

<u>Para a</u>	<u>Cambios</u>	
$\sqrt{a^2+u^2}$	$u = a\tan z$	$\sqrt{a^2+u^2} = a\sec z$

Ejercicio para el Caso II

$$\int\sqrt{x^2+5}dx$$

Solución Sea x = $\sqrt{5}$ tan, donde $0 \le z < (\tfrac{1}{2})\pi$ si x ≥ 0 y $(-\tfrac{1}{2})\pi < z < 0$ si x < 0. Entonces dx = $\sqrt{5}$ $\sec^2 z dz$ y

$$\sqrt{x^2+5} = \sqrt{5\tan^2 z + 5} = \sqrt{5}\sqrt{\sec^2 z} = \sqrt{5}\sec z$$

Por lo tanto

$$\int \sqrt{x^2+5}dx \quad = \quad \frac{5}{2}\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}}\right| + c \quad =$$

$$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+5}\right| + x\left|\frac{-5}{2}\ln\sqrt{5}\right| + c$$

Caso III

El integrando contiene una expresión de la forma $\int\sqrt{u^2-a^2}$ donde a>0 .Introducimos una nueva variable haciendo u = a.secz, donde.

$0 \le z < (1/2)\pi$ si $u \ge 0$ y $\pi \le z < (3/2)\pi$ si $u \le -a$

Entonces du = a secz.tanzdz y

$$\sqrt{u^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 z - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 z - 1)} = a\sqrt{\tan^2 z}$$

Ya que $o \le z < (1/2)\pi$ o bien $\pi \le z < (3/2)\pi$, entonces $\tan z \ge 0$; de este modo, $\sqrt{\tan^2 z} = \tan z$, y tenemos $\sqrt{u^2-a^2} = a\tan z$

Como $\sec z = u/a$ y z está en $\left[0,(1/2)\pi\right] \cup \left[\pi,(3/2)\pi\right]$

$z = \sec^{-1}(u/a)$

Para a **Cambios**

$\sqrt{u^2 - a^2}$ u = a.secz $\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan z$

Ejercicio para el Caso III

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$$

Solución: Sea $x = 3\sec z$ donde $0 < z < \left(\frac{1}{2}\right)\pi$ si x>3 y $\pi < z < \left(\frac{3}{2}\right)\pi$ si x<-3. Entonces $dx = 3\sec z\,\tan z dz$ y

$$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{9\sec^2 z - 9} = 3\sqrt{\tan^2 z} = 3\tan z$$

Por tanto

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\sec z\,\tan z dz}{27\sec^3 z\,3\tan z} = \frac{1}{27}\int \cos^2 z dz = \frac{1}{54}\int (1+\cos 2z)dz$$

$$= \frac{1}{54}\left(z + \frac{1}{2}sen 2z\right) + c = \frac{1}{54}(z + senz\,\cos z) + c$$

Puesto que $\sec z = \left(\frac{1}{3}\right)x$ y z está en $\left(0,\left(\frac{1}{2}\right)\pi\right) \cup \left(\pi,\left(\frac{3}{2}\right)\pi\right)$,

$z = \sec-1\left(\frac{1}{3}\right)x$. Cuando x>3, $0 < z < \left(\frac{1}{2}\right)\pi$, y se obtiene $senz$ y $\cos z$ de la figura 1. Cuando x<-3, $\pi < z < \left(\frac{3}{2}\right)\pi$, y se obtiene $senz$ y $\cos z$ De la figura 2. En cualquier caso, $senz = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$ y $z = \sqrt{\frac{x^2-9}{x}}$ y

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{54}\left(\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\frac{3}{x}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{54}\sec^{-1}\frac{x}{3} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2} + c$$

Figura 1 (x>3)

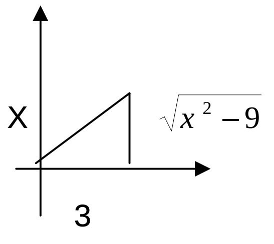
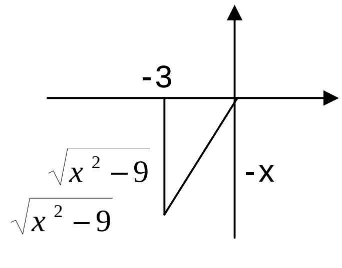


Figura 2 (x<-3)



EJERCICIOS

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$

Solución: Sea $x = 5\sec z$, donde $0 < z < \left(\frac{1}{2}\right)\pi$ si $x > 5$ y

$\pi < z < \left(\frac{3}{2}\right)\pi$ si $x < -5$. Entonces $dx = 5\sec z \tan z dz$ y

$$\sqrt{x^2-25} = \sqrt{(5\sec z)^2-25} = \sqrt{25\sec^2 z-25} = \sqrt{25(\sec^2 z-1)} = 5\sqrt{\tan^2 z} = 5\tan z$$

Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} = \int \frac{5\sec z \tan z dz}{5\tan z} = \int \sec z dz = \ln\left|\sec z + \tan z\right| + c$$

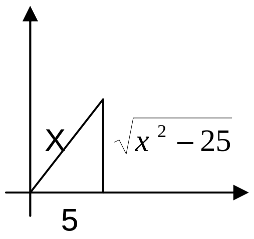
Para encontrar $\tan z$ consultamos la figura 1 para $x > 5$ y la figura 2 para $x < -5$. En cualquier caso $\sec z = \left(\frac{1}{5}\right)x$ y $\tan z = \left(\frac{1}{5}\right)\sqrt{x^2-25}$

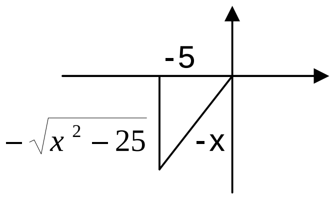
Tenemos, entonces.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} = \ln\left|\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}\right| + c = \ln\left|x + \sqrt{x^2-25}\right| - \ln 5 + c =$$

$$\ln\left|x + \sqrt{x^2-25}\right| + c$$

Figura 1 (x>5) ***Figura 2 (x<-5)***





2) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Solución: Sea $x = 2\sec z$, donde $0 < z \le \left(\frac{1}{2}\right)\pi$ si $x > 0$ y

$\left(\frac{-1}{2}\right)\pi \le z < 0$ si $x < 0$. Entonces $dx = 2\cos z dz$ y

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2senz)^2} = \sqrt{4-4sen^2 z} = \sqrt{4(1-sen^2 z)} = \sqrt{4\cos^2 z} = 2\cos z$$

Por lo tanto

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{(2senz)^2(2\cos z)dz}{2\cos z} = \int \frac{4sen^2 z(2\cos z)}{2\cos z}dz = 4\int sen^2 zdz$$

Aplicando una de las ocho Identidades fundamentales
$sen^2 z = 1 - \cos^2 z$

$$4\int sen^2 zdz = 4\int (1-\cos^2 z)dz = 4\left(\int dz - \int \cos^2 zdz\right) = 4\int dz - 4\int \cos^2 zdz$$

$$= 4z - 4\cot z - z + c$$

Ya que $senz = \left(\frac{1}{2}\right)x$ y $\left(\frac{-1}{2}\right)\pi \leq z \leq \left(\frac{1}{2}\right)\pi$, $z = sen^{-1}z = \left(\frac{1}{2}\right)x$.

Para encontrar $\cot z$, consultamos las figura 1 para $x > 0$ y la figura 2 para $x < 0$ Vemos que $z = sen^{-1}z = \left(\frac{1}{2}\right)x$. Por lo tanto

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = 4sen^{-1}\frac{x}{2} - 4\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - sen^{-1}\frac{x}{2} + c$$

Figura 1 (x>0)

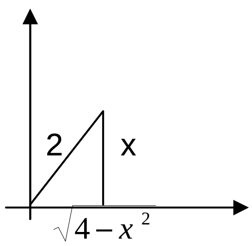
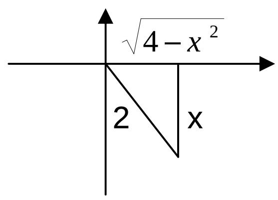


Figura 2 (x<0)



3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$

Solución: Sea $x = 4\sec z$, donde $0 < z < \left(\frac{1}{2}\right)\pi$ si $x > 4$ y $\pi < z < \left(\frac{3}{2}\right)\pi$ si $x < -4$. Entonces $dx = 4\sec z \tan z dz$ y

$$\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{(4\sec z)^2 z - 16} = \sqrt{16\sec^2 z - 16} = \sqrt{16(\sec^2 z - 1)} = 4\sqrt{\tan^2 z} = 4\tan z$$

Por lo tanto

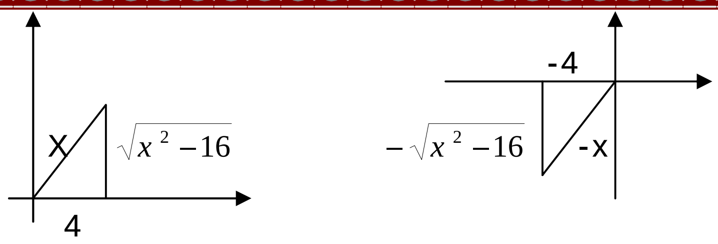
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 16}} = \int \frac{4\sec z \tan z dz}{4\tan z} = \int \sec z dz = \ln\left|\sec z + \tan z\right| + c$$

Para encontrar $\tan z$ consultamos la figura 1 para $x > 4$ y la figura 2 para $x < -4$. En cualquier caso $\sec z = \left(\frac{1}{4}\right)x$ y $\tan z = \left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{x^2 - 16}$ Tenemos, entonces.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 16}} = \ln\left|\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{4}\right| + c = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 16}\right| - \ln 4 + c =$$

$$\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 16}\right| + c$$

Figura 1 (x>5) Figura 2 (x<-5)



4) $\int \sqrt{x^2+3}dx$

Solución Sea x = $\sqrt{3}$ tan, donde $0 \le z < (1/2)\pi$ si x ≥ 0 y $(-1/2)\pi < z < 0$ si x < 0. Entonces dx = $\sqrt{3}$ $\sec^2 z dz$ y

$$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{3\tan^2 z + 3} = \sqrt{3}\sqrt{\sec^2 z} = \sqrt{3}\sec z$$

Por lo tanto

$$\int \sqrt{x^2+3}dx = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\sqrt{3}}\right| + c =$$

5) $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx$

Solución Sea $x = 5senz$, donde $0 < z \leq (1/2)\pi$ si $x > 0$ y $(-1/2)\pi \leq z < 0$

si $x < 0$. Entonces, $dx = 5\cos zdz$ y

$$\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 25sen^2 z} = 5\sqrt{\cos^2 z} = 5\cos z$$

Por lo tanto

$$\int (\frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2})dx = \int \frac{5\cos z}{25sen^2 z}(5\cos zdz) = \int \cot^2 zdz = \int (\csc^2 z - 1)dz =$$

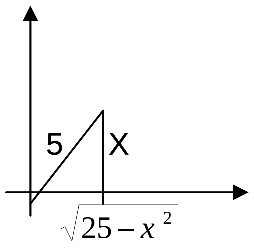
$$= -\cot z - z + c$$

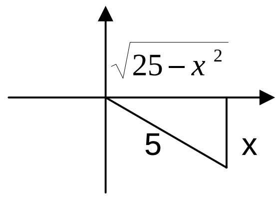
Ya que $senz = \left(\frac{1}{5}\right)x$ y $(-1/2)\pi \leq z < (1/2)\pi$ z = $\text{sen}^{-1}(1/5)$ x.

Para encontrar cot z, consultamos las figuras 1 (para $x > 0$) y la figura 2 (para $x < 0$). Vemos que $z = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}$

Por lo tanto $$\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} - sen^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + c$$

Figura 1 (x>0) ***Figura 2 (x<0)***





Sesion de Trabajo III

6. Técnicas de Descomposición en Fracciones parciales para el cálculo de integrales de funciones.

Objetivo Específico 6

Aplicar las técnicas de descomposición en fracciones parciales para el cálculo de integrales de funciones racionales.

INTEGRALES DE FUNCIONES RACIONALES

Se trata de resolver integrales de la forma $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ en las que $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

Integrales racionales inmediatas

Son aquellas que se convierten en suma de integrales inmediatas sin más que dividir *p(x)* entre *q(x)*. Para ello es preciso que el grado de *p(x)* sea mayor o igual que el grado de *q(x)*.

Se sabe que en una división *D = d · c + r* . Dividiendo ambos miembros entre el divisor, *d* ,

$$\frac{D}{d} = \frac{d \cdot c}{d} + \frac{r}{d} = c + \frac{r}{d}$$

En general, para polinomios, si *p(x)* es el dividendo, *q(x)* el divisor, *c(x)* el cociente y *r(x)* el resto,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Por consiguiente, $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \left[c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\right] dx = \int c(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx.$

Ejercicio: cálculo de integrales de funciones racionales

① Calcular $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$

Resolución:

• Se divide x^2 entre x^2+1.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^2-1 & 1 \\ \cline{1-1} -1 & \end{array}$$

El cociente es 1 y el resto - 1.

• $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int dx - \int\frac{dx}{x^2+1} = x - arc\ tg\ x + C$

② Hallar $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1}dx$

Resolución:

Se dividen los polinomios.

$x2 - 5x + 4 = (x + 1)(x - 6) + 10$

El cociente es $x - 6$ y el resto 10.

• $\int \frac{x^2-5x+4}{x+1}dx = \int\left[(x-6)+\frac{10}{x+1}\right]dx =$

Hay, no obstante, integrales racionales que no se convierten tan fácilmente en inmediatas. Para resolverlas es preciso hacer uso de la descomposición en fracciones simples.

INTEGRALES DE COCIENTES (I)

Una *fracción simple* es cualquier fracción propia de polinomios (el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador), cuyo denominador sea de la forma $(ax + b)$n ó $(ax^2 + bx + c)$n si el polinomio $ax^2 + bx + c$ no tiene raíces reales, y n es un número natural.

Así, $\frac{3}{x+4}$; $\frac{5x-2}{x^2+x+3}$; $\frac{x-3}{(2x+1)^3}$ son fracciones simples.

Al hacer el estudio de integrales de la forma $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$, se supondrá que el grado del numerador, *p(x)*, es estrictamente menor que el grado del denominador, pues si el grado del numerador fuese mayor o igual al grado del denominador, se dividiría *p(x)* entre *q(x)*, obteniéndose un cociente *c(x)* y un resto *r(x)*, en cuyo caso la integral

$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ se convierte en $\int \left[c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\right]dx$.

La integral $\int c(x)dx$ es inmediata por tratarse de un polinomio y la integral $\int \frac{r(x)}{q(x)}dx$ es del caso supuesto, ya que el grado del resto, *r(x)*, en una división de polinomios, es estrictamente menor que el grado del divisor *q(x)*.

Método de integración por descomposición en fracciones simples

Para resolver este tipo de integrales

$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$

se procede del siguiente modo:

1. Se descompone factorialmente el polinomio *q(x)*, es decir, se hallan las raíces de la ecuación *q(x)* = 0.

2. Se descompone la fracción $\frac{p(x)}{q(x)}$ en suma de fracciones simples como se verá en los ejemplos.

3. Se integran los sumandos que resulten.

Ahora bien, al resolver la ecuación *q(x)* = 0 es posible encontrar resultados distintos y éstos se pueden clasificar en tres casos:

- obtención de raíces simples (ninguna raíz está repetida).

- obtención de raíces múltiples (al menos hay una raíz repetida).
- obtención de raíces imaginarias (números complejos).

Hay que estudiar, pues, cada uno de los casos.

A) *Se obtienen raíces reales simples.*

Si x_1, x_2, ., x_n son las raíces simples de *q(x)*, se tiene:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int\left(\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-x_n}\right)dx =$$

$$= \int \frac{A_1}{x-x_1}dx + \int \frac{A_2}{x-x_2}dx + \ldots + \int \frac{A_n}{x-x_n}dx$$

A_1, A_2, .., A_n son constantes que se tienen que determinar. Como se aprecia, las integrales que resultan son inmediatas.

Ejercicio: cálculo de integrales

① Calcular la integral $\int \frac{x^3-3x^2+1}{x^2-1}dx$

Resolución:

Al ser el grado del numerador, 3, mayor que el del denominador, 2, se dividen los polinomios y se obtiene:

$x^3 - 3x^2 + 1 = (x^2 - 1)(x - 3) + (x - 2)$

• $\int \frac{x^3-3x^2+1}{x^2-1}dx = \int\left(x-3+\frac{x-2}{x^2-1}\right)dx =$

$$= \int (x-3)\,dx + \int \frac{x-2}{x^2-1}dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \int \frac{x+2}{x^2-1}dx.$$

• Las raíces de x^2-1 son: $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

Tiene, por tanto, dos raíces simples distintas, 1 y - 1.

• Se descompone $\frac{x-2}{x^2-1}$ en fracciones simples:

$$\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} = \frac{A\,(x+1)+B\,(x-1)}{x^2-1}$$

Puesto que los denominadores son iguales, los numeradores también han de serlo:

$x - 2 = A(x + 1) + B(x - 1)$.

Para determinar A y B, se dan valores a x:

si $x = 1$, $1 - 2 = A(1 + 1) + B(1 - 1)$, $-1 = 2A$, $A = -1/2$

si $x = -1$, $-1 - 2 = A(-1 + 1) + B(-1 - 1)$, $-3 = -2B$, $B = 3/2$

Debe hacerse notar que, aunque a x se le pueden dar valores arbitrarios, en este caso se han elegido aquellos que anulan uno de los sumandos para simplificar los cálculos. Éste será un procedimiento muy generalizado.

Así pues: $\dfrac{x-2}{x^2-1} = \dfrac{-1/2}{x-1} + \dfrac{3/2}{x+1}$, por lo que

$$\int \frac{x-2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{-1/2}{x-1}\,dx + \int \frac{3/2}{x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1|$$

Finalmente, $\displaystyle\int \frac{x^3-3x^2+1}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + C$

B) *Se obtienen raíces reales múltiples.*

Si a es una raíz múltiple de multiplicidad n (está repetida n veces), la descomposición en fracciones simples de $\dfrac{p(x)}{(x-a)^n}$ es

$$\frac{p(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

$A1$, $A2$, $A3$, ..., An vuelven a ser constantes a determinar. De nuevo, las integrales de la forma $\displaystyle\int \frac{A_i}{(x-a)^i}\,dx$ son inmediatas.

Ejemplo: cálculo de integrales

① Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-5}{x^3-3x+2}\,dx$

Resolución:

Como el grado del numerador, 2, es menor que el del denominador, 3, no se dividen los polinomios.

Las raíces del polinomio *x*3 - 3*x* + 2 se obtienen aplicando la regla de Ruffini:

*x*3 - 3*x* + 2 = (*x* - 1)2 (*x* + 2)

El polinomio tiene una raíz simple, - 2, y una raíz múltiple, 1, de multiplicidad dos.

La descomposición en fracciones simples de la fracción es:

$$\frac{x^2+3x-5}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

Como en el caso anterior, se igualan los numeradores y se dan valores arbitrarios a *x* para determinar *A, B* y *C*.

*x*2 + 3*x* - 5 = *A(x* - 1) *(x* + 2*)* + *B(x* + 2*)* + *C(x* - 1*)*2

Si $x = 1$, $\quad -1 = 3B \Rightarrow B = -1/3$

Si $x = -2$, $\quad -7 = 9C \Rightarrow C = -7/9$

Si $x = 0$, $\quad -5 = -2A + 2B + C = -2A - 2/3 - 7/9 \Rightarrow A = 16/9$

Por tanto,

$$\int \frac{x^2+3x-5}{x^3-3x+2}\,dx = \int \frac{16/9}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/3}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-7/9}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{16}{9}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int (x-1)^{-2}\,dx - \frac{7}{9}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{16}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} - \frac{7}{9}\ln|x+2| + C =$$

$$= \frac{16}{9}\ln|x-1| - \frac{7}{9}\ln|x+2| + \frac{1}{3(x-1)} + C$$

INTEGRALES DE COCIENTES (II)

Ejercicio: cálculo de integrales

A pesar de haber aplicado la fórmula, ésta no debe aprenderse de memoria ya que se olvida con suma facilidad. Es conveniente aplicar el proceso teórico paso a paso:

$$a)\ \int \frac{3x-1}{(x+1)^2+4}\,dx = \int \frac{3x-1+3\cdot(-1)-3\cdot(-1)}{(x+1)^2+4}\,dx = \int \frac{3(x+1)-4}{(x+1)^2+4}\,dx =$$

$$= \int \frac{3(x+1)}{(x+1)^2+4}\,dx + \int \frac{-4}{(x+1)^2+4}\,dx.$$

Se resuelven por separado las dos integrales.

$$b)\ \int \frac{3(x+1)}{(x+1)^2+4}\,dx = 3\int \frac{x+1}{(x+1)^2+4}\,dx.\ \text{Si } u=(x+1)^2+4,\ u'=2(x+1)$$

Por tanto,

$$\int \frac{3(x+1)}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left[(x+1)^2+4\right]+C_1$$

$$c)\ (x+1)^2+4 = 4\left[\frac{(x+1)^2}{4}+1\right] = 4\left[\left(\frac{x+1}{4}\right)^2+1\right]$$

$$\text{Así, } \int \frac{-4}{(x+1)^2+4}\,dx = -4\int \frac{dx}{4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]} = -\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}$$

Llamando $u=\frac{x+1}{2}$, $u'=\frac{1}{2}$. Multiplicando y dividiendo por $\frac{1}{2}$:

$$-\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} = -2\int \frac{1/2}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx = -2\ arc\ tg\ \frac{x+1}{2}+C_2$$

d) Sumando los resultados de *b*) y *c*). (*C*1 + *C*2 = *C*),

$$\int \frac{3x-1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left[(x+1)^2+4\right]-2\ arc\ tg\ \frac{x+1}{2}+C,$$

Resultado igual al obtenido aplicando directamente la fórmula.

② Calcular $\int \frac{2x+5}{x^3+6x^2+9x}dx$

Resolución:

Se calculan las raíces del denominador.

$$x^3+6x^2+9x = x(x^2+6x+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x^2+6x+9 = 0 \end{cases}$$

$$x^2+6x+9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$$

Tiene las raíces x = 0, simple, y x = - 3, doble. Así,

$x(x2 + 6x + 9) = x(x + 3)2$

•Se descompone $\frac{2x+5}{x^3+6x^2+9x}$ en fracciones simples:

$$\frac{2x+5}{x^3+6x^2+9x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{A(x+3)^2 + Bx(x+3) + Cx}{x(x+3)^2}$$

Igualando los numeradores,

$2x + 5 = A(x + 3)2 + Bx(x + 3) + Cx$

Se dan valores a *x:*

$$\text{Si } x = 0, \quad 5 = A(0+3)^2 = 9 \cdot A \Rightarrow A = \frac{5}{9}$$

$$\text{Si } x = -3, \quad 2(-3)+5 = -3C \Rightarrow -1 = -3C \Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

$$\text{Si } x = 1; \quad 7 = 16A + 4B + C \Rightarrow 7 = 16 \cdot \frac{5}{9} + 4B + \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 63 = 80 + 36B + 3 \Rightarrow -20 = 36B \Rightarrow B = -\frac{5}{9}$$

Así,

$$\int \frac{2x+5}{x^3+6x^2+9x}\,dx = \int \frac{5/9}{x}\,dx + \int \frac{-5/9}{x+3}\,dx + \int \frac{1/3}{(x+3)^2}\,dx =$$

$$= \frac{5}{9}\ln|x| - \frac{5}{9}\ln|x+3| + \frac{1}{3}\int (x+3)^{-2}\,dx =$$

$$= \frac{5}{9}\ln|x| - \frac{5}{9}\ln|x+3| + \frac{1}{3}\frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{5}{9}\ln|x| - \frac{5}{9}\ln|x+3| - \frac{1}{3}\frac{1}{x+3} + C$$

③ Calcular $\displaystyle\int \frac{3x^2+5}{(x-2)\,(x^2+2x+4)}\,dx$

Resolución:

Raíces de (x - 2) (x2 + 2x + 4):

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + i\sqrt{3} \\ x_2 = -1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1 - i\sqrt{3})\,(x + 1 + i\sqrt{3}) = (x+1)^2 + 3$$

Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{3x^2+5}{(x-2)\,(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{(x+1)^2+3} =$$

$$= \frac{A(x^2+2x+4)+(Mx+N)\,(x-2)}{(x-2)\,(x^2+2x+4)}$$

Se identifican los numeradores y se dan valores a *x*:

3 *x*2 + 5 = *A*(*x*2 + 2*x* + 4) + (*Mx* + *N*) (*x* - 2)

$$\text{Si } x = 2,\ \ 17 = A \cdot 12 \Rightarrow A = \frac{17}{12}$$

$$\text{Si } x = 0,\ \ 5 = 4A - 2N \Rightarrow 5 = \frac{17}{3} - 2N \Rightarrow N = \frac{\frac{17}{3} - 5}{2} \Rightarrow N = \frac{1}{3}$$

$$\text{Si } x = 1,\ \ 8 = 7A - M - N \Rightarrow 8 = \frac{119}{12} - M - \frac{1}{3} \Rightarrow M = \frac{19}{12}$$

$$\bullet \int \frac{3x^2+5}{(x-2)\,(x^2+2x+4)}dx = \int \frac{\frac{17}{12}}{x-2}dx + \int \frac{\frac{19}{12}x + \frac{1}{3}}{(x+1)^2+3}dx$$

$$\int \frac{\frac{17}{12}}{x-2}dx = \frac{17}{12}\, ln\,|x-2| + C_1$$

$$\int \frac{\frac{19}{12}x + \frac{1}{3}}{(x+1)^2+3}dx = \frac{\frac{19}{12}}{2}\, ln\left[(x+1)^2+3\right] +$$

$$+ \frac{\frac{1}{3} + \frac{19}{12}(-1)}{\sqrt{3}}\, arc\ tg\, \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C_2 =$$

$$= \frac{19}{24}\, ln\left[(x+1)^2+3\right] - \frac{5}{4\sqrt{3}}\, arc\ tg\left|\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right| + C_2$$

Luego:

$$\int \frac{3x^2 + 5}{(x-2)\,(x^2+2x+4)}\,dx =$$

$$= \frac{17}{12}\,ln\,|x-2| + \frac{19}{24}\,ln\left[(x+1)^2+3\right] - \frac{5}{4\sqrt{3}}\,arc\ tg\left|\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right| + C$$

Autoevaluación

<u>Primera Parte:</u> **VERDADERO O FALSO**

Coloca dentro del paréntesis V si consideras que la proposición es verdadera y F si la considera falsa. Justifica tu respuesta haciendo los cálculos respectivos. Cada respuesta correcta tiene el valor de (1 Pto.)

1) La integral $\int 3x^5 dx = \frac{x^6}{2} + c$ .... ( )

2) La siguiente fórmula $\int \frac{du}{u} = u + c$ .... ( )

3) La identidad $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ .... ( )

4) La integral $\int udv = uv - \int v^2 du$ .... ( )

Segunda Parte: **SELECCIÓN SIMPLE**

Instrucciones: En cada uno de los siguientes items selecciona la alternativa que consideres correcta. Cada respuesta correcta tiene el valor de un punto (1Pto.).

1) La integral $\int \frac{dx}{x^4} =$

a) $\frac{x^3}{3} + c$

b) $5x + c$

c) $\frac{x^{-3}}{5} + c$

d) $-\frac{x^{-3}}{3} + c$

2) La integral $\int (x^2 + 5)^3 x dx =$

a) $\frac{1}{4}\left(x^3 + 5\right)^4 + c$

b) $\frac{1}{4}\left(x^3 + 5\right)^3 + c$

c) $\frac{1}{8}\left(x^2 + 5\right)^4 + c$

d) $\frac{1}{8}\left(x^3 + 25\right)^3 + c$

3) La integral $\int x \sec^2 x dx =$

a) $x^3 \tan x - \ln(\sec x) + c$

b) $5x + 9x + c$

c) $5x \tan x - \ln(\sec x) + c$

d) $x \tan x - \ln(\sec x) + c$

4) La integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 64}} =$

a) $\sec z + \tan z + c$

b) $\ln\left|x^3 + \sqrt{x - 64}\right| + c$

c) $\ln\left|\sec^2 z + \tan^2 z\right| + c$

d) $\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 64}\right| + c$

Tercera Parte: **DESARROLLO**

Instrucciones**:** Resuelva los siguientes problemas en forma ordenada y detallada. Cada respuesta correcta tiene un valor de cuatro puntos (4 Pts.).

1) $\int \frac{(x - 1)}{x^3 - x^2 - 2x} dx =$

2) $\int (5x^3 + 6x^2 + 3x + 5) dx =$

3) $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx =$

Matriz de Corrección

PRIMERA PARTE :

1) La integral $\int 3x^5 dx = \frac{x^6}{2} + c$

$\int 3x^5 dx = \frac{3x^{5+1}}{5+1} + c$ Integramos utilizando la fórmula

$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ en donde $n \neq -1$.

$\int 3x^5 dx = \frac{3x^6}{6} + c = \frac{x^6}{2} + c$ Sacando tercera en el numerador y el denominador.

2) La siguiente fórmula $\int \frac{du}{u} = u + c$ es falsa ya que las formas básicas para integrar tenemos $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

3) La identidad $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ es verdadera por ser una de las ocho identidades fundamentales de Trigonometría, que son las siguientes:

$$senx \csc x = 1$$
$$\cos x \sec x = 1$$
$$\tan x \cot x = 1$$
$$\tan x = \frac{senx}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{senx}$$
$$sen^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$
$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

4) La integral $\int udv = uv - \int v^2 du$ .... (F).

De la fórmula para la derivada del producto de dos funciones se obtiene la fórmula para la integración por partes. Si f y g son funciones diferenciables, entonces.

$$Dx[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \Leftrightarrow f(x)g'(x) = Dx[f(x)g(x)] - g(x)f'(x)$$

Al integrar en cada miembro de esta ecuación obtine.

$$\int f(x)g'(x)dx = \int Dx[f(x)g(x)]dx - \int g(x)f'(x)dx \qquad \text{(Ecuación)}$$

La ecuación anterior se llama fórmula para la integración por partes; una manera más adecuada de escribir esta fórmula es:

$u = f(x)$
$v = g(x)$
$du = f'(x)dx$
$dv = g'(x)dx$

Así que la ecuación se transforma en $\int udv = uv - \int vdu$

<u>SEGUNDA PARTE</u>

1) La integral $\int \frac{dx}{x^4} =$

Al subir el denominador, el exponente cambia de signo.

$\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4}dx$ Integramos utilizando la fórmula $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ en donde $n \neq -1$.

$\int \frac{dx}{x^4} = \frac{u^{-4+1}}{-4+1} + c$ Resolviendo nos queda

$\int \frac{dx}{x^4} = -\frac{x^{-3}}{3} + c$

2) La integral $\int (x^2+5)^3 x dx =$

Haciendo cambio de variable

$$u = x^2 + 5$$
$$du = 2xdx$$
$$\frac{du}{2} = xdx$$

Sustituimos el cambio de variable en la integral.

$\int u^3 \frac{du}{2} =$ Sacamos la constantes de la integral para que sea igual a la integral original.

$\int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3 du$ Integramos utilizando la fórmula $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ en donde $n \neq -1$.

$\int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3 du = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{u^4}{4}\right) + c$ Sustituyendo el cambio de variable y resolviendo, nos queda.

$$\int u^3 \frac{du}{2} = \left(\frac{1}{8}\right)\left(x^2+5\right)^4 + c$$

3) La integral $\int x \sec^2 x dx$

Aplicando el método de Integración por partes cuya fórmula es:

$\int udv = uv - \int vdu$ ECUACIÓN

Hacemos u y du

$$u = x$$
$$du = dx$$
$$dv = \sec^2 xdx$$
$$\int v = \int \sec^2 xdx$$
$$v = \tan x$$

Sustituyendo en la integral original cada una de las variables.

$$\int x \sec^2 xdx = x \tan x - \int \tan xdx$$

Resolviendo la integral $\int \tan xdx$ por medio de la fórmula directa de integración $\int \tan xdx = \ln|\sec x| + c$ nos queda:

$$\int x \sec^2 xdx = x \tan x - \ln[\sec x] + c$$

4) La integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 64}} =$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 64}}$$

Solución: Sea $x = 8\sec z$, donde $0 < z < \left(\frac{1}{2}\right)\pi$ si $x > 8$ y

$\pi < z < \left(\frac{3}{2}\right)\pi$ si $x < -8$. Entonces $dx = 8\sec z \tan z dz$ y

Sustituyendo los cambios en $\sqrt{x^2 - 64}$ obtenemos $\sqrt{(8\sec z)^2 - 64}$ Luego resolvemos el cuadrado $\sqrt{64\sec^2 z - 64}$, sacamos factor común $\sqrt{64(\sec^2 z - 1)}$ sacamos la raíz cuadrada de 64 y utilizamos la identidad $\sec^2 z - 1 = \tan^2 z$ y obtenemos $8\sqrt{\tan^2 z} = 8\tan z$

Es decir :

$$\sqrt{x^2 - 64} = \sqrt{(8\sec z)^2 - 64} = \sqrt{64\sec^2 z - 64} = \sqrt{64(\sec^2 z - 1)} = 8\sqrt{\tan^2 z} = 8\tan z$$

Por lo tanto

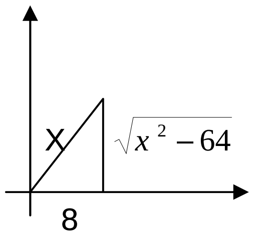
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 64}} = \int \frac{8\sec z \tan z dz}{8\tan z} = \int \sec z dz = \ln\left|\sec z + \tan z\right| + c$$

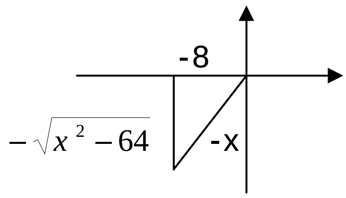
Para encontrar $\tan z$ consultamos la figura 1 para $x > 8$ y la figura 2 para $x < -8$. En cualquier caso $\sec z = \left(\frac{1}{8}\right)x$ y $\tan z = \left(\frac{1}{8}\right)\sqrt{x^2 - 64}$

Tenemos, entonces.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 64}} = \ln\left|\frac{x}{8} + \frac{\sqrt{x^2 - 64}}{8}\right| + c = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 64}\right| - \ln 8 + c =$$

Figura 1 (x>5) ***Figura 2 (x<-5)***





<u>CUARTA PARTE</u>:

<u>1)</u> $\int \frac{(x-1)}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{(x-1)}{x(x-2)(x+1)}dx = \int \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$

Factorizamos el denominador y tenemos.

$$\frac{x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} \qquad \text{ECUACIÓN I}$$

Así escribimos

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1} \qquad \text{ECUACIÓN II}$$

La ecuación II es una identidad para todo x (excepto x=0,2,-1).
De la ecuación II obtenemos.

$$x-1=(A+B+C)x^2+(-A+B-2C)x-2A \qquad \text{ECUACIÓN III}$$

La ecuación III es una identidad, la cual es cierta para todos los valores de x incluyendo 0,2 y –1. Deseamos encontrar las constantes, A,B, y C.

De la sustitución de 0 por x en la ecuación III obtenemos

$$-1 = -2A, \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$$

Al sustituir la ecuación II por x en la ecuación III obtenemos.

$$1 = 6B \Leftrightarrow B = \frac{1}{6}$$

Sustituyendo –1 por x en la ecuación III obtenemos.

$$-2 = 3C, \Leftrightarrow C = \frac{-2}{3}$$

Existe otro método para obtener los valores de A,B y C. Si en el lado derecho de la ecuación III combinamos Términos.

$$x - 1 = (A + B + C)x^2 + (-A + B - 2C)x - 2A \quad \text{ECUACIÓN IV}$$

Para que la ecuación IV sea una identidad, los coeficientes en la izquierda deben ser iguales a los coeficientes correspondientes en la derecha. Por tanto.

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -A + B - 2C &= 1 \\ -2A &= -1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A &= 1/2 \\ B &= 1/6 \\ C &= -2/3 \end{aligned}$$

Al resolver estas ecuaciones simultáneamente obtenemos $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{6}$ y $C = \frac{-2}{3}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación II obtenemos.

$$\frac{x-1}{x(x-2)(x+1)}=\frac{1/2}{x}+\frac{1/6}{x-2}+\frac{-2/3}{x}$$

Por lo tanto, la integral dada se puede expresar como sigue:

$$\int\left(\frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\right)dx=$$

Aplicando la fórmula de integración $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c$; el método de integración por cambio de variable y sacando las constantes de cada una de las integrales, obtenemos.

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{6}\ln|x-2|-\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln c$$

2) $\int\frac{8x^2dx}{(x^3+2)^3}=$

Haciendo el cambio de variable.

$$u=x^3+2$$

$$du=3x^2dx$$

$$\frac{du}{3}=x^2dx$$

Sustituyendo el cambio de variable en la integral $\int\frac{8x^2dx}{(x^3+2)^3}$ nos queda:

$\int\frac{du/3}{u^3}=\frac{1}{3}\int u^{-3}du=$ Sacando las constantes de la integral y luego

$\int \frac{du/3}{u^3} = \frac{1}{3}\int u^{-3}du$ Integramos utilizando la fórmula $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ en donde $n \neq -1$.

$$\int \left(\frac{du/3}{u^3} \right) = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{u^{-3+1}}{-3+1} + c = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{u^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{6}\left(x^3+2\right)^{-2} + c$$

3) $\int (5x^3 + 6x^2 + 3x + 5)dx$ Integramos utilizando la fórmula

$$\int [f(u) + g(u)]du = \int f(u)du + \int g(u)du$$

$\int (5x^3 + 6x^2 + 3x + 5)dx = \int 5x^3 dx + \int 6x^2 dx + \int 3xdx + \int 5dx$ Sacamos las constantes de cada una de las integrales.

$$5\int x^3 dx + 6\int x^2 dx + 3\int xdx + 5\int dx$$

Integramos utilizando la fórmula $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ en donde $n \neq -1$. Y la fórmula $\int du = u + c$

$$\left(\frac{5x^{3+1}}{4} + \frac{6x^{2+1}}{3} + \frac{3x^{1+1}}{2} + 5x \right) + c = \left(\frac{5x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 5x \right) + c$$

4) $\int \left(x^2 + 7x - 5\right)\cos 2xdx$

Aplicamos el método de Integración por partes

Haciendo $\begin{aligned} u &= x^2 + 7x - 5 \\ dv &= Cos\, 2xdx \end{aligned}$

Entonces

$$du = (2x + 7)dx$$
$$v = \frac{Sen\,2x}{2}$$

$$\int (x^2 + 7x - 5)\cos 2xdx\,) = x^2 + 7x - 5\frac{Sen\,2x}{2} - \int (2x + 7)\frac{Sen\,2x}{2}dx =$$

Aplicamos el método de integración por partes a la última integral, teniendo en cuenta que:

$$u_1 = \frac{2x + 7}{2}$$
$$dv_1 = sen\,2xdx$$

Entonces

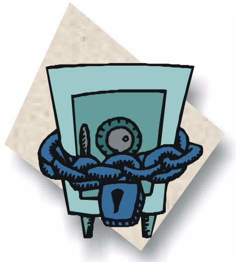
$$du_1 = dx$$
$$v_1 = \frac{-Cos\,2x}{2}$$

$$\int \frac{2x + 7}{2} Sen\,2xdx = \frac{2x + 7}{2}(\frac{-Cos\,2x}{2}) - \int \frac{-Cos\,2x}{2}dx =$$

$$= -\frac{(2x + 7)Cos\,2x}{4} + \frac{Sen\,2x}{4} + c$$

De donde finalmente obtenemos como respuesta lo siguiente:

$$\int (x^2 + 7x - 5)Cos\,2xdx = (x^2 + 7x - 5)\frac{Sen\,2x}{2} + (2x + 7)\frac{Cos\,2x}{4} - \frac{Sen\,2x}{4} + c$$



!Piensa¡

En una plaza hay 8 árboles distribuidos uniformemente a cada lado ¿Cuántos árboles tendrá a su alrededor?

Respuesta: uno en cada esquina que suman 4 y 6 entre las esquinas que suman 24. entonces en total hay 28 árboles

Bibliografía

- PURCEL, Edwin J. & VARBERG, Dale (1993) "Cálculo con Geometría Analítica" Sexta Edición, Prentice Hall Hispanoamericana S.A. México.

- LEITHOLD Louis (1973). "El Cálculo" Segunda Edición, Harla S.A. México.

- AYRES, JR. FRANK (1971). "Calculo diferencial e integral"Segunda Edición, Libros McGRAW-HILL de México, S.A. DE C.V.

- PÉREZ ORDÓÑEZ, EDGAR (1999). "Matemática MEGA".tomo 2. Colombia.