UNA INVITACIÓN AL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

Maritza de Franco

A Francisco José, Sheryl, Marión, Paola, Constance, Luis Miguel y Miguel.

AGRADECIMIENTOS

Al Ing. Pedro Rangel por su comprensión, confianza y apoyo, a los bachilleres Daniel Ruiz, Pascual De Ruvo y Priscilla Mendoza sin cuyo esfuerzo y dedicación no hubiese podido realizar este texto y a todos los profesionales y bachilleres que laboran en el Centro de Tecnologías de la Universidad Nueva Esparta, Sede los Naranjos, por estar siempre dispuestos a colaborar.

PREFACIO

Este trabajo esta diseñado para facilitar el estudio de las "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden y Primer Grado" a los estudiantes de matemáticas en las escuelas de computación e ingeniería de la Universidad Nueva Esparta.

A los efectos de lograr el objetivo, se ha tratado de presentar cada uno de los casos en forma sencilla, evitando el uso riguroso del cálculo, introduciendo artificios sencillos, fáciles de comprender y aplicar sin menoscabar la profundidad del tema.

A la presentación teórico práctica del objeto de estudio le sucede un problemario que presenta los ejercicios resueltos en tres partes de manera que el estudiante vaya logrando etapas en la medida que avanza en la resolución del ejercicio.

Este trabajo constituye una recopilación de información que pretende orientar y estimular a todo estudiante del tercer curso de matemática a fin de permitirle adquirir la destreza necesaria en el manejo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden y Primer Grado.

ÍNDICE

ECUACIONES DIFERENCIALES

Una ecuación se llama diferencial porque contiene una o más derivadas ó diferenciales. Existen ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. En este trabajo se estudiarán las Ecuaciones diferenciales Ordinarias, que son aquellas que contienen una o más derivadas de una función de una sola variable independiente.

Las ecuaciones diferenciales también se pueden clasificar por el orden y el grado. El orden de una ecuación diferencial es el de la mayor derivada involucrada en la expresión y el grado el de la potencia de la derivada de mayor orden.

Este estudio se centrará en las ecuaciones diferenciales ordinarias de Primer Orden y Primer Grado, es decir ecuaciones que contienen funciones que se han derivado una sola vez, con respecto a una variable independiente y dicha derivada está elevada a la potencia uno.

Ejemplos:

$$a)\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x-y}{x+y}$$

$$b)x\frac{\partial y}{\partial x} - y - xsen\frac{y}{x} = 0$$

En las funciones de ambos ejercicios se derivó la variable "y" con respecto a la variable "x" una sola vez $\frac{\partial y}{\partial x}$ y esa derivada está elevada a la potencia unidad.

Si en el ejercicio "b" se despeja $\frac{\partial y}{\partial x}$, la ecuación queda como sigue:

$$b)\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{x} + sen\frac{y}{x}$$

En general suele expresarse una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado de la siguiente manera:

1) $\frac{\partial y}{\partial x} = f(x.y) \Rightarrow y` = f(x.y)$

2) $M(x.y)dx + N(x.y)dy = 0$

La primera ecuación está dada en forma explícita, es decir se expresa claramente que la función "y" fue derivada con respecto a la variable independiente "x", y la solución debe expresarse de la misma forma.

La segunda ecuación está dada en forma implícita, es decir no señala cual es la variable independiente, por lo tanto dicha variable puede elegirse a conveniencia y la solución debe darse también en forma implícita.

Existen diferentes métodos para resolver este tipo de ecuaciones, en este trabajo se presentarán los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales: Separables, Homogéneas, Con Coeficientes Lineales, exactas, Lineales, de Bernoulli y de Riccati.

ECUACIONES DIFERECIALES SEPARABLES

También llamadas de variables separables, si la ecuación está expresada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x.y)$$

$f(x.y)$ es una constante o una función sólo de "x", entonces dicha ecuación sería equivalente a $\frac{\partial y}{\partial x} = f(x)$, puede resolverse integrando directamente ambos lados de la ecuación, usando los métodos ordinarios de integración.

Si en la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, se puede escribir "M" como una función solo de "x" y "N" como una función solo de "y", se obtendría de manera equivalente $M(x)dx + N(y)dy = 0$, la cual se llama ecuación de variables separables ya que puede escribirse también así:

$$M(x)dx = -N(y)dy$$

y su solución se obtiene integrando directamente ambos miembros de la ecuación así:

$$\int M(x)dx = -\int N(y)dy + C \quad \text{ó} \quad \int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

Está solución se llama " Solución General de la Ecuación Diferencial"

La constante de integración se escribe de la forma más conveniente, así en muchos ejercicios, múltiplos de constantes o combinaciones de constantes suelen sustituirse por una sola constante.

Ejemplo 1: $x^2dx + 3ydy = 0$

La estructura de esta ecuación encaja dentro de la fórmula: $M(x)dx + N(y)dy = 0$; por lo tanto la solución puede obtenerse aplicando directamente los métodos de integración ya conocidos.

$$\int x^2dx + \int 3ydy = 0$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3y^2}{2} = C$$

Ejemplo 2:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{5x^2 + 3}{2y}$$

Haciendo transposición de términos la ecuación puede escribirse como:

$$2ydy = (5x^2 + 3)dx$$

Integrando miembro a miembro queda:

$$\int 2ydy = \int (5x^2 + 3)dx$$

$$2\int ydy = 5\int x^2dx + 3\int dx$$

$$\frac{2y^2}{2} = \frac{5x^3}{3} + 3x + C$$

$$y^2 = \frac{5}{3}x^3 + 3x + C$$

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales pueden comprobarse, si se deriva la función obtenida, debe encontrarse la ecuación original, así procediendo a derivar la solución anterior, se tiene:

$$2ydy = \left(\frac{5}{3}3x^2 + 3\right)dx$$

$$2ydy = \left(5x^2 + 3\right)dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{5x^2 + 3}{2y}$$

Solución Particular de una Ecuación Diferencial

Si se suministran condiciones iniciales en el ejercicio propuesto, entonces será posible encontrar la solución particular de la ecuación diferencial.

Ejemplo 3:

Hallar la solución particular de la ecuación diferencial:

$$y\frac{dy}{dx} - e^x = 0$$

Sujeta a la condición inicial:

$y(0) = 4$, es decir $y = 4$ cuando $x = 0$

$$y\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$ydy = e^x dx$$

Integrando miembro a miembro, se obtiene la solución general.

$$\frac{y^2}{2} = e^x + C$$

Para obtener la solución particular se sustituyen los valores de "x" y de "y" de la siguiente manera:

$$\frac{4^2}{2} = e^0 + C \rightarrow 8 = 1 + C \rightarrow 8 - 1 = C$$

$$7 = C$$

Luego la solución particular es:

$$\frac{y^2}{2} = e^x + 7 \rightarrow \frac{y^2}{2} - e^x = 7$$

$$y^2 - 2e^x = 14$$

ECUACIONES DIFERECIALES HOMOGÉNEAS

La ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es homogénea sí M y N son funciones homogéneas del mismo grado, o también si la ecuación puede escribirse como:

$$\frac{dy}{dx} = f(y/x) \text{ ó en su forma equivalente } \frac{dx}{dy} = f(x/y)$$

Definición de función Homogénea:

Sea la función $Z = f(x,y)$, se dice que es homogénea de grado "n" si se verifica que $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$; siendo "n" un número real. En muchos casos se puede identificar el grado de homogeneidad de la función, analizando el grado de cada término:

Ejemplo: $f(x,y) = x^2y^2 + 5x^3y + 4y^4$

$f(x,y)$ consta de tres términos, el grado de cada término se obtiene sumando los exponentes de las variables, así: $x^2y^2 \to 2+2=4$; $5x^3y \to 3+1=4$; $4y^4 \to 4=4$. Todos los términos tienen grado cuatro por lo tanto $f(x,y)$ es homogénea de grado cuatro.

Ejemplos:

a) $f(x,y) = x^2y^2 + 5x^3y - y^4$, aplicando la definición se tiene:

$$f(tx,ty) = (tx)^2(ty)^2 + 5(tx)^3(ty) - (ty)^4$$

$$f(tx,ty) = t^4x^2y^2 + 5t^4x^3y - t^4y^4$$

$$f(tx,ty)=t^4\left(x^2y^2+5x^3y-y^4\right)$$
$$f(tx,ty)=t^4 f(x,y)$$

Por lo tanto la función es homogénea de grado 4.

b) $f(x.y)=\dfrac{3x^2}{5y^2}$

$$f(tx.ty)=\frac{3(tx)^2}{5(ty)^2}=\frac{3t^2x^2}{5t^2y^2}=\frac{3t^0x^2}{5y^2}$$

$$f(tx.ty)=t^0\left(\frac{3x^2}{5y^2}\right)$$

$$f(tx,ty)=t^0 f(x,y)$$

Entonces la f(x ,y) es Homogénea de grado 0.

c) $f(x,y)=5xy+3x$, No es una función homogénea ya que:

$$f(tx,ty)=5(txty)+3tx$$
$$f(tx,ty)=5t^2xy+3tx$$
$$f(tx,ty)=t(5txy+3x)\neq t^n(5xy+3x)$$
$$f(tx,ty)\neq t^n f(x,y)$$

Si se determina que en la ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$; M y N son funciones homogéneas del mismo grado, o si la ecuación puede escribirse como:

$\dfrac{dy}{dx}=f(y/x)$ ó en su forma equivalente $\dfrac{dx}{dy}=f(x/y)$

El cambio de variable $y = v.x$ ó $x = v.y$ transforma la Ecuación Homogénea en Ecuación Separable

Ejemplo 1:

$$xy^2 y' = x^3 + y^3$$

Rescribiendo la ecuación se tiene:

$$xy^2 \frac{dy}{dx} = x^3 + y^3$$

$$xy^2 dy = \left(x^3 + y^3\right)dx$$

Transponiendo los términos se tiene:

$\left(x^3 + y^3\right)dx - xy^2 dy = 0$, donde $M = \left(x^3 + y^3\right)$ y $N = -xy^2$

M y N son funciones homogéneas de grado 3.

Probando:

Sea $M = f(x, y)$ entonces:

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3$$

$$f(tx, ty) = t^3 x^3 + t^3 y^3$$

$$f(tx, ty) = t^3 (x^3 + y^3)$$

$$f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$$

Visto de otra manera $f(x, y) = x^3 + y^3$, ambos términos de la ecuación son de grado 3 por lo tanto $f(x, y)$ es homogénea de grado 3.

Sea $N = -xy^2 = g(x, y)$; entonces:

$$g(tx, ty) = -(tx)(ty)^2$$

$$g(tx, ty) = -txt^2 y^2$$

$$g(tx, ty) = -t^3 xy^2$$

$$g(tx,ty) = t^3(-xy^2)$$

$$g(tx,ty) = t^3 g(x,y)$$

Por lo tanto "N" es homogénea de grado 3

Se puede enfocar también de la siguiente manera:

$$xy^2 y' = x^3 + y^3$$

$$xy^2 \frac{dy}{dx} = x^3 + y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{xy^2} + \frac{y^3}{xy^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)$$

Luego el cambio de variable:

$$\frac{y}{x} = v \quad \text{ó} \quad y = v.x$$

Su derivada es:

$$dy = vdx + xdv$$

Transforma la ecuación en separable

$$xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$$

$$(xv^2x^2)(vdx + xdv) = (x^3 + (vx)^3)dx$$

$$x^3v^2(vdx + xdv) = (x^3 + v^3x^3)dx$$

$$x^3v^3dx + x^4v^2dv = x^3dx + x^3v^3dx$$

Reduciendo términos semejantes se tiene:

$$x^4v^2dv = x^3dx$$

$$\frac{x^3}{x^4}v^2dv = dx$$

$$v^2 dv = \frac{1}{x} dx$$

Integrando se obtiene:

$$\int v^2 dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{v^3}{3} = Inx + |C|$$

Devolviendo el cambio de variable se tiene:

Si $y = v.x$ entonces:

$$v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3} = \ln x + |C|$$

$$\frac{y^3}{3x^3} = \ln x + |C|$$

$$y^3 = 3x^3 \left(\ln x + |C|\right)$$

Ejemplo 2:

$$(xy' - y) arctg \frac{y}{x} = x$$

Rescribiendo la ecuación se tiene:

$$\left(x \frac{dy}{dx} - y\right) arctg \frac{y}{x} = x$$

Despéjese:

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=\frac{x}{arctg\,\frac{y}{x}}\Rightarrow\left(x\frac{dy}{dx}\right)=\frac{x}{arctg\,\frac{y}{x}}+y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{arctg\,\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$$

Se aprecia que:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

El cambio de variable $y = v.x$; $dy = vdx + xdv$

Transformará la ecuación en separable:

$$\frac{vdx+xdv}{dx}=\frac{1}{arctgv}+v$$

Transponiendo dx :

$$vdx+xdv=\frac{dx}{arctgv}+vdx$$

Simplificando:

$$xdv=\frac{dx}{arctgv}$$

Transponiendo términos de nuevo:

$$arctgvdv = \frac{dx}{x}$$

Integrando:

a) $\int arctgvdv = \int \frac{dx}{x}$

Intégrese $arctg(v)$ usando método de integración por partes, comenzando con el cambio de variable se tiene:

Cambio de variable:

$$arctgv = u$$

Derivando:

$$\frac{1}{1+v^2}dv = du$$

$$dv = dt$$

$$\int dv = \int dt \Rightarrow v = t$$

Resulta

$$\int arctgvdv = v.arctgv - \int \frac{v}{1+v^2}dv$$

La integral

$$\int \frac{v}{1+v^2}dv$$

Se resuelve por:

Cambio de variables:

$$1+v^2 = z$$

$$2v.dv = dz$$

$$v.dv = \frac{dz}{2}$$

Sustituyendo en la integral se obtiene:

$$\int \frac{v}{1+v^2}\,dv = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z|$$

Regresando el cambio de variable

$$\int \frac{v}{1+v^2}\,dv = \frac{1}{2}\ln\left|1+v^2\right|$$

Por lo tanto la integral

$$\int arctgv.dv = v.arctgv - \frac{1}{2}\ln\left|1+v^2\right|$$

Sustituyendo este resultado en la integral (a) se concluye que

$$v.arctgv - \frac{1}{2}\ln\left|1+v^2\right| = \ln|x| + C$$

Simplificando y devolviendo el cambio

$$v = \frac{y}{x}$$

Se obtiene:

$$\frac{y}{x}arctg\,\frac{y}{x} = \ln|x| + \ln\left|1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right|^{\frac{1}{2}} + \ln C$$

$$\frac{y}{x}arctg\,\frac{y}{x} = \ln\left|x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}C\right|$$

$$\frac{y}{x} arctg \frac{y}{x} = \ln\left|\left(x\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} C \right)\right|$$

$$\frac{y}{x} arctg \frac{y}{x} = \ln\left| x \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} C \right|$$

$$\frac{y}{x} arctg \frac{y}{x} = \ln\left|\sqrt{x^2 + y^2}\, C\right|$$

Buscando la inversa de la función logarítmica resulta:

$$e^{\left(\frac{y}{x}\right) arctg\left(\frac{y}{x}\right)} = \sqrt{x^2 + y^2}\, C$$

ECUACIONES DIFERECIALES CON COEFICIENTES LINEALES

Estas ecuaciones diferenciales tienen la siguiente estructura:

$$(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$$

También suelen llamarse ecuaciones diferenciales transformables a homogéneas.

Para resolver estas ecuaciones diferenciales se deben realizar algunos cambios de variables que permitan eliminar el término independiente del coeficiente lineal (" c " y " f ") conseguido esto, la ecuación se transforma en homogénea.

Ejemplo 1:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x-y-9}{x+y+1}$$

Pasos a seguir:

1. Hacer transposición de términos, de manera de darle la estructura adecuada.

$$(x+y+1)dy=(3x-y-9)dx$$

$$(3x-y-9)dx-(x+y+1)dy=0$$

$$(3x-y-9)dx+(-x-y-1)dy=0$$

2. Escribir un sistema de ecuaciones en “h”y “k” con los coeficientes lineales y encontrar los valores de “h”y “k”.

$$\begin{cases}3h-k=9\\-h-k=1\end{cases}$$

Al resolver el sistema resulta:

$$h = 2$$

$$k = -3$$

3. Hacer el cambio de variables:

$$\begin{array}{lcl} x = u + h & \text{es decir,} & x = u + 2 \rightarrow dx = du \\ y = v + k & & y = v - 3 \rightarrow dy = dv \end{array}$$

4. Sustituir los cambios de variables en la ecuación.

$$(3x - y - 9)dx - (x + y + 1)dy = 0$$

Resultando:

$$[3(u+2) - (v-3) - 9]du - [u + 2 + v - 3 + 1]dv = 0$$

Efectuar operaciones y reducir términos semejantes

$$[3u + 6 - v + 3 - 9]du - [u + v]dv = 0$$

$$(3u - v)du - (u + v)dv = 0$$

Esta es una ecuación diferencial homogénea; proceder en consecuencia.

5. Efectuar un nuevo cambio de variable

$$v = u.z$$

$$dv = u.dz + z.du$$

6. Hacer la sustitución en la última ecuación obtenida

$$(3u - uz)du - (u + uz)(udz + zdu) = 0$$

7. Efectuar operaciones hasta transformarla en separable

$$u(3 - z)du = u(1 + z)(udz + zdu)$$

Al simplificar y reducir términos semejantes resulta:

$$3du - zdu = udz + zdu + uzdz + z^2 du$$

$$(3 - 2z - z^2)du = u(1 + z)dz$$

Al separar las variables e integrar miembro a miembro se obtiene:

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz \qquad (*)$$

La integral del lado izquierdo es inmediata; la del lado derecho se resuelve por cambio de variables así:

$$\int \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz$$

Por lo tanto;

$$z^2+2z-3=t$$
$$(2z+2)dz=dt$$
$$2(z+1)dz=dt$$
$$z+1=\frac{dt}{2}$$

Al sustituir los cambios en la integral resulta:

$$\int \left(\frac{\frac{dt}{2}}{t} \right) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln\left|z^2+2z-3\right|$$

Sustituyendo este resultado en (*) e integrando el lado izquierdo de esa ecuación se obtiene:

$$\ln|u| = -\frac{1}{2}\ln\left|z^2+2z-3\right| + \ln|C|$$

8. Aplicar las propiedades de los logaritmos para simplificar la expresión

$$\ln|u| + \frac{1}{2}\ln\left|z^2+2z-3\right| = \ln C$$
$$\ln\left|u(z^2+2z-3)^{\frac{1}{2}}\right| = \ln C$$
$$u(z^2+2z-3)^{\frac{1}{2}} = C$$

Elevar al cuadrado ambos miembros

$$u^2(z^2+2z-3)=C$$

Donde $C^2 \approx C$ luego:

$$u^2(z^2+2z-3)=C$$

9. Revertir todos los cambios de variables y simplificar

$$(x-2)^2\left(\frac{v^2}{u^2}+2\frac{v}{u}-3\right)=C$$

$$(x-2)^2\left[\frac{(y+3)^2}{(x-2)^2}+\frac{2(y+3)}{x-2}-3\right]=C$$

$$(x-2)^2\left[\frac{(y+3)^2+2(x-2)(y+3)-3(x-2)^2}{(x-2)^2}\right]=C$$

$$(y+3)^2+2(x-2)(y+3)-3(x-2)^2=C$$

Solución General.

ECUACIONES DIFERECIALES EXACTAS

Se dice que una ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta si se verifica que:

$$\frac{\partial}{dy} M(x.y) = \frac{\partial}{dx} N(x.y)$$

Para resolver este tipo de ecuaciones se procede de la siguiente manera:

1. Se integra $M(x, y)$ con respecto a "x" (cuando se integra con respecto a "x", entonces "y" es constante) se reemplaza la constante de integración por una función de "y" (G(y)).

$$f(x, y) = \int M(x, y)dy = f(x, y) + G(y)$$

2. Se deriva la función f(x ,y) + G (y) con respecto a "y", se iguala con N (x, y)

$$\frac{\partial}{dy} f(x.y) + \frac{\partial}{dy} G(y) = \frac{\partial}{dy} N(x.y)$$

Al despejar

$$\frac{\partial}{dy} G(y)$$

Resulta:

$$\frac{\partial}{dy} G(y) = \frac{\partial}{dy} N(x.y) - \frac{\partial}{dy} f(x.y)$$

3. Se integra ambos lados de la ecuación anterior con respecto a “y” , para obtener el valor de G (y) y se sustituye este resultado en el paso "1".

El ejercicio también puede resolverse comenzando el proceso de integración en el paso " 1 " con respecto a "x".

Ejemplo 1:

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$$
$$M(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$$
$$N(x, y) = 2xy$$

Es una ecuación diferencial exacta ya que:

$$\frac{\partial}{dy} M(x, y) = 2y \qquad \frac{\partial}{dx} N(x, y) = 2y$$

Luego

$$\frac{\partial}{dy} M(x, y) = \frac{\partial}{dx} N(x, y)$$

Se procede a seguir los pasos de "1" a "3".

1. Se integra $M(x, y)$ con respecto a “ x ”

$$f(x, y) = \int M(x, y)dx = \int (x^2 + y^2 + 2x)dx = \int x^2 dx + y^2 \int dx + 2\int xdx$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + \frac{2x^2}{2} + G(y)$$

2. Se deriva con respecto a "y"

$$\frac{\partial}{dy} f(x,y) = 2xy + \frac{\partial}{dy} G(y)$$

Se iguala a $N(x,y)$

$$\frac{\partial}{dy} f(x,y) = \frac{\partial}{dy} N(x,y)$$

$$2xy + \frac{\partial}{dy} G(y) = 2xy$$

Despejando se obtiene:

$$\frac{\partial}{dy} G(y) = 2xy - 2xy$$

$$\frac{\partial}{dy} G(y) = 0$$

3. Se integra el resultado anterior con respecto a “y” para obtener:

$$\int \frac{\partial}{dy} G(y) = \int 0 dy \rightarrow G(y) = C$$

Se sustituye G(y) en " 1" obteniéndose

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 + C = 0$$

Ejemplo 2:

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$$

$$M(x,y) = \frac{2x}{y^3} \qquad N(x,y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} = \frac{y^2}{y^4} - \frac{3x^2}{y^4}$$

$$\frac{\partial M}{dy} = 2x\frac{\partial}{dy}y^{-3} = 2x(-3y^{-4}) = -\frac{6x}{y^4}$$

$$\frac{\partial N}{dx} = \frac{\partial}{dx}\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4}\frac{\partial}{dx}x^2 = 0 - \frac{3}{y^4}2x = -\frac{6x}{y^4}$$

Es una ecuación diferencial exacta ya que

$$\frac{\partial}{dy}M(x,y) = \frac{\partial}{dx}N(x,y)$$

1. Integrar con respecto a "y"

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy$$

$$f(x,y) = \int\left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy$$

$$f(x,y) = -\frac{1}{y} + \frac{x^2}{y^3} + G(x)*$$

2. Derivando F (x, y) con respecto a "x" se tiene:

$$\frac{\partial}{dx}f(x,y) = \frac{\partial}{dx}\left(-\frac{1}{y}\right) + \frac{1}{y^3}\frac{\partial}{dx}x^2 + \frac{\partial}{dx}G(x)$$

$$\frac{\partial}{dx} f(x,y) = 0 + \frac{2x}{y^3} + \frac{\partial}{dx} G(x)$$

Igualando $\frac{\partial}{dx} f(x,y)$ con $M(x,y)$ se tiene

$$\frac{2x}{y^3} + \frac{\partial}{dx} G(x) = \frac{2x}{y^3}$$

Despejando

$$\frac{\partial}{dx} G(x) = \frac{2x}{y^3} - \frac{2x}{y^3}$$

$$\frac{\partial}{dx} G(x) = 0$$

3. Integrando el resultado anterior con respecto a "x" se obtiene:

$$\int G(x) \frac{\partial}{dx} = \int 0 dx + C$$

$$G(x) = 0 + C$$

Sustituyendo el resultado obtenido en " * " se tiene:

$$f(x,y) = -\frac{1}{y} + \frac{x^2}{y^3} + C = 0$$

ó en su forma equivalente

$$f(x,y) = -\frac{1}{y} + \frac{x^2}{y^3} = C$$

$$f(x,y) = \frac{-y^2 + x^2}{y^3} = \frac{y^3 C}{y^3}$$

$$f(x,y) = x^2 - y^2 = y^3 C$$

ECUACIONES DIFERECIALES TRANSFORMABLES EXACTAS

Algunas ecuaciones diferenciales $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ pueden resultar no ser exactas, es decir no se cumple que:

$$\frac{\partial}{dy} M(x, y) = \frac{\partial}{dx} N(x, y)$$

Pero si se da el caso de que:

$$\frac{1}{N(x.y)} \left[\frac{d}{dy} M(x, y) - \frac{d}{dx} N(x, y) \right] = h(x)$$

es una función solamente de “x”, entonces $e^{\int h(x)dx}$ es un factor integrante; es decir, si se multiplica $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ por dicho factor, la ecuación se transforma en una ecuación diferencial exacta.

De la misma manera sí:

$$\frac{1}{M(x, y)} \left[\frac{d}{dx} N(x, y) - \frac{d}{dy} M(x, y) \right] = k(y)$$

es una función solamente de " y" entonces $e^{\int k(y)dy}$ es un Factor
Integrante de la ecuación diferencial.

Ejemplo 1:

$$\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0$$

$$\frac{d}{dy}M(x,y)=\frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}N(x,y)=-\frac{1}{x}$$

No resulta ser una ecuación diferencial exacta; probando a conseguir un factor integrante:

$$k(y)=\frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{d}{dx}N(x,y)-\frac{d}{dy}M(x,y)\right]$$

$$k(y)=\frac{x}{y}\left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right]=\frac{x}{y}\left[-\frac{2}{x}\right]$$

$$k(y)=-\frac{2}{y}$$

Por lo tanto $e^{-2\int\frac{dy}{y}}$, es un factor integrante

$$e^{-2\int\frac{dy}{y}}=e^{-2\ln y}=e^{\ln y^{-2}}=\frac{1}{y^2}$$

Multiplicando la ecuación por el factor obtenido resulta:

$$\frac{1}{y^2}\frac{y}{x}dx+\left(\frac{y^3}{y^2}-\frac{\ln x}{y^2}\right)dy=0$$

$$\frac{1}{xy}dx+\left(y-\frac{\ln x}{y^2}\right)dy=0$$

Probando el criterio de exactitud:

$$\frac{d}{dy}M(x,y)=-\frac{1}{xy^2} \qquad \frac{d}{dx}N(x,y)=-\frac{1}{xy^2}$$

Por lo tanto se obtuvo una ecuación diferencial exacta,

Procediendo según este caso:

1. $\int\frac{1}{xy}dx=\frac{1}{y}\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{y}\ln|x|+G(y)$ *

2. Derivando (1) con respecto a " y" e igualando con "N "

$$-\frac{1}{y^2}\ln x + G`(y) = y - \frac{\ln x}{y^2}$$

Simplificando se obtiene:

$$G`(y) = y$$

Integrando miembro a miembro

$$\int G`(y)dy = \int y.dy$$

$$G(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

Sustituyendo este resultado en " * " resulta:

$$f(x,y) = \frac{1}{y}\ln x + \frac{y^2}{2} + C = 0$$

Ejemplo 2:

$$(e^y + e^{-x})dx + (e^y + 2ye^{-x})dy = 0)$$

$$\frac{d}{dy}M(x,y) = e^y \qquad \frac{d}{dx}N(x,y) = -2ye^{-x}$$

$$\frac{d}{dy}M(x,y) \neq \frac{d}{dx}N(x,y)$$

Entonces $f(x,y)$ no es una ecuación diferencial exacta, probando a conseguir un factor integrante:

$$h(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{d}{dy}M(x,y) - \frac{d}{dx}N(x,y)\right]$$

$$h(x) = \frac{e^y + 2ye^{-x}}{e^y + 2ye^{-x}} = 1$$

Luego $h(x)$ en función de solo " x", por lo tanto $e^{\int h(x)dx}$ es un factor integrante

$$f.I = e^{\int dx} = e^x$$

Multiplicando la ecuación por el factor integrante e^x se obtiene:

$$(e^y e^x + e^{-x}.e^x)dx + (e^y e^x + 2ye^{-x}e^x)dy = 0$$

$$(e^y e^x + 1)dx + (e^y e^x + 2y)dy = 0$$

$$\frac{d}{dy}M(x,y) = e^y e^x \qquad \frac{d}{dx}N(x,y) = e^y e^x$$

Resulta una ecuación diferencial exacta, procediendo en consecuencia:

1. $\int (e^y e^x + 1)dx = e^y e^x + x + G(y)$ *

2. Derivando el resultado con respecto a " y " e igualando " N " resulta:
   $e^y e^x + G`(y) = e^y e^x + 2y$

Reduciendo términos semejantes se obtiene:

$$G`(y) = 2y$$

Integrando miembro a miembro

$$\int G`(y) = \int 2ydy$$

$$G(y) = y^2 + C$$

Sustituyendo en " * " se obtiene:

$$f(x,y) = e^y e^x + x + y^2 + C = 0$$

ECUACIONES DIFERECIALES LINEALES

Si una ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y) = 0$, puede escribirse de la forma $\left(\frac{dy}{dx}\right) + P(x)y = Q(x)$ ó en forma equivalente $y`+P(x)y = Q(x)$ entonces recibe el nombre de " Ecuación Diferencial Lineal".

Si se multiplica ambos lados de la ecuación por un factor integrante de la forma $e^{\int p(x)dx}$ y se integra miembro a miembro la solución es inmediata, es decir

$$y +`P(x)y = Q(x)$$

1. Multiplíquese ambos lados por $e^{\int p(x)dx}$:

$$ye^{\int p(x)dx} + P(x)ye^{\int p(x)dx} = e^{\int p(x)dx}Q(x)dx$$

El primer miembro de la ecuación no es otra cosa que la derivada con respecto a " x" del producto y$e^{\int p(x)dx}$

2. $$\frac{\partial}{dx} ye^{\int P(x)dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

3. Integrando miembro a miembro se obtiene:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

Solución de la Ecuación Diferencial

De la misma manera la ecuación puede escribirse como:

$$x`+P(y)x = Q(y)$$

El factor integrante tendría la forma $e^{\int p(y)dy}$ y la solución vendría dada como:

$$xe^{\int P(y)dy} = \int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy + C$$

Ejemplo 1:

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} = x^3$$

ó en su forma equivalente

$$y`+\frac{2}{x}y = x^3$$

1. Identificar P (x) y Q (x)

$$P(x) = \frac{2}{x} \qquad Q(x) = x^3$$

2. Encontrar el factor integrante

$$F.I = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\int \frac{dx}{x}} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

3. Multiplicando ambos miembros de la ecuación por el factor integrante se obtiene:

$$y`x^2 + \frac{2}{x}x^2y = x^3x^2$$
$$y`x^2 + 2xy = x^5$$

El primer miembro de la igualdad no es otra cosa que la derivada con respecto a " x" del producto y x², por lo tanto integrando miembro a miembro se tiene:

$$\int \frac{d}{dx}\left(y`x^2 + 2xy\right) = \int x^5 dx$$

$$yx^2 = \frac{x^6}{6} + C$$

Solución de la ecuación diferencial.

Haciendo el procedimiento más simple, se puede trabajar de la siguiente manera:

$$y`+\frac{2}{x}.y = x^3$$

1. Identificar $P(x)$ y $Q(x)$

2. Encontrar el factor integrante, en este caso x²(como se obtuvo en el paso dos).

3. Aplicar directamente la fórmula

$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C$, obteniendo:

$$yx^2 = \int x^2 x^3 dx + C$$

$$yx^2 = \int x^5 dx + C$$

$$yx^2 = \frac{x^6}{6} + C$$

Ejemplo 2:

$$xy`+2y = 3x$$

Recuérdese que para que la ecuación sea lineal debe tener la siguiente estructura: $y`P(x)y = Q(x)$, donde y ' denota la derivada de " y" con respecto a "x", por lo tanto, la ecuación dada no lleva esa estructura pero si se dividen ambos lados de dicha ecuación por la variable "x" se obtiene:

$$y`+\frac{2}{x}y = 3$$

Siguiendo los pasos:

1. $P(x) = \dfrac{2}{x}$ $\qquad Q(x) = 3$

2. Buscando el Factor Integrante.

$$e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\int \frac{dx}{x}} = e^{2Inx} = e^{Inx^2} = x^2$$

3. Aplicando la fórmula:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C$$

$$yx^2 = \int x^2(3)dx + C$$

$$yx^2 = 3\int x^2 dx + C$$

$$yx^2 = \frac{3x^3}{3} + C$$

$$y = \frac{x^3}{x^2} + \frac{C}{x^2}$$

$$y = x + Cx^{-2}$$

Ejemplo 3:

$$yx` - x = y$$

x' denota la derivada de "x" con respecto a "y", dividiendo ambos lados de la ecuación entre "y" se obtiene:

$$x` - \frac{1}{y}x = 1$$

1. $P(y) = -\frac{1}{y}$ $\qquad Q(y) = 1$

2. Obteniendo el Factor Integrante:

$$e^{\int P(y)dy} = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{-Iny} = e^{\ln y^{-1}} = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

3. Aplicando la fórmula:

$$xe^{\int P(y)dy} = \int e^{P(y)dy} Q(y)dy + C$$

$$x\frac{1}{y} = \int \frac{1}{y}(1)dy + C$$

$$x\frac{1}{y} = \ln y + C$$

Despejando " x" se obtiene:

$$x = y\ln y + Cy$$

ECUACIONES DIFERECIALES DE BERNOULLI

Una ecuación diferencial de Bernoulli tiene la siguiente estructura:

$\frac{\partial y}{\partial x} + P(x)y = Q(x)y^n$ También puede escribirse como $y` + P(x)y = Q(x)y^n$

Esta ecuación diferencial puede transformarse en lineal si se divide miembro a miembro entre y^n, y haciendo luego un cambio de variable. Procediendo como se indica, se obtiene:

$$\frac{y`}{y^n} + P(x)\frac{y}{y^n} = Q(x)\frac{y^n}{y^n}$$

1) $y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$

Haciendo el cambio de variable $y^{1-n} = w$, y derivando parcialmente con respecto a " x" resulta:

$(1-n)y^{1-n-1}y` = w`$, es decir

$(1-n)y^{-n}y` = w`$

Multiplicando miembro a miembro la ecuación (1) por (1- n) se obtiene:

$$(1-n)y^{-n}y` + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$$

Sustituyendo en esta expresión el cambio de variable, puede escribirse como:

$$w` + (1-n)P(x)w = (1-n)Q(x)$$

Que es una ecuación lineal en " w ", ya que (1 - n) es una constante.

Ejemplo 1:

$y` - y = e^{2x} y^3$, dividiendo entre y^3

$$\frac{1}{y^3} y` - \frac{y}{y^3} = e^{2x} \frac{y^3}{y^3}$$

$$y^{-3} y` - y^{-2} = e^{2x} \quad (1)$$

Hágase el cambio de variable $y^{1-n} = w$, y derívese parcialmente con respecto a "x". En este caso n = 3 (exponente de " y " en el ejemplo dado) quedando:

Cambio de Variable:

$y^{1-3} = w$, es decir

$y^{-2} = w$

Derivando con respecto a " x"

$$-2y^{-3} y` = w`$$

Multiplicando la ecuación (1) por -2 resulta:

$$-2y^{-3} y` + 2y^{-2} = -2e^{2x}$$

Sustitúyase el cambio de variable:

$$w` + 2w = -2e^{2x}$$

Se obtuvo una ecuación lineal en " w ", procediendo en consecuencia se tiene:

$P(x) = 2 \qquad\qquad Q(x) = -2e^{2x}$

Buscando el factor integrante $e^{\int 2dx} = e^{2x}$ por lo tanto la solución es:

$$we^{2x} = \int e^{2x}\left(-2e^{2x}\right)dx + C$$

$$we^{2x} = -2\int e^{4x}dx + C$$

$$w = -\frac{e^{2x}}{2} + \frac{C}{e^{2x}}$$

Revirtiendo el cambio de variable

$$y^{-2} = -\frac{e^{2x}}{2} + \frac{C}{e^{2x}}$$

Este resultado puede expresarse también como:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{-e^{4x} + 2C}{2e^{2x}}$$

Donde 2 C es equivalente a "C". Obteniéndose mediante el inverso:

$$y^2 = \frac{2e^{2x}}{C - e^{4x}}$$

Ejemplo 2:

$xy`+6y = 3xy^{4/3}$, pasos a seguir:

1. Dividir entre $xy^{4/3}$

$$\frac{xy`}{xy^{4/3}} + \frac{6}{x}\frac{y}{y^{4/3}} = \frac{3xy^{4/3}}{xy^{4/3}}$$

2. Simplificar

$$y^{-4/3}y` + \frac{6}{x}y^{-1/3} = 3$$

3. Hacer el cambio de variable

$w = y^{-1/3}$, y calcular

$$w` = -\frac{1}{3}y^{-4/3}$$

4. Sustituir el cambio de variable y multiplicar toda la expresión por $-\frac{1}{3}$

$$w` - \frac{2}{x}w = -1$$

5. Resolver la ecuación diferencial lineal donde:

$P(x) = -\frac{2}{x}$ $\qquad$ $Q(x) = -1$

Factor integrante:

$$e^{-2\int \frac{dx}{x}} = e^{-2In|x|} = e^{Inx^{-2}} = \frac{1}{x^2}$$

Resultando:

$$w\frac{1}{x^2} = -\int \frac{1}{x^2}dx + C$$

6. Resolver la integral

$$w\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} + C$$

7. Despejar " w "

$$w = \frac{x^2}{x} + Cx^2$$

8. Revertir el cambio de variable:

$$y^{-1/3} = x + Cx^2$$

9. Buscar el inverso

$$\frac{1}{y^{1/3}} = x + Cx^2$$

$$y^{1/3} = \frac{1}{x + Cx^2}$$

10. Todavía se puede elevar ambos miembros a la potencia "3" para obtener:

$$y = \frac{1}{\left(x + Cx^2\right)^3}$$

ECUACIONES DIFERECIALES DE RICCATI

Este tipo de ecuación diferencial tiene la estructura:

$\frac{\partial y}{\partial x} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ o en su forma equivalente $y` = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$

En la cual si se conoce alguna raíz $S(x)$ del polinomio de segundo grado en "y", el cambio de variable:

$$y = S(x) + \frac{1}{z}$$

La transforma en una " Ecuación Diferencial Lineal".

Ejemplo 1:

$$y` = y^2 - 2xy + 1 + x^2 \qquad\qquad S(x) = x$$

Pasos a seguir:

1. Hacer el cambio de variable

$$y = x + \frac{1}{z}$$

Calcular;

$$y' = 1 - \frac{1}{z^2} z`$$

y sustituir en la ecuación diferencial

$$1 - \frac{1}{z^2} z` = \left(x + \frac{1}{z} \right)^2 - 2x\left(x + \frac{1}{z} \right) + 1 + x^2$$

2. Operar y reducir términos semejantes:

$$1-\frac{1}{z^2}z`=x^2+2\frac{x}{z}+\frac{1}{z^2}-2x^2-2\frac{x}{z}+1+x^2$$

$$1-\frac{1}{z^2}z`=\frac{1}{z^2}+1$$

$$-\frac{1}{z^2}z`=\frac{1}{z^2}+1-1$$

$$-\frac{1}{z^2}z`=\frac{1}{z^2}$$

3. Despejar z', lo cual se obtiene multiplicando miembro a miembro por $-z^2$

$$z`=-\frac{z^2}{z^2}$$
$$z`=-1$$

4. Resolver la ecuación separable :

$$\int z'=-\int \partial x \qquad\qquad z=-x+c$$

5. Revertir el cambio de variable despejando " z " de la ecuación:

$$y=x+\frac{1}{z}$$

Obteniéndose:

$$y-x=\frac{1}{z}$$
$$\frac{1}{y-x}=z$$

6. Sustituyendo en " 4 " resulta:

$$\frac{1}{y-x}=-x+C$$

$$\frac{1}{-x+C}=y-x$$

$$\frac{1}{-x+C}+x=y$$

Ejemplo 2:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}y+y^2 \qquad\qquad S(x)=\frac{2}{x}$$

Pasos a seguir:

1. Realizar el cambio de variable,

$$y=S(x)+\frac{1}{z}$$

es decir,

$$y=\frac{2}{x}+\frac{1}{z}$$

2. Derivar ambos lados de la expresión anterior con respecto a “x”

$$y`=-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{z^2}z`$$

3. Sustituir los valores de: y e y' en el ejemplo

$$-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{z^2}z`=-\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{z}\right)^2$$

4. Realizar operaciones y reducir términos semejantes

$$-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{z^2}z`=-\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{xz}+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{xz}+\frac{1}{z^2}$$

$$-\frac{1}{z^2}z`=\frac{3}{xz}+\frac{1}{z^2}$$

5. Multiplicar ambos lados de la ecuación por $-z^2$

$$-\frac{\left(-z^2\right)}{z^2}z`=\frac{-3z^2}{xz}-\frac{z^2}{z^2}$$

$$z`=-\frac{3}{x}z-1$$

6. Transponer términos para obtener una ecuación diferencial lineal

$$z`+\frac{3}{x}z=-1$$

7. Resolver la ecuación diferencial

$$P(x)=\frac{3}{x} \qquad Q(x)=-1$$

Factor Integrante $e^{\int\frac{3}{x}dx}=e^{3\int\frac{dx}{x}}=e^{3Inx}=e^{Inx^3}=x^3$

8. Solución de la ecuación diferencial lineal

$$zx^3=-\int x^3dx+C$$

$$zx^3=-\frac{x^4}{4}+C$$

$$z=-\frac{x^4}{4x^3}+\frac{C}{x^3}$$

$$z=-\frac{x}{4}+\frac{C}{x^3}$$

9. Revertir el cambio de variable y sustituir en el paso anterior

Si $y=\frac{2}{x}+\frac{1}{z}$

Entonces:

$$y-\frac{2}{x}=\frac{1}{z}$$

$$\frac{xy-2}{x}=\frac{1}{z}$$

$$\frac{x}{xy-2}=z$$

$$\frac{x}{xy-2}=-\frac{x}{4}+\frac{C}{x^3}$$

10. Solución general de la ecuación diferencial:

Despejar "y" en función de "x"

$$\frac{x}{-\frac{x}{4}+\frac{C}{x^3}}=xy-2$$

$$\frac{1}{-\frac{x}{4}+\frac{C}{x^3}}=\frac{xy}{x}-\frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{-\frac{x}{4}+\frac{C}{x^3}}=y-\frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{-\frac{x}{4}+\frac{C}{x^3}}+\frac{2}{x}=y$$

EJERCICIOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales Separables

Ejercicio 1:

$$xy\partial x + (1 + x^2)\partial y = 0$$

Paso 1: Separar variables

$$\frac{x}{1+x^2}\partial x = -\frac{\partial y}{y}$$

Paso 2: Integrar el lado izquierdo de la igualdad por cambio de variables y el lado derecho por tablas.

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| = -\ln\left|y\right| + c$$

Paso 3: Transponer términos y aplicar propiedades de los logaritmos

$$\ln\left|1+x^2\right|^{\frac{1}{2}} + \ln y = \ln c$$

$$\left(1 + x^2\right)y^2 = c$$

Ejercicio 2:

$$xy\partial y = \left(y+1\right)\left(1-x\right)\partial x$$

Paso 1: Separar variables

$$\frac{y}{y+1}\partial y = \frac{1-x}{x}\partial x$$

Paso 2: integrar ambos lados después de dividir los polinomios

$$\int\left(1-\frac{1}{y+1}\right)\partial y=\int\left(\frac{1}{x}-1\right)\partial x$$

$$y-\ln|y+1|=\ln|x|-x+c$$

Paso 3: transponer términos y aplicar propiedades de los logaritmos

$$(y+x)=\ln|y+1|xc$$

$$e^{y+x}=(y+1)xc$$

Ejercicio 3:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{ye^y}$$

Paso 1: transponer términos

$$ye^y\partial y=x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

Paso 2: integrar el lado izquierdo de la ecuación usando métodos de integración por partes y el lado derecho por cambios de variable

$$e^y(y-1)=\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}+c$$

Paso 3: transponer términos

$$3(y-1)e^y=\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

Ejercicio 4:

$$y' = \frac{\ln x}{xy + xy^3}$$

Paso 1: escribir y' como dy/dx sacar “x” como factor común en el denominador de la fracción del lado derecho. Separar variables

$$\left(y + y^3\right)\partial y = \frac{\ln x}{x}\partial x$$

Paso 2: integrar el lado izquierdo de la ecuación por tablas y el lado por cambio de variable

$$\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

Paso 3: sacar mínimo común denominador de ambos lados de la ecuación y aplicar propiedades de los logaritmos

$$2y^2 + y^4 = \ln^4 x + c$$

Ejercicio 5:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{ty + 3t}{t^2 + 1} \qquad y(2) = 2$$

Paso 1: sacar factor común "t" en el numerador de la fracción del lado derecho y transponer términos para separar variables

$$\frac{\partial y}{y + 3} = \frac{t}{t^2 + 1}\partial t$$

Paso 2: integrar el lado izquierdo de la ecuación por tablas y el lado derecho por cambio de variable

$$\ln|y+3| = \ln|t^2+1|^{\frac{1}{2}} + \ln c$$

$$\frac{y+3}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}} = c$$

Paso 3: aplicar la condición inicial $y(2)=2$

$$\frac{y+3}{(t^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

Ejercicio 6:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + y \cdot Cos(t) = 0$$

Paso 1: transponer términos y separar variables

$$\frac{\partial y}{y} = -Cos(t)\partial t$$

Paso 2: integrar por tablas ambos lados de la ecuación

$$\ln|y| = -Sen(t) + c$$

Paso 3: buscar la inversa de la función logarítmica

$$ce^{-Sen(t)} = y$$

Ejercicio 7:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^{2x+y+1}$$

Paso 1: rescribir la ecuación

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^{2x} e^{y+1}$$

Paso 2: separar variables

$$e^{-(y+1)} \partial y = e^{2x} \partial x$$

Paso 3: integrar por tablas

$$-2e^{-(y+1)} = e^{2x} + c$$

Ejercicio 8:

$$2\sqrt{x}\,\frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{1-y^2}$$

Paso 1: separar variables

$$\frac{\partial y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\partial x}{2\sqrt{x}}$$

Paso 2: Integrar lado izquierdo por sustitución trigonométrica (o directamente por tablas); lado derecho por tablas

$$arcseny = \sqrt{x} + c$$

Paso 3: despejar "y"

$$y = Sen\left(\sqrt{x} + c\right)$$

Ejercicio 9:

$$x^2 y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2 y^2$$

Paso 1: rescribir la ecuación

$$x^2 \frac{\partial y}{\partial x} = \left(1 - x^2\right) + y^2\left(1 - x^2\right)$$

$$x^2 \frac{\partial y}{\partial x} = \left(1 - x^2\right) + \left(1 + y^2\right)$$

Paso 2: Separar variables

$$\frac{\partial y}{1 + y^2} = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\partial x$$

Paso 3: integrar por tablas ambos lados de la ecuación

$$Arc\tan(y) = -\frac{1}{x} - x + c$$

$$y = \tan\left(-\frac{1}{x} - x + c\right)$$

Ejercicio 10:

$$x^2 \cdot \tan(y)\partial x - \sec(x)\partial y = 0$$

Paso 1: Separar variables

$$x^2 \cdot Cos(x)\partial x = Cotg(y)\partial y$$

Paso 2: Integrar lado izquierdo de la ecuación usando el método de integración por partes y el lado derecho por tablas.

$$x^2 Sen(x) + 2x \cdot Cos(x) + 2 \cdot Sen(x) = \ln|sen(y)| + c$$

Paso 3: Calcular la inversa

$$e^{x^2 Sen(x) + 2x \cdot Cos(x) + 2 \cdot Sen(x) + c} = Sen(y)$$

Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Ejercicio 1:

$$x\frac{\partial y}{\partial x} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Paso 1: Hacer transposición de términos

$$x\partial y = \left(\sqrt{x^2 + y^2} + y\right)\partial x$$

Paso 2: Aplicar el cambio de variable

$$y = vx$$

$$\partial y = v\partial x + x\partial v$$

Para obtener:

$$\frac{\partial v}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{\partial x}{x}$$

Paso 3: Integrar lado izquierdo por sustitución trigonométrica y lado derecho por tablas para obtener, después de revertir el cambio de variable

$$\sqrt{y^2 + x^2} + y = cx^2$$

Ejercicio 2:

$$(x+y)\frac{\partial y}{\partial x}=y$$

Paso 1: Hacer transposición de términos

$$(x+y)\partial y=y\partial x$$

Paso 2: Aplicar el cambio de variable.

$$y=vx$$

$$\partial y=u\partial x+x\partial u$$

Para obtener:

$$-\frac{\partial x}{x}=\frac{u+1}{u^{2}}\partial u$$

Paso 3: Integrar lado izquierdo y derecho por tablas, después dividir ambos términos del numerador de la fracción entre u^2, luego revertir el cambio de variable.

$$\ln y-\frac{x}{y}=c$$

Equivalente a:

$$e^{c+\frac{x}{y}}=y$$

Ejercicio 3:

$$x^3 \frac{\partial y}{\partial x} = x^2 y - y^3$$

Paso 1: Hacer transposición de términos

$$x^3 dy = \left(x^2 y - y^3\right)dx$$

Paso 2: Aplicar el cambio de variable.

$$x = uy$$

$$dx = udy + ydu$$

Para obtener:

$$\frac{\partial y}{y} = \left(\frac{u^2 - 1}{u}\right)\partial u$$

Paso 3: Integrar ambos lados de la ecuación por tablas, después de dividir ambos términos del numerador de la función del lado derecho entre "u" para obtener luego de revertir el cambio de variable.

$$\ln|y| + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + \ln|c| = \frac{x^2}{2y^2}$$

Equivalente a:

$$e^{\frac{x^2}{2y^2}} = xc$$

Ejercicio 4:

$$x^3 - 2y^3 + 3xy^2 \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Paso 1: Hacer transposición de términos para obtener:

$$3xy^2 dy = \left(2y^3 - x^3\right)dx$$

Paso 2: Aplicar el cambio de variable

$$y = vx$$

$$\partial y = u\partial x + x\partial u$$

Para obtener:

$$\frac{\partial x}{x} = -\left(\frac{3u^2}{u^3 + 1}\right)\partial u$$

Paso 3: Integrar lado izquierdo por tablas y lado derecho por cambio de variable $\left(u^3 + 1 = t\right)$ para obtener, después de revertir el cambio de variable

$$\ln|x| = -\ln\left|\frac{y^3 + x^3}{x^3}\right| + \ln|c|$$

Equivalente a:

$$\ln|x| + \ln\left|\frac{y^3 + x^3}{x^3}\right| = \ln|c|$$

$$x\left|\frac{y^3 + x^3}{x^3}\right| = c$$

Equivalente a:

$$y^3 + x^3 = cx^2$$

Ejercicio 5:

$$\left(y^2 - x^2\right)dx + xydy = 0$$

Paso 1: Transponer términos y aplicar el cambio de variable $y = vx$

$$\partial y = u\partial x + x\partial u$$

Para obtener:

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{u}{2u^2 - 1}\partial u$$

Paso 2: Integrar lado izquierdo por tablas y lado derecho por cambio de variable para obtener.

$$\ln|x| = -\frac{1}{4}\ln\left|2u^2 - 1\right| + \ln|c|$$

Paso 3: Aplicar en propiedades de los logaritmos y revertir el cambio de variable para obtener.

$$x^4\left(\frac{2y^2}{x^2} - 1\right) = c$$

Equivalente a:

$$2x^2y^2 - x^4 = c$$

Ejercicio 6:

$$e^{\frac{t}{y}}(y - t)\partial y + y\left(1 + e^{\frac{t}{y}}\right)\partial t = 0$$

Paso 1: Hacer transposición de términos y aplicar el cambio de variable $t = uy \rightarrow dt = udy + ydu$ para obtener.

$$\frac{\partial y}{y} = -\frac{e^u + 1}{e^u + u}$$

Paso 2: Integrar lado izquierdo por tablas y lado derecho mediante el cambio de variables $e^u + u = z$ para obtener después de revertir el cambio de variable.

$$\ln|y| = -\ln\left|e^u + u\right| + \ln|c|$$

Paso 3: Transponer términos, resolver la ecuación y revertir el cambio de variable para obtener.

$$ye^{\frac{t}{y}} + t = c$$

Ejercicio 7:

$(xy' - y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x$ Con la condición inicial $y_{(1)} = 0$

Paso 1: Hacer transposición de términos y el cambio de variable $y = ux \rightarrow dy = udx + xdu$ para obtener.

$$\operatorname{arctg} u\partial u = \frac{\partial x}{x}$$

Paso 2: Integrar lado izquierdo aplicando el método de integración por partes y lado derecho por tablas para obtener

$$u(arctgu) - \frac{1}{2}\ln\left|1 + u^2\right| = \ln|x| + \ln|c|$$

Equivalente a:

$$u(arctgu) = \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| + \ln|x| + \ln|c|$$

$$u(arctgu) = \ln\left|1+u^2\right|^{1/2} xc$$

$$e^{u \text{ arctg } u} = \left|1+u^2\right|^{\frac{1}{2}} xc$$

Paso 3: Revertir el cambio de variable y considerar la condición inicial para obtener.

$$e^{\frac{y}{x}\text{arctg}\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejercicio 8:

$$\left(x \text{ sen}\frac{\text{y}}{\text{x}} - \text{y} \cos\frac{\text{y}}{\text{x}} \right)\partial x + x\cos\frac{y}{x}\partial y = 0$$

Paso 1: Transponer términos y hacer el cambio de variable $y = ux \rightarrow dy = udx + xdu$ para obtener:

$$\frac{\partial x}{x} = -\frac{\cos u}{\text{sen } u}\partial u$$

Paso 2: Integrar por tablas ambos lados de la ecuación para obtener

$$\ln|x| = -\ln|senu| + \ln|c|$$

Paso 3: Transponer términos y revertir el cambio de variable:

$$x\,sen\frac{y}{x} = c$$

Ejercicio 9:

$$x\frac{\partial y}{\partial x} = y\ln\frac{y}{x}$$

Paso 1: Hacer transposición de términos y el cambio de variable $y = ux \to dy = udx + xdu$ para obtener;

$$\frac{\partial u}{u(\ln u - 1)} = \frac{\partial x}{x}$$

Paso 2: Integrar lado izquierdo haciendo el cambio de variable $\ln|u| = t$ y lado derecho por tablas para obtener;

$$\ln|t-1| = \ln|x| + \ln|c|$$

Paso 3: Revertir el cambio de variable en "t" y el cambio de variable en "u" para obtener;

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = xc + 1$$

Equivalente a:

$$e^{xc+1} = \frac{y}{x}$$

$$xe^{cx+1} = y$$

Ejercicio 10:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

Paso 1: Hacer transposición de términos y el cambio de variable

$y = ux \to dy = udx + xdu$

$$udx + xdu = \left(e^{u} + u\right)dx$$

Equivalente a:

$$e^{-u}\partial u = \frac{dx}{x}$$

Paso 2: Integrar miembro a miembro por tablas:

$$-e^{-u} = \ln|x| + \ln|c|$$

Paso 3: Aplicar propiedades de los logaritmos y revertir el cambio de variable:

$$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|xc|$$

Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales con Coeficientes Lineales

Ejercicio 1:

$$y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$$

Paso 1: Hacer transposición de términos para obtener la estructura

$$M(x, y)dx + N(x,`y) = 0$$

$$(-x + 2y - 5)dx + (-2x + y - 4)dy = 0$$

Paso 2: Resolver el sistema de ecuaciones

$$-h + 2k = 5$$

$$-2h + k = 4$$

Donde $h = -1 \quad k = 2$

Efectuar el cambio de variable

$$x = u + h \rightarrow x = u - 1 \rightarrow dx = du$$

$$y = v + k \rightarrow y = v + 2 \rightarrow dy = dv$$

Sustituir estos valores en la ecuación del paso "1" para obtener la ecuación homogénea.

$$(-u + 2v)du + (-2u + v)dv = 0$$

Paso 3: Resolver dicha ecuación homogénea mediante el cambio de variable.

$$u = zv$$

$$du = zdv + vdz$$

Se obtiene la ecuación separable

$$\frac{z-2}{1-z^2}\partial z = \frac{\partial v}{v}$$

Integrando ambos lados de la ecuación y revirtiendo los cambios de variable se obtiene:

$$(x+y-1)^3 = c(y-2)^2$$

Sugerencia: resuelva $\int \frac{z-2}{1-z^2}\partial z$ usando el método de integración por fracciones parciales (fracciones simples).

Ejercicio 2:

$$(2x-y+1)dx + (-x+2y+1)dy = 0$$

Paso 1: Resolver el sistema de ecuaciones

$$2h - k = -1$$

$$-h + 2k = -1$$

Donde $h = -1$; $k = -1$

Efectuar el cambio de variable;

$$x = u + h$$

$$y = v + k$$

es decir,

$$x = u - 1 \rightarrow dx = du$$

$$y = v - 1 \rightarrow dy = dv$$

Sustituir estos valores en la ecuación original para obtener la ecuación homogénea.

$$(2u - v)du + (-u + 2v)dv = 0$$

Paso 2: Resolver dicha ecuación homogénea mediante el cambio de variable.

$$v = uz$$

$$dv = udz + zdu$$

Se obtiene la ecuación separable

$$\frac{\partial u}{u} = -\frac{2z - 1}{2z^2 - 2z + 2}\partial z$$

Equivalente a:

$$\frac{\partial u}{u} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2z - 1}{z^2 - z + 1}\right)$$

Paso 3: Integrar ambos lados de la ecuación separable y revertir los cambios de variable para obtener;

$$x^2 + y^2 + x - y - xy = c$$

Sugerencia: resuelva la integral

$$\int \frac{2z-1}{z^2-z+1}\partial z$$

Efectuando el cambio de variable

$$z^2-z+1=t$$

$$(2z-1)dz=dt$$

Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales Exactas

Ejercicio 1:

$$x(6xy+5)dx+(2x^3+3y)dy=0$$

Probar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6x^2=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 1: Integrar "M" con respecto a "x"

$$2x^3y+\frac{5}{2}x^2+G_{(y)}$$

Paso 2: Derivar el resultado con respecto a "y" e igualarlo con "N"

$$2x^3+G'_{(y)}=2x^3+3y$$

Paso 3: Despejar G´(y) e integrar con respecto a "y"

$$G'_{(y)}=3y$$

$$G_{(y)}=\int 3y\,dy$$

$$G_{(y)}=\frac{3y^2}{2}+c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso "1"

Solución general:

$$2x^3y+\frac{5}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2=c$$

Ejercicio 2:

$$\left(ye^{xy}+2xy\right)dx+\left(xe^{xy}+x^2\right)dy=0$$

Probar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}+2x=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 1: Integrar "M" con respecto a "x"

$$\int\left(ye^{xy}+2xy\right)dx=e^{xy}+x^2y+G_{(y)}$$

Paso 2: Derivar con respecto a "y" e igualarlo a "N"

$$xe^{xy}+x^2+G'_{(y)}=xe^{xy}+x^2$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar con respecto a "y"

$$G'_{(y)}=0$$

$$G_{(y)}=\int 0dy=c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso "1"

Solución general

$$e^{xy}+x^2y=c$$

Ejercicio 3:

$$\left(3y+e^{x}\right)dx+\left(3x+\cos y\right)dy=0$$

Probar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 1: Integrar "M" con respecto a "x"

$$\int\left(3y+e^{x}\right)dx=3xy+e^{x}+G_{(y)}$$

Paso 2: Derivar este resultado con respecto a "y" e igualarlo a "N"

$$3x+G'_{(y)}=3x+\cos y$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar con respecto a "y"

$$G'_{(y)}=\cos y$$

$$G_{(y)}=\int \cos y dy=seny+c$$

Sustituir el resultado en el paso "1"

Solución General

$$3xy+e^{x}+seny=c$$

Ejercicio 4:

$$\left(4x^{3}e^{x+y}+x^{4}e^{x+y}+2x\right)dx+\left(x^{4}e^{x+y}+2x\right)dy=0$$

Sujete a la condición inicial $y_{(0)}=1$

Probar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y} 4x^3 e^{x+y} + x^4 e^{x+y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 1: Integrar "N" con respecto a "y"

$$\int \left(x^4 e^x e^y + 2y \right) dy = x^4 e^x e^y + y^2 + G_{(x)}$$

Paso 2: Derivar el resultado con respecto a "x" e igualarlo con "M"

$$4x^3 e^x e^y + x^4 e^x e^y + G'_{(x)} = 4x^3 e^x e^y + x^4 e^x e^y + 2x$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar con respecto a "x", luego sustituir la condición inicial $y_{(0)} = 1$.

$$G_{(y)} = x^2 + c$$

Solución general

$$x^4 e^x e^y + y^2 + x^2 = c$$

Si $y_{(0)} = 1$ entonces la solución particular es:

$$x^4 e^x e^y + y^2 + x^2 = 1$$

Ejercicio 5:

$$\left(2xseny + y^3 e^x \right) dx + \left(x^2 \cos y + 3y^2 e^x \right) dy = 0$$

Probar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cos y + 3y^2 e^x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 1: Integrar "M" con respecto a "x"

$$2seny\int xdx + y^3\int e^x dx = x^2 seny + y^3 e^x + G_{(y)}$$

Paso 2: Derivar el resultado con respecto a "y" e igualarlo con "N"

$$x^2 \cos y + 3y^2 e^x + G'_{(y)} = x^2 \cos y + 3y^2 e^x$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar con respecto a "y"

$$G'_{(y)} = 0$$

$$G_{(y)} = c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso "1"

Solución general

$$x^2 seny + y^3 e^x = c$$

Ejercicio 6:

$$\left(x^2 \cos y + 4y\right)\frac{\partial y}{\partial x} + 2x\text{sen}y = -5$$

Rescribir la ecuación y probar el criterio de exactitud

$$\left(2xseny + 5\right)dx + \left(x^2 \cos y + 4y\right)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x\cos y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 1: Integrar "M" con respecto a "x"

$$2seny\int xdx+5\int dx=x^2seny+5x+G_{(y)}$$

Paso 2: Derivar el resultado con respecto a "y" e igualar a "N"

$$x^2\cos y+G'_{(y)}=x^2\cos y+4y$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar con respecto a "y"

$$G'_{(y)}=4y$$

$$G_{(y)}=2y^2+c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso "1"

Solución general

$$x^2seny+5x+2y^2=c$$

Ejercicio 7:

$$\left(ye^{2x}+\frac{y}{1+4y^2}\right)\partial y+\left(y^2e^{2x}-1\right)\partial x=0$$

$$y_{(0)}=\frac{1}{2}$$

Probar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2ye^{2x}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 1: Integrar M con respecto a "x"

$$y^2\int e^{2x}\partial x-\int\partial x=\frac{y^2e^{2x}}{2}-x+G_{(y)}$$

Paso 2: Derivar el resultado con respecto a "y" e igualarlo a "N"

$$ye^{2x} + G'_{(y)} = ye^{2x} + \frac{y}{1+4y^2}$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar con respecto a "y"

$$G'_{(y)} = \frac{y}{1+4y}$$

$$G_{(y)} = \frac{1}{8}\ln\left|1+4y^2\right| + c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso "1"

Solución general: $4y^2e^{2x} - 8x + \ln\left|1+4y^2\right| = c$

Solución particular: $4y^2e^{2x} - 8x + \ln\left|1+4y^2\right| = 1 + \ln|2|$

Ejercicio 8:

$$2ysenxydx + \left(2xsenxy + y^3\right)dy = 0$$

Probar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2\operatorname{sen}xy + 2xy\cos xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 1: Integrar "M" con respecto a "x"

$$2y\int senxydx = -2\cos xy + G_{(y)}$$

Paso 2: Derivar el resultado con respecto a "y" e igualarlo a "N"

$$2xsenxy + G'_{(y)} = 2xsenxy + y^3$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrarlo con respecto a "y"

$$G'_{(y)} = y^3$$

$$G_{(y)} = \frac{y^4}{4} + c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso "1"

Solución general

$$-2\cos xy + \frac{y^4}{4} = c$$

Ejercicio 9.

$$\cos ydx - \left(xseny - y^2\right)dy = 0$$

Probar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\operatorname{sen} y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 1: Integrar "M" con respecto a "y" e igualarlo a "N"

$$\int \cos ydx = x\cos y + G_{(y)}$$

Paso 2: Derivar el resultado con respecto a "y" e igualarlo a "N"

$$-xseny + G'_{(y)} = -xseny + y^2$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar con respecto a "y"

$$G'_{(y)} = y^2$$

$$G_{(y)} = \frac{y^3}{3} + c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso 1

Solución General

$$x\cos y + \frac{y^3}{3} = c$$

Ejercicio 10:

$$(2x + 3y + 4)dx + (3x + 4y + 5)dy = 0$$

Probar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial Y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 1: Integrar "M" con respecto a "x"

$$\int (2x + 3y + 4)dx = x^2 + 3xy + 4x + G_{(y)}$$

Paso 2: Derivar el resultado con respecto a "y" e igualarlo a "N"

$$3x + G'_{(y)} = 3x + 4y + 5$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar con respecto a "y"

$$G'_{(y)} = 4y + 5$$

$$G_{(y)} = 2y^2 + 5y + c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso "1"

Solución General

$$x^2 + 3xy + 4x + 2y^2 + 5y = c$$

Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales Transformables a Exactas

Ejercicio 1:

$$xdx + ydy = \left(x^2 + y^2\right)dx$$

Rescribir la ecuación y probar el criterio de exactitud

$$\left(x^2 + y^2 - x\right)dx - ydy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial n} = 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

Paso 1: Buscar un factor integrante

$$\frac{M' - N'}{N} = \frac{2y - 0}{-y} = -2$$

$$FI = e^{-2\int \partial x} = e^{-2x}$$

Multiplicar la ecuación por el factor integrante y probar de nuevo el criterio de exactitud.

$$\left(x^2 + y^2 - x\right)e^{-2x}dx - ye^{-2x}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2ye^{-2x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 2: Integrar "N" con respecto a "y"

$$-e^{2x}\int y\partial y = -\frac{e^{-2x}y^2}{2} + G_{(x)}$$

Derivar el resultado con respecto a "x" e igualarla a "M"

$$y^2e^{-2x} + G'_{(x)} = x^2e^{-2x} + y^2e^{-2x} - xe^{-2x}$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar el resultado con respecto a "x" (usar método de integración por partes).

$$G'_{(y)} = x^2e^{-2x} - xe^{-2x}$$

Cambios de variables sugeridos para cada una de las integrales:

$$x^2 = u \qquad\qquad x = u$$

$$2xdx = du \qquad\qquad dx = du$$

$$\frac{-e^{-2x}}{2} = v \qquad\qquad \frac{-e^{-2x}}{2} = v$$

$$G_{(x)} = -\frac{x^2e^{-2x}}{2} + c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso "2" y simplificar

Solución general:

$$\frac{-e^{-2x}y^2}{2} - \frac{x^2e^{-2x}}{2} = c$$

Equivalente a:

$$x^2 + y^2 = ce^{2x}$$

Ejercicio 2.

$$ydx - xdy + \ln|x|dx = 0$$

Rescribir la ecuación y probar el criterio de exactitud.

$$(y+\ln|x|)dx - xdy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N}{dx} = -1$$

Paso 1: Buscar un factor integrante

$$\frac{M'-N'}{N} = \frac{1+1}{-x} = -\frac{2}{x}$$

$$FI = e^{-2\int \partial x} = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicar la ecuación por el factor integrante y probar de nuevo el criterio de exactitud.

$$\left(\frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right)\partial x - \frac{1}{x}\partial y = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 2: Integrar "N" con respecto a "y"

$$-\frac{1}{x}\int \partial y = -\frac{1}{x}y + G_{(x)}$$

Derivar el resultado con respecto a "x" e igualar a "M"

$$\frac{y}{x^2} + G'_{(x)} = \frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar el resultado con respecto a "x" (usar método de integración por partes).

$$G'_{(x)} = \frac{\ln|x|}{x^2}$$

Cambio de variable sugerido

$$\ln|x| = u$$

$$\frac{1}{x}\partial x = \partial u$$

$$\int x^{-2} dx = v \approx -\frac{1}{x} = v$$

Por lo tanto;

$$G_{(x)} = -\frac{1}{x}\ln|x| - \frac{1}{x} + c$$

Sustituir $G_{(y)}$ el resultado en el paso "2"

Solución general:

$$-\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} = c$$

Equivalente a:

$$y + \ln|x| + 1 = cx$$

Ejercicio 3:

$$\left(3xy + y^2\right)dx + \left(x^2 + xy\right)dy = 0$$

Sujeta a la condición inicial $y_{(2)} = 1$

Probar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \neq \frac{\partial N}{\partial X} = 2x + y$$

Paso 1: Buscar un factor integrante

$$\frac{M' - N'}{N} = \frac{3x + 2y - 2x - y}{x(x + y)} = \frac{1}{x}$$

$$FI = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

Multiplicar la ecuación por el factor integrante y probar de nuevo el criterio de exactitud

$$\left(3x^2 y + xy^2\right)dx + \left(x^3 + x^2 y\right)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 2: Integrar "M" con respecto a "x"

$$\int \left(3x^2 y + xy^2\right)\partial x = x^3 y + \frac{x^2 y^2}{2} + G_{(y)}$$

Derivar el resultado con respecto a "y" e igualar a "N"

$$x^3 + x^2 y + G'_{(y)} = x^3 + x^2 y$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar el resultado con respecto a "y"

$$G'_{(y)} = 0$$

$$G_{(y)} = c$$

Solución general:

$$x^3 y + \frac{x^2 y^2}{2} = c$$

Solución particular

$$x^3 y + \frac{x^2 y^2}{2} = 10$$

Equivalente a:

$$2x^3 y + x^2 y^2 = 20$$

Ejercicio 4:

$$\frac{1}{2} y^4 \partial x + xy^3 \partial y = 0$$

Probar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y^3 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = y^3$$

Paso 1: Buscar el factor integrante

$$\frac{M' - N'}{N} = \frac{2y^3 - y^3}{xy^3} = \frac{1}{x}$$

$$FI = e^{\int \frac{1}{x} \partial x} = x$$

Multiplicar todos los términos de la ecuación por el factor integrante y probar de nuevo el criterio de exactitud:

$$\frac{1}{2} xy^4 \partial x + x^2 y^3 \partial y = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy^3 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 2: Integrar "M" con respecto a "x"

$$\frac{1}{2} y^4 \int x \partial x = \frac{1}{4} x^2 y^4 + G_{(y)}$$

Derivar el resultado con respecto a "y" e igualarlo a "N"

$$x^2 y^3 + G'_{(y)} = x^2 y^3$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar el resultado con respecto a "y"

$$G'_{(y)} = 0$$

$$G_{(y)} = c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso 2

Solución general

$$\frac{1}{4} x^2 y^4 = c$$

Equivalente a:

$$x^2 y^4 = c$$

Ejercicio 5:

$$(x + y)dx + tgxdy = 0$$

Probar criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \sec^2 x$$

Paso 1: Buscar el factor integrante

$$\frac{M'-N'}{N} = \frac{1-\sec^2 x}{\operatorname{tg} x} = -\operatorname{tg} x$$

$$FI = e^{-\int tgxdx} = e^{-(\ln|\cos x|)} = \cos x$$

Multiplicar todos los términos de la ecuación por el factor integrante y probar el criterio de exactitud

$$(x\cos x + y\cos x)dx + senxdy = 0$$

$$\frac{dM}{dy} = \cos x = \frac{dN}{dx}$$

Paso 2: Integrar "N" con respecto a "y"

$$senx\int dy = ysenx + G_{(x)}$$

Derivar el resultado con respecto a "x" e igualar a "M"

$$y\cos x + G'_{(x)} = x\cos x + y\cos x$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar el resultado con respecto a "x" (usar método de integración por partes)

$$G'_{(y)} = x\cos x$$

$$G_{(y)} = xsenx + \cos x + c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso 2

Solución general:

$$ysenx + xsenx + \cos x = c$$

Ejercicio 6.

$$\left(2xy + 3x^2 y + 3y^2\right)dx + \left(x^2 + 2y\right)dy = 0$$

Probar criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 3x^2 + 6y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

Paso 1: Buscar el factor integrante

$$\frac{M'-N'}{N} = \frac{3\left(x^2 + 2y\right)}{x^2 + 2y} = 3$$

$$FI = e^{3\int dx} = e^{3x}$$

Multiplicar todos los términos de la ecuación por el factor integrante y probar de nuevo el criterio de exactitud.

$$\left(2xy + 3x^2 y + 3y^2\right)e^{3x}dx + \left(x^2 + 2y\right)e^{3x}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{3x}(2x + 3y^2 + G_{(y)}) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 2: Integrar "M" con respecto a "x" (usar el método de integración por partes);

$$x^2 ye^{3x} + y^2 e^{3x} + G_{(y)}$$

Derivar el resultado con respecto a "y" e igualar a "N"

$$x^2e^{3x}+2ye^{3x}+G'_{(y)}=x^2e^{3x}+2ye^{3x}$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar el resultado con respecto a "y"

$$G'_{(y)}=0$$

$$G_{(y)}=c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso 2 y reducir términos semejantes

Solución general:

$$x^2ye^{3x}+y^2e^{3x}=c$$

Equivalente a:

$$e^{3x}\left(x^2y+y^2\right)=c$$

Ejercicio 7:

$$\frac{y}{x}\partial x+\left(y^3-\ln x\right)\partial y=0$$

Probar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x}\neq\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{x}$$

Paso 1: Buscar el factor integrante

$$\frac{N'-M'}{M}=\frac{-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{y}{x}}=-\frac{2}{y}$$

$$FI = e^{-2\int \frac{\partial y}{y}} = \frac{1}{y^2}$$

Multiplicar todos los términos de la ecuación por el factor integrante y probar de nuevo el criterio de exactitud.

$$\frac{1}{xy}\partial x + \left(y - \frac{\ln x}{y^2} \right)\partial y = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{xy^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 2: Integrar "M" con respecto a "x"

$$\frac{1}{y}\int \frac{1}{x}\partial x = \frac{1}{y}\ln x + G_{(y)}$$

Derivar el resultado con respecto a "y" e igualar a "N"

$$-\frac{\ln x}{y^2} + G'_{(y)} = y - \frac{\ln x}{y^2}$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar el resultado con respecto a "y"

$$G'_{(y)} = y$$

$$G_{(y)} = \frac{y^2}{2} + c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso 2

Solución general:

$$\frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} = c$$

Ejercicio 8.

$$ysenx + y'\cos x = 1$$

Rescribir la ecuación

$$(ysenx - 1)dx + \cos xdy = 0$$

Probar criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \text{sen } x \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -\text{sen } x$$

Paso 1: Buscar el factor integrante

$$\frac{M' - N'}{N} = 2\text{tg } x$$

$$FI = e^{2\int tgx\partial x} = \sec^2 x$$

Multiplicar todos los términos de la ecuación por el factor integrante y probar de nuevo el criterio de exactitud.

$$(y\sec xtgx - \sec^2 x)dx + \sec xdy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sec x\,\text{tg}\,x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 2: Integrar "M" con respecto a "x"

$$y\int \sec xtgxdx - \int \sec^2 xdx = y\sec x - tgx + G_{(y)}$$

Derivar el resultado con respecto a "y" e igualarlo a "N"

$$\sec x + G'_{(y)} = \sec x$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar el resultado con respecto a "y"

$$G'_{(y)} = 0$$

$$G_{(y)} = c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso 2

Solución general

$$y \sec x - tgx = c$$

Equivalente a:

$$y = senx + c \cos x$$

Ejercicio 9.

$$\left(3xy + 2y^2\right)dx + \left(x^2 + 2xy\right)dy = 0$$

Probar criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 4y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y$$

Paso 1: Buscar factor integrante

$$\frac{M' - N'}{N} = \frac{1}{x}$$

$$FI = e^{\int \frac{1}{x} \partial x} = x$$

Multiplicar todos los términos de la ecuación por el factor integrante y probar de nuevo el criterio de exactitud

$$\left(3x^2 y + 2xy^2\right)dx + \left(x^3 + 2x^2 y\right)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 4xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 2: Integrar "M" con respecto a "x"

$$3y\int x^2 dx + 2y^2 \int x dx = x^3 y + x^2 y^2 + G_{(y)}$$

Derivar el resultado con respecto a "y" e igualarlo a "N"

$$x^3 + 2x^2 y + G'_{(y)} = x^3 + 2x^2 y$$

Paso 3: Despejar $G'_{(y)}$ e integrar el resultado con respecto a "x"

$$G'_{(y)} = 0$$

$$G_{(y)} = c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso 2

Solución general.

$$x^3 y + x^2 y^2 = c$$

Ejercicio 10:

$$2xdx + x^2 ctgydy = 0\,2$$

Probar el criterio de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x\text{cotg } y$$

Paso 1: Buscar factor integrante

$$\frac{M'-N'}{N} = -\frac{2}{x}$$

$$FI = e^{-2\int\frac{\partial x}{x}} = \frac{1}{x^2}$$

Multiplicar todos los términos de la ecuación por el factor integrante y probar de nuevo el criterio de exactitud.

$$\frac{2}{x}\partial x + \operatorname{cotg} y\partial y = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Paso 2: Integrar "M" con respecto a "x"

$$2\int\frac{\partial x}{x} = 2\ln x + G_{(y)}$$

Derivar el resultado con respecto a “y” e igualarlo a “N”

$$G'_{(y)} = ctgy$$

Paso 3: Integrar el resultado con respecto a “y”

$$G_{(y)} = \ln|seny| + c$$

Sustituir $G_{(y)}$ en el paso 2

Solución general

$$2\ln|x| + \ln|seny| = \ln|c| \text{ c}$$

Equivalente a:

$$x^2 seny = c$$

Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales lineales

Ejercicio 1.

$$y' + y\cos x = senx\cos x$$

Paso 1: Identificar $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = \cos x \qquad Q_{(x)} = senx\cos x$$

$$FI = e^{\int \cos x dx} = e^{senx}$$

Paso 2: Aplicar la formula $ye^{\int P_{(x)}\partial x} = \int e^{\int P_{(x)}\partial x} Q_{(X)}\partial x + c$

$$ye^{\int senx} = \int e^{senx} senx\cos x dx + c$$

Resolver la integral usando primero el método de integración por cambio de variable y luego el método de integración por partes

$$senx = t \rightarrow \cos x dx = dt$$

Resultado

CV 1. $\int e^t dt + c$

CV 2. Método de integración por partes

$$u = t \rightarrow du = dt$$

$$e^t = u$$

Por lo tanto $\int e^t dt = te^t - e^t + c$

Paso 3: Revertir los cambios de variable y despejar la variable "y"

$$ye^{senx} = senxe^{senx} - e^{senx} + c$$

$$y = senx - 1 + ce^{-senx}$$

Ejercicio 2:

$$y' + e^{x}y = e^{2x}$$

Paso 1.

Identificar $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ y calcular el F.I.

$$P_{(x)} = e^{x} \qquad Q_{(x)} = e^{2x}$$

$$FI = e^{\int e^{x}\partial x} = e^{e^{x}}$$

Paso 2: Aplicar la formula $ye^{\int P_{(x)}\partial x} = \int e^{\int P_{(x)}\partial x} Q_{(X)}\partial x + c$

$$ye^{e^{x}} = \int e^{e^{x}} e^{2x}\partial x + c$$

Sugerencia: Usar método de integración por cambio de variable y método de integración por partes.

$$ye^{e^{x}} = e^{x}e^{e^{x}} - e^{e^{x}} + c$$

Paso 3: Despejar la variable "y"

$$y = e^{x} - 1 + ce^{-e^{x}}$$

Ejercicio 3:

$$y' - 5y = x$$

Paso 1: Identificar $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = -5 \qquad Q_{(x)} = x$$

$$FI = e^{\int p(x)dx} = e^{-5x}$$

Paso 2: Aplicar la formula $ye^{\int P_{(x)}\partial x} = \int e^{\int P_{(x)}\partial x} Q_{(X)}\partial x + c$

$$ye^{-5x} = \int e^{-5x} x dx + c$$

Resolver la integral usando el método de integración por partes

$$ye^{-5x} = -\frac{1}{5}xe^{-5x} - \frac{1}{25}e^{-5x} + c$$

Paso 3: Despejar la variable “y”

$$y = -\frac{1}{5}x - \frac{1}{25} + ce^{5x}$$

Ejercicio 4.

$$xy' y - e^{x} = 0$$

Paso 1: Multiplicar toda la ecuación por el factor $\frac{1}{x}$ para darle la estructura de la ecuación diferencial lineal.

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}e^{x}$$

Identificar $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = \frac{1}{x} \qquad\qquad Q_{(x)} = \frac{1}{x}e^{x}$$

$$FI = e^{\int P_{(x)}\partial x} = e^{\int \frac{1}{x}\partial x} = x$$

Paso 2: Aplicar la formula $ye^{\int P_{(x)}\partial x} = \int e^{\int P_{(x)}\partial x} Q_{(X)}\partial x + c$

$$yx = \int xe^{x}\frac{1}{x}\partial x + c$$

Paso 3: Resolver la integral y despejar la variable "y"

$$yx = e^{x} + c$$

$$y = \frac{e^{x}}{x} + \frac{c}{x}$$

Ejercicio 5:

$$y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}$$

Paso 1: Identificar $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ y calcular el factor integrante.

$$P_{(x)} = -tgx \qquad\qquad Q_{(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

$$FI = e^{-\int tgxdx} = e^{\ln|\cos x|} = \cos x$$

Paso 2: Aplicar la formula; $ye^{\int P_{(x)}\partial x} = \int e^{\int P_{(x)}\partial x} Q_{(X)}\partial x + c$

$$y\cos x = \int \cos x \frac{1}{\cos x} dx + c$$

Paso 3: Resolver la integral y despejar la variable "y"

$$y\cos x = x + c$$

$$y = \sec x(x + c)$$

Ejercicio 6:

$$y' - 3y = 2$$

Paso 1: Identificar $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = -3 \qquad Q_{(x)} = 2$$

$$FI = e^{-3\int p(x)dx} = e^{-3\int dx} = e^{-3x}$$

Paso 2: Aplicar la formula $ye^{\int P_{(x)}\partial x} = \int e^{\int P_{(x)}\partial x} Q_{(X)}\partial x + c$

$$ye^{-3x} = 2\int e^{-3x}\partial x + c$$

Paso 3: Resolver la integral y despejar la variable "y"

$$ye^{-3x} = -\frac{2}{3}e^{-3x} + c$$

$$y = -\frac{2}{3} + ce^{3x}$$

Ejercicio 7.

$$xy' - 3y = x^5$$

Paso 1: Multiplicar por el factor $\frac{1}{x}$ toda la ecuación para obtener la estructura de la ecuación diferencial lineal.

$$y' - \frac{3}{x}y = x^4$$

Identificar $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ y calcular el factor integrante.

$$P_{(x)} = -\frac{3}{x} \qquad Q_{(x)} = x^4$$

$$FI = e^{-3\int\frac{\partial x}{x}} = e^{-3\ln x} = \frac{1}{x^3}$$

Paso 2: Aplicar en la formula $ye^{\int P_{(x)}\partial x} = \int e^{\int P_{(x)}\partial x} Q_{(X)}\partial x + c$

$$y\frac{1}{x^3} = \int \frac{1}{x^3}x^4\partial x + c$$

Paso 3: Resolver la integral y despejar la variable "y"

$$y\frac{1}{x^3} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = \frac{x^5}{2} + cx^3$$

Ejercicio 8:

$$y' + 2y = e^{2x}$$

Paso 1: Identificar $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = 2 \qquad Q_{(x)} = e^{2x}$$

$$FI = e^{2\int dx} = e^{2x}$$

Paso 2: Aplicar en la formula $ye^{\int P_{(x)}\partial x} = \int e^{\int P_{(x)}\partial x} Q_{(X)}\partial x + c$

$$ye^{2x} = \int e^{2x}e^{2x}dx + c$$

$$ye^{2x} = \int e^{4x}dx + c$$

Paso 3: Resolver la integral y despejar la variable "y"

$$ye^{2x} = \frac{e^{4x}}{4} + c$$

$$y = \frac{1}{4}e^{2x} + ce^{-2x}$$

Ejercicio 9:

$$y' + yctgx = 4x^2 \csc x$$

Paso 1: Identificar $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = ctgx \qquad Q_{(x)} = 4x^2 \csc x$$

$$FI = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \cot gxdx} = e^{\ln|senx|} = senx$$

Paso 2: Aplicar la formula $ye^{\int P_{(x)}\partial x} = \int e^{\int P_{(x)}\partial x} Q_{(X)}\partial x + c$

$$ysenx = 4\int senx\left(x^2 \cos ecx\right)dx + c$$

Paso 3: Resolver la integral y despejar la variable “y”

$$y\,\mathrm{sen}x = \frac{4x^3}{3} + c$$

$$y = \frac{4}{3}x^3 \cos\mathrm{c}\,x + c\cos\mathrm{c}\,x$$

Ejercicio 10:

$$xy' + (2+3x)y = xe^{-3x}$$

Paso 1: Multiplicar la ecuación por el factor $\frac{1}{x}$ para darle la estructura de la ecuación diferencial lineal.

$$y' + \left(\frac{2}{x} + 3\right)y = e^{-3x}$$

Identificar $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = \frac{2}{x} + 3 \qquad\qquad Q_{(x)} = e^{-3x}$$

$$FI = e^{\int\left(\frac{2}{x}+3\right)\partial x} = e^{\ln x^2 + 3x} = e^{\ln x^2}e^{3x} = x^2e^{3x}$$

Paso 2: Aplicar la formula $ye^{\int P_{(x)}\partial x} = \int e^{\int P_{(x)}\partial x}Q_{(X)}\partial x + c$

$$yx^2e^{3x} = \int x^2e^{3x}e^{-3x}dx + c$$

Paso 3: Resolver la integral y despejar la variable "y"

$$yx^2e^{3x} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$y = \left(\frac{x}{3} + \frac{c}{x^2}\right)e^{-3x}$$

Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli

Ejercicio 1.

$$xy'-y=x^3y^4$$

Paso 1: Multiplicar la ecuación por el factor $\frac{1}{x}$ para darle la estructura de la ecuación diferencial de Bernoulli;

$$y'-\frac{1}{x}y=x^2y^4$$

Multiplicar por $\frac{1}{y^4}$ para transformar la ecuación de Bernoulli en ecuación lineal

$$y^{-4}y'-\frac{1}{x}y^{-3}=x^2$$

Paso 2: Efectuar el cambio de variable

$$y^{-3}=w$$

$$-3y^{-4}y'=w'$$

Multiplicar la ecuación por -3 y sustituir el cambio de variable

$$-3y^{-4}y'+\frac{3}{x}y^{-3}=-3x^2$$

$$w'+\frac{3}{x}w=-3x^2$$

Resolver la ecuación diferencial lineal, identificando $P_{(x)}$, $Q_{(x)}$ y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = \frac{3}{x} \qquad Q_{(x)} = -3x^2$$

$$FI = e^{3\int \frac{\partial x}{x}} = x^3$$

Paso 3: Aplicar la formula $we^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c$

$$wx^3 = \int x^3\left(-3x^2\right)dx + c$$

Resolver la integral y despejar la variable "w"

$$wx^3 = -\frac{3x^6}{6} + c$$

$$w = -\frac{x^3}{2} + \frac{c}{x^3}$$

Revertir el cambio de variable

$$y^{-3} = \frac{-x^3}{2} + \frac{c}{x^3}$$

Ejercicio 2:

$$xy' + y = -xy^2$$

Paso 1: Multiplicar la ecuación por el factor $\frac{1}{xy^2}$

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = -1$$

Paso 2: Hacer el cambio de variable

$$y^{-1} = w$$

$$-y^{-2}y' = w'$$

Multiplicar la ecuación por "-1" y sustituir

$$-y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = 1$$

$$w' - \frac{1}{x}w = 1$$

Paso 3: Resolver la ecuación diferencial lineal

Identificar P(x) y Q(x) y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = -\frac{1}{x} \qquad Q_{(x)} = 1$$

$$FI = e^{-\int \frac{1}{x}\partial x} = \frac{1}{x}$$

Aplicar la formula $we^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c$

$$w\frac{1}{x} = \int \frac{1}{x}dx + c$$

$$w\frac{1}{x} = \ln|x| + c$$

Despejar w y revertir el cambio de variable

$$w = x\ln|x| + cx$$

$$y^{-1} = x\ln|x| + cx$$

Ejercicio 3.

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$$

Paso 1: Dividir la ecuación entre y^3

$$y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Realizar el cambio de variable

$$y^{-2} = w$$

$$-2y^{-1}y' = w'$$

Multiplicar la ecuación por "-2" y escribir la ecuación lineal

$$w' - \frac{4}{x}w = -\frac{2}{x^2}$$

Paso 2: Resolver la ecuación lineal:

Calcular el factor integrante

$$FI = e^{-4\int\frac{\partial x}{x}} = x^{-4}$$

Aplicar en la formula $we^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx + c$

$$wx^{-4} = \int x^{-4}\left(-\frac{2}{x^2}\right)\partial x + c$$

Paso 3: Integrar el lado derecho y revertir el cambio de variable

$$w=\frac{-2x^{-1}}{-5}+cx^{4}$$

$$y^{-2}=\frac{2}{5x}+cx^{4}$$

Ejercicio 4:

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{2y^{\frac{1}{2}}}{\cos^{2}x}$$

Paso 1: Dividir la ecuación entre $y^{\frac{1}{2}}$

$$y^{-\frac{1}{2}}y'+\frac{2}{x}y^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\cos^{2}x}$$

Realizar el cambio de variable

$$y^{\frac{1}{2}}=w$$

$$\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'=w'$$

Multiplicar la ecuación por "$\frac{1}{2}$" y escribir la ecuación lineal

$$w'+\frac{1}{x}w=\sec^{2}x$$

Paso 2: Resolver la ecuación lineal.

Calcular el factor integrante

$$FI=e^{\int\frac{1}{x}\partial x}=x$$

Aplicar la formula $we^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c$

$$wx = \int x\sec^2 xdx + c$$

Paso 3: Resolver la integral aplicando el método de integración por partes y revertir el cambio de variable.

$$wx = xtgx - \int tgxdx + c$$

$$w = tgx + \frac{\ln|\cos x| + c}{x}$$

$$y^{\frac{1}{2}} = \text{tg}x + \frac{\ln|\cos x| + c}{x}$$

Ejercicio 5.

$$y' - ytgx = -y^2 \cos x$$

Paso 1: Dividir la ecuación por y^2

$$y^{-2}y' - y^{-1}tgx = -\cos x$$

Realizar el cambio de variable

$$y^{-1} = w$$

$$-y^2 y' = w'$$

Multiplicar la ecuación por "-1" y escribir la ecuación lineal

$$w' + wtgx = \cos x$$

Paso 2. Resolver la ecuación lineal:

Calcular el factor integrante

$$FI = e^{\int tgxdx} = e^{\ln|\sec x|} = \sec x$$

Aplicar la formula $we^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c$

$$w \sec x = \int \sec x \cos x dx + c$$

Paso 3: Integrar el lado derecho y revertir el cambio de variable

$$w = \sec x = x + c$$

$$y^{-1} = \frac{x + c}{\sec x}$$

$$y = \frac{\sec x}{x + c}$$

Ejercicio 6:

$$y' - \frac{2}{x} y = \frac{1}{xy}$$

Paso 1: Multiplicar la ecuación por “y”

$$yy' - \frac{2}{x} y^2 = \frac{1}{x}$$

Realizar el cambio de variable

$$y^2 = w$$

$$2yy' = w'$$

Multiplicar la ecuación por "2" y escribir la ecuación lineal

$$w'-\frac{4}{x}w=\frac{2}{x}$$

Paso 2: Resolver la ecuación lineal:

Calcular el factor integrante

$$FI=e^{-4\int\frac{\partial}{x}}=e^{\ln\left|x^{-4}\right|}=x^{-4}$$

Aplicar la formula $we^{\int p(x)dx}=\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c$

$$wx^{-4}=2\int\frac{x^{-4}}{x}\partial x+c$$

Paso 3: Integrar el lado derecho y revertir el cambio de variable

$$wx^{-4}=\frac{2x^{-4}}{-4}+c$$

$$w=-\frac{1}{2}+cx^{4}$$

$$y^{2}=-\frac{1}{2}+cx^{4}$$

Ejercicio 7:

$$y'-\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$$

Paso 1: Multiplicar la ecuación por “y”

$$yy'-\frac{1}{x}y^{2}=x$$

Realizar el cambio de variable

$$y^2 = w$$

$$2yy' = w'$$

Multiplicar la ecuación por "2" y escribir la ecuación lineal

$$w' - \frac{2}{x} w = 2x$$

Paso 2: Calcular el factor integrante

$$e^{-2\int \frac{\partial x}{x}} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$$

Aplicar la formula $we^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c$

$$wx^{-2} = 2\int x^{-2} x dx + c$$

Paso 3: Integrar el lado derecho y revertir el cambio de variable

$$w = x^2 \left(\ln\left|x^2\right| + c\right)$$

$$y^2 = x^2 \left(\ln\left|x^2\right| + c\right)$$

Ejercicio 8:

$$x^2 y' + \frac{1}{x} y = \frac{2}{x} y^{-3}$$

Paso 1: Multiplicar la ecuación por $\frac{y^3}{x^2}$

$$y^3 y' + \frac{1}{x^3} y^4 = \frac{2}{x^3}$$

Realizar el cambio de variable

$$y^4 = w$$

$$4y^3 y' = w'$$

Quedando

$$w' + \frac{4}{x^3}\, w = \frac{8}{x^3}$$

Paso 2: Calcular el factor integrante

$$FI = e^{4\int x^{-3}\partial x} = e^{-\frac{2}{x^2}}$$

Aplicar la formula $we^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c$

$$we^{-\frac{2}{x^2}} = 8\int e^{-\frac{2}{x^2}}\, \frac{1}{x^3}\,\partial x + c$$

Paso 3: Calcular la integral y revertir el cambio de variable

$$y^4 = 2 + ce^{\frac{2}{x^2}}$$

Ejercicio 9:

$$y' + 3xy = xy^2$$

Paso 1: Multiplicar la ecuación por $\frac{1}{y^2}$

$$y' y^{-2} + 3xy^{-1} = x$$

Realizar el cambio de variable

$$y^{-1} = w$$

$$-y^{-2}y' = w'$$

$$w' - 3xw = -x$$

Paso 2: Calcular el factor integrante

$$FI = e^{\int p(x)dx} = e^{-3\int xdx} = e^{\frac{-3x^2}{2}}$$

Aplicar la formula $we^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c$

$$we^{\frac{-3x^2}{2}} = \int e^{\frac{-3}{2}x^2 \partial x}(-x)\partial x + c$$

Paso 3: Calcular la integral y revertir el cambio de variable

$$we^{\frac{-3x^2}{2}} = \frac{1}{3}e^{\frac{-3}{2}x^2 \partial x} + c$$

$$y^{-1} = \frac{1}{3} + ce^{\frac{3}{2}x^2}$$

Ejercicio 10:

$$y' + \frac{1}{x}y = e^{x^4}y^{-2}$$

Paso 1: Multiplicar la ecuación por y^2

$$y'y^2 + \frac{1}{x}y^3 = e^{x^4}$$

Realizar el cambio de variables

$$y^3 = w$$

$$3y^2 y' = w'$$

$$w' + \frac{3}{x} w = 3e^{x^4}$$

Paso 2: Calcular el factor integrante

$$e^{\int p(x)dx} = e^{3\int \frac{\partial x}{x}} = x^3$$

Aplicar la formula $we^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c$

$$wx^3 = \int x^3 e^{x^4} dx + c$$

Paso 3: Resolver la integral (sugerencia cv x^4 = t) y revertir el cambio de variable

$$wx^3 = \frac{3}{4} e^{x^4} + c$$

$$w = \frac{3e^{x^4}}{4x^3} + \frac{c}{x^3}$$

$$y^3 = \frac{3e^{x^4}}{4x^3} + \frac{c}{x^3}$$

Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales de Ricatti

Ejercicio 1.

$$y' = y^2 + 2y - 15 \qquad S_{(x)} = 3$$

Paso 1: Realizar el cambio de variable

$$y = 3 + \frac{1}{z} \qquad \rightarrow \qquad z = \frac{1}{y-3}$$

$$y' = -\frac{1}{z^2} z'$$

Hacer las sustituciones correspondientes

$$-\frac{1}{z^2} z' = \left(3 + \frac{1}{z}\right)^2 + 2\left(3 + \frac{1}{z}\right) - 15$$

Paso 2: Resolver operaciones y reducir términos semejantes para obtener la ecuación lineal.

$$z' + 8z = -1$$

Paso 3: Identificar P(x), Q(x) y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = 8 \qquad Q_{(x)} = -1$$

$$FI = e^{8x}$$

Resolver la ecuación lineal en "z" y revertir el cambio de variable

$$z = -\frac{1}{8} + ce^{-8x}$$

$$\frac{1}{y-3}=-\frac{1}{8}+ce^{-8x} \qquad \rightarrow \qquad y=\frac{1}{-\frac{1}{8}+ce^{-8x}}+3$$

Ejercicio 2.

$$y'=y^2+6xy+9x^2-3 \qquad S_{(x)}=-3x$$

Paso 1: Realizar el cambio de variable

$$y=-3x+\frac{1}{z}$$

$$y'=-3-\frac{1}{z^2}z'$$

Hacer las sustituciones correspondientes

$$-3-\frac{1}{z^2}z'=\left(\frac{1}{z}-3x\right)^2+6x\left(-3x+\frac{1}{z}\right)+9x^2-3$$

Paso 2: Resolver las operaciones y reducir términos semejantes para obtener la ecuación separable,

$$z'=-1$$

Paso 3: Integrar miembro a miembro para obtener:

$$z=-x+c$$

Revertir el cambio de variable

$$\frac{1}{y+3x}=-x+c \qquad \rightarrow \qquad y=\frac{1}{-x+c}-3x$$

Ejercicio 3.

$$y' = y^2 - 5xy + 5 \qquad S_{(x)} = 5x$$

Paso 1: Realizar el cambio de variable

$$y = 5x + \frac{1}{z} \qquad \rightarrow \qquad z = \frac{1}{y - 5x}$$

$$y' = 5 - \frac{1}{z^2} z'$$

Hacer las sustituciones correspondientes:

$$5 - \frac{1}{z^2} z' = \left(5x + \frac{1}{z}\right)^2 - 5x\left(5x + \frac{1}{z}\right) + 5$$

Paso 2: Resolver las operaciones y reducir términos semejantes para obtener la ecuación lineal:

$$z' + 5xz = -1$$

Paso 3: Identificar P(x), Q(x) y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = 5x \qquad Q_{(x)} = -1$$

$$FI = e^{\int 5x \partial x} = e^{\frac{5}{2}x^2}$$

Resolver la ecuación lineal en "z" y revertir el cambio de variable

$$z = \frac{-\int e^{\frac{5}{2}x^2} \partial x + c}{e^{\frac{5}{2}x^2}}$$

$\int e^{\frac{5}{2}x^2}\partial x$ no es una integral elemental.

$$\frac{1}{y-5x}=\frac{-\int e^{\frac{5}{2}x^2}\partial x+c}{e^{\frac{5}{2}x^2}} \qquad \rightarrow \qquad y=\frac{e^{\frac{5}{2}x^2}}{-\int e^{\frac{5}{2}x^2}\partial x+c}+5x$$

NOTA: se acostumbra, cuando la integral $\int f(x)\partial x$ no es elemental, escribir como $\int_{x_0}^{x} f(t)\partial t$ donde x_0 es una constante así:

$$u=\frac{e^{\frac{5}{2}x^2}}{-\int_{x_0}^{x} e^{\frac{5}{2}x^2}+c}$$

$$y=u+5x$$

Ejercicio 4:

$$y'=y^2+4y-5 \qquad S_{(x)}=-5$$

Paso 1: Realizar el cambio de variable

$$y=-5+\frac{1}{z} \qquad \rightarrow \qquad z=\frac{1}{y+5}$$

$$y'=-\frac{1}{z^2}z'$$

Hacer las sustituciones correspondientes:

$$-\frac{1}{z^2}z'=\left(\frac{1}{z}-5\right)^2+4\left(\frac{1}{z}-5\right)-5$$

Paso 2: Resolver operaciones y reducir términos semejantes

$$z' - 6z = -1$$

Paso 3: Identificar $P_{(x)}$, $Q_{(x)}$ y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = -6 \qquad Q_{(x)} = -1$$

$$FI = e^{-6x}$$

Resolver la ecuación lineal en "*z*" y revertir el cambio de variable

$$z = \frac{1}{6} + ce^{6x}$$

$$y = \frac{1}{\frac{1}{6} + ce^{6x}} - 5$$

Ejercicio 5:

$$y' = y^2 - \frac{1}{x}y - \frac{25}{x^2} \qquad S_{(x)} = \frac{5}{x}$$

Paso 1: Realizar el cambio de variable

$$y = \frac{5}{x} + \frac{1}{z} \quad \rightarrow \quad z = \frac{x}{xy - 5}$$

$$y' = -\frac{5}{x^2} - \frac{1}{z^2}z'$$

Hacer las sustituciones correspondientes:

$$-\frac{5}{x^2} - \frac{1}{z^2}z' = \left(\frac{5}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 - \frac{1}{x}\left(\frac{5}{x} + \frac{1}{z}\right) - \frac{25}{x^2}$$

Paso 2: Resolver operaciones y reducir términos semejantes para obtener la ecuación lineal;

$$z'+\frac{9}{x}z=-1$$

Paso 3: Identificar $P_{(x)}$, $Q_{(x)}$ y calcular el factor integrante

$$P_{(x)}=\frac{9}{x} \qquad Q_{(x)}=-1 \qquad FI=e^{9\int\frac{\partial x}{x}}=x^{9}$$

Resolver la ecuación lineal en "z" y revertir el cambio de variable

$$z=-\frac{x}{10}+cx^{-9}$$

$$\frac{x}{xy-5}=-\frac{x}{10}+cx^{-9}$$

$$y=\frac{1}{-\frac{x}{10}+cx^{-9}}+\frac{5}{x}$$

Ejercicio 6:

$$y'=\csc^{2}x+yctgx+y^{2} \qquad S_{(x)}=-ctgx$$

Paso 1: Realizar el cambio de variable

$$\mathrm{y}=\text{-cotgx}+\frac{1}{\mathrm{z}}$$

$$y'=\mathrm{cosc}^{2}x-\frac{1}{z^{2}}z'$$

Hacer las sustituciones correspondientes:

$$\operatorname{cosc}^2 x - \frac{1}{z^2} z' = \operatorname{cosc}^2 x + \operatorname{cotg} x\left(-\operatorname{cotg} x + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z} - \operatorname{cotg}\ x\right)^2$$

Paso 2: Resolver operaciones y reducir términos semejantes para obtener la ecuación lineal;

$$z' - (ctgx)z = -1$$

Paso 3: Identificar $P_{(x)}$, $Q_{(x)}$ y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = -ctgx \qquad\qquad Q_{(x)} = -1$$

$$FI = \csc x$$

Resolver la ecuación lineal "z" y revertir el cambio de variable:

Variable:

$$z = \frac{-\ln\left|\operatorname{cosc}\ x - \operatorname{cotg}\ x\right| + c}{\operatorname{cosc}\ x}$$

$$y = \frac{\operatorname{cosc}\ x}{-\ln\left|\operatorname{cosc}\ x - \operatorname{cotg}\ x\right| + c} - \operatorname{cotg}\ x$$

Ejercicio 7:

$$y' = y^2 + \frac{2}{x} y + \frac{2}{x^2} \qquad\qquad S_{(x)} = -\frac{2}{x}$$

Paso 1: Realizar el cambio de variable

$$y = -\frac{2}{x} + \frac{1}{z} \quad \rightarrow \quad z = \frac{x}{xy + 2}$$

$$y' = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{z^2} z'$$

Hacer las sustituciones correspondientes

$$\frac{2}{x^2} - \frac{1}{z^2} z' = \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{z} \right)^2 + \frac{2}{x}\left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{z} \right) + \frac{2}{x^2}$$

Paso 2: Resolver operaciones y reducir términos semejantes para obtener la ecuación lineal:

$$z' - \frac{2}{x} z = -1$$

Paso 3: Identificar P(x), Q(x) y calcular el factor integrante

$$P_{(x)} = -\frac{2}{x} \qquad Q_{(x)} = -1$$

$$FI = x^{-2}$$

Resolver la ecuación lineal en “z” y revertir el cambio de variable

$$z = x + cx^2$$

$$\frac{x}{xy + 2} = x + cx^2$$

$$y = \frac{1}{x + cx^2} - \frac{2}{x}$$

Ejercicio 8:

$$y' = y^2 + 8xy + 16x^2 - 4 \qquad S_{(x)} = -4x$$

Paso 1: Realizar el cambio de variable

$$y = -4x + \frac{1}{z} \qquad \rightarrow \qquad z = \frac{1}{y+4x}$$

$$y' = -4 - \frac{1}{z^2} z'$$

Hacer las sustituciones correspondientes

$$-4 - \frac{1}{z^2} z' = \left(-4x + \frac{1}{z}\right)^2 + 8x\left(-4x + \frac{1}{z}\right) + 16x^2 - 4$$

Paso 2: Resolver operaciones y reducir términos semejantes para obtener la ecuación separable:

$$z' = -1$$

Paso 3: Integrar miembro a miembro.

$$\int z' = \int -1 \partial x$$

$$z = -x + c$$

Al revertir el cambio de variables se obtiene:

$$y = -4x + \frac{1}{-x+c}$$

BIBLIOGRAFÍA

- BERMAN, G.N *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático* (2da Ed.) Moscú:Editorial MIR .
- BRAUN, M. (1990) *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones,* México: Grupo Editorial Iberoamericana, S.A.
- EDWARDS, C.H y DAVIDE Penney (1986) *Ecuaciones Diferenciales Elementales con Aplicaciones*, México: Prentice Hall Iberoamericana.
- LARSON, Robert y HOSTELLER, Robert (1988) *Cálculo y Geometría Analítica* (3ra Ed.), México: Mc Graw Hill.
- LEITHOLD, Louis (1992) *El Cálculo con Geometría Analítica* (6ta Ed.), México: Harla.
- NAGLE, Kent y SALF, Edward *Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales* (2da Ed.): Wilmington, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.
- O'NEILL, Peter V. (1998) *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* (3ra Ed.), México: Compañía Editorial Continental, S.A.
- STEWARD, James (1991) *Cálculo*, México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- SWOKOWSKI, Earl (1982) *Cálculo con Geometría Analítica*, California: Wadsworth Internacional Iberoamericana.
- WEBER, Jean E. (1984) *Matemáticas para Administración y Economía* (4ta Ed.), México: Harla.
- ZILL, Dennis (1986) *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones* (2da Ed.), México: Grupo Editorial Iberoamericana.