Axiomas de Incidencia.

En una introducción axiomática del espacio tridimensional, se supone la existencia de un conjunto llamado espacio, precisamente el espacio tridimensional, denotado por $\mathcal{E}$, cuyos elementos son llamados puntos, y se denotan usualmente con letras mayusculas, P, Q, etc. Por ejemplo $P \in \mathcal{E}$ significa que P es un punto o elemento de $\mathcal{E}$. Junto este espacio se supone la existencia de dos colecciones notables de subcojuntos de $\mathcal{E}$, la colección $\mathcal{L}$, cuyos elementos se llaman rectas del espacio y la colección $\mathcal{P}$ cuyos elementos se llaman planos del espacio. Denotemos el espacio $\mathcal{E}$ junto sus colecciones $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$ como $(\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{L})$. Para que $\mathcal{E}$ junto sus colecciones $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$ sea el espacio tal cual lo conocemos debe cuplir los axiomas de incidencia de Hilbert[1]. Los elementos tanto de $\mathcal{L}$ como de $\mathcal{P}$ son subconjunos de $\mathcal{E}$.

Los elementos de $\mathcal{L}$, las rectas, se denotan usualmente con letras minusculas, por ejemplo $l \in \mathcal{L}$.

Los elementos de $\mathcal{P}$, los planos, se denotan usualmente con letras griegas , por ejemplo $\alpha \in \mathcal{P}$.

Si una recta l contiene los puntos P y Q, escribimos $l(P,Q)$, es decir $l(P,Q)$ es una recta que contiene a P y a Q.

0.1 Axiomas de incidencia

Se dice que $(\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{L})$ es una incidencia geométrica si cumple los siguientes axiomas:

A1) Si $P \in \mathcal{E}$, $Q \in \mathcal{E}$ y $P \neq Q$, entonces existe una única recta $l \in \mathcal{L}$ tal que $P \in \mathcal{L}$ y $Q \in \mathcal{L}$.

Dados dos puntos del espacio, existe una única recta que los contiene.

A2) Si $l \in \mathcal{L}$, $P \in l$ y $Q \in l$ con $P \neq Q$ entonces si $m \in \mathcal{L}$, $P \in m$ y $Q \in m$ es $m = l$.

Una recta está completamente determinada por dos de sus puntos diferentes.

A3) Si $l \in \mathcal{L}$ existen $P \in \mathcal{E}$ y $Q \in \mathcal{E}$ con $P \neq Q$ tal que $P \in l$ y $Q \in l$.

Toda recta contiene al menos dos puntos diferentes.

A4) Si $P \in \mathcal{E}$, $Q \in \mathcal{E}$ y $R \in \mathcal{E}$, son tres puntos que no pertenecen a una misma recta, es decir $Q \notin l(R,S)$ entonces existe un único plano $\alpha \in \mathcal{P}$ tal que $P \in \alpha$, $Q \in \alpha$ y $R \in \alpha$.

Por tes puntos no colineales del espacio pasa un único plano.

A5) Si $\alpha \in \mathcal{P}$, $P \in \alpha$, $Q \in \alpha$, $R \in \alpha$, y $P \notin l(Q,R)$ entonces si $\beta \in \mathcal{P}$ es tal que $P \in \beta$, $Q \in \beta$, y $Q \in \beta$, es $\alpha = \beta$.

Un plano está determinado por tres puntos no colineales.

A6) Si $\alpha \in \mathcal{L}$ entonces existen tres puntos P, Q y R en el espacio $\mathcal{E}$ con $P \notin l(Q,R)$ tales que $P \in \alpha$, $Q \in \alpha$ y $R \in \alpha$.

Todo plano tiene al menos tres puntos no colineales.

A7) Sean $\alpha \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathcal{L}$ tales que $P \in \alpha \cap l$, $Q \in \alpha \cap l$ con $P \neq Q$ entonces $l \subset \alpha$.

Si una recta y un plano coinciden en dos puntos distintos entonces la recta está contenida en el plano.

A8) Si $\alpha \in \mathcal{P}$ y $\beta \in \mathcal{P}$ son tales que existe $P \in \alpha \cap \beta$, entonces existe $Q \in \mathcal{E}$ con $P \neq Q$ tal que $Q \in \alpha \cap \beta$.

Si dos planos tienen un punto en común entonces tienen algún otro punto en común

A9) Existen $P \in \mathcal{E}$, $Q \in \mathcal{E}$, $R \in \mathcal{E}$ y $S \in \mathcal{E}$ tales que no existe elemento $\alpha \in \mathcal{P}$ tal que $P \in \alpha$, $Q \in \alpha$ $R \in \alpha$ y $S \in \alpha$.

En el espacio existen al menos cuatro puntos que no están en un mismo plano.