UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA
LABORATORIO DE FORMAS EN GRUPOS

Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

Ramón Bruzual
Marisela Domínguez

Caracas, Venezuela
Septiembre 2005

Ramón Bruzual
Correo-E: rbruzual@euler.ciens.ucv.ve

Marisela Domínguez
Correo-E: mdomin@euler.ciens.ucv.ve

Laboratorio de Formas en Grupos
Centro de Análisis
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela

`http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg`

Nota: Este material está disponible en la página web
`http://euler.ciens.ucv.ve/~labfg/guias.htm`
En general mantenemos una réplica en un servidor externo a la Universidad Central de Venezuela, el vínculo se encuentra indicado en esa misma página web.

Prólogo

Estas notas han sido concebidas para ser utilizadas en la parte de Ecuaciones Diferenciales, del curso de Matemática III de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. En este curso participan estudiantes de las Licenciaturas en Biología, Geoquímica, Química, Computación, Física y Matemática.

El trabajo de mecanografía y la elaboración de los gráficos está a cargo de los autores. Agradecemos cualquier observación o comentario que deseen hacernos llegar.

Ramón Bruzual.
Marisela Domínguez.
Septiembre 2005.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1

Conceptos básicos y ecuaciones diferenciales de primer orden.

Este capítulo es un repaso de cursos previos.

Resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden. Revisión de los métodos ya estudiados anteriormente. Ecuaciones con variables separables y reducibles a éstas.

Aplicaciones de la ecuación diferencial de primer orden: Crecimiento de poblaciones (exponencial, logístico, limitado). Epidemias. Desintegración radioactiva. Enfriamiento.

1. Motivación.

> La filosofía [la naturaleza] está escrita en ese gran libro que siempre está ante nuestros ojos -el universo- pero no lo podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje y comprendemos los símbolos en los que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático y los símbolos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender una sola palabra; sin ello, uno vaga en un obscuro laberinto.
>
> Galileo Galilei (1564-1642).

La cita anterior ilustra la creencia, popular en la época de Galileo, de que buena parte del conocimiento de la naturaleza podía reducirse a matemática. Al final del siglo XVII se reforzó este modo de pensar, cuando Newton enunció la ley de la gravitación y usó el naciente cálculo para deducir las tres leyes de Kepler del movimiento celeste. A raíz de esto muchos científicos trataron de "matematizar" la naturaleza. La gran cantidad de matemática que hoy se utiliza en las ciencias naturales y, cada vez más, en la economía y las ciencias sociales, es testigo del éxito de estos intentos.

Lo que conocemos como álgebra elemental es suficiente para resolver muchos de los problemas "estáticos" que se nos presentan a diario (problemas de porcentajes, intereses, etc).

Los fenómenos naturales que implican cambios se describen mejor mediante ecuaciones que relacionan cantidades variables.

La derivada $dy/dt = f'(t)$ de la función f puede ser considerada como la razón con la cual la cantidad $y = f(t)$ cambia con respecto a la variable independiente t, por esto es natural que en las ecuaciones que describen el universo cambiante aparezcan derivadas.

Una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas se llama *ecuación diferencial*. El estudio de las ecuaciones diferenciales tiene los siguientes fines:

1. Descubrir la ecuación diferencial que describe una situación física.
2. Encontrar la solución apropiada para esa ecuación.

A diferencia del álgebra elemental, en la cual buscamos los números desconocidos que satisfacen una ecuación tal como

$$x^3 + 7x^2 - 11x + 41 = 0,$$

al resolver una ecuación diferencial se nos reta a que encontremos las funciones desconocidas $y = g(x)$ que satisfagan una identidad tal como

$$g'(x) - 2xg(x) = 0.$$

Ejemplo 1.1 (Ley de enfriamiento de Newton). Esta ley establece lo siguiente: La tasa de cambio de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre $T(t)$ y la temperatura A del medio ambiente, es decir

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T),$$

donde k es una constante positiva.

La ley física se traduce así a una ecuación diferencial. Esperamos que, si se nos dan los valores de A y k, podremos encontrar una fórmula explícita para $T(t)$, que nos permita predecir la temperatura del cuerpo.

Ejemplo 1.2 (Poblaciones). La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población $P(t)$, con índices constantes de nacimiento y mortalidad es, en muchos casos simples, proporcional al tamaño de la población, es decir

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Ejemplo 1.3 (Ley de Torricelli). Esta ley establece que la tasa de cambio con respecto al tiempo del volumen V de agua en un tanque que se vacía, a través de un orificio en el fondo, es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad del agua del tanque, es decir,

$$\frac{dV}{dt} = -ky^{1/2},$$

donde y es la profundidad del tanque y k es una constante.

Si el tanque es un cilindro y A es el área de su sección transversal, entonces $V = Ay$ y dV/dt = A(dy/dt). En este caso la ecuación toma la forma

$$\frac{dy}{dt} = hy^{1/2},$$

en la que h = k/A.

2. Conceptos básicos

Tal como dijimos una *ecuación diferencial* es una expresión que establece una relación entre una función y algunas de sus derivadas. Como es natural, las *soluciones* de la ecuación son las funciones que satisfacen la relación. El *orden* de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en la misma.

Por ejemplo, la ecuación

$$y'' + y = 0 \tag{1.1}$$

es una ecuación diferencial de orden 2 ó segundo orden. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es solución de esta ecuación.

Se puede probar que cualquier solución de la ecuación (1.1) tiene la forma

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x,$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales. Por eso decimos que la *solución general* de la ecuación es $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. También decimos que $y = \operatorname{sen} x$ es una *solución particular* . Si queremos hallar una solución que satisface las condiciones

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 1, \end{aligned} \tag{1.2}$$

entonces C_1 y C_2 deben satisfacer las ecuaciones

$$C_1 = 1 \qquad C_2 = 1.$$

Por lo tanto la solución de la ecuación (1.1) que satisface la condición (1.2) es

$$y = \cos x + \operatorname{sen} x.$$

Una condición del tipo (1.2) es lo que se llama una *condición inicial.*

Los conceptos que hemos explicado a través de este ejemplo se extienden de manera natural a cualquier ecuación diferencial: La *solución general* de una ecuación diferencial es la función más general que la satisface, una *solución particular* es una función que satisface la ecuación, una *condición inicial* está dada por igualdades en las que se fijan los valores de la función y algunas de sus derivadas en un punto dado.

Ejercicios.

(1) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Además identificar el orden de cada una de las ecuaciones.
   (a) $y''' = 0$,
   (b) $y' = 9e^{3x}$,
   (c) $y'' = x$.

(2) Verifique, por sustitución, que la función dada y es solución de la ecuación diferencial correspondiente.

   (a) $y = 2e^{3x} + 1, \quad \dfrac{dy}{dx} = 3y - 3$

   (b) $y = e^{x^2}, \quad \dfrac{dy}{dx} = 2xy$

   (c) $y = x + 3, \quad y' = \dfrac{y-3}{x}$

(3) Hallar la solución de la ecuación diferencial
$$y'' = 0$$
que satisface la condición inicial
$$y(0) = y'(0) = 1.$$

3. Ecuaciones con variables separables y aplicaciones.

La ecuación diferencial de primer orden
$$\frac{dy}{dx} = H(x, y)$$
se llama *separable* si la función $H(x, y)$ puede escribirse como el producto de una función de x y una función de y, o lo que es equivalente, como un cociente
$$H(x, y) = \frac{g(x)}{f(y)}.$$

En este caso las variables pueden ser *separadas* (aisladas en miembros opuestos de una ecuación) escribiendo, de manera informal,

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx.$$

Esta última expresión debe entenderse como la notación compacta de la ecuación diferencial

$$f(y)\,\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Para resolver esta ecuación diferencial integramos ambos miembros con respecto a x para obtener

$$\int f(y)\,\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)\,dx + C,$$

es decir,

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C.$$

Por supuesto, para poder resolver la ecuación, necesitamos poder calcular las primitivas que aparecen en la expresión anterior.

Ejemplo 1.4. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = xy.$$

Procedemos de la siguiente manera:

Primero escribimos la ecuación en la forma

$$\frac{dy}{y} = x\,dx,$$

integrando obtenemos,

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1,$$

donde C_1 es una constante real, por lo tanto,

$$|y| = e^{C_1}\,e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

La igualdad anterior implica que y no se anula y, en consecuencia, no puede cambiar de signo. Así que tenemos que

$$y = C\,e^{\frac{1}{2}x^2},$$

donde C es una constante real que será igual a e^{C_1} ó $-e^{C_1}$ según el signo de y.

Es importante notar lo siguiente: cuando escribimos la ecuación en la forma

$$\frac{dy}{y} = x\,dx,$$

estamos suponiendo que y no se anula, sin embargo es inmediato que la función $y \equiv 0$ es solución de la ecuación que estamos resolviendo. Siempre que dividimos entre una variable o una función debemos tener este tipo de cuidado. En este ejemplo la solución $y \equiv 0$ quedó incluida en el caso $C = 0$.

Ejemplo 1.5. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{3y^2+1}.$$

La ecuación la podemos reescribir de la siguiente manera:

$$(3y^2+1)\,dy = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx.$$

Integrando ambos miembros obtenemos

$$y^3 + y = x - \frac{1}{x} + C.$$

Este ejemplo muestra que a veces no es posible o práctico, expresar a y explícitamente como función de x.

Ejemplo 1.6 (Desintegración de sustancias radiactivas). Una sustancia radiactiva se desintegra a una velocidad que es proporcional a la cantidad presente. La *vida media* de una sustancia radiactiva es el tiempo requerido para que determinada cantidad de material se reduzca a la mitad.

Si de 200 gramos de determinada sustancia radiactiva quedan 50 gramos al cabo de 100 años.

(a) Calcular la vida media.
(b) ¿Cuántos gramos de sustancia radiactiva quedarán transcurridos otros cien años?

Sea t el tiempo y $M = M(t)$ la cantidad de sustancia radiactiva en el instante t. Entonces, de acuerdo a la ley enunciada al principio del ejemplo, tendremos que

$$\frac{dM}{dt} = -kM, \tag{1.3}$$

donde k es una constante positiva.

La ecuación (1.3) es una ecuación con variables separables, para hallar la solución particular que corresponde con nuestro problema procedemos de la siguiente manera:

Paso 1: Separamos las variables

$$\frac{dM}{M} = -k\,dt.$$

Paso 2: Integramos y despejamos a M como función de t

$$\int \frac{dM}{M} = \int -k\,dt,$$

de donde,

$$\ln|M| = -kt + C_1,$$

donde C_1 es una constante, tomando exponencial a ambos miembros de la igualdad y usando que $M > 0$, obtenemos

$$M = e^{C_1} e^{-kt},$$

si tomamos $C = e^{C_1}$, entonces C es una constante y tenemos que

$$M = Ce^{-kt}.$$

Paso 3: Utilizamos la información que tenemos para hallar el valor de las constantes.

Inicialmente tenemos 200 gramos de sustancia radiactiva, esto quiere decir que

$$M(0) = 200,$$

por lo tanto,

$$M = 200\,e^{-kt},$$

nos dicen que $M(100) = 50$, por lo tanto

$$50 = 200\,e^{-100k},$$

de donde obtenemos que,

$$k = \frac{1}{50}\ln 2,$$

por lo tanto,

$$M = 200\,e^{-(\frac{1}{50}\ln 2)t} = 200 \cdot 2^{-\frac{t}{50}}.$$

Una vez que tenemos a la masa M como función del tiempo t ya podemos proceder a responder las preguntas.

Si T es la vida media tendremos que

$$M(T) = 100,$$

por lo tanto,

$$2^{-\frac{T}{50}} = \frac{1}{2},$$

de donde

$$T = 50 \text{ años}.$$

Finalmente

$$M(200) = 200 \cdot 2^{-4} \text{ gr.} = 12,5 \text{ gr.}$$

En la Sección 7 volveremos a tratar temas relacionados con este ejemplo.

Ejemplo 1.7 (Crecimiento exponencial de poblaciones). A mediados de 1982, la población mundial era de 4,5 miles de millones de habitantes y después creció a razón de un cuarto de millón de personas diarias. Suponiendo que son constantes los índices de natalidad y mortalidad ¿Para cuándo se puede esperar una población mundial de 10 mil millones de habitantes?

Sea $P = P(t)$ el número de miles de millones de habitantes en el mundo en el instante t, el tiempo t lo mediremos en años y tomaremos el año 1982 como el instante $t = 0$.

Comencemos por establecer cuál condición o condiciones debe satisfacer P. Sean $N_a = N_a(t)$ y $M_o = M_o(t)$ la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad respectivamente.

Si Δt es un intervalo de tiempo "pequeño" tendremos que

$$P(t + \Delta t) - P(t) = N_a(t)P(t)\Delta t - M_o(t)P(t)\Delta t.$$

Como estamos suponiendo que la tasa de mortalidad y la tasa de natalidad son constantes tenemos que $N_a(t)$ y $M_o(t)$ son constantes, al dividir entre Δt y tomar límite cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos

$$\frac{dP}{dt} = k\,P, \tag{1.4}$$

donde la constante k, que es igual a $N_a - M_o$, es la tasa de crecimiento neto.

Al resolver la ecuación (1.4) obtenemos

$$P = P(t) = P_o\, e^{kt}.$$

Tenemos que $P_o = 4,5$ ya que la población en el instante $t = 0$ (1982) es de 4,5 miles de millones de habitantes. Además, como la población crece a razón de un cuarto de millón de personas diarias, tenemos que

$$\begin{aligned} P'(0) = 450.000\,\text{personas/día} &= \frac{250.000 \times 10^{-9}}{1/365}\,\text{miles de millones de personas/año} \\ &\approx 0,0913\,\text{miles de millones de personas/año} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$k = \frac{P'(0)}{P(0)} \approx \frac{0,0913}{4,5} \approx 0,0203.$$

Por lo tanto

$$P(t) = (4,5)\, e^{(0,0203)t}.$$

Si resolvemos la ecuación

$$P(T) = 10,$$

obtenemos

$$T = \frac{\ln(10/4,5)}{0,0203} \approx 39,$$

es decir, deben transcurrir 39 años para que la población llegue a 10 mil millones de habitantes y por lo tanto la respuesta es el año 2021.

Ejemplo 1.8 (Ley de enfriamiento de Newton). La ley de enfriamiento de Newton dice que la tasa de cambio con respecto al tiempo de la temperatura $T = T(t)$ de un cuerpo inmerso en un medio de temperatura constante A es proporcional a la diferencia $A - T$. Es decir,

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T),$$

donde k es una constante positiva.

Resolvamos el siguiente problema: Una chuleta de 5 lb., originalmente a 50^oF, se pone en el horno a 375^oF a las $5:00$p.m. A los 75 minutos se encontró que la temperatura de la carne era de 125^oF. ¿A qué hora estará la carne a 150^oF?

Sea t el tiempo, medido en minutos, con $t = 0$ correspondiente a las $5:00$ p.m. De acuerdo a la ley de enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(375 - T),$$

de donde,

$$\int \frac{dT}{375 - T} = \int k\,dt,$$

como $T(t) < 375$, tenemos que

$$-\ln(375 - T) = kT + C_1,$$

por lo tanto

$$T = 375 - C\,e^{-kt},$$

donde C es una constante.

Como $T(0) = 50$ tenemos que $C = 325$.

De que $T(75) = 125$ obtenemos que

$$k = -\frac{1}{75}\ln\left(\frac{250}{325}\right) \approx 0,0035.$$

Despejando t de la ecuación $T(t) = 150$ (hacer los detalles), obtenemos

$$t \approx 105\text{minutos}.$$

Por lo tanto la chuleta estará a 150^oF a las $6:45$ p.m.

3.1. La ecuación $y' = k(y-a)(y-b)$.

Tal como veremos más adelante la ecuación diferencial del tipo

$$y' = k(y-a)(y-b),$$

donde k, a, b son constantes reales, aparece en algunas aplicaciones. Veamos cual es la solución general de esta ecuación con variables separables.

Al separar las variables obtenemos

$$\frac{dy}{(y-a)(y-b)} = k\,dx$$

descomponiendo en fracciones simples,

$$\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{y-b}-\frac{1}{y-a}\right) dy = k\,dx,$$

luego,

$$\ln\left|\frac{y-b}{y-a}\right| = k(b-a)x + C_1,$$

por la igualdad anterior $(y-b)/(y-a)$ no se anula ni cambio de signo, por lo tanto

$$\frac{y-b}{y-a} = C\,e^{k(b-a)x},$$

despejando obtenemos

$$y = a + \frac{b-a}{1-C\,e^{k(b-a)x}}\,.$$

Ejercicios.

(1) Encontrar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = x\,y^3.$

(b) $y\,\dfrac{dy}{dx} = x(y^2+1).$

(c) $x^2\,y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2.$

(2) Encontrar la solución particular de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y\,e^x,$$

que satisface $y(0) = 2e$.

(3) La vida media del cobalto radiactivo es de 5,27 años. Supóngase que en una región ha ocurrido un accidente nuclear que ha hecho que el nivel de cobalto radiactivo ascienda a 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la región vuelva a ser habitable?

4. Ecuaciones que se reducen a ecuaciones con variables separables.

4.1. La ecuación $y' = f(x, y)$, donde f es homogénea de grado cero.

Se dice que una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es *homogénea de grado n* si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

para todo $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.9.
La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es homogénea de grado 2.
La función $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ es homogénea de grado 2.

La función $f(x, y) = \dfrac{x^4 + x^3 y}{x + y}$ es homogénea de grado 3.

La función $f(x, y) = \dfrac{x^4 + x^3 y}{x^4 + y^4 + x^2 y^2}$ es homogénea de grado 0.

Supongamos que tenemos la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

donde f es homogénea de grado 0.

Entonces

$$f(x, y) = f\left(\frac{1}{x} \cdot x, \frac{1}{x} \cdot y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

por lo tanto la ecuación equivale a

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Hacemos el cambio

$$u = \frac{y}{x},$$

nos queda $y = u\,x$ y por lo tanto $y' = x\,u' + u$.

Luego

$$x\,u' + u = f(1, u),$$

es decir

$$x\,\frac{du}{dx} = f(1, u) - u,$$

que es una ecuación con variables separables, ya que equivale a

$$\frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Ejemplo 1.10. Hallar la solución general de la ecuación

$$y'=\frac{xy}{x^2-y^2}.$$

Haciendo $y=u\,x$ obtenemos

$$xu'+u=\frac{x^2\,u}{x^2-x^2u^2}=\frac{u}{1-u^2},$$

de donde

$$xu'=\frac{u}{1-u^2}-u=\frac{u^3}{1-u^2},$$

que equivale a

$$\frac{1-u^2}{u^3}\,du=\frac{dx}{x}.$$

Ahora resolvemos esta ecuación con variables separables

$$\int\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+C_1,$$

$$\ln|ux|=-\frac{1}{2u^2}-C_1,$$

como $y=u\,x$, tenemos

$$\ln|y|=-\frac{x^2}{2y^2}-C_1,$$

de donde,

$$|y|=C_2\,e^{-\frac{x^2}{2y^2}}.$$

La igualdad anterior implica que y no se anula y, por lo tanto, no cambia de signo. Así que tenemos que

$$y=C\,e^{-\frac{x^2}{2y^2}},$$

donde C es una constante.

4.2. La ecuación $\boldsymbol{y' = \dfrac{a\,x + b\,y + c}{p\,x + q\,y + r}}$.

Consideremos una ecuación diferencial de la forma

$$y' = \frac{a\,x + b\,y + c}{p\,x + q\,y + r}, \tag{1.5}$$

donde a, b, c, p, q, r son constantes reales.

Si $c = r = 0$ entonces la ecuación (1.5) es del tipo $y' = f(x, y)$. donde f es homogénea de grado cero y por lo tanto ya sabemos como resolverla.

Supongamos que $c \neq 0$ ó $r \neq 0$.

Veremos que, en este caso, un cambio de variables del tipo

$$\begin{cases} x = x_1 + k, \\ y = y_1 + h, \end{cases} \tag{1.6}$$

donde h y k son constantes a determinar nos permite reducir a ecuación (1.5) a una del tipo

$$y' = \frac{a_1\,x + b_1\,y}{p_1\,x + q_1\,y}.$$

Haciendo el cambio (1.6) y sustituyendo en la ecuación (1.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx} &= \frac{a\,(x_1 + k) + b\,(y_1 + h) + c}{p\,(x_1 + k) + q\,(y_1 + h) + r} \\ &= \frac{a\,x_1 + b\,y_1 + a\,k + b\,h + c}{p\,x_1 + q\,y_1 + p\,k + q\,h + r} \end{aligned}$$

Como es natural, debemos elegir h y k de manera que

$$\begin{cases} a\,k + b\,h + c = 0, \\ p\,k + q\,h + r = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Cada una de las ecuaciones anteriores es la ecuación de una recta en el plano kh. Si el sistema no tiene solución entonces las rectas tienen que ser paralelas y por lo tanto tiene que ocurrir que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p = \lambda a$, $q = \lambda b$.

Tenemos dos casos.

Caso1: El sistema (1.7) tiene solución (k_o, h_o).

Con el cambio

$$\begin{cases} x = x_1 + k_o, \\ y = y_1 + h_o, \end{cases}$$

la ecuación se reduce a una homogénea, que ya sabemos resolver.

Caso2: El sistema (1.7) no tiene solución.

Entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p = \lambda a$, $q = \lambda b$, luego la ecuación tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\,x + b\,y + c}{\lambda(a\,x + b\,y) + r}.$$

Haciendo el cambio de variables

$$z = a\,x + b\,y,$$

obtenemos

$$\frac{dz}{dx} = a + b\,\frac{dy}{dx} = a + b\,\frac{z + c}{\lambda z + r},$$

de donde,

$$\frac{1}{a + b\,\dfrac{z + c}{\lambda z + r}}\,dz = dx,$$

que es una ecuación con variables separables.

Ejemplo 1.11. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}.$$

Haciendo el cambio

$$\begin{cases} x = x_1 + k, \\ y = y_1 + h, \end{cases}$$

obtenemos

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + k + h - 3}{x_1 - y_1 + k - h - 1}.$$

Por lo tanto debemos considerar el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} k + h - 3 = 0, \\ k - h - 1 = 0. \end{cases}$$

Al resolver el sistema obtenemos

$$k = 2, \qquad h = 1.$$

Luego, con el cambio

$$\begin{cases} x = x_1 + 2, \\ y = y_1 + 1, \end{cases}$$

la ecuación se transforma en

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1},$$

que es una ecuación del tipo $y' = f(x, y)$, donde f es homogénea de grado cero.

Para resolver esta ecuación debemos hacer el cambio $u = y_1/x_1$, es decir

$$y_1 = u\, x_1.$$

Derivando y sustituyendo

$$x_1 \frac{du}{dx_1} + u = \frac{1+u}{1-u},$$

de donde,

$$\frac{1-u}{1+u^2}\, du = \frac{dx_1}{x_1},$$

integrando

$$\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x_1| + \ln C,$$

sustituyendo $u = y_1/x_1$,

$$\arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \ln\left(C\,|x_1|\sqrt{1 + \frac{y_1^2}{x_1^2}}\right) = \ln\left(C\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right),$$

tomando exponencial,

$$C\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\arctan\frac{y_1}{x_1}},$$

finalmente, volvemos a la variable original y obtenemos la solución general:

$$C\,\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\arctan\left(\frac{y-1}{x-2}\right)}.$$

OBSERVACIÓN 1.12. El procedimiento anterior también se le puede aplicar a una ecuación diferencial de la forma

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right).$$

Ejercicios.

(1) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $y'=\dfrac{y-x}{y+x}$,

(b) $y'=\dfrac{y-x-3}{y+x+4}$,

(c) $y'=\dfrac{x+y}{x+y+4}$,

5. Ecuación lineal de primer orden.

Una ecuación diferencial *lineal de primer orden* es una ecuación de la forma

$$y'+p(x)\,y=q(x), \tag{1.8}$$

donde p y q son funciones continuas definidas en un intervalo.

Si $q(x)\equiv 0$ la ecuación se llama homogénea.

Si $q(x)$ no es nula la ecuación se llama no homogénea.

OBSERVACIÓN 1.13. No debemos confundir la ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea con la ecuación diferencial de la forma $y'=f(x,y)$, con f homogénea de grado 0, estudiada en la Sección 4.

Solución de la homogénea.

La ecuación homogénea tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = 0.$$

Esta ecuación es de variable separables, para hallar su solución general procedemos de la siguiente manera:

Separamos las variables,

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx,$$

integrando,

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + \ln C_1,$$

de donde

$$|y| = C_1\,e^{-\int p(x)\,dx},$$

esta igualdad implica que y no se anula y por lo tanto no puede cambiar de signo, luego,

$$y = C\,e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Solución de la no homogénea.

En este caso la ecuación tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x),$$

multiplicando ambos miembros por $e^{\int p(x)\,dx}$, obtenemos

$$e^{\int p(x)\,dx}\,\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)\,dx}\,p(x)\,y = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx},$$

es decir,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx}\,y\right) = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx},$$

integrando,

$$e^{\int p(x)\,dx}\,y = \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C,$$

de donde,

$$y = \left(\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right)\,e^{-\int p(x)\,dx}.$$

EJEMPLO 1.14. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' - x\,y = x.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $e^{-x^2/2}$ obtenemos

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\,y\right)' = x\,e^{-\frac{x^2}{2}},$$

de donde,

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\,y = -\,e^{-\frac{x^2}{2}} + C.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = -1 + C\,e^{\frac{x^2}{2}},$$

donde C es una constante.

6. Ecuación de Bernoulli.

Una ecuación de Bernoulli es una ecuación de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

donde $n \neq 0, 1$ (notar que si $n = 0$ ó $n = 1$ se trata de una ecuación lineal de primer orden).

El procedimiento para resolver esta ecuación es como sigue.

Primero reescribimos la ecuación de la siguiente manera

$$y^{-n}\,\frac{dy}{dx} + p(x)\,y^{-n+1} = q(x),$$

haciendo el cambio $z = y^{-n+1}$, tenemos que

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx},$$

de donde,

$$\frac{1}{1-n}\,\frac{dz}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Por lo tanto la ecuación queda

$$\frac{1}{1-n}\,\frac{dz}{dx} + p(x)\,z = q(x),$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

7. Aplicaciones

7.1. Desintegración radiactiva y determinación de la antigüedad de un fósil.

Consideremos una muestra de sustancia que contiene $N(t)$ átomos de cierto isótopo radiactivo en el instante t. Durante cada unidad de tiempo una fracción constante de estos átomos se desintegra espontáneamente, transformándose en átomos de otro elemento o en otro isótopo del mismo elemento; por lo tanto la velocidad de desintegración de la sustancia es proporcional a la cantidad de sustancia presente. En términos de una ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = -k\,N,$$

donde k es una constante positiva, que depende de la sustancia.

Al resolver esta ecuación diferencial obtenemos

$$N(t) = N_o\,e^{-kt}, \tag{1.9}$$

donde N_o es la cantidad de sustancia en el instante $t = 0$ (ver Ejemplo 1.6).

Sea T tal que $N(T) = N_o/2$, es decir, transcurrido el tiempo T, de la cantidad de sustancia N_o queda $N_o/2$. Entonces tenemos que

$$\frac{N_o}{2} = N_o\,e^{-kT}.$$

Despejando obtenemos

$$k = \frac{1}{T}\ln 2,$$

sustituyendo en la fórmula (1.6)

$$N(t) = N_o\,2^{-\frac{t}{T}}.$$

Es importante notar lo siguiente:

$$2^{-\frac{t_o+T}{T}} = \frac{1}{2}\,2^{-\frac{t_o}{T}},$$

por lo tanto, si en el instante t_o tenemos cierta cantidad de sustancia, en el instante $t_o + T$ esta cantidad se habrá reducido a la mitad. Por esto se define la *vida media* de una sustancia radiactiva como el tiempo requerido para que determinada cantidad de material se reduzca a la mitad. Los cálculos previos sirven para demostrar que la vida media está bien definida y además, si T es la vida media

$$N(t) = N_o\,2^{-\frac{t}{T}}. \tag{1.10}$$

La clave del método de determinación de la antigüedad o *fechado mediante radiocarbono* de fósiles estriba en que una proporción constante de átomos de carbono de cualquier organismo viviente está formada por el isótopo radiactivo C^{14} del carbono y una vez que el organismo muere estos isótopos radiactivos comienzan a desintegrarse.

Más en detalle: La concentración de C^{14} en la atmósfera se conserva casi constante, ya que, aunque C^{14} es radiactivo y se desintegra lentamente, se repone mediante la conversión de nitrógeno en C^{14} por los rayos cósmicos de la atmósfera superior. Durante la larga historia de nuestro planeta, esta declinación y reposición se ha convertido en un estado cercano a la estabilidad. La materia viva está tomando carbono del aire continuamente, o está consumiendo otras materias vivientes que contienen la misma concentración constante de átomos de carbono C^{14}. La misma concentración perdura toda la vida, debido a que los procesos orgánicos parecen no hacer distinción entre los dos isótopos. Cuando un organismo vivo muere, cesa su metabolismo de carbono y el proceso de desintegración radiactiva comienza a agotar su contenido de C^{14} y, en consecuencia, la concentración de C^{14} comienza a decrecer. Midiendo esa concentración, puede estimarse el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo.

Para el C^{14} se sabe que, midiendo el tiempo en años, la constante de decaimiento k vale aproximadamente 0,0001216.

Nota: Al aplicar la técnica de determinación de antigüedad mediante radiocarbono debe tomarse extremo cuidado para evitar la contaminación de la muestra con materia orgánica o aun aire fresco ordinario. Además, parece ser que los niveles de rayos cósmicos no han sido constantes durante la historia de la tierra, por lo que la proporción de carbono radiactivo en la atmósfera ha variado en los siglos pasados. Mediante el uso de métodos independientes de fechado de muestras, los investigadores de esta área han compilado tablas de factores de corrección que han acrecentado la exactitud del proceso.

Ejemplo 1.15 (Fechado por radiocarbono). El carbono extraído de un cráneo antiguo contenía solamente una sexta parte del carbono C^{14} extraído de un hueso de los tiempos actuales. ¿Cuál es la antigüedad del cráneo?

Tomemos como instante $t = 0$ el momento de la muerte del individuo, entonces, si t_1 es el tiempo transcurrido desde la muerte, tenemos que

$$N(t_1) = \frac{N(0)}{6},$$

donde $N(t)$ es el número de átomos de carbono C^{14} en el cráneo en el instante t.

Por otra parte sabemos que

$$N(t) = N(0)\, e^{-(0{,}0001216)t},$$

luego,

$$\frac{N(0)}{6} = N(0)\, e^{-(0{,}0001216)t_1},$$

de donde,

$$t_1 = \frac{\ln 6}{0{,}0001216} = 1473{,}86.$$

Por lo tanto el tiempo transcurrido es de aproximadamente 1.474 años.

Ejercicio 1.16. Utilizar que, midiendo el tiempo en años, el valor de la constante de decaimiento k del carbono 14 vale aproximadamente $0{,}0001216$, para establecer que la vida media del carbono 14 es de aproximadamente 5.700 años.

7.2. Dilución en un tanque con flujo de entrada y salida constantes.

Consideremos un tanque que contiene una solución (una mezcla de soluto y solvente, tal como sal y agua). Supondremos que hay un flujo tanto de entrada como de salida y queremos calcular la cantidad $x(t)$ de soluto que hay en el tanque en el instante t.

Supóngase además que:

(a) La solución que entra al tanque tiene una concentración de c_e gramos de soluto por litro de solución
(b) El flujo de entrada F_e de solución al tanque es constante.
(c) En el tanque hay agitación continua, por lo que la solución que se encuentra en el tanque es homogénea.
(d) El flujo de salida F_s de solución al tanque es constante.

Para establecer una ecuación diferencial para $x(t)$, estimemos el cambio Δx en x durante un intervalo de tiempo pequeño $[t, t + \Delta t]$.

La cantidad de soluto que entra al tanque durante Δt segundos es $F_e\, c_e\, \Delta t$.

La cantidad de soluto que fluye hacia afuera del tanque depende de la concentración $c(t)$ de la solución que se encuentra en el tanque en el instante t y es igual a $F_s\, c(t)\, \Delta t$. Si $V(t)$ es el volumen de solución en el tanque en el instante t, entonces $c(t) = x(t)/V(t)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\Delta x &= [\text{gramos que ingresan}] - [\text{gramos que salen}]\\ &\approx F_e\, c_e\, \Delta t - F_s\, c(t)\, \Delta t\\ &= F_e\, c_e\, \Delta t - F_s\, \frac{x(t)}{V(t)}\, \Delta t.\end{aligned}$$

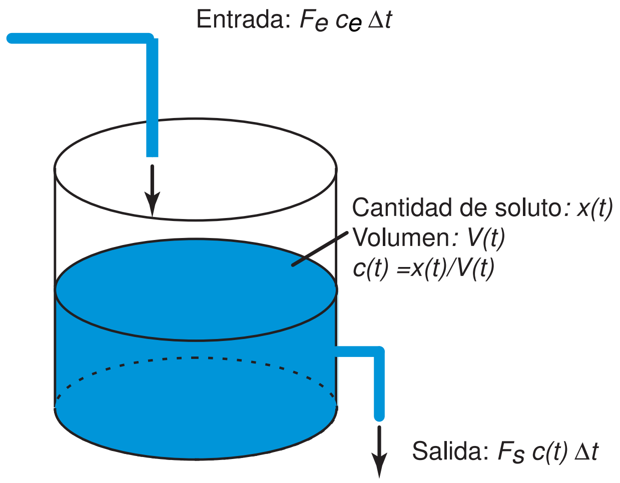

FIGURA 1.1. Dilución en un tanque con flujo de entrada y salida constantes

Dividiendo entre Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = F_e\, c_e - \frac{F_s}{V(t)}\, x(t). \tag{1.11}$$

Si $V_o = V(0)$, entonces $V(t) = V_o + (F_e - F_s)t$. Por lo tanto, la ecuación (1.11) es una ecuación diferencial lineal de primer orden para la cantidad $x(t)$ de soluto en el tanque en el instante t.

EJEMPLO 1.17. Un tanque de 120 galones (gal) inicialmente contiene 90 lb de sal disueltas en 90 gal de agua. Hacia el tanque fluye salmuera que contiene 2 lb/gal a razón de 4 gal/min y la mezcla fluye hacia afuera a razón de 3 gal/min. ¿Cuánta sal contiene el tanque cuando se llena?

El volumen de solución $V(t)$, que se encuentra en el tanque en el instante t, es igual a $90 + t$ galones.

Sea $x(t)$ la cantidad de sal que se encuentra en el tanque en el instante t. Entonces

$$\frac{dx}{dt} = 4 \cdot 2 - \frac{3}{90 + t}\, x(t),$$

es decir

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{90+t}\,x(t) = 8.$$

Resolviendo la ecuación y utilizando que $x(0) = 90$, obtenemos

$$x(t) = 2\,(90+t) - \frac{90^4}{(90+t)^3}.$$

De la fórmula para $V(t)$ sigue que el tanque se llena en 30 min, por lo tanto la respuesta es $x(30) \approx 202$ lb de sal.

7.3. Modelos de poblaciones.

En el Ejemplo 1.7 consideramos un modelo de población cuyo crecimiento está gobernado por una ecuación de la forma $dP/dt = k\,P$. Este modelo es válido cuando los índices de natalidad y mortalidad son constantes. En esta sección estudiaremos modelos más generales, que contemplan la posibilidad de que los índices de natalidad y mortalidad sean variables.

Sea $P(t)$ el número de individuos de una población en el instante t. Supongamos que la población cambia exclusivamente por la ocurrencia de nacimientos y muertes, es decir, suponemos que no hay inmigración ni emigración. Sean $N(t)$ y $M(t)$ el número de nacimientos y muertes, respectivamente, que han ocurrido desde el instante $t = 0$ hasta el instante t. El *Índice de natalidad es*

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{P(t)\,\Delta t} = \frac{1}{P}\,\frac{dN}{dt},$$

y el *Índice de mortalidad es*

$$\beta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{P(t)\,\Delta t} = \frac{1}{P}\,\frac{dM}{dt}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} P'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[N(t+\Delta t) - N(t)] - [M(t+\Delta t) - M(t)]}{\Delta t} \\ &= N'(t) - M'(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P'(t) = (\alpha(t) - \beta(t))\,P(t). \tag{1.12}$$

Crecimiento exponencial.

Si los índices de natalidad y mortalidad $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son constantes tenemos una ecuación del tipo

$$\frac{dP}{dt} = k\,P,$$

cuya solución es

$$P(t) = P_o\,e^{kt},$$

donde P_o es el número de individuos en el instante $t = 0$.

En la siguiente figura observamos los gráficos de P en función de t para los casos $k > 0$, $k = 0$ y $k < 0$.

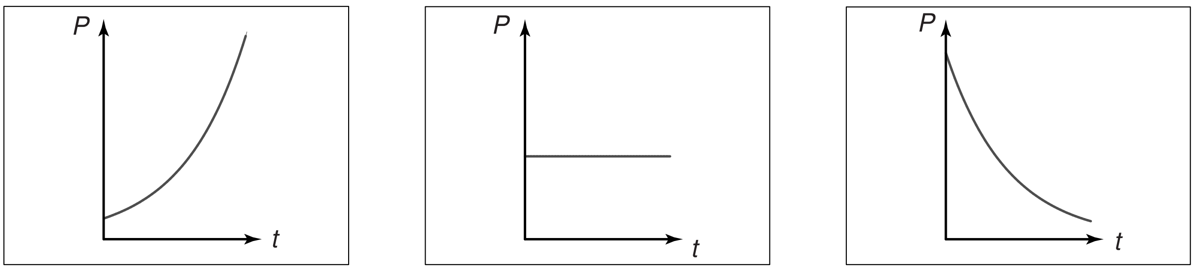

Figura 1.2. Distintos casos de crecimiento con tasas de natalidad y mortalidad constantes

El primer gráfico ($k > 0$) corresponde con el caso en que el índice de natalidad es mayor que el de mortalidad. La población crece muy rápidamente, llega un momento en que el modelo pierde validez, ya que el medio ambiente comienza a poner restricciones sobre el número de individuos.

El segundo gráfico ($k = 0$) corresponde con el caso en que el índice de natalidad es igual al de mortalidad. La población permanece constante.

El tercer gráfico ($k < 0$) corresponde con el caso en que el índice de mortalidad es mayor que el de natalidad. La población disminuye hasta extinguirse.

Crecimiento logístico.

En situaciones tan diversas como la población humana de una nación y la población de la mosca de la fruta en un recipiente cerrado, a menudo se observa que el índice de natalidad disminuye cuando la población aumenta. Las razones pueden variar, incluyendo desde el refinamiento cultural hasta la limitación en los recursos alimenticios.

Supongamos que

(a) El índice de nacimientos α es una función lineal decreciente de P, es decir

$$\alpha(t) = \alpha_o - \alpha_1 \, P(t),$$

donde α_o y α_1 son constantes positivas.

(b) El índice de mortalidad permanece constante.

Entonces la ecuación (1.12) toma la forma $dP/dt = (\alpha_o - \alpha_1 \, P - \beta) \, P$, es decir,

$$\frac{dP}{dt} = k \, P \, (M - P).$$

Supondremos que $\alpha_o > \beta$, así que $M > 0$. Al resolver esta (ecuación ver Subsección 3.1) obtenemos

$$P(t) = \frac{M \, P_o}{P_o + (M - P_o) \, e^{-kMt}},$$

donde P_o es la población inicial.

Se observa que si $t \to \infty$, entonces $P(t) \to M$, es decir el número de individuos tiende a estabilizarse.

A continuación observamos los gráficos de P en los casos $P_o < M$ y $P_o > M$.

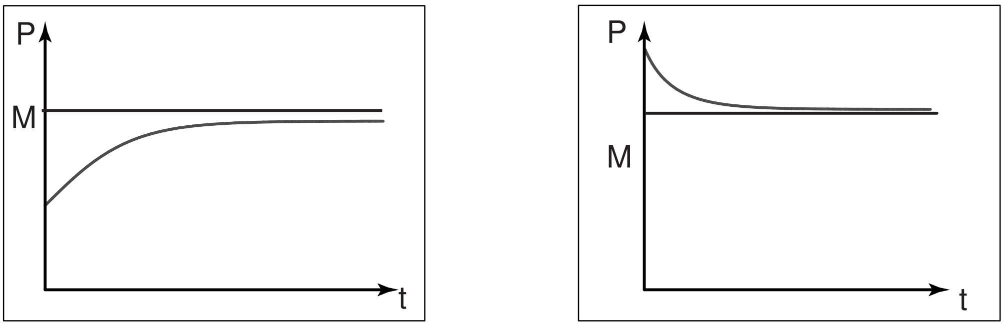

Figura 1.3. Crecimiento logístico

Ejercicios.
Nociones básicas y ecuaciones diferenciales de primer orden.

(1) Verifique, por sustitución, que la función dada y (explícita o implícitamente) es solución de la ecuación diferencial correspondiente.

(a) $y' = 2x$; $\;y = x^2 + 3$.

(b) $y\,y' = e^{2x}$; $\;y^2 = e^{2x} + 1$.

(c) $xy' + y = y'\,\sqrt{1 - x^2y^2}$; $\;y = \operatorname{arcsen} xy$.

(d) $(y \cos y - \operatorname{sen} y + x)y' = y$; $\;y + \operatorname{sen} y = x$.

(e) $y'' + y = 3\cos 2x$; $\;y = \cos x - \cos 2x$.

(f) $y'' + y = 3\cos 2x$; $\;y = \operatorname{sen} x - \cos 2x$.

(g) $x^2\,y'' - xy' + 2y = 0$; $\;y = x\cos(\ln x)$.

(h) $x^2\,y'' + 5xy' + 4y = 0$; $\;y = \dfrac{1}{x^2}$.

(2) En los siguientes problemas se describe una función $y = g(x)$ mediante alguna propiedad geométrica de su gráfica. Escriba una ecuación diferencial de la forma $y' = f(x, y)$ cuya solución (o una de sus soluciones) sea $g(x)$.

(a) La pendiente de la gráfica de g en el punto (x, y) es la suma de x e y.

(b) La recta tangente a la gráfica de g en el punto (x, y) interseca al eje de las x en el punto $(x/2, 0)$.

(c) Toda línea recta, perpendicular a la gráfica de g, pasa por el punto $(0, 1)$.

(3) En los siguientes problemas escribir una ecuación diferencial, que sea un modelo matemático de la situación descrita.

(a) La tasa de cambio con respecto al tiempo de una población P es proporcional a la raíz cuadrada de P.

(b) La tasa de cambio con respecto al tiempo de la velocidad v de un bote costero de motor es proporcional al cuadrado de v.

(c) La aceleración dv/dt de cierto automóvil deportivo es proporcional a la diferencia entre 250 kilómetros por hora y la velocidad v del automóvil.

(d) En una ciudad que tiene una población fija de K personas, la tasa de cambio con respecto al tiempo del número N de personas que han oído un cierto rumor es proporcional al número de personas que todavía no lo han oído.

(4) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables.

(a) $y' = e^{3x} - x$.

(b) $x\,y' = 1$.

(c) $y' = x\,e^{x^2}$.

(d) $y' = \operatorname{arcsen} x$.

(e) $(1+x)\,y' = x$.

(f) $(1+x^3)\,y' = x$.

(g) $x\,y\,y' = y - 1$.

(h) $x\,y' = (1-2x^2)\tan y$.

(i) $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} + 1 + y^2 = 0$.

(j) $y \ln y\, dx - x\, dy = 0$.

(k) $y' + y\tan x = 0$.

(l) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$.

(m) $\sec^2 x\, dy + \operatorname{cosec} y\, dx = 0$.

(n) $2\,\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{2x}{y}$.

(o) $(1 + x^2 + y^2 + x^2\,y^2)\,dy = y^2\,dx$.

(p) $y \ln x \dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$.

(q) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1+x^2)^{-1/2}}{(1+y^2)^{1/2}}$.

(r) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1+2\,y^2}{y \operatorname{sen} x}$.

(s) $\dfrac{dy}{dx} = 3\,y$.

(t) $\dfrac{dy}{dx} = 3\,x$.

(u) $(1+x^4)\,y' = x^3$.

(v) $(1+x^4)\,y' = 1$.
(Ayuda: $1+x^4 = 1+2x^2+x^4-2x^2$).

(5) Determine si la función dada es homogénea. En caso de que sea homogénea, indique su grado de homogeneidad.

(a) $f(x,y) = 2\,x^3 + 2\,x\,y^2 - \dfrac{y^4}{x}$.

(b) $f(x,y) = (3x+2y)\,\sqrt{x+y}$.

(c) $f(x,y) = x + \dfrac{x^3}{y}$

(d) $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{x^2}{x+y}\right)$.

(e) $f(x,y) = x^2 + \dfrac{x^3}{y}$

(f) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x+y}\right)$.

(6) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $(x-y)\,dx + x\,dy = 0$.

(b) $(y^2+xy)\,dx - x^2\,dy = 0$.

(c) $2\,x^2\,y\,dx = (3\,x^3+y^3)\,dy$.

(d) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\,dx = x\,dy$.

(e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

(f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+3y}{3x+y}$.

(7) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $y' = \dfrac{2x - 5y}{2x + 4y}$.

(b) $y' = \dfrac{2x - 5y + 3}{2x + 4y - 6}$.

(c) $y' = \dfrac{2x - 5y + 3}{2x - 5y - 6}$.

(d) $y' = \dfrac{2\,x + y}{x - y}$.

(8) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

(a) $3y' + 12y = 4$.

(b) $x\,\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$.

(c) $x\,dy = (x\ \operatorname{sen} x - y)\,dx$.

(d) $(1 + e^x)\dfrac{dy}{dx} + e^x\,y = 0$.

(e) $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}$.

(f) $y' - y = 2\,x\,e^{x^2+x}$.

(g) $x\,y' - y = x^2 \operatorname{sen} x$.

(h) $y' - y\tan x = \sec x$.

(9) Hallar la solución que satisface la condición inicial indicada.

(a) $y' - 2\,x\,y = 2\,x\,e^{-x^2}, \qquad y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

(b) $y' + 2\,y = x^2 + 2\,x, \qquad y(1) = e^{-4}$.

(c) $y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x, \qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

(d) $x\,y' - y = x^2\ \operatorname{sen} x, \qquad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

(e) $2\,x\,y' - y = 3\,x^2, \qquad y(1) = 1$.

(f) $y' - y = 2\,x\,e^{x^2+x}, \qquad y(\sqrt{2}) = e^2$.

(g) $y' - y\tan x = \sec x, \qquad y(\pi) = 0$.

(10) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales (indique cuál o cuáles son de Bernoulli).

(a) $y' = 3 - 4\,y + y^2$.

(b) $y' = (2 - y)\,(5 - y)$.

(c) $y' = -\dfrac{y}{2}\,(3 - y)$.

(d) $y' = 4 - y^2$.

(11) Utilizando el método más apropiado, halle la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $y''' = 17$.

(b) $y' = y^2 - y - 12$.

(c) $x(\operatorname{sen} x)\,y' + (\operatorname{sen} x - x\cos x)\,y = \operatorname{sen} x \cos x - x$.

(d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\,x\,y^2 - x^3}{y^3 - 3\,x^2\,y}$.

(e) $x^2 + x\,y' = 3\,x + y'$.

(f) $\dfrac{dx}{x^2 - x\,y + y^2} = \dfrac{dy}{2\,y^2 - x\,y}$.

(g) $(x - y + 2)\,dx + (x - y + 3)\,dy = 0$.

(h) $e^{-y}\,(1 + y') = 1$.

(i) $(x - y^2\,x)\,dx + (y - x^2\,y)\,dy = 0$.

(j) $(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$.

(k) $y' = (y - 1)(y - 2)$.

(l) $y' = \dfrac{2\,x^2 - y^2}{2\,x^2 + y^2}$.

(m) $(x + y - 1)\,dx + (x - y)\,dy = 0$.

(n) $xy' + y = y^2\,x$.

(12) $\star$ Sean a y λ números reales positivos y b un número real. Demostrar que toda solución de la ecuación diferencial

$$y' + a\,y = b\,e^{-\lambda\,x}$$

tiende a 0 cuando x tiende a $+\infty$.

(13) Demostrar que la curva para la cual, la pendiente de la tangente en cualquier punto es proporcional a la abscisa del punto de contacto de la tangente con la curva, es una parábola.

(14) Un termómetro se encontraba guardado en una habitación cuya temperatura era de 75° F. Cinco minutos después de haberlo sacado al exterior el termómetro marcó 65° F y otros cinco minutos después marcó 60° F. Calcular la temperatura exterior.

(15) Una sustancia radioactiva se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad de material presente. Si un gramo de esta sustancia se reduce a 1/4 de gramo en 4 horas, determinar cuánto tiempo debe transcurrir para que un gramo se reduzca a 1/10 de gramo. Encuentre la vida media de la sustancia (recuerde que la vida media es el tiempo necesario para que determinada cantidad de material se reduzca a la mitad).

(16) El carbono 14 es una sustancia radioactiva que tiene una vida media de aproximadamente 5.700 años. Es importante en arqueología porque el carbono 14 existente en un ser vivo permanece constante durante la vida del ser. Determinar el tiempo transcurrido desde la muerte de un animal si la concentración de carbono 14 en sus restos es igual a la tercera parte de la que corresponde con un animal que vive actualmente.

(17) El número de bacterias en cierto cultivo crece a una velocidad que es igual a la mitad del número de bacterias presente. Si inicialmente hay 10.000 bacterias, hallar el número de bacterias en el instante t.

(18) En una población sana de 100 individuos, igualmente susceptibles a una enfermedad infecciosa, se introduce un individuo infectado.

Supongamos lo siguiente:

(i) Una vez que un individuo es infectado, permanecerá así durante todo el proceso y no será eliminado (no muere).

(ii) Si $x(t)$ es el número de individuos sanos y $y(t)$ es el número de individuos infectados en el instante t, entonces la velocidad a la que se propaga la infección es proporcional al producto de $x(t)$ y $y(t)$.

Si en diez días hay 20 individuos infectados, determinar en cuántos días habrá 50 individuos infectados.

(19) (Crecimiento limitado) Supongamos que en una población la velocidad de crecimiento es proporcional a una constante menos el número de individuos presentes. Describir y analizar el modelo matemático correspondiente.

CAPÍTULO 2

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Solución general de la ecuación homogénea. Solución general de la ecuación $ay'' + by' + cy = f(x)$ en los casos en que f es un polinomio, $f(x) = a^x$ y $f(x) = k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos x$. Aplicaciones: Caída libre, movimiento oscilatorio, caída libre en un medio resistente.

1. Solución general de la ecuación homogénea.

Una ecuación diferencial *lineal de segundo orden con coeficientes constantes* es una ecuación de la forma

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x), \tag{2.1}$$

donde a, b, c son constantes reales, $a \neq 0$ y f es una función continua definida en un intervalo.

Si $f(x) \equiv 0$ se dice que la ecuación es *homogénea*, en otro caso se dice *no homogénea.*

Primero vamos a considerar la ecuación la homogénea, es decir vamos a comenzar con la ecuación

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0. \tag{2.2}$$

En este caso se cumple lo siguiente: Si y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación (2.2) y C_1 y C_2 son constantes reales entonces $C_1\,y_1 + C_2\,y_2$ también es solución de la ecuación (2.2) (verificarlo como ejercicio).

Supongamos que una función de la forma

$$y = e^{\lambda x}$$

(λ es una constante a determinar) es solución de la ecuación. Tenemos que

$$y' = \lambda e^{\lambda x} \qquad y'' = \lambda^2\, e^{\lambda x},$$

por lo tanto debe cumplirse que

$$\begin{aligned} 0 &= a\,y'' + b\,y' + c\,y \\ &= (a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c)\,e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Así que tenemos que la función $y = e^{\lambda x}$ es solución de la ecuación (2.2) si y sólo si

$$a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c = 0.$$

Al polinomio

$$p(\lambda) = a\,\lambda^2 + b\,\lambda + c$$

se le llama *polinomio característico* de la ecuación (2.2).

Sean λ_1 y λ_2 las raíces del polinomio característico. Para hallar la solución general de la ecuación (2.2) debemos considerar tres casos.

Primer caso: Si λ_1 y λ_2 son reales y distintas ($b^2 - 4ac > 0$).

La solución general tiene la forma

$$y = C_1\,e^{\lambda_1 x} + C_2\,e^{\lambda_2 x},$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales.

Segundo caso: Si λ_1 y λ_2 son reales e iguales ($b^2 - 4ac = 0$).

La solución general tiene la forma

$$y = (C_1 + C_2\,x)\,e^{\lambda_1 x},$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales.

Tercer caso: Si λ_1 y λ_2 son complejas ($b^2 - 4ac < 0$).

En este caso tendremos que existen números reales α y β tales que

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta,$$

$$\lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

donde i s la unidad imaginaria ($i^2 = -1$).

La solución general tiene la forma

$$y = (C_1\,\operatorname{sen}\beta x \;+\; C_2\,\cos\beta x)\,e^{\alpha x}.$$

EJEMPLO 2.1.

(1) Hallar la solución general de

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

El polinomio característico es $\lambda^2 + \lambda - 2$ y sus raíces son 1 y -2, por lo tanto la solución general es

$$y = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-2x}.$$

(2) Hallar la solución general de

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

El polinomio característico es $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ y sus raíces son

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm 4\, i}{2} = -1 \pm 2\, i,$$

por lo tanto la solución general es

$$y = (C_1\, \operatorname{sen}(2x) + C_2\, \cos(2x)\,)\, e^{-x}.$$

(3) Hallar la solución general de

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

El polinomio característico es $\lambda^2 - 4\lambda - 4 = (\lambda - 2)^2$ y tiene una raíz doble en $\lambda = 2$, por lo tanto la solución general es

$$y = (C_1 + C_2\, x)\, e^{2x}.$$

2. Solución general de la ecuación no homogénea.

En esta sección vamos a estudiar cómo resolver la ecuación (2.1) para algunos casos particulares de f, más precisamente, vamos a considerar la ecuación

$$a\, y'' + b\, y' + c\, y = f(x), \tag{2.3}$$

en los casos en que $f(x) = k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos x$ ó $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, donde P es un polinomio.

OBSERVACIÓN 2.2. Si y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación no homogénea (2.3) entonces $y_1 - y_2$ es solución de la ecuación homogénea $a\, y'' + b\, y' + c\, y = 0$, por esto tenemos el siguiente resultado: *La solución general de la ecuación no homogénea es igual a la solución general de la ecuación homogénea más una solución particular de la ecuación no homogénea.*

Por la observación anterior, para hallar la solución general de la ecuación no homogénea (2.3) basta hallar una solución particular de la no homogénea; después a esta solución particular le sumamos la solución general de la homogénea, que aprendimos a hallar en la sección previa.

Vamos a estudiar caso por caso.

Caso 1: $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, donde P_n es un polinomio de grado n.
Es necesario considerar tres subcasos.

(i) α no es raíz de la ecuación $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.
Se debe buscar una solución particular de la forma

$$y = Q_n(x)e^{\alpha x},$$

donde Q_n es un polinomio de grado n.

(ii) α es raíz simple de la ecuación $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Se debe buscar una solución particular de la forma

$$y = x\,Q_n(x)e^{\alpha x},$$

donde Q_n es un polinomio de grado n.

(iii) α raíz doble de la ecuación $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Se debe buscar una solución particular de la forma

$$y = x^2\,Q_n(x)e^{\alpha x},$$

donde Q_n es un polinomio de grado n.

Caso 2: $f(x) = k_1 \operatorname{sen}(\beta x) + k_2 \cos(\beta x)$, donde k_1, k_2 y β son constantes.
Es necesario considerar dos subcasos.

(i) $\beta\, i$ no es raíz de la ecuación $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.
Se debe buscar una solución particular de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(\beta x) + B \cos(\beta x),$$

donde A y B son constantes.

(ii) $\beta\, i$ es raíz de la ecuación $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.
Se debe buscar una solución particular de la forma

$$y = x\,(A \operatorname{sen}(\beta x) + B \cos(\beta x)\,),$$

donde A y B son constantes.

Observación 2.3. En el Caso 1 están contenidos el caso en que $f(x)$ es un polinomio (tomar $\alpha = 0$) y el caso en que $f(x) = a^x$ (tomar $P_n(x) \equiv 1$, $\alpha = \ln a$).

Observación 2.4. Para hallar una solución particular de la ecuación diferencial

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_1(x) + f_2(x)$$

basta sumar una solución particular de la ecuación $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_1(x)$ con una solución particular de $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f_2(x)$. Esta propiedad se conoce con el nombre de *principio de superposición.*

Ejemplo 2.5.

(1) Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 4y' + 3y = x.$$

El polinomio característico de la ecuación es $\lambda^2 + 4\lambda + 3$ y tiene raíces -1 y -3, por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es $C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-3x}$.

Debemos buscar una solución particular de la forma

$$y = A\,x + B.$$

En este caso $y' = A$, $y'' = 0$, sustituyendo en la ecuación

$$4A + 3(Ax + B) = x,$$

de donde

$$3Ax + 4A + 3B = x,$$

igualando los coeficientes y resolviendo el sistema lineal correspondiente, obtenemos

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{4}{9},$$

por lo tanto la solución general es

$$y = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-3x} + \frac{1}{3}\,x - \frac{4}{9}.$$

(2) Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 9y = xe^{3x}.$$

El polinomio característico de la ecuación es $\lambda^2 + 9$ y tiene raíces $3\,i$ y $-3\,i$, por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es $C_1\,\operatorname{sen}(3x) + C_2\,\cos(3x)$.

Debemos buscar una solución particular de la forma

$$y = (A\,x + B)\,e^{3x}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} y' &= A\,e^{3x} + (A\,x + B)\,3\,e^{3x} = (3Ax + A + 3B)\,e^{3x}, \\ y'' &= 3A\,e^{3x} + (3Ax + A + 3B)\,3\,e^{3x} = (9Ax + 6A + 9B)\,e^{3x}, \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} y'' + 9y &= (9Ax + 6A + 9B + 9Ax + 9B)\,e^{3x} \\ &= (18Ax + 6A + 18B)\,e^{3x}, \end{aligned}$$

por lo tanto, debe cumplirse la igualdad

$$(18Ax + 6A + 18B)\,e^{3x} = x\,e^{3x},$$

o, lo que es lo mismo

$$18Ax + 6A + 18B = x.$$

Igualando los coeficientes y resolviendo el sistema lineal correspondiente, obtenemos

$$A = \frac{1}{18}, \qquad B = -\frac{1}{54},$$

por lo tanto la solución general es

$$y = C_1\,\operatorname{sen}(3x) + C_2\,\cos(3x) + \left(\frac{1}{18}\,x - \frac{1}{54}\right)\,e^{3x}.$$

(3) Hallar la solución general de la ecuación

$$y'' + 2y' + 5y = 2\cos x.$$

El polinomio característico es $\lambda^2 + 2\lambda + 5$ y sus raíces son

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm 4\,i}{2} = -1 \pm 2\,i,$$

por lo tanto la solución general de la homogénea es $y = (C_1\,\operatorname{sen}(2x) + C_2\,\cos(2x)\,)\,e^{-x}$.

Debemos buscar una solución particular de la forma

$$y = A\,\cos x + B\operatorname{sen} x.$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$A = \frac{2}{5}, \qquad B = \frac{1}{5},$$

por lo tanto la solución general es

$$y = (C_1 \operatorname{sen}(2x) + C_2 \cos(2x)\,)\, e^{-x} + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} x.$$

3. Aplicaciones

3.1. Caída libre en el vacío.

Supongamos que dejamos caer un cuerpo desde cierta altura h, con velocidad inicial 0. Sea m es la masa del cuerpo, g la aceleración de gravedad y $x(t)$ la altura del cuerpo en el instante t. Si despreciamos la resistencia del aire, entonces x satisface la ecuación

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -mg,$$

con condición inicial $x(0) = h$, $\dfrac{dx}{dt}\,(0) = 0$.

La solución de la ecuación anterior (verificarlo como ejercicio) es

$$x(t) = h - \frac{g}{2}\,t^2.$$

Se observa que la velocidad del cuerpo es igual a

$$\frac{dx}{dt} = -g\,t,$$

por lo tanto el valor absoluto de la velocidad se mantiene incrementándose de manera lineal, hasta que el cuerpo llega al suelo.

3.2. Caída libre en un medio resistente.

Nuevamente supongamos que dejamos caer un cuerpo desde cierta altura h, con velocidad inicial 0. Sea m es la masa del cuerpo, g la aceleración de gravedad y $x(t)$ la altura del cuerpo en el instante t. En muchos casos la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del cuerpo, por lo tanto x satisface la ecuación

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - k\,\frac{dx}{dt},$$

con condición inicial $x(0) = h$, $\dfrac{dx}{dt}\,(0) = 0$.

Analicemos la ecuación. Si dividimos entre m obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K\,\frac{dx}{dt} = -g,$$

donde $K = \dfrac{k}{m}$ es una constante positiva.

La solución que satisface la condición inicial es (verificarlo como ejercicio)

$$x(t) = h - \frac{g}{K^2} + \frac{g}{K^2}\, e^{-Kt} - \frac{g}{K}\, t.$$

Se observa que la velocidad del cuerpo, que es igual a

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{g}{K}\,(e^{-Kt} + 1)$$

está acotada y tiende a estabilizarse a medida que t se incrementa..

3.3. Oscilaciones de un resorte.

Supongamos que tenemos un resorte suspendido verticalmente de un soporte fijo al que se le sujeta un cuerpo de masa m al extremo inferior. En este caso el peso $P = m\,g$ de la masa estirará el resorte una distancia s_o. Esto da la posición de equilibrio del sistema.

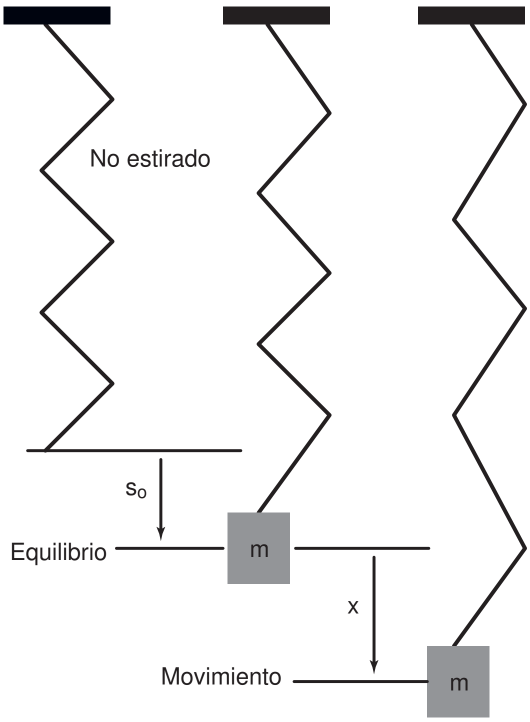

Figura 2.1. Resorte

Si la masa se desplaza de su posición de equilibrio y después se le suelta, en ciertas condiciones ideales, el desplazamiento x satisface la ecuación diferencial

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x, \tag{2.4}$$

donde k es una constante positiva que depende del resorte (este hecho se conoce como ley de Hooke).

Si dividimos la ecuación (2.4) entre m obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{2.5}$$

donde $\omega^2 = k/m$.

Las raíces del polinomio característico de esta ecuación son $\omega\, i$ y $-\omega\, i$, por lo tanto su solución general es de la forma

$$x(t) = C_1 \operatorname{sen} \omega t + C_2 \cos \omega t.$$

Las constantes C_1 y C_2 se pueden calcular en función de la posición inicial $x(0)$ y la velocidad inicial $x'(0)$.

El gráfico de la solución luce así.

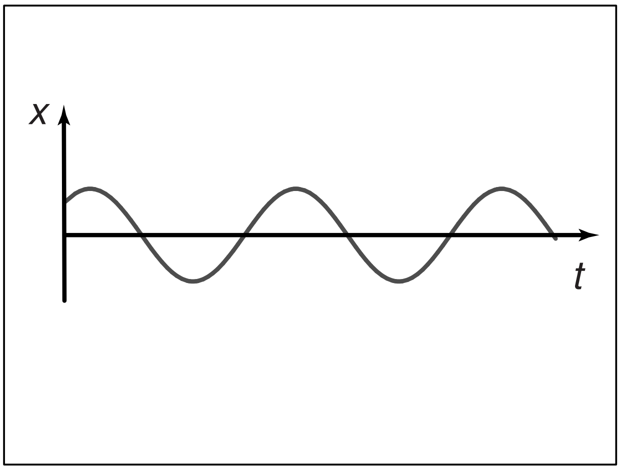

FIGURA 2.2.

El modelo anterior es un tanto irreal, ya que según el mismo el resorte no se detiene jamás, obteniéndose un movimiento periódico perpetuo. Por la experiencia práctica sabemos que esto no puede ser.

Una forma simple de mejorar el modelo es suponer que sobre el resorte actúa una fuerza que se opone al movimiento y que es proporcional a dx/dt. En este caso debemos modificar la ecuación (2.4) de la siguiente manera

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - \beta\,\frac{dx}{dt}. \tag{2.6}$$

Dividiendo entre m obtenemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\lambda\,\frac{dx}{dt} + \omega^2\,x = 0, \tag{2.7}$$

donde $2\,\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$ (se escoge $2\,\lambda$ para simplificar las operaciones).

Por supuesto existen otros tipos de modelo, en los que se supone que la resistencia proporcional al cuadrado de dx/dt y que nos lleva a ecuaciones más complicadas.

Las raíces del polinomio característico de la ecuación (2.7) son

$$\alpha_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \qquad \alpha_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Dependiendo del signo de $\lambda^2 - \omega^2$ podemos distinguir tres casos.

Caso 1: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$. En este caso la solución tiene la forma

$$x(t) = e^{-\lambda t}\,(C_1\,e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + C_2\,e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}\,).$$

En este caso se produce un movimiento suave no oscilatorio y se dice que el sistema está *sobreamortiguado.*

Caso 2: $\lambda^2 - \omega^2 = 0$. En este caso la solución tiene la forma

$$x(t) = e^{-\lambda t}\,(C_1 + C_2\,t\,).$$

En este caso se produce un movimiento similar al del caso sobreamortiguado y se dice que el sistema está *críticamente amortiguado.*

Caso 3: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$. En este caso la solución tiene la forma

$$x(t) = e^{-\lambda t}\,(C_1\,\cos\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}\,t + C_2\,\operatorname{sen}\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}\,t\,).$$

En este caso se produce un movimiento oscilatorio, cuyas amplitudes de oscilación tienden a 0 cuando t tiende a ∞. En esta caso se dice que el sistema está *subamortiguado.*

Las constantes C_1 y C_2 se pueden calcular en función de las condiciones iniciales del problema.

Las siguientes tres gráficas corresponden con los casos 1, 2 y 3 respectivamente

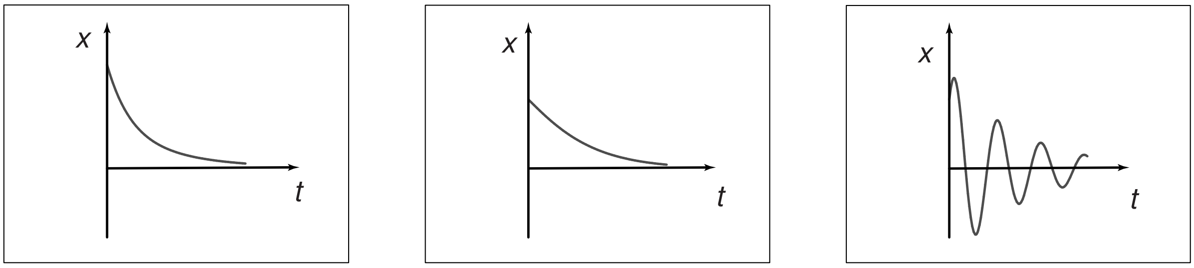

Figura 2.3.

Ejercicios.
Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

(1) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $y'' = y$.

(b) $y'' - 4y = 0$.

(c) $y'' + 4y = 0$.

(d) $4y'' + y = 0$.

(e) $y'' - y' = 0$.

(f) $y'' + y' = 0$.

(g) $y'' + 3y' - 10y = 0$.

(h) $2y'' - 7y' + 3y = 0$.

(i) $y'' + 6y' + 9y = 0$.

(j) $y'' - 6y' + 13y = 0$.

(k) $4y'' - 12y' + 9y = 0$.

(l) $y'' + 8y' + 25y = 0$.

(m) $3y'' + 2y' + y = 0$.

(n) $2y'' + 2y' + y = 0$.

(2) Para cada una de las siguientes funciones, encontrar una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes, tal que la función dada es solución de la ecuación.

(a) $f(x) = 3\,e^{2x}$.

(b) $f(x) = \cos x + 3 \operatorname{sen} x$.

(c) $f(x) = C_1\, e^x + C_2\, x\, e^x$.

(d) $f(x) = 3\,e^{2x} + 5\,e^{-x}$.

(3) Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, hallar la solución que satisface la condición inicial dada.

(a) $y'' = y; \quad y'(0) = y(0) = 1$.

(b) $9y'' + 6y' + 4y = 0; \quad y(0) = 3, y'(0) = 7.$

(c) $y'' - 4y' + 3y = 0; \quad y(0) = 7, y'(0) = 11.$

(d) $y'' - 6y' + 25y = 0; \quad y(0) = 3, y'(0) = 1.$

(4) Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $y'' = y + e^x.$

(b) $y'' - 4y = e^x + e^{2x} + \operatorname{sen} 2x.$

(c) $y'' + 4y = x^3 + 5.$

(d) $4y'' + y = \cosh x.$

(e) $y'' - y' = x^2\, e^x.$

(f) $y'' + 16y = e^{3x}.$

(g) $y'' - y' - 2y = 3x + 4.$

(h) $y'' - y' - 6y = 2 \operatorname{sen} 3x + \cos 5x.$

(i) $4y'' + 4y' + y = xe^{3x}.$

(j) $y'' + y' + y = \operatorname{sen}^2 x.$

(k) $2y'' + 4y' + 7y = x^2.$

(l) $y'' - 4y = \cosh 2x.$

(5) Resuelva e interprete (en términos del movimiento de un resorte) el problema a valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16\,x = 0$$

$$x(0) = 10 \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

CAPÍTULO 3

Sistemas de dos ecuaciones lineales de primer orden.

Resolución de sistemas de dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes, utilizando el método de eliminación. Aplicación: competencia entre especies.

1. Motivación.

Hasta ahora hemos considerado ecuaciones diferenciales donde la incógnita (o variable dependiente) es una función a valores reales. Al modelar situaciones de la vida real aparecen, de manera natural, ecuaciones diferenciales con dos o más funciones incógnitas, siendo cada una función de una misma variable dependiente (por lo general, el tiempo). Tales problemas conducen a un sistema de ecuaciones diferenciales. Vamos a ilustrar esta situación considerando un ejemplo muy sencillo.

Supongamos que lanzamos un proyectil de masa m, desde el suelo, con rapidez inicial v y ángulo de lanzamiento α. Este proyectil se va a mover en un plano. Para describir el movimiento consideraremos un sistema de coordenadas xy en este plano, tal como se ilustra en la siguiente figura.

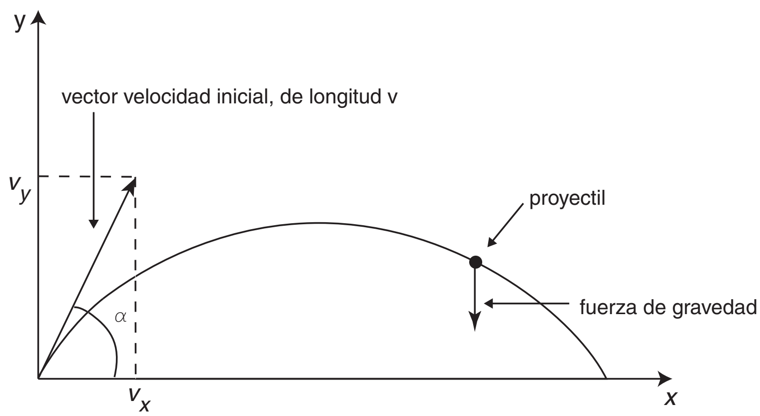

FIGURA 3.1. Lanzamiento de un proyectil

En nuestro modelo vamos a despreciar la resistencia del aire. Denotaremos por t el tiempo transcurrido desde el instante en que se lanza el proyectil, $x(t)$ denotará la primera coordenada del proyectil en el instante t e $y(t)$ la segunda.

Como en la dirección horizontal no actúa ninguna fuerza tenemos que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

En la dirección vertical actúa la fuerza de gravedad, por lo tanto tenemos que

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = -m\,g,$$

donde g es la aceleración de gravedad.

Además, ya que hemos colocado el origen de coordenadas en el punto de lanzamiento tenemos que

$$x(0) = y(0) = 0.$$

La velocidad inicial en la dirección horizontal es la componente horizontal del vector velocidad inicial y con la componente vertical la situación es análoga.

Por lo tanto tenemos que

$$\frac{dx}{dt}(0) = v_x = v\cos\alpha\,, \qquad \frac{dy}{dt}(0) = v_y = v\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

El análisis anterior nos permite concluir que las funciones $x(t)$ e $y(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\,g, \end{aligned}\right. \tag{3.1}$$

con condiciones iniciales

$$\left\{\begin{aligned} x(0) &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ \frac{dx}{dt}(0) &= v\cos\alpha, \\ \frac{dy}{dt}(0) &= v\,\mathrm{sen}\,\alpha. \end{aligned}\right.$$

Por lo que ya hemos estudiado de ecuaciones lineales de segundo orden tenemos que

$$
\begin{cases} x(t) = (v\cos\alpha)t \\ y(t) = (v\,\mathrm{sen}\,\alpha)t - \dfrac{1}{2}\,g\,t^2 \end{cases} \tag{3.2}
$$

A continuación vamos a hacer un análisis detallado de la solución en el caso particular en que la rapidez inicial es de 100 metros/segundos, el ángulo de lanzamiento de 60° y la masa del proyectil es de 10 gramos (por simplicidad supondremos que la aceleración de gravedad es de 10 metros/segundos^2).

De la ecuación (3.2) obtenemos que, en este caso,

$$x(t) = 50\,t, \tag{3.3}$$

$$y(t) = 50\sqrt{3}\,t - 5\,t^2. \tag{3.4}$$

Las dos ecuaciones anteriores nos dan una descripción detallada del movimiento del proyectil, ya que para cada instante t, nos indican la posición $(x(t), y(t))$ del proyectil.

Para averiguar la forma de la trayectoria del proyectil procedemos de la siguiente manera: primero despejamos t de la ecuación (3.3) y obtenemos

$$t = \frac{x}{50},$$

después substituimos este valor de t en la ecuación (3.4) y obtenemos

$$y = \sqrt{3}\,x - \frac{5\,x^2}{2500} = (\sqrt{3} - \frac{x}{500})\,x.$$

De esta última fórmula, que nos expresa la altura y del proyectil, en función de su coordenada horizontal x, podemos deducir que la trayectoria del proyectil tiene forma de parábola. Esta parábola corta al eje x en los puntos 0 y $x = 500\sqrt{3} \approx 866,02$ y su valor máximo es de 375. Por lo tanto podemos concluir que el proyectil vuelve a tocar tierra a 866,02 metros del punto de donde fue lanzado y alcanza una altura máxima de 375 metros.

Si resolvemos la ecuación $y(t) = 0$ (ver fórmula (3.4)) obtenemos $t = 10\sqrt{3} \approx 17,32$, por lo tanto el proyectil permaneció en el aire durante 17,32 segundos.

En la primera de las siguientes figuras mostramos el gráfico de x e y en función de t, observamos que x es una función lineal de t y que el gráfico de y en función de t es una parábola que corta al eje x en aproximadamente el punto $17,32$. La segunda figura corresponde con el gráfico de y como función de x, observamos que es un trozo de parábola, que corta al eje x en 0 y en $866,02$ y alcanza una altura máxima de 375.

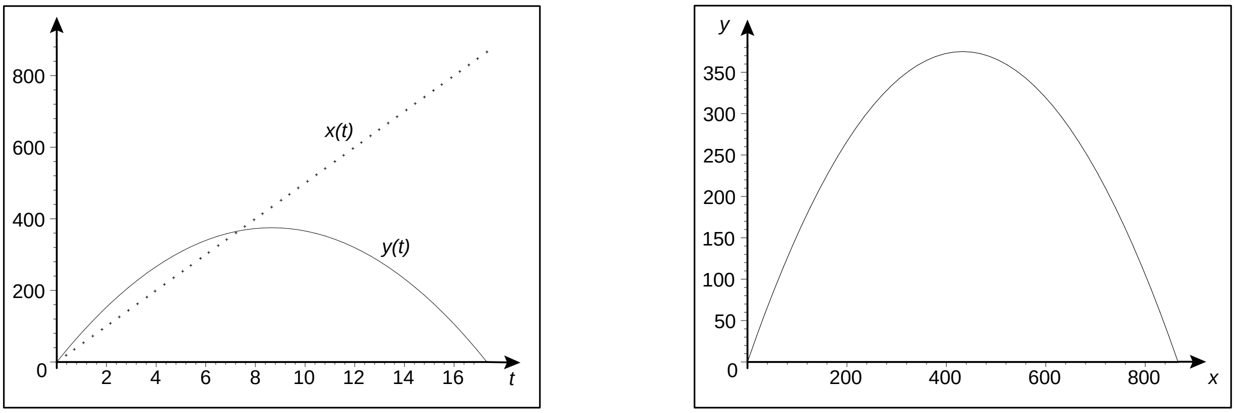

Figura 3.2.

2. El método de eliminación.

En la sección anterior resolvimos un sistema de dos ecuaciones lineales de segundo orden. Fue muy fácil resolverlo, ya que el problema se redujo a resolver por separado dos ecuaciones lineales de segundo orden, debido a que las ecuaciones eran independientes.

El enfoque más elemental para resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes consiste en la eliminación de variables dependientes mediante combinaciones adecuadas de parejas de ecuaciones. El objeto de este procedimiento es eliminar sucesivamente las variables dependientes hasta que quede solamente una ecuación con una única variable dependiente. En general esta ecuación será lineal y de orden superior y podrá resolverse con los métodos del capítulo anterior. Después de que se tenga la solución, las otras variables dependientes se determinarán a su vez usando las ecuaciones diferenciales originales o aquellas que hayan aparecido durante el proceso de eliminación. Este método de eliminación para sistemas diferenciales lineales se parece bastante al que se emplea para resolver sistemas algebraicos por eliminación de variables, hasta que queda sólo una. Es de lo más conveniente para el caso de sistemas pequeños y manejables.

Para grandes sistemas de ecuaciones diferenciales, así como para análisis teóricos, son preferibles los métodos matriciales, que están más allá de los objetivos de este curso.

En esta sección vamos a estudiar como resolver sistemas que constan de dos ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes, utilizando el método de eliminación. Después veremos algunos problemas en los que aparecen este tipo de sistemas.

Vamos a fijar y a explicar la notación que usaremos en lo que resta de este capítulo.

Cuando consideramos sistemas de dos ecuaciones diferenciales con dos incógnitas es usual denotar a la variable independiente por t y a las funciones incógnitas (o variables dependientes) por x e y ó $x(t)$ e $y(y)$. Es importante notar la diferencia con el capítulo anterior en el que x denotaba la variable independiente y la incógnita (o variable dependiente) la denotábamos por y.

También es usual usar $\dot{x}$ para denotar la derivada primera de $x(t)$ con respecto a t y $\ddot{x}$ para la segunda. Análogamente se usan $\dot{y}$ y $\ddot{y}$. Con esta notación el sistema (3.1) queda así:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = -m\,g. \end{cases}$$

2.1. Un ejemplo sencillo. Para ilustrar el método de eliminación vamos a comenzar resolviendo un ejemplo sencillo. Supongamos que queremos hallar la solución general del siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases} \tag{3.5}$$

Si derivamos la primera ecuación del sistema obtenemos

$$\ddot{x} = \dot{x} + \dot{y},$$

si usamos la segunda ecuación del sistema y substituimos, obtenemos

$$\ddot{x} = \dot{x} + x - y. \tag{3.6}$$

Si de la primera ecuación del sistema despejamos y obtenemos

$$y = \dot{x} - x. \tag{3.7}$$

Si substituimos en la ecuación (3.6), obtenemos

$$\ddot{x} = 2\,x, \tag{3.8}$$

que es una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, que ya sabemos como resolver.

El polinomio característico de la ecuación es (3.8) $p(\lambda) = \lambda^2 - 2$, tiene dos raíces reales que son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, por lo tanto, su solución general es

$$x = C_1\, e^{\sqrt{2}\,t} + C_2\, e^{-\sqrt{2}\,t},$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales. Substituyendo en (3.7) obtenemos

$$y = (\sqrt{2} - 1)\, C_1\, e^{\sqrt{2}\,t} - (\sqrt{2} + 1)\, C_2\, e^{-\sqrt{2}\,t}.$$

En conclusión, la solución general de la ecuación (3.5) es

$$
\begin{aligned}
x &= C_1\, e^{\sqrt{2}\,t} + C_2\, e^{-\sqrt{2}\,t}, \\
y &= (\sqrt{2}-1)\, C_1\, e^{\sqrt{2}\,t} - (\sqrt{2}+1)\, C_2\, e^{-\sqrt{2}\,t},
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales.

Si además nos hubiesen dado una condición inicial, debemos resolver un sistema de ecuaciones para determinar C_1 y C_2. Mas precisamente, supongamos que nos hubiesen pedido la solución del sistema (3.5) que satisface

$$x(0) = 2, \qquad y(0) = -2.$$

Procedemos de la siguiente manera: substituimos en (3.9) y obtenemos el sistema

$$
\begin{cases}
C_1 + C_2 = 2, \\
(\sqrt{2}-1)\, C_1 - (\sqrt{2}+1)\, C_2 = -2.
\end{cases}
$$

Resolviendo este sistema obtenemos $C_1 = C_2 = 1$, por lo tanto la solución particular que satisface la condición inicial dada es

$$
\begin{aligned}
x &= e^{\sqrt{2}\,t} + e^{-\sqrt{2}\,t}, \\
y &= (\sqrt{2}-1)\, e^{\sqrt{2}\,t} - (\sqrt{2}+1)\, e^{-\sqrt{2}\,t},
\end{aligned}
$$

2.2. El caso general. A continuación vamos a explicar cómo proceder con un sistema general

$$
\begin{cases}
\dot{x} = a\,x + b\,y, \\
\dot{y} = c\,x + d\,y,
\end{cases}
\tag{3.10}
$$

donde a, b, c y d son constantes reales.

Caso 1: $b = 0$. En este caso la primera ecuación del sistema es

$$\dot{x} = a\,x,$$

que es lineal de primer orden. Su solución general es

$$x = C_1\, e^{a\,t}.$$

Al substituir en la segunda ecuación obtenemos

$$\dot{y} = c\, C_1\, e^{a\,t} + d\,y,$$

es decir

$$\dot{y} - d\,y = c\, C_1\, e^{a\,t}.$$

Esta última ecuación es lineal de primer orden y ya sabemos como resolverla.

Caso 2: $b \neq 0$. El primer paso es derivar con respecto a t la primera ecuación, para obtener

$$\ddot{x} = a\,\dot{x} + b\,\dot{y}.$$

Después substituimos la segunda ecuación del sistema en la ecuación anterior y obtenemos

$$\ddot{x} = a\,\dot{x} + b\,c\,x + b\,d\,y.$$

Despejamos y de la primera ecuación del sistema (notar que en el caso anterior esto no era posible) y obtenemos

$$y = \frac{1}{b}(\dot{x} - a\,x).$$

Finalmente substituimos en la ecuación anterior y obtenemos

$$\ddot{x} = a\,\dot{x} + b\,c\,x + b\,d\,\frac{1}{b}(\dot{x} - a\,x),$$

o, lo que es lo mismo,

$$\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (a\,d - b\,c)\,x = 0.$$

Esta última ecuación es lineal, homogénea, de segundo orden y con coeficientes constantes, por lo tanto podemos hallar su solución general, utilizando el método estudiado en el capítulo anterior. Después que tenemos esta solución general utilizamos la igualdad $y = \dfrac{1}{b}(\dot{x} - a\,x)$, para hallar y.

Si el problema incluya una condición inicial del tipo

$$\begin{cases} x(t_o) = x_o, \\ y(t_o) = y_o, \end{cases} \tag{3.11}$$

después de obtener la solución general resolvemos el sistema (3.11) para hallar el valor que deben tener las constantes que aparecen en la solución general.

Ejemplo 3.1. Hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3\,y, \\ \dot{y} = -6\,x - y, \end{cases} \tag{3.12}$$

Derivando la primera ecuación obtenemos

$$\ddot{x} = \dot{x} + 3\,\dot{y},$$

sustituyendo $\dot{y}$ de la segunda ecuación,

$$\ddot{x} = \dot{x} - 18\,x - 3\,y,$$

despejando y de la primera ecuación y sustituyendo,

$$\ddot{x} = \dot{x} - 18\,x - 3\,\frac{\dot{x} - x}{3},$$

es decir,

$$\ddot{x} = \dot{x} - 18\,x - \dot{x} + x,$$

simplificando,

$$\ddot{x} + 17\,x = 0.$$

Luego

$$x(t) = C_1\,\operatorname{sen}(\sqrt{17}\,t) + C_2\,\cos(\sqrt{17}\,t).$$

Usando que

$$\dot{y} = \frac{\dot{x} - x}{3},$$

obtenemos

$$y(t) = \frac{\sqrt{17}}{3}\,C_1\,\cos(\sqrt{17}\,t)\; - \frac{\sqrt{17}}{3}\,C_2\,\operatorname{sen}(\sqrt{17}\,t) - \frac{1}{3}\,C_1\,\operatorname{sen}(\sqrt{17}\,t) - \frac{1}{3}\,C_2\cos(\sqrt{17}\,t).$$

En conclusión la solución general del sistema es

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_1\,\operatorname{sen}(\sqrt{17}\,t) + C_2\,\cos(\sqrt{17}\,t)\\
y(t) &= \frac{\sqrt{17}}{3}\,C_1\,\cos(\sqrt{17}\,t)\; - \frac{\sqrt{17}}{3}\,C_2\,\operatorname{sen}(\sqrt{17}\,t) - \frac{1}{3}\,C_1\,\operatorname{sen}(\sqrt{17}\,t) - \frac{1}{3}\,C_2\cos(\sqrt{17}\,t),
\end{aligned}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

3. Competencia e interacción entre especies.

Consideremos un área cerrada en la que conviven dos especies de seres vivos (animales o vegetales). Sea t el tiempo y sean $x = x(t)$ e $y = y(t)$ el número de individuos de cada una de las especies, expresado como función de t.

Vamos a suponer que existe cierta interacción entre ambas especies, por ejemplo:

(i) Tenemos dos especies animales y una de las especies es alimento de la otra, tal como es el caso de zorros que devoran conejos, tiburones que devoran otros peces, escarabajos que devoran pulgones.
(ii) Especies de insectos que favorecen la polinización de plantas.
(iii) Especies de árboles que le dan sombra a otra especie de árbol, impidiendo y limitando su crecimiento.

Es de mucho interés encontrar modelos matemáticos que permitan describir y predecir el comportamiento de las especies que interactúan. Vamos a trabajar con modelos muy simples, la primera simplificación es que supondremos que el crecimiento de cada una de las dos especies que interactúan depende solamente de ellas dos, es decir, ignoraremos los factores externos (factores ambientales, interacción con otras especies diferentes, abundancia o escasez de alimento para la presa, etc).

También vamos a suponer que, en un intervalo de tiempo Δt, el proceso de cambio en el número de individuos de cada especie se rige por las siguientes ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta x = \text{variación}\\ \text{en la especie 1}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{variación en la}\\ \text{especie 1 sin}\\ \text{interacción}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{cambios debidos}\\ \text{a la interacción}\\ \text{con la especie 2}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\Delta y = \text{variación}\\ \text{en la especie 2}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{variación en la}\\ \text{especie 2 sin}\\ \text{interacción}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c}\text{cambios debidos}\\ \text{a la interacción}\\ \text{con la especie 1}\end{array}\right\}$$

Si dividimos entre Δt y hacemos tender t a 0, obtenemos

$$\dot{x} = \left\{ \begin{matrix} \text{tasa de cambio} \\ \text{en la especie 1} \\ \text{sin interacción} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \text{tasa de cambio debido} \\ \text{a la interacción con} \\ \text{la especie 2} \end{matrix} \right\}$$

$$\dot{y} = \left\{ \begin{matrix} \text{tasa de cambio} \\ \text{en la especie 2} \\ \text{sin interacción} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \text{tasa de cambio debido} \\ \text{a la interacción con} \\ \text{la especie 1} \end{matrix} \right\}$$

Como simplificación adicional vamos a suponer lo siguiente:

(a) La tasa de cambio de individuos en cada especie, sin interacción, es proporcional al número de individuos de la especie.

(b) La tasa de cambio en la especie 1 debido a la interacción con la especie 2 es proporcional al número de individuos de la especie 2 y viceversa.

Con esta suposición llegamos al siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= a\,x + b\,y, \\ \dot{y} &= c\,x + d\,y, \end{aligned} \right. \tag{3.13}$$

donde a, b, c y d son números reales, cuyo valor y signo depende del tipo de interacción entre las especies.

A continuación vamos a estudiar un ejemplo basados en este modelo.

Ejemplo 3.2. Supongamos que tenemos dos especies de animales, una de las cuales es presa y la otra es depredadora. Tal como antes t es el tiempo, que lo mediremos en años.

El número de presas en el instante t, contadas en miles de individuos, lo denotaremos por $x(t)$.

El número de depredadores en el instante t, contados en miles de individuos, lo denotaremos por $y(t)$.

Vamos a suponer que x e y satisfacen el siguiente sistema.

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= 3\,x - \,y, \\ \dot{y} &= 3\,x + \,y, \end{aligned} \right. \tag{3.14}$$

con condición inicial

$$x(0) = 3 \qquad\qquad y(0) = 2.$$

Es decir, de acuerdo con la discusión previa, estamos suponiendo lo siguiente:

(a) La tasa de cambio de individuos en cada especie, sin interacción, es proporcional al número de individuos de la especie. La constante de proporcionalidad para las presas es 3 y para los depredadores es 1.

(b) La tasa de disminución en la especie presa, debido a su interacción con la especie depredadora, es proporcional al número de depredadores, la constante de proporcionalidad es 1 (que aparece con signo negativo porque es disminución).

(c) La tasa de aumento en la especie depredadora, debido a su interacción con la especie presa, es proporcional al número de presas y la constante de proporcionalidad es 3.

(d) Inicialmente hay 3.000 presas y 2.000 depredadores.

La solución de esta ecuación es (hacerlo a manera de ejercicio)

$$x(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\,t) + 3\,\cos(\sqrt{2}\,t) \right) e^{2t},$$

$$y(t) = \left(\frac{7\,\sqrt{2}}{2} \,\mathrm{sen}(\sqrt{2}\,t) + 2\,\cos(\sqrt{2}\,t) \right) e^{2t}.$$

Examinemos el comportamiento del modelo en el intervalo $0 \leq t \leq 1$. La primera de las siguientes figuras nos muestra los gráficos de x e y en función de t, la segunda nos muestra los puntos de la forma $(x(t), y(t))$, para $0 \leq t \leq 1$ (esto es lo que se llama una trayectoria del sistema).

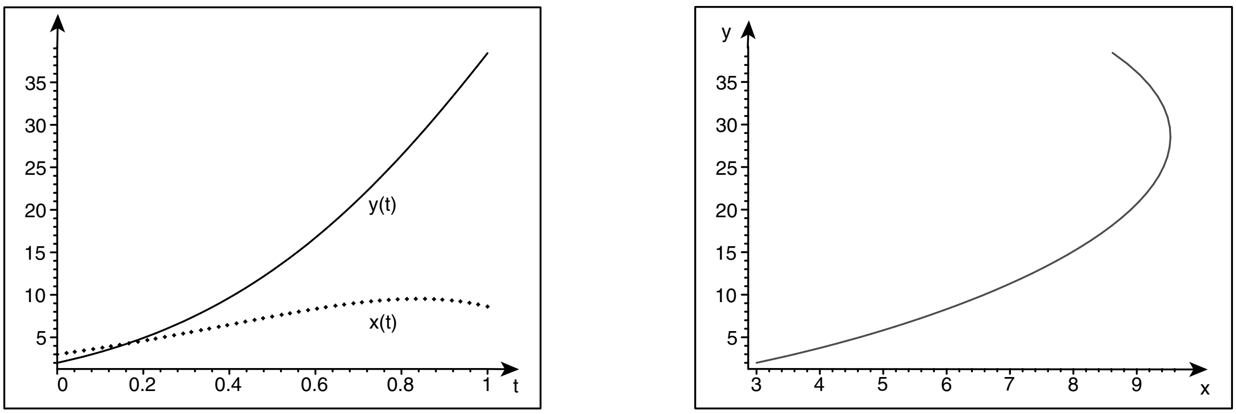

Figura 3.3. Comportamiento del sistema para $0 \leq t \leq 1$

Lo que se observa es bastante natural, al principio ambas especies comienzan a aumentar en número y después, cuando hay un aumento significativo del número de depredadores, comienza a disminuir el número de presas. La trayectoria del sistema refleja claramente esta situación.

Veamos ahora que ocurre si consideramos un intervalo de tiempo mayor, por ejemplo $0 \leq t \leq 2$. En la siguiente figura tenemos los gráficos de x e y en función de t.

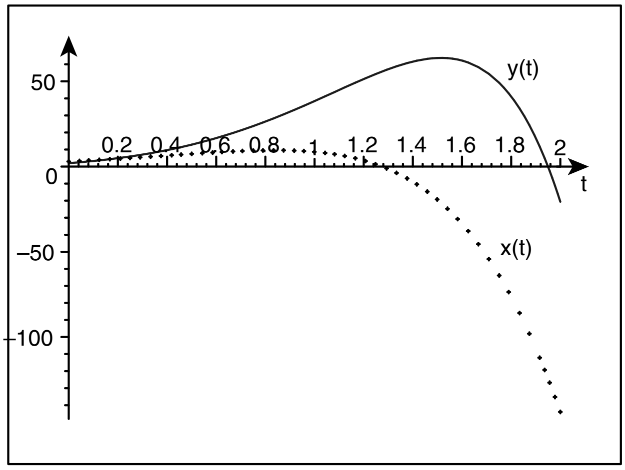

Figura 3.4. Comportamiento del sistema para $0 \leq t \leq 2$

Aquí comenzamos a observar una situación que no se corresponde con nuestro problema: ¡el número de individuos comienza a tomar valores negativos!

Esta situación se nos presenta porque, para obtener un sistema de ecuaciones cuya solución estuviese a nuestro alcance, hemos simplificado excesivamente el modelo y esto introduce errores. Por ejemplo en el sistema (3.14), observamos que $\dot{y}$ puede ser positiva aunque x sea igual a cero, es decir los depredadores se pueden reproducir sin alimento.

Lo anterior no quiere decir que debamos desechar nuestro modelo sencillo por malo, lo que realmente ocurre es que este modelo resulta adecuado para un intervalo pequeño de tiempo. Notemos que si los depredadores logran almacenar algo de alimento podrían seguirse reproduciendo durante un tiempo en ausencia de presas, pero esta situación está limitada en el tiempo.

Podemos hacer una analogía con el crecimiento exponencial y el logístico: la ecuación diferencial que corresponde con el crecimiento exponencial la podemos ver como una simplificación, para valores pequeños de la función, de la ecuación logística y el crecimiento exponencial es similar al logístico cerca de cero.

4. Las ecuaciones predador-presa de Lotka y Volterra.

En esta sección vamos a estudiar un modelo clásico para una situación depredador presa. Este modelo fue ideado alrededor del año 1920 por el matemático italiano Vito Volterra, (1860-1940) y, desarrollado independientemente en la misma época, por el biofísico austriaco Alfred James Lotka, (1880-1940).

Volterra estudiaba las variaciones periódicas observadas en las poblaciones de tiburones y sus peces-alimento en el Mar Adriático.

Tal como antes, sea $x(t)$ el número de presas y sea $y(t)$ el número de depredadores en el instante t. En este modelo se supone lo siguiente:

(a) En ausencia de depredadores la población de presas crecería a una tasa natural proporcional al número de individuos.

(b) En ausencia de presas la población de depredadores disminuye a una tasa proporcional al número de individuos.

(c) Cuando tanto las presas como los depredadores están presentes, ocurre una combinación de estas tasas de crecimiento y decrecimiento, en la que la población de presas disminuye y la de los depredadores aumenta, en proporción a la frecuencia de los encuentros entre individuos de las dos especies. Se supone además que la frecuencia de encuentros es proporcional al producto $x\,y$, ya que al aumentar cualquiera de las dos poblaciones aumenta el número de encuentros.

Al interpretar todo lo anterior, en términos de derivadas, obtenemos que x e y satisfacen un sistema de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x - B\,x\,y, \\ \dot{y} = -C\,y + D\,x\,y, \end{cases} \tag{3.15}$$

donde A, B, C y D son constantes positivas.

Este sistema de ecuaciones, que a simple vista se parece a los que hemos estudiado, no es nada sencillo. No es posible hallar sus solución de manera explícita, mediante métodos numéricos es posible aproximar sus soluciones.

Consideremos el siguiente caso particular

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x\,y, \\ \dot{y} = (0,3)\,x\,y - (0,3)\,y, \end{cases} \tag{3.16}$$

con condición inicial

$$x(0) = 2 \qquad\qquad y(0) = 2.$$

Suponemos que x e y representan al número de presas y depredadores, contadas en miles de individuos y t es el tiempo medido en semanas.

En la siguiente figura tenemos los gráficos de las soluciones.

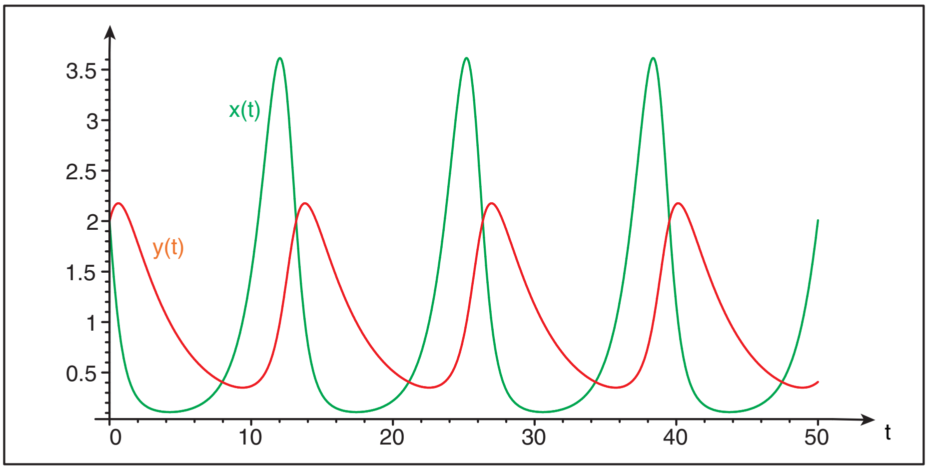

FIGURA 3.5. Comportamiento del sistema para $0 \leq t \leq 50$

Se observa que el número de presas y de depredadores comienza a disminuir muy rápidamente hasta casi extinguirse, con cierto desfase entre presas y depredadores. En el momento en que hay muy pocos depredadores comienza a aumentar el número de presas y después el número de depredadores alcanzándose valores máximos con desfase y entrando en un ciclo que se repite.

La siguiente figura muestra la trayectoria correspondiente.

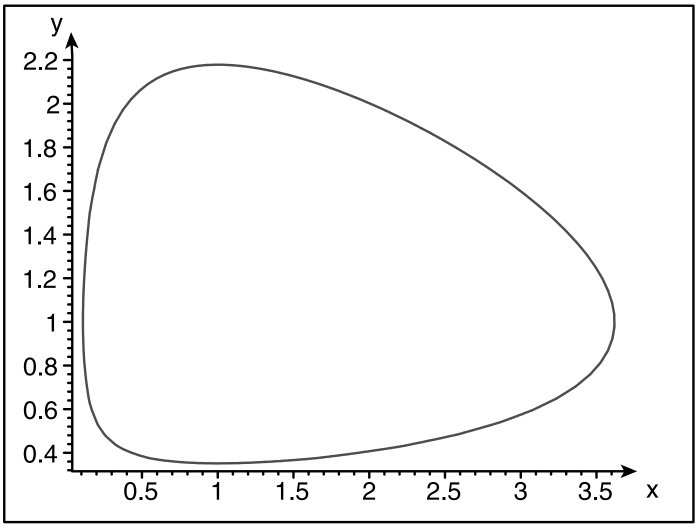

FIGURA 3.6. Trayectoria del sistema

5. Sección optativa: Uso del computador para resolver y analizar ecuaciones diferenciales.

Hoy en día existen paquetes tales como el "Maple" que dan directamente la solución de una ecuación diferencial y también de un sistema de ecuaciones diferenciales.

Por ejemplo, si estamos usando el programa Maple y queremos hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3\,y, \\ \dot{y} = -6\,x - y, \end{cases} \tag{3.17}$$

(ver Ejemplo 3.1) debemos colocar la siguiente instrucción:

sys1 := [diff(x(t),t) = x(t)+3*y(t), diff(y(t),t) = -6*x(t)-y(t)];
soll := dsolve(sys1);

Una vez que hemos colocado la instrucción y pulsamos la tecla "Enter", obtenemos

$$sys1 := [\frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t) + 3\,\mathrm{y}(t),\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{y}(t) = -6\,\mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t)]$$

$$sol1 := \{\mathrm{x}(t) = \mathit{C1}\,\sin(\sqrt{17}\,t) + \mathit{C2}\,\cos(\sqrt{17}\,t),$$
$$\mathrm{y}(t) = \frac{1}{3}\,\mathit{C1}\,\cos(\sqrt{17}\,t)\,\sqrt{17} - \frac{1}{3}\,\mathit{C2}\,\sin(\sqrt{17}\,t)\,\sqrt{17} - \frac{1}{3}\,\mathit{C1}\,\sin(\sqrt{17}\,t) - \frac{1}{3}\,\mathit{C2}\,\cos(\sqrt{17}\,t)\}$$

Igualmente el Maple nos permite obtener gráficos de funciones y los gráficos de las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales. Muchos de los gráficos que aparecen en esta guía han sido elaborados usando este programa.

En este punto es importante hacer énfasis en lo siguiente: Aunque contamos con herramientas muy poderosas que permiten obviar cálculos y procedimientos tediosos, es muy importante practicar mucho "a mano" al momento de aprender las técnicas. La destreza así adquirida facilitará el trabajo a la hora de utilizar instrumentos más sofisticados. La siguiente analogía es válida: el uso que puede darle a una calculadora una persona que no domina la aritmética elemental es sumamente pobre, así que quien no domine los conceptos y las técnicas para resolver ecuaciones diferenciales podrá aprovechar muy poco el computador como herramienta auxiliar.

Ejercicios.
Sistemas de dos ecuaciones lineales de primer orden.

(1) Hallar la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -2x. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -6x - 2y. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -5x - 3y. \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \dot{v} = 2v - 2w, \\ \dot{w} = -5w - 2v. \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \dot{x} = -4y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

(i) $\begin{cases} \dot{x} = 3y, \\ \dot{y} = -3x. \end{cases}$

(j) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$

(k) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y, \\ \dot{y} = -x + y. \end{cases}$

(l) $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$

(m) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$

(n) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 5x - 5y. \end{cases}$

(2) Hallar la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales con condición inicial.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = 5x - y, & y(0) = 3. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = -x - y, & x(0) = 1, \\ \dot{y} = x - y, & y(0) = -1. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{v} = 2v - 2w, & v(0) = 0, \\ \dot{w} = 3v + 5w, & w(0) = 2. \end{cases}$

(3) $\star$ Dos envases están inicialmente llenos de agua pura. El envase A tiene una capacidad de $0,5$ litros y el envase B una capacidad de $0,25$ litros. Se comienza a agregar agua con una concentración de sal de 100 g/l en el envase A a una tasa de $0,5$ litros/hora. El agua fluye del envase A al envase B a una tasa de $0,5$ litros/hora. El agua sale del envase B al desagüe a una tasa de $0,5$ litros/hora. Encuentre las cantidades de sal en cada envase como una función del tiempo t.

(4) $\star$ Suponga que una población está formada por dos grupos: adultos y niños. Sean x e y el número de niños y adultos, respectivamente, en el instante t. Suponga que los niños no se reproducen. Estudie la factibilidad de el modelo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(\delta_1 + \alpha)x + \beta y, & x(t_o) = x_o \geq 0, \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -\delta_2 y + \alpha x, & y(t_o) = y_o \geq 0. \end{cases}$$

donde δ_1, δ_2, α y β son constantes positivas.

(5) $\star$ Se establecen dos cuentas de inversión con \$1.000 iniciales en la cuenta A y \$2.000 iniciales en la cuenta B. La cuenta A, es una cuenta a largo plazo, gana 10%de interés anual compuesto diariamente. La cuenta B gana 5% de interés anual compuesto diariamente. Se hacen depósitos en B a una tasa de \$10 al día. Cada día el Banco transfiere dinero de B a A a una tasa anual de 20% de la diferencia entre B y \$2.000. Establezca las ecuaciones diferenciales que modelan esta situación.

Bibliografía

[1] Alson, P. *Cálculo Básico.* Editorial Erro.

[2] Apostol, T. *Calculus Volumen 1.* Editorial Reverté.

[3] Batschelet, E. *Introduction to Mathematics for Life Scientist.* Springer Verlag.

[4] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Guía de problemas de Cálculo III para Matemáticos.* Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[5] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Cálculo diferencial en una variable.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[6] Bruzual, R. y Domínguez, M. *Cálculo integral en una variable.* Publicaciones del Laboratorio de Formas en Grupos, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[7] Edwards, C. H. y Penney, D.E. *Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones.* Prentice Hall.

[8] Kiseliov, A., Krasnov, M. y Makarenko, G. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.* Editorial MIR.

[9] Miranda, Guillermo *Matemática III - Física* Fac. Ciencias. UCV.

[10] Olivares, M. *Ecuaciones diferenciales ordinarias.* Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[11] Pérez, A. *Guía de problemas de Matemática III para Biología y Química.* Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[12] Quintana, Y. *Guía de problemas de Matemática III.* Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

[13] Salas, J. y Suárez, J. *Guía de problemas de Matemática III para Computación.* Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela.

Índice