UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
NUCELO UNIVERSITARIO RAFAEL RANGEL
DEPARTAMENTO DE FISICA Y MATEMATICAS

ANALISIS VECTORIAL

por
Lic. Armando José Montilla Raga.
N.U.R.R.

Capítulo 1
Curvas en $I\!R^n$

1.1 Curvas y parametrización

La pesente sección tiene por finalidad tratar de expresar formalmente lo que se entiende por una curva en el espacio n dimensional R^n, que no es más que una función vectorial de variable real, contínua, definida de un cierto intervalo I de R o en todo R. Se puede decir, en cierto sentido, que una curva en R^n es un "sumergimiento"de un intervalo I de R o todo R en R^n a través de una función contínua.

A continuación se expresa lo que se entiende formalmente por continuidad de una funcion vectorial de variable real y una caracterización de ésta en término de sus componentes.

Definición 1.1 (Continuidad de una función vectorial.) *Sea I un intervalo en R, y sea $\alpha : I \to R^n$, se dice que α es contínua en $t \in I$ si*

$$\lim_{h \to t} \| \alpha(t) - \alpha(h) \| = 0$$

Se dice que es contínua en I si es contínua en cada punto de I.

Teorema 1.2 (Continuidad por componente.) *$\alpha : I \to R^n$ es contínua en $t \in I$ si y solo si cada una de sus componentes es contínua en t*

Demostración.- Este resultado se obtiene de las desigualdades

$$| \alpha_i(t) - \alpha_i(h) | \leq \| \alpha(t) - \alpha(h) \| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(t) - \alpha_i(h))^2}$$

Definición 1.3 (Curva en R^n.) *Se entiende por una curva en R^n a una función $\alpha : I \to R^n$ contínua en I.*

Es costumbre identificar la curva con la imágen, $\alpha(I)$, que es un subconjunto de R^n y alguna veces este conjunto es llamado la trayectoria de la curva o de la función, en este sentido es que se puede interpretar una curva en R^n como um sumergimiento de I en R^n. La interpretación de la trayectoria deriva en muchos casos de la interpretación del parámetro, por ejemplo si t se interpreta como el tiempo, $\alpha(t)$ será la posición de una partícula que siga la trayectoria de la curva.
A una función α se llama una parametrización de la curva.

Ejemplo 1.- Sea $c(t) = (t, t)$ con $t \in [0, 1]$ una curva en R^2. Segmento de recta en R^2 del punto $c(0) = (0, 0)$ al punto $c(1) = (1, 1)$

Ejemplo 2.- Sea $c(t) = (t/6, t/6)$ con $t \in [0, 6]$ una curva en R^2. Segmento de recta en R^2 del punto $c(0) = (0, 0)$ al punto $c(6) = (1, 1)$

Ejemplo 3.- Sea $\beta(t) = (1 - t, 1 - t)$ con $t \in [0, 1]$. Segmento de recta en R^2

del punto $c(0) = (0,0)$ al punto $\beta(0) = (1,1)$ al punto $\beta(1) = (0,0)$

Ejemplo 4.- Sea $\gamma(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ $t \in [0,1]$. segmento de recta del punto $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$ al punto $\gamma(0) = (x_0 + a, y_0 + b, z_0 + c)$.

De acuerdo a los ejercicios 1, 2 y 3 una misma curva puede estar representada por diferentes funciones vectoriales definidas en diferentes intervalos,es decir admite diversas parametrizaciones.
En los ejercicios 1 y 2 la curva se genera por diferentes parametrizaciones pero con la misma "orientación" es decir de $(0,0)$ a $(1,1)$ y en ejercico 3 se genera la misma curva pero con "orientacion" diferenrente de $(1,1)$ a $(0,0)$.
Algunas propiedades de las curva no dependen de la función que la genere, sin embargo existen propiedades que dependen de la parametrización generalmente de la "orientación". El término "orientación" se aclarará posteriormente para funciones vectoriales derivables que generan lo que se llama usualmente una "curva suave", concepto que se expone a continuación.

Definición 1.4 (Derivada de una función vectorial.) *Sea I un intervalo en R, y sea $\alpha : I \to R^n$, se dice que α es derivable en en $t \in I$ si existe el siguiente límite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h}.$$

Si este límite existe se denota $\alpha\prime(t)$.
Se dice que es derivable en en I si es derivable en cada punto de I.

Facilmente se demuestra que si $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$, entoces $\alpha\prime(t) = (\alpha_1\prime(t), \ldots, \alpha_n\prime(t))$

Definición 1.5 (Curva suave.) *Se dice que una curva es suave si es parametrizada por una función derivable en un cierto intervalo I y se dice que es suave a trozos si es posible expresarla como la unión de curvas suaves.*

nuevo