



Matemáticas avanzadas con aplicaciones en Python-SymPy.

De los espacios lineales al análisis vectorial.

**Héctor Hernández y
Luis. A. Núñez**

11 de enero de 2025

Matemáticas avanzadas con aplicaciones en Python-SymPy

De los espacios lineales al análisis vectorial

Héctor Hernández y Luis A. Núñez

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia y

Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela.

Bucaramanga, Colombia

11 de enero de 2025

Índice general

| | |
|---|------------|
| Prefacio | I |
| 1. Los vectores de siempre | 1 |
| 1.1. Vectores geométricos | 1 |
| 1.2. Vectores en componentes | 15 |
| 1.3. Aplicaciones del álgebra vectorial | 26 |
| 1.4. Álgebra vectorial con índices | 35 |
| 1.5. Un comienzo a la derivación e integración de vectores | 45 |
| 1.6. Vectores y números complejos | 69 |
| 2. Espacios vectoriales lineales | 88 |
| 2.1. Grupos, campos y espacios vectoriales | 89 |
| 2.2. Espacios métricos, normados y con producto interno | 106 |
| 2.3. Variedades lineales | 123 |
| 2.4. Aproximación de funciones | 142 |
| 3. Vectores duales y tensores | 163 |
| 3.1. Funcionales lineales | 163 |
| 3.2. Tensores y producto tensorial | 177 |
| 3.3. Aplicaciones en física: esfuerzos, inercia y energía libre | 207 |
| 3.4. Vectores, tensores y espacios pseudoeuclidianos | 218 |
| 3.5. Funcionales lineales y distribuciones | 233 |
| 3.6. Bases continuas y de ondas planas | 242 |
| 4. Operadores lineales | 257 |
| 4.1. Operadores lineales | 257 |
| 4.2. Tipos de operadores | 271 |
| 4.3. Representación matricial de operadores | 283 |
| 4.4. Sistemas de ecuaciones lineales | 312 |
| 4.5. Autovectores y autovalores | 323 |
| 4.6. Autovalores y autovectores de matrices importantes | 339 |

| | |
|---|------------|
| 5. Campos y análisis vectorial | 364 |
| 5.1. Coordenadas curvilíneas generalizadas y campos tensoriales | 364 |
| 5.2. La fauna de los operadores diferenciales vectoriales | 400 |
| 5.3. Integrales de campos vectoriales y teoremas integrales | 434 |
| 5.4. Teoría de potencial | 459 |
| 6. Apéndice | 477 |
| 6.1. Sistemas de Álgebra Computacional | 477 |
| 6.2. Guía rápida sobre SymPy | 479 |

Prefacio

Como toda obra, el contenido de este libro tuvo dos motivaciones en sus inicios. Primero la insatisfacción con lo que estaba disponible y, esa necesidad de discutir un conjunto de conceptos con el matiz personal de los autores. En segunda instancia, contribuir al acervo científico en español. Hacer ciencia en español amplía el acceso a comunidades hispanas y, sobre todo, transmite un sabor distinto en su estudio.

Durante más de veinte años se fue dibujando la ruta que llevó a esta publicación. En estas notas confluyen: conceptos abstractos “aterrizados” mediante numerosos ejemplos y una herramienta computacional que permita resolver problemas de forma algorítmica. La fórmula, muy de nuestro gusto, es asociar un concepto a una variedad de aplicaciones y sazónarla con algoritmos que ilustren la solución de problemas. Es decir, al marco *concepto-ejemplo* se le suma la componente *experimental*. La herramienta de cálculo algebraico nos permite deslastrarnos de la resolución de ejemplos simples y adentrarnos en posibles casos realistas.

La capacidad de realizar cálculos simbólicos, manipular expresiones algebraicas complejas y resolver ecuaciones de manera automatizada ha ampliado significativamente el alcance y la eficiencia de nuestra labor profesional. Pensamos que la utilización de herramientas computacionales enriquece enormemente el aprendizaje de los estudiantes ya que les ayuda a familiarizarse con lenguajes de programación y los incentiva a desarrollar sus propias técnicas de cálculo. Lo vivimos cuando pasamos de la regla de cálculo y las tablas de logaritmos a las calculadoras de bolsillo. Lo estamos transitando con la irrupción de los ambientes de inteligencia artificial conectados a esquemas de cálculo numérico y algebraico. La programación, entendida como codificación, va a desaparecer y el razonamiento algorítmico será cada vez más indispensable para los estudiantes de ciencias e ingeniería. La inteligencia artificial codificará los algoritmos que los humanos propongamos. Si los estudiantes son capaces de formular la solución de un problema de forma algorítmica significa que lo han comprendido.

El pensamiento computacional ha revolucionado la forma en que abordamos los desafíos matemáticos en la era moderna. SymPy, la biblioteca de Python para matemáticas simbólicas, es una herramienta inapreciable para estudiantes, investigadores y profesionales en diversos campos científicos. Integrar SymPy, Python y cuadernos Jupyter en la enseñanza de métodos matemáticos para físicos no solo fortalece la comprensión teórica de las técnicas matemáticas, sino que también desarrolla habilidades prácticas de resolución de problemas mediante algoritmos. SymPy no requiere conocimientos previos de programación y permite que el estudiante se familiarice con la sintaxis de lenguajes computacionales más avanzados. Además, está integrada al ecosistema Python que facilita enormemente las tres actividades fundamentales del cómputo científico, a saber: el cálculo algebraico, el numérico y la visualización.

Los conceptos abstractos son útiles porque engloban, bajo un mismo enfoque, una multiplicidad de aplicaciones que normalmente las percibimos aisladas. Por eso seleccionamos la notación de Dirac para el desarrollo y reconsideración de los conceptos de espacios vectoriales, espacios vectoriales duales y espacios tensoriales. La notación de Dirac, por su compacidad y conveniencia, puede considerarse análoga a los diagramas de Feynman en la teoría cuántica de campos. Ambas son herramientas elegantes que simplifican cálculos complejos: la notación de Dirac facilita operaciones algebraicas abstractas en espacios de Hilbert, mientras que los diagramas de Feynman simplifican integrales multidimensionales que describen interacciones entre partículas. Enfatizamos que los *kets*, mas allá de su significado en Mecánica Cuántica, representan vectores abstractos, que pueden ser representados por vectores en \mathbb{R}^n , funciones continuas, $\mathcal{C}_{[a,b]}^\infty$, matrices, o cualquier objeto matemático que cumpla con las propiedades de espacio vectorial. Al igual que los diagramas de Feynman, la notación de Dirac suele ser desconocida para los estudiantes de primeros niveles debido a su ausencia en los cursos iniciales de los pregrados en Matemáticas, Física o ingeniería. Esto convierte su dominio en un desafío significativo cuando llegan a cursos de Mecánica Cuántica o cursos avanzados en tecnologías cuánticas. Hoy, gracias a la presión impuesta por el desarrollo de la computación cuántica la notación de Dirac esta llegando a los estudiantes de ingeniería y, mas aún, a colegios secundarios con resultados muy alentadores ¹

Estas notas se desarrollan a lo largo de cinco capítulos. Cada uno se inicia describiendo una posible ruta para su lectura. El libro transcurre a través de 26 secciones, cada una estructurada con conceptos, ejemplos resueltos, ejercicios propuestos y códigos de SymPy. Acumulamos un total de 155 ejemplos, 26 códigos de SymPy², y 243 ejercicios propuestos. Los ejemplos son muy detallados para que puedan ser utilizados en el trabajo independiente de los estudiantes. A lo largo de los capítulos, en notas a pie de página, recomendamos referencias específicas para algunos de los temas tratados. Cada capítulo culmina con una bibliografía recomendada para extender o contrastar el enfoque que nosotros presentamos.

En ese espíritu de mostrar que los conceptos abstractos engloban bajo un mismo enfoque una multiplicidad de aplicaciones que normalmente percibimos aisladas, presentamos tempranamente algunos temas avanzados como: las aproximaciones de funciones en base de Polinomios de Legendre, los espacios pseudo-euclidianos, las series y transformadas de Fourier, las distribuciones y las bases continuas. En el transcurso del texto somos repetitivos con los conceptos y los presentamos desde distintas perspectivas en los diferentes contextos. El capítulo 1, lo consideramos un resumen mínimo de lo que deben saber los estudiantes de Física en su primer curso de Métodos Matemáticos. Los capítulos centrales del texto, 2, 3, y 4, son fieles a una notación abstracta que creemos conveniente y que nos marcó a una generación. Es una mezcla de las notaciones de los libros de *Gravitation* de Misner, Thorne, and Wheeler del 1973 y de Mecánica Cuántica de Cohen-Tannoudji, Diu, B. Laloë, en el lejano 1977. El capítulo 5 es una aplicación de los conceptos desarrollados en los tres capítulos anteriores. Finalmente, en el apéndice presentamos una introducción a la herramienta computacional que puede ser utilizado de forma independiente para ganar experiencia en SymPy.

Los temas desarrollados en esta obra y su organización no corresponden a un curso particular y distintas selecciones de los materiales aquí expuestos han sido utilizadas durante casi dos décadas en

¹Algunas experiencias comienzan a ser reportadas en la literatura que muestran la llegada de la notación de Dirac a cursos iniciales de pregrado y avanzados de secundaria. Pueden consultar Levy, J., y Singh, C. (2025). "Teaching quantum formalism and postulates to first-year undergraduates". American Journal of Physics, 93(1), 46-51 y también Hennig, F., Tóth, K., Veith, J., y Bitzenbauer, P. (2024). "Introducing quantum physics concepts and Dirac notation at the secondary school level: Insights into student reasoning from an acceptance survey". Physical Review Physics Education Research, 20(2), 020147.

²Los códigos Python se pueden consultar en el repositorio: <https://github.com/nunezluiss/CodigosLibroMatematicas>

cursos de Métodos Matemáticos para estudiantes de pregrado en Física de la Universidad de los Andes (Mérida-Venezuela) y en los cursos de pregrado y posgrado para estudiantes en Física e Ingeniería de Sistemas en la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga-Colombia)³.

Es preciso agradecer los comentarios, críticas y correcciones de los amigos, Williams Barreto, Ysabel Briceño, Adel Khoudeir, Justino Martínez, Bernardo Mayorga, Eduardo Pestana y Héctor Rago, quienes leyeron las primeras versiones de esta obra. Un agradecimiento especial a Hernán Asorey, quien, luego de la experiencia con una versión muy preliminar en un curso de Teoría Cuántica de Campos, se ofreció a prologar el texto. Gracias también a esos cientos de muchachos y muchachas por soportar la utilización de estas notas que siempre seguirán siendo inacabadas.

Héctor Hernández y Luis A. Núñez

Bucaramanga 2025

³Ejemplos de cursos donde se ha utilizado este texto se pueden descargar desde: <https://github.com/nunezluis/CodigosLibroMatematicas/tree/main/EjemplosCursos>. Allí encontrarán también las presentaciones asociadas a algunos tópicos desarrollados en estas notas.

Capítulo 1

Los vectores de siempre

La ruta de este capítulo

Suponemos que los estudiantes que se acercan a estas notas, no solo conocen parte de los términos aquí expuestos, sino que son capaces de buscar muchos otros en la red. Por lo tanto, concebimos que este capítulo apunte a varios objetivos. Por un lado, buscamos refrescar un conjunto de conceptos básicos que seguramente son conocidos por el lector. Si no lo son, aprovechamos la oportunidad para presentarlos –en el marco de \mathbb{R}^3 , es decir ejemplificando con vectores tridimensionales– utilizando el lenguaje abstracto al cual haremos referencia en los próximos capítulos.

Siguiendo esta lógica discutimos las propiedades de los vectores en la próxima sección 1.1; la independencia lineal, bases, producto interno (sección 1.1.3) y los sistemas de coordenadas (sección 1.2). Con la excusa del álgebra vectorial en coordenadas, introducimos en la sección 1.4 algunos elementos de álgebra vectorial con índices. Muchos de estos términos no son cubiertos tan tempranamente en cursos de métodos matemáticos (sección 1.4). Adicionalmente, esta excusa nos sirve de puente para presentar nociones operativas de tensores y de análisis de vectorial que formalizaremos más adelante en los capítulos 3 y 5, respectivamente.

La representación de los números complejos como vectores, con “componentes” reales y complejas justifica la incorporación de este repaso en la última sección 1.6. Finalmente, este capítulo nos sirve para iniciar el uso de la herramienta de cálculo algebraico que nos acompañará en el resto del libro y que se detalla en el apéndice 6. Los códigos de SymPy de este capítulo los pueden encontrar en este enlace <https://github.com/nunezluis/CodigosLibroMatematicas/tree/main/Capitulo01>.

1.1 Vectores geométricos

Desde los primeros cursos de Física en educación media, venimos hablando de vectores como cantidades que tienen que ser representadas con más de un número. Son varias las razones que obligan a introducir este (y otro) tipo de cantidades “multidimensionales”.

Es común que tropecemos con: escalares, vectores, tensores y espinores, dependiendo del número de cantidades que necesitemos para representar determinado objeto matemático. Podremos constatar que las leyes de la Física vienen escritas en forma vectorial (o tensorial) y, por lo tanto, será la misma ley para la familia de observadores equivalentes. Para las leyes de Newton y Maxwell serán observadores que

no estén acelerados entre ellos. En la gravitación einsteniana cualquier observador será equivalente. Lo que define la familia de observadores equivalentes son las leyes de transformación que los vincula. En el caso newtoniano serán las transformaciones de Galileo, para las leyes de Maxwell las transformaciones de Lorentz y para la gravitación einsteniana son las transformaciones generales de coordenadas.

1.1.1 Escalares y vectores

Dejaremos para más adelante caracterizar objetos como tensores y espinores, por ahora nos contentaremos con refrescar nuestros recuerdos con cantidades como:

- **Escalares:** Serán aquellas cantidades las cuales se representan con UN solo número, una magnitud: temperatura, volumen, masa, entre otras. Es costumbre no denotarlas de manera especial, así $T = 5^\circ\text{C}$ representará una temperatura de 5 grados centígrados.
- **Vectores:** Serán cantidades las cuales, para ser representadas por un objeto matemático, necesitan más de una cantidad: requieren de UN número, UNA dirección y UN sentido. Entre las cantidades que típicamente reconocemos como vectores están: la velocidad, la aceleración, la fuerza. En términos gráficos podremos decir que un vector será un segmento orientado, en el cual su dimensión representará su módulo, su orientación la dirección y el sentido. Para diferenciarlos de las cantidades escalares hay una variedad de representaciones, entre ellas: en negrita \mathbf{a} ; con una flecha arriba de la cantidad \vec{a} ; con una tilde arriba o abajo \tilde{a} ; o explicitando el origen y destino del segmento orientado \overrightarrow{OP} . El módulo del vector lo representaremos dentro de la función valor absoluto, o sencillamente sin la flecha arriba $a = |\mathbf{a}| = |\vec{a}|$.

Los vectores son “objetos geométricos” independientes del sistema de coordenadas. Sus características (módulo, dirección y sentido) se preservarán en todos los sistemas de coordenadas. Más aún, habrá vectores que podremos desplazar paralelos a ellos mismos (es decir, conservando su módulo dirección y sentido), y seguirán representando las mismas cantidades. Por ello encontraremos el término de *vectores deslizantes*. También habrá vectores atados a un punto en el espacio, por cuanto representan una de las propiedades de ese punto: la velocidad del viento, el campo eléctrico, o sus variaciones son ejemplos de *vectores atados* (observe la figura 1.1 como ejemplos ilustrativos).

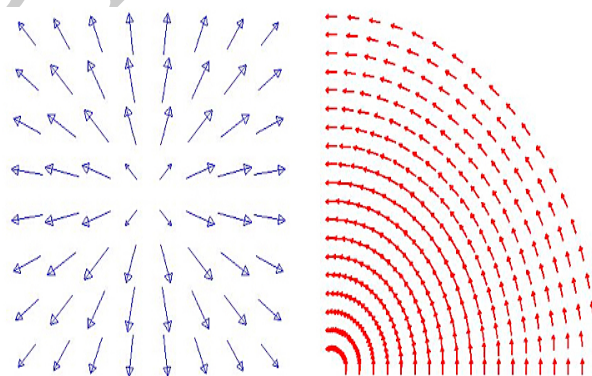


Figura 1.1: Ejemplos de *vectores atados*. A cada punto x, y se le asocia un número, una dirección y un sentido.

Esos vectores “atados” generarán el concepto de campo vectorial que discutiremos en el capítulo 5.

1.1.2 Álgebra de vectores

Enumeraremos rápidamente el álgebra de vectores sin hacer referencia a un sistema de coordenadas en particular. Desde los cursos básicos de matemáticas nos enseñaron a representar gráficamente esta álgebra, así tenemos que:

- **Vector nulo.** Es aquel que tiene por módulo cero y no se le asigna dirección ni sentido. Es frecuente representar al vector nulo por $\mathbf{0}$.

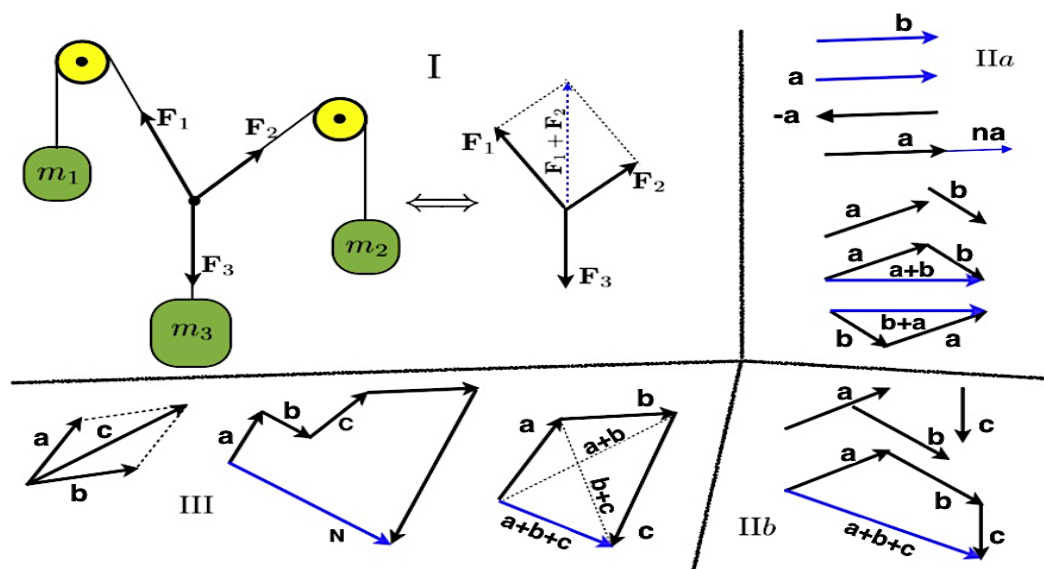


Figura 1.2: Vectores representados como segmentos de flechas orientados, vectores geométricos, y algunas de sus posibles operaciones. En el cuadrante I mostramos el diagrama de cuerpo libre de un sistema, donde los vectores *deslizantes* nos permiten conceptualizar su distribución de fuerzas. En el cuadrante IIa ilustramos la multiplicación de un vector por un escalar. En el IIb y III mostramos la suma de vectores.

- **Vector unitario.** Es aquel que tiene por módulo la unidad, es muy útil por cuanto, para efectos algebraicos, “contiene” únicamente dirección y sentido. Lo denotaremos con un acento circunflejo: $\hat{u}_a = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, con lo cual todo vector se podrá expresar por un módulo en la dirección y sentido de un vector unitario: $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \hat{u}_a = a \hat{u}_a$.
- **Comparación de vectores.** Dos vectores podrán ser comparados cuando tienen la misma dirección. Al comparar sus módulos diremos que pueden ser mayores, menores o iguales. Por lo tanto, tal y como mostramos en el cuadrante IIa de la figura 1.2, dos vectores serán iguales, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, si tienen el mismo módulo, dirección y sentido.
- **Multiplicación por un número.** Multiplicar un vector por un número escalar, $\alpha \neq 1$, modifica su módulo. Si $\alpha > 0$, el vector conserva su dirección pero cambia su magnitud. Si $\alpha < 0$, el vector invierte su sentido y, además, puede cambiar su magnitud dependiendo del valor de α . Tal y como puede apreciarse en el cuadrante IIa de la figura 1.2. Claramente dos vectores proporcionales serán colineales. Diremos además, que el inverso del vector \mathbf{a} será la multiplicación de \mathbf{a} por (-1) . Esto es: $(-1) \mathbf{a} = -\mathbf{a}$.
- **Suma de vectores.** Para sumar vectores utilizamos la regla del paralelogramo. Es decir, desplazamos paralelamente uno de los vectores y lo colocamos a continuación del otro, de tal forma que la diagonal del paralelogramo, que tiene por lados los vectores sumandos, constituye el vector suma, (ver cuadrantes IIa y IIb de la figura 1.2).

Este esquema se puede generalizar para varios vectores tal y como lo mostramos en el cuadrante III de la figura 1.2. Allí construimos un polígono cuyos lados los constituyen los vectores sumandos \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} y \mathbf{n} con $\mathbf{n} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$.

Igualmente, podemos definir la resta de vectores al sumar el inverso. Esto es:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \Rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) .$$

Gráficamente, la resta de dos vectores se representa colocando ambos vectores (minuyendo y sustraendo) con el mismo origen y luego uniendo las puntas de las flechas. El vector resultante de la resta apuntará desde la punta del sustraendo hacia la del minuendo.

Un resumen de propiedades. Las propiedades del álgebra de vectores son:

- La suma de vectores:
 - es cerrada, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$,
 - es conmutativa $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$,
 - es asociativa $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$,
 - tiene un único elemento neutro $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a}$,
 - existe un elemento simétrico $-\mathbf{a}$ (uno para cada vector) tal que $\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{a})$,
 - es distributiva respecto a la multiplicación por números: $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$.
- La multiplicación de vectores por números:
 - es conmutativa $\mathbf{a}\alpha = \alpha\mathbf{a}$,
 - es asociativa $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$,
 - es distributiva $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

Estas propiedades lucen obvias planteadas en este contexto de los vectores en \mathbb{R}^3 . Sin embargo, en la sección 2.1.3 en la página 94 veremos que, son estas propiedades las que nos permitirán definir un espacio vectorial abstracto de manera rigurosa.

A continuación un par de ejemplos con aplicaciones de vectores en geometría y Física.

Ejemplo 1.1 En un segmento de recta AB ubicamos un punto D de manera que este punto divide al segmento en dos partes en la proporción $\alpha : \beta$, es decir $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = \alpha + \beta$. Ubiquemos el vector posición del punto D .

A los puntos A y B le hacemos corresponder el vector \mathbf{a} y el vector \mathbf{b} , respectivamente, con un origen común O . De manera que $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ es un vector que va desde el punto A al punto B . Entonces, la distancia \overline{OD} , a la que le podemos asociar el vector \mathbf{d} , no es más que:

$$\mathbf{d} = \overline{OD} = \mathbf{a} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)\mathbf{a} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\mathbf{b} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\mathbf{a} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\mathbf{b}.$$

Ejemplo 1.2 Hemos definido la posición \mathbf{r} del centro de masa, para un sistema de N partículas, al vector:

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{j=1}^N m_j},$$

donde \mathbf{r}_i corresponde con la posición de la i -ésima partícula. Determinemos la posición del centro de masa para un sistema de tres masas, $m_i = 1, 2, 3$, ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado $l = 2$.

Colocando el origen de coordenadas en uno de los vértices y uno de los ejes de coordenadas sobre uno de los lados. Elijamos la siguiente configuración

$$m_1 = 1 \Leftrightarrow \mathbf{r}_1 = 2\hat{\mathbf{i}}, \quad m_2 = 2 \Leftrightarrow \mathbf{r}_2 = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad m_3 = 3 \Leftrightarrow \mathbf{r}_3 = (\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{3}\hat{\mathbf{j}}).$$

Entonces tenemos:

$$\mathbf{r} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{j=1}^3 m_j} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_3 \mathbf{r}_3}{M_T} = \frac{1 \cdot 2\hat{\mathbf{i}} + 3 \cdot (\hat{\mathbf{i}} + \sqrt{3}\hat{\mathbf{j}})}{6} = \frac{5}{6}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}}.$$

1.1.3 Vectores linealmente independientes

Vamos a introducir uno de los conceptos fundamentales del álgebra lineal: la noción de *independencia* o *dependencia lineal*. Diremos que el conjunto de tres vectores: \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} es linealmente independiente en \mathbb{R}^3 si se cumple que:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Esto significa que los únicos coeficientes que hacen que la combinación lineal de los vectores sea igual al vector cero son: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Es decir, la única manera de que la suma de cualquier múltiplo de \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} se anule es si los escalares α , β y γ son necesariamente nulos. De lo contrario, diremos que el conjunto de vectores es *linealmente dependiente*. Esto implica que uno de los vectores puede expresarse como una combinación lineal de los otros dos. Por ejemplo, si $\gamma \neq 0$, entonces:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} = \bar{\alpha} \mathbf{a} + \bar{\beta} \mathbf{b}.$$

Es muy importante señalar que los vectores linealmente independientes formarán una *base*¹ para el espacio donde estos vectores “viven” y el número máximo de vectores linealmente independientes será la dimensión de ese espacio de “residencia”. Más adelante estudiaremos con más detalle el concepto de bases.

Tratemos de concretar algunas de estas afirmaciones.

- *Dos vectores, no nulos, linealmente dependientes son colineales.* Es decir, los vectores están contenidos en la misma línea y es claro que:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{donde ambos} \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} = -\frac{\alpha}{\beta} \mathbf{a} \end{cases}$$

el recíproco también será cierto: *si dos vectores no nulos son colineales, serán linealmente dependientes*. Es decir, si $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ entonces

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha \lambda \mathbf{b} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow (\alpha \lambda + \beta) \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha \lambda + \beta = 0,$$

lo cual nos permite afirmar que si dos vectores son linealmente independientes, no pueden ser colineales.

- *Tres vectores linealmente dependientes son coplanares.* Por ser los tres vectores *linealmente dependientes* al menos uno de los escalares tiene que ser distinto de cero, digamos γ , esto es:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{b} = \xi^1 \mathbf{a} + \xi^2 \mathbf{b},$$

pero como $\xi^1 \mathbf{a} \propto \mathbf{a}$ y $\xi^2 \mathbf{b} \propto \mathbf{b}$, esto significa que: $\xi^1 \mathbf{a}$ y \mathbf{a} son colineales. De la misma manera que $\xi^2 \mathbf{b}$ y \mathbf{b} , y por lo tanto, la suma estará en el mismo plano.

- *Dos vectores linealmente independientes generan todos los vectores coplanares.* Dado dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} linealmente independientes, entonces cualquier vector \mathbf{c} , coplanar con \mathbf{a} y \mathbf{b} , podrá expresarse como una combinación lineal de éstos. Diremos que: \mathbf{c} se expresa en términos de \mathbf{a} y \mathbf{b} como: $\mathbf{c} = \xi^1 \mathbf{a} + \xi^2 \mathbf{b}$, y esa expresión es única.

La primera de las afirmaciones es directa por cuanto hemos visto que si \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente independientes y \mathbf{c} es coplanar con \mathbf{a} y \mathbf{b} , entonces, necesariamente \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son linealmente

¹Llamaremos *base* a un conjunto de vectores linealmente independientes. Si además estos vectores tienen módulo uno y son ortogonales entre sí, se denomina *base ortonormal*.

dependientes. Esto es:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{b} = \xi^1 \mathbf{a} + \xi^2 \mathbf{b}.$$

La demostración de que la expansión es única viene de suponer que existen dos maneras distintas de representar al mismo vector \mathbf{c} . Veamos:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{c} = \xi^1 \mathbf{a} + \xi^2 \mathbf{b} \\ \mathbf{c} = \zeta^1 \mathbf{a} + \zeta^2 \mathbf{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{0} = (\xi^1 - \zeta^1) \mathbf{a} + (\xi^2 - \zeta^2) \mathbf{b} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi^1 - \zeta^1 = 0 \Rightarrow \xi^1 = \zeta^1 \\ \xi^2 - \zeta^2 = 0 \Rightarrow \xi^2 = \zeta^2 \end{array} \right.$$

debido a que \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente independientes.

La demostración para el caso tridimensional es equivalente. Es decir tres vectores linealmente independientes \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} expanden, de manera unívoca, todos los vectores del espacio. Esta demostración queda para el lector.

- **Vectores Base.** Cuando un vector \mathbf{c} se pueda expresar en términos de dos vectores linealmente independientes, \mathbf{a} y \mathbf{b} , por ejemplo: $\mathbf{c} = \xi^1 \mathbf{a} + \xi^2 \mathbf{b}$, diremos que \mathbf{a} y \mathbf{b} forman una base para todos los vectores coplanares a éstos. Igualmente para el caso tridimensional: tres vectores linealmente independientes \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} conformarán una base para los vectores del espacio. Los números ξ^1 y ξ^2 para el caso bidimensional se denominan las componentes de \mathbf{c} a lo largo de \mathbf{a} y \mathbf{b} . Equivalentemente, (ξ^1, ξ^2, ξ^3) serán las componentes de cualquier vector para el caso 3D a lo largo de \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} , respectivamente. Esta nomenclatura será más evidente luego de la próxima sección.

Mas adelante, en el desarrollo de la sección 2.3 del próximo capítulo, analizaremos de forma rigurosa el concepto de independencia lineal y de bases de espacios vectoriales abstractos.

Para fijar ideas recorramos tres ejemplos en los cuales utilizamos el concepto de base en \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 1.3 Dada una base ortonormal $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ y los siguientes vectores:

$$\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{b} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{c} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}.$$

Queremos comprobar si $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ forman una base.

Para que los vectores formen una base de \mathbb{R}^3 tienen que ser linealmente independientes. Esto es: $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, con lo cual:

$$\alpha (3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) + \beta (3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) + \gamma (\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}) = \mathbf{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 0, \\ 2\alpha - 2\beta = 0, \\ \alpha + \beta - \gamma = 0. \end{array} \right.$$

Es fácil ver que la solución de este sistema es: $\alpha = \beta = \gamma = 0$, por lo tanto, se demuestra que el conjunto de vectores es linealmente independientes y por consiguiente forman una base de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 1.4 Si el conjunto de vectores $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ del ejemplo anterior forman una base, podemos expresar otros vectores en términos de esta base. Tomemos, por ejemplo, los vectores: $\mathbf{d} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{e} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$, expresemos estos dos vectores en términos de $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

Entonces, para el vector \mathbf{d} tenemos:

$$\mathbf{d} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} = \alpha (3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) + \beta (3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) + \gamma (\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 1, \\ 2\alpha - 2\beta = 2, \\ \alpha + \beta - \gamma = 0. \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior tendremos que: $\mathbf{d} = \frac{5}{8}\mathbf{a} - \frac{3}{8}\mathbf{b} + \frac{1}{4}\mathbf{c}$.

Seguidamente, para el vector \mathbf{e} se tiene:

$$\mathbf{e} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} = \alpha(3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) + \beta(3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) + \gamma(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}) \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 3, \\ 2\alpha - 2\beta = -2, \\ \alpha + \beta - \gamma = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el nuevo sistema de ecuaciones resulta que: $\mathbf{e} = -\frac{1}{8}\mathbf{a} + \frac{7}{8}\mathbf{b} + \frac{3}{4}\mathbf{c}$.

Ejemplo 1.5 Consideremos los siguientes tres vectores:

$$\mathbf{w}_1 = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{w}_2 = 2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} \text{ y } \mathbf{w}_3 = -\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}.$$

¿Formarán una base para \mathbb{R}^3 ?

Veamos si son linealmente independientes, es decir, si

$$\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 + \gamma\mathbf{w}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

La comprobación es directa al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 0, \\ -3\beta - \gamma &= 0, \\ 3\alpha + \gamma &= 0; \end{aligned}$$

cuya solución es $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Por lo tanto, forman una base para \mathbb{R}^3 .

Como forman base, podemos expresar otro vector, digamos $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, en términos de la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, esto es: $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2 + \gamma\mathbf{w}_3$.

Si procedemos como en los ejemplos anteriores, tenemos:

$$\mathbf{a} = \alpha(\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{k}}) + \beta(2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}) + \gamma(-\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ -3\beta - \gamma = -3 \\ 3\alpha + \gamma = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}, \\ \beta = \frac{1}{3}, \\ \gamma = 2; \end{cases}$$

es decir, $\mathbf{a} = \frac{1}{3}\mathbf{w}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3$.

1.1.4 Productos de vectores

Hemos sumado y restado vectores. El siguiente paso es multiplicarlos. Básicamente existen dos formas de multiplicar vectores: el *producto escalar* y el *producto vectorial*. Veremos a continuación, sin especificar un sistema de coordenadas para referirlos, de qué se trata.

1.1.4.1 Producto escalar

Denominaremos producto escalar de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} a un escalar cuyo valor será igual al producto de los módulos multiplicado por el coseno del ángulo que ellos forman:

$$\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}).$$

El significado geométrico del producto escalar es evidente, cuadrante I de la figura 1.3. El producto escalar representa la proyección de \mathbf{a} sobre \mathbf{b} y equivalentemente la proyección de \mathbf{b} sobre \mathbf{a} .

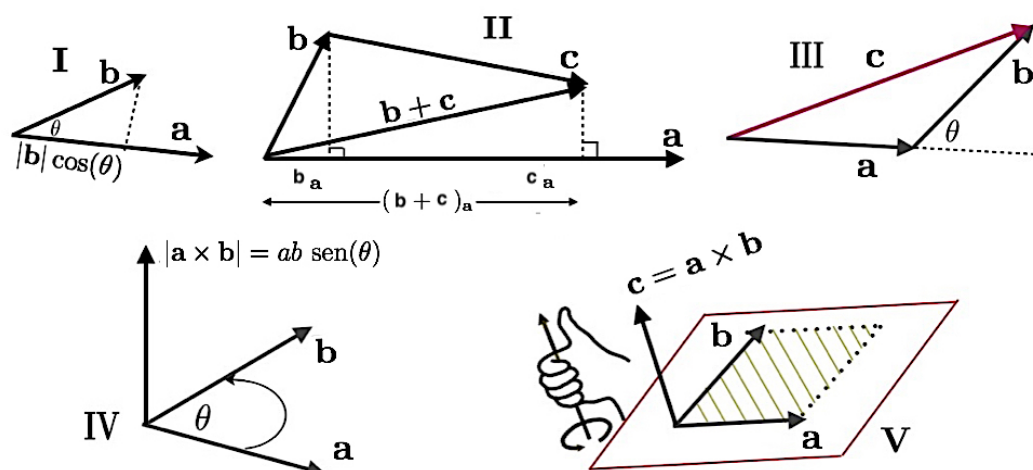


Figura 1.3: Producto escalar y vectorial de vectores geométricos. En las región I de la figura ilustramos el significado del producto escalar: la proyección de \mathbf{b} sobre \mathbf{a} . Lo mismo hacemos en la II, ilustramos las proyecciones de \mathbf{b} sobre \mathbf{a} y también de $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ sobre \mathbf{a} . El producto vectorial lo representamos en las zonas IV y V. Mostramos el módulo del vector resultante, su dirección y sentido.

De esta definición se derivan varias propiedades las cuales por obvias no dejan de ser importantes:

- *El producto escalar de un vector no nulo consigo mismo, siempre es positivo:*
 $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si \mathbf{a} es el vector nulo. Esto es, $\zeta = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Con esto podemos concluir que $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\zeta}$.
- *El producto escalar es conmutativo:*
 $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, ya que el ángulo entre los vectores es el mismo y la multiplicación entre escalares es conmutativa.
- *El producto escalar es distributivo:*
 Esto es, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$. La demostración (gráfica) puede apreciarse en el cuadrante II de la figura 1.3.
- *La multiplicación por un número:*
 Si $\alpha \neq 0$ es un número real, entonces:
 $\alpha \zeta = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = |\alpha \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}) = |\mathbf{a}| |\alpha \mathbf{b}| \cos(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle})$.
- *Desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

A partir de la definición de producto interno es inmediata la comprobación de la siguiente desigualdad:

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}))^2 \Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \Leftrightarrow |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|,$$

ya que: $0 \leq \cos^2(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}) \leq 1$.

- *Del producto escalar surge el teorema del coseno.*

Es inmediato expresar el producto escalar de un vector consigo mismo, para ello vamos a suponer que $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, con lo cual:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Rightarrow |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta),$$

donde θ es el ángulo que forman los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} . Esto no es otra cosa que el teorema del coseno

y está ilustrado en el cuadrante III de la figura 1.3.

- *Dos vectores no nulos son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar es nulo.*

Esta afirmación es inmediata:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}) = 0.$$

El producto escalar lo hemos visto desde nuestras tempranas épocas de colegio. Quizá por eso no apreciamos las consecuencias que su definición nos trae. El producto escalar nos permite definir una geometría, vale decir el ángulo entre vectores. A partir de esta definición sabemos si dos vectores son o no ortogonales. Otra vez, en \mathbb{R}^3 no nos impacta mucho esa consecuencia. En la sección 2.2.3, veremos como la definición de un producto interno (en \mathbb{R}^3 lo llamamos escalar) nos permitirá definir la distancia entre dos puntos, el tamaño de los vectores y el ángulo que ellos mantienen entre sí.

1.1.4.2 Producto vectorial

A diferencia del producto escalar que genera un escalar, el producto vectorial tiene como resultado otro vector: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ², con las siguientes características:

- El módulo de \mathbf{c} , será:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}).$$

Es claro que el módulo de \mathbf{c} representa el área del paralelogramo cuyos lados están formados por \mathbf{a} y \mathbf{b} (ver el cuadrante V de la figura 1.3).

- Tal y como muestran los cuadrantes IV y V de la figura 1.3, \mathbf{c} tendrá como dirección la perpendicular al plano que forman \mathbf{a} y \mathbf{b} , y como sentido la regla del pulgar derecho o regla de la mano derecha. De una manera más elegante diremos que el producto vectorial será positivo cuando la multiplicación de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se realice en sentido antihorario al llevar.

Podemos deducir algunas consecuencias de esta definición.

- *El producto vectorial es anticonmutativo.*

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, y se sigue de la definición que expresa el cuadrante IV de la figura 1.3.

- *El producto vectorial es distributivo respecto a la suma.*

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$. La demostración lo dejaremos para más adelante.

- *La multiplicación por un número $\alpha \neq 0$.*

$$|\alpha \mathbf{c}| = |\alpha| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b})| = |\alpha \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}) = |\alpha| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}).$$

- *Dos vectores serán colineales si su producto vectorial se anula.*

Así como en el caso del producto escalar, donde dos vectores ortogonales se identifican cuando su producto escalar es cero, en el caso del producto vectorial, dos vectores son paralelos si su producto vectorial es cero. Esta relación se cumple de inmediato:

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \sin(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}) = 0 \Rightarrow |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0.$$

Si el módulo del vector es cero, obvio que es el vector nulo. Ahora bien, también de aquí deducimos que si $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ entonces:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

²El resultado de un producto vectorial es un pseudovector o vector axial en contraposición a los vectores polares, pero eso lo veremos más adelante en la sección 1.4.4.

1.1.5 Producto triple o mixto

Analicemos ahora el escalar³ que proviene de la multiplicación:

$$V = |\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = |\mathbf{c}| |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| \cos(\theta_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}) .$$

Este producto también cumple con algunas propiedades que demostraremos más adelante.

- El producto mixto representa el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} . $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ representa el área de la base y la altura está representada por la proyección del vector \mathbf{c} sobre la perpendicular al plano de la base que es, precisamente $|\mathbf{c}| \cos(\theta_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle})$.
- El producto mixto es cíclico respecto a sus factores.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} .$$

- El producto mixto se anula cuando se repite alguno de sus factores.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0 .$$

Claramente, si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$.

- Si los tres vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son coplanares (linealmente dependientes) entonces:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0 .$$

Dicho de manera más elegante, útil e impactante: tres vectores que cumplen con: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq 0$, son linealmente independientes y forman una base para el espacio tridimensional. Esa base se denominará levógira (siguiendo el giro de las manecillas del reloj) si el producto $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} < 0$ y dextrógira (la convencional, basada en la regla de mano derecha o sentido antihorario) si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$.

Fijemos conceptos desarrollando un par de ejemplo con los productos vectorial y mixto

Ejemplo 1.6 Resolvamos el problema del ejemplo 1.3 usando el producto mixto.

Debemos calcular: $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \neq 0$, y efectivamente:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 ,$$

es decir, el conjunto de vectores es linealmente independiente.

Ejemplo 1.7 Ahora bien, si $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ del ejemplo 1.3 forman una base, calculemos al vector $\mathbf{f} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y expresémoslo en términos de $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

Procedemos a calcular \mathbf{f} :

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \times (3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\hat{\mathbf{i}} - 12\hat{\mathbf{k}} ,$$

con lo cual para el vector \mathbf{f} resulta:

$$\mathbf{f} = 4\hat{\mathbf{i}} - 12\hat{\mathbf{k}} = \alpha (3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) + \beta (3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) + \gamma (\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{k}}) \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta + \gamma = 4 \\ 2\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = -12 \end{cases}$$

³El resultado del triple producto mixto es un pseudoescalar. Eso también lo veremos más adelante en la sección 1.4.4.

y finalmente, al resolver el sistema anterior, $\mathbf{f} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} + 10\mathbf{c}$.



Practicando con SymPy

Antes de comenzar con esta serie de cuadernos Python (*notebooks*) es necesario revisar el apéndice 6 donde se dan detalles de la librería SymPy y se enseña la sintaxis básica necesaria para usar el programa.

Como mencionamos en el apéndice 6 primero que todo debemos incorporar, de la enorme cantidad de librerías que existen para Python, la librería **SymPy**. Esto se hace escribiendo lo siguiente:

```
[1]: import sympy
     from sympy import *
```

Recurriremos a una de las facilidades de estructura de datos que nos ofrece el sistema para agrupar objetos matemáticos: las listas.

Las listas son un arreglo de cantidades numeradas que se escriben entre corchetes y los objetos deben separarse con comas.

El siguiente ejemplo es una lista

```
[2]: [sin(pi/3), cos(pi/3), tan(pi/3)]
```

```
[2]: [sqrt(3)/2, 1/2, sqrt(3)]
```

Podemos asignar la lista a una variable

```
[3]: L = [sin(pi/3), cos(pi/3), tan(pi/3)]
```

Para luego aplicar la función evalf() a cada elemento de la lista

```
[4]: [expr.evalf() for expr in L]
```

```
[4]: [0.866025403784439, 0.500000000000000, 1.73205080756888]
```

El primer elemento de la lista L es:

```
[5]: L[0]
```

```
[5]:  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 
```

De manera que se puede hacer operaciones con los elementos de las listas

```
[6]: (L[0]+L[1])/L[2]
```

```
[6]:  $\frac{\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3}$ 
```

Cuando necesitemos generar una lista por medio de alguna regla específica o fórmula podemos hacer lo siguiente

```
[7]: # Definir la variable y el rango
     t = symbols('t', real=True)
     ini = 1
     fin = 6
```

```
# Crear la lista de expresiones con una comprensión de lista
lista = [exp(t*x) for x in range(ini, fin + 1)]
print(lista) # Imprimir la lista de expresiones
```

```
[exp(t), exp(2*t), exp(3*t), exp(4*t), exp(5*t), exp(6*t)]
```

Es posible aplicar una función a cada elemento de la lista, en este caso a cada elemento le aplicaremos la función $\ln(x)$

```
[8]: lista2=[(log(expr)) for expr in lista]
lista2
```

```
[8]: [t, 2*t, 3*t, 4*t, 5*t, 6*t]
```

Si lo que se quiere es sumar los elementos:

```
[9]: suma = sum(lista2)
suma
```

```
[9]: 21t
```

Con las listas se pueden definir vectores, ya que los vectores se pueden ver como los elementos de una matriz fila o columna.

```
[10]: A = Matrix([[1, 2, 3]]) # un vector fila 1x3
A
```

```
[10]:  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 
```

```
[11]: B = Matrix ([[4] , [5] , [6]]) # un vector columna 3x1
B
```

```
[11]:  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ 
```

```
[12]: B.T # vector traspuesta de B
```

```
[12]:  $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 
```

```
[13]: A[0] # Primera componente del vector A (índice 0)
```

```
[13]: 1
```

```
[14]: A.norm() # norma del vector A
```

```
[14]:  $\sqrt{14}$ 
```

```
[15]: Ahat = A/A.norm() # vector unitario asociada a A
Ahat
```

```
[15]:  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{14}}{14} & \frac{\sqrt{14}}{7} & \frac{3\sqrt{14}}{14} \end{bmatrix}$ 
```

```
[16]: Ahat.norm()
```

```
[16]: 1
```

Definamos los siguientes vectores

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

```
[17]: a = Matrix([2,4,6])
      b = Matrix([5,7,9])
      c = Matrix([1,3,0])
```

```
[18]: 3*a+2*b-6*c
```

```
[18]: 
$$\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 36 \end{bmatrix}$$

```

Recordemos que el primer elemento será la primera componente del vector

El producto escalar:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \equiv \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\varphi) \in \mathbb{R}$$

```
[19]: a.dot(b)
```

```
[19]: 92
```

```
[20]: b.dot(a)
```

```
[20]: 92
```

El ángulo entre los vectores

$$\varphi = \arccos \left[\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \right]$$

```
[21]: acos(a.dot(b)/(a.norm()*b.norm())).round(3) # En radianes
```

```
[21]: 0.158
```

El producto vectorial de dos vectores en 3 dimensiones es:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_y b_z - a_z b_y, \quad a_z b_x - a_x b_z, \quad a_x b_y - a_y b_x$$

```
[22]: a.cross(b)
```

```
[22]: 
$$\begin{bmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}$$

```

```
[23]: a.cross(b) == b.cross(a)
```

```
[23]: False
```

El producto triple:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

```
[24]: (a.cross(b)).dot(c)
```

```
[24]: 30
```

Algunas operaciones con vectores genéricos:

```
[25]: α,β,a1,a2,a3,b1,b2,b3,c1,c2,c3 = symbols('α β a1 a2 a3 b1 b2 b3 c1 c2 c3')
```

```
[26]: a= Matrix([[a1,a2,a3]])
      b= Matrix([[b1,b2,b3]])
      c= Matrix([[c1,c2,c3]])
      0= Matrix([[0,0,0]])
```

```
[27]: a
```

```
[27]:  $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ 
```

```
[28]: a+b
```

```
[28]:  $\begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \end{bmatrix}$ 
```

```
[29]: (a+b)+c
```

```
[29]:  $\begin{bmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 & a_3 + b_3 + c_3 \end{bmatrix}$ 
```

```
[30]: a+0
```

```
[30]:  $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ 
```

```
[31]: a-a
```

```
[31]:  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 
```

```
[32]: α*(a+b)
```

```
[32]:  $\begin{bmatrix} \alpha(a_1 + b_1) & \alpha(a_2 + b_2) & \alpha(a_3 + b_3) \end{bmatrix}$ 
```

```
[33]: (α+β)*a
```

```
[33]:  $\begin{bmatrix} a_1(\alpha + \beta) & a_2(\alpha + \beta) & a_3(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$ 
```

```
[34]: (a.cross(b)).dot(c)
```

```
[34]:  $c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(-a_1b_3 + a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$ 
```

1.1.6 Ejercicios

1. Dado el triángulo cuyos vértices son los puntos: (2, 3), (6, 9), (8, 1), encuentre:
 - (a). el baricentro, es decir, el punto donde se interceptan las medianas del triángulo,
 - (b). el circuncentro, es decir, el punto donde se interceptan las mediatrices del triángulo.

2. Utilice métodos vectoriales para demostrar que las líneas que unen los puntos medios de las aristas opuestas (bimedias) de un tetraedro $OABC$ se interceptan en un punto común, y que este punto divide cada una de las bimedias en dos partes iguales.
3. Los vértices de un triángulo ABC tienen como vectores posición \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} , respectivamente y relativos a un origen común O . Demuestre que el vector posición \mathbf{g} del centroide G del triángulo viene dado por:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

4. Un paralelogramo tiene un ángulo agudo de $\pi/3$ radianes entre sus lados de longitud $a = 1$ y $b = 2$. Si consideramos estos lados como vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} encuentre:
 - (a). Los vectores: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$,
 - (b). Los vectores: $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ y $5\mathbf{a} - 7\mathbf{b}$.
5. Con la definición de posición de centro de masa del Ejemplo 1.2, encuentre el centro de masas para los siguientes sistemas:
 - (a). Masas iguales $a: 1, 2, 3, 4$ en los vértices de un cuadrado de lados $a = 2$,
 - (b). Masas iguales $a: 1, 2, 3, 4$ en los vértices inferiores de un cubo cuyos lados son de longitud $a = 2$ y masas iguales $a: 5, 6, 7, 8$ en la vértices superiores.
6. ¿Los siguientes vectores son linealmente independientes?

$$\mathbf{a} = (0, 2, -1), \quad \mathbf{b} = (0, 1/2, -1/2), \quad \mathbf{c} = (0, -2/3, -1/3).$$

7. Las componentes de un vector y la regla para sumar vectores se combinan para introducir la forma más simple de representar un vector como una combinación lineal de los vectores más elementales que podemos tener. Estos vectores forman lo que conocemos la base canónica: $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, vectores de longitud unitaria que apuntan en la dirección positiva de los ejes x , y y z .

Compruebe, entonces, si los siguientes vectores forman una base:

- (a). $\mathbf{w}_1 = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{w}_2 = \hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{w}_3 = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$.
- (b). $\mathbf{w}_1 = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{w}_2 = 2\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{w}_3 = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$.
8. Un paralelogramo tiene un ángulo agudo de $\pi/4$ radianes entre sus lados de longitud $a = 1$ y $b = 2$. Si consideramos que esos lados son vectores, encuentre:
 - (a). El área del paralelogramo.
 - (b). La proyección de cada lado sobre la dirección del otro.
9. Considere un triángulo cuyos lados están conformados por los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Con el producto vectorial entre ellos demuestre la ley del seno:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

donde α, β, γ son los ángulos opuestos a los lados a, b y c , respectivamente.

10. Demuestre que el volumen de un tetraedro formado a partir de tres vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} que coinciden en un mismo origen, puede representarse de la manera siguiente:

$$V = \frac{1}{6} |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$

1.2 Vectores en componentes

La formulación de las leyes físicas debe hacerse en término de cantidades vectoriales (tensoriales). Esto independiza su expresión de un sistema particular de coordenadas pero, llegado el momento de

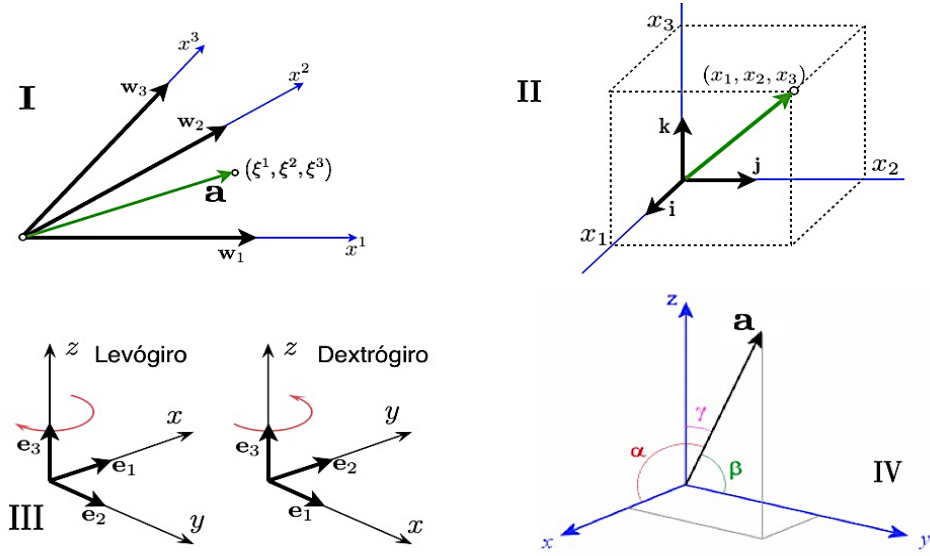


Figura 1.4: En el cuadrante I ilustramos una bases vectoriales oblicua. En el II mostramos una base ortogonal, en este caso cartesiana. Las bases orientadas del tipo levógiro y del tipo dextrógiro las presentamos en el cuadrante III y, finalmente ilustramos los cosenos directores en el IV.

calcular, es mucho más conveniente referirlas a un sistema de coordenadas adaptado a la geometría del problema. En ese caso, la ecuación vectorial se convertirá en tantas ecuaciones como componentes (referidas al sistema de coordenadas utilizado) tengan los vectores en ese sistema de coordenadas.

Ya hemos expresado los vectores en término de sus componentes. Lo hicimos en casi todos los ejemplos y ejercicios de la sección anterior donde usamos el sistema de coordenadas cartesianas $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ que nos enseñaron en el colegio. En esta sección haremos construcciones mas generales en término de otras bases no necesariamente ortonormales.

1.2.1 Bases y componentes

Tal y como mencionamos anteriormente, tres vectores **no coplanares** cualesquiera son linealmente independientes y constituyen una base para el espacio tridimensional. Denominaremos a estos vectores base como $\{\mathbf{w}_i\}$, y por ser linealmente independientes podremos expresar cualquier vector \mathbf{a} como una combinación lineal única, tal y como lo mostramos en el cuadrante I de la figura 1.4.

Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general) de coordenadas al colocarlos con un mismo origen, esto es:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{w}_1 + a^2 \mathbf{w}_2 + a^3 \mathbf{w}_3,$$

donde las cantidades $\{a^1, a^2, a^3\}$ son números que representan las componentes del vector \mathbf{a} a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$. Nótese que por costumbre (será evidente más adelante, en la sección 3.1.1) etiquetamos estos números con superíndices y la letra que identifica al vector.

Más aún, cada punto P del espacio viene definido por un radio vector $\mathbf{r}(P) \equiv \overrightarrow{OP}$ que une el origen de coordenadas con el punto P y se le asocian tres números $\{x^1, x^2, x^3\}$, que son las proyecciones a lo largo de cada uno de los ejes coordenados $\{\overrightarrow{0x^1}, \overrightarrow{0x^2}, \overrightarrow{0x^3}\}$. Los números $\{x^1, x^2, x^3\}$ se denominan las componentes de $\mathbf{r}(P)$ en el sistema de referencia $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.

Existe una familia de sistemas de coordenadas en la cual sus vectores base son ortogonales (o mejor

ortonormales). Es decir los vectores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ son perpendiculares entre si. Tal y como mostraremos más adelante en la sección 2.3.5, siempre se puede construir un sistema ortogonal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ u ortonormal $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ a partir de una base genérica de vectores linealmente independientes $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$. Cuando el sistema es ortogonal sus componentes se denominarán rectangulares. Dependiendo del signo del triple producto mixto, el sistema de coordenadas será dextrógiro $((\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0)$ o levógiro $((\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 < 0)$, tal y como se muestra en el cuadrante III de la figura 1.4.

Es costumbre⁴ utilizar la convención dextrógiro donde el producto: $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0$, y en ese caso utilizamos el bien conocido conjunto de vectores unitarios $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ con los que ya hemos estado familiarizados:

$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}(P) = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}.$$

También es costumbre representar este sistema de coordenadas cartesiano ortonormal como:

$$\hat{\mathbf{i}} \equiv \hat{\mathbf{i}}_1, \quad \hat{\mathbf{j}} \equiv \hat{\mathbf{i}}_2 \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{k}} \equiv \hat{\mathbf{i}}_3,$$

para recordar que estamos en un sistema de coordenadas cartesianas y utilizaremos los superíndices 1, 2, 3 para indicar las componentes del vector.

$$\mathbf{a} = a^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{i}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{i}}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}(P) = x^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + x^2 \hat{\mathbf{i}}_2 + x^3 \hat{\mathbf{i}}_3.$$

Utilizaremos los superíndices para etiquetar componentes de vectores y subíndices para distinguir vectores base. Luego estas etiquetas se complicarán, pero por ahora nos conformaremos con esta convención.

Obviamente el módulo del vector se podrá expresar con la utilización del teorema de Pitágoras:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \quad \text{y} \quad |\mathbf{r}(P)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2},$$

y la multiplicación por un número real $\alpha \neq 0$ será:

$$\alpha \mathbf{a} = \alpha (a^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{i}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{i}}_3) = (\alpha a^1) \hat{\mathbf{i}}_1 + (\alpha a^2) \hat{\mathbf{i}}_2 + (\alpha a^3) \hat{\mathbf{i}}_3 \Rightarrow |\alpha \mathbf{a}| = |\alpha| \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}.$$

Igualmente para un vector unitario:

$$\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{i}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{i}}_3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}},$$

con lo cual todo vector:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \hat{\mathbf{u}}_a = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \hat{\mathbf{u}}_a.$$

Ejemplo 1.8 Consideremos los vectores:

$$\mathbf{w}_1 = \hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{w}_2 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} = (1, 1, 0), \quad \mathbf{w}_3 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} = (1, 1, 1).$$

¿Son linealmente independientes?

Tenemos entonces que:

$$\alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Al escribir el sistema de ecuaciones resulta:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \beta + \gamma = 0, \quad \gamma = 0, \Rightarrow \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

los vectores son linealmente independientes y por lo tanto constituyen una base para los vectores tridimensionales. Notemos además que esta base: $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, es una base que no es ortogonal.

⁴Quizá por las arraigadas relaciones de dominación de los derechos sobre los izquierdos, o quizá tal vez por conservar la definición de volumen como positivo.

1.2.2 Cosenos directores

Como se puede apreciar en el cuadrante IV de la figura 1.4, podemos construir tres triángulos rectángulos con el radio vector $\mathbf{a}(P)$ como hipotenusa de cada uno de ellos. Los ángulos que forma el radio vector $\mathbf{a}(P)$ con cada uno de los ejes coordenados $\{x, y, z\}$ son $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, respectivamente, con lo cual:

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos \theta_1, \quad a_y = |\mathbf{a}| \cos \theta_2 \quad \text{y} \quad a_z = |\mathbf{a}| \cos \theta_3 \Rightarrow \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1, \quad (1.1)$$

pero además:

$$\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \cos \theta_1 \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta_2 \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta_3 \hat{\mathbf{k}}.$$

1.2.3 Una división fallida

Uno esperaría que para cada una de las definiciones de productos vectoriales, existiera el vector cociente, es decir, que pudiéramos “despejar” uno de los vectores multiplicados en términos del otro. La situación es que esta operación no está definida unívocamente y lo podemos intuir a partir de una de la definición del producto escalar. Supongamos que tenemos que: $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, con lo cual, si pudiéramos “despejar”, digamos, $\mathbf{b} = \zeta / \mathbf{a}$. ¿Tendríamos entonces definido \mathbf{b} de una manera unívoca? La respuesta es NO, ya que $\zeta = \mathbf{a} \cdot \left(\frac{\zeta}{\mathbf{a}} + \mathbf{d} \right)$, donde $\mathbf{a} \perp \mathbf{d}$, por lo cual existen infinitos $\mathbf{b} = \frac{\zeta}{\mathbf{a}} + \mathbf{d}$ que cumplen $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

1.2.4 Álgebra vectorial en componentes

Es posible reescribir toda el álgebra vectorial que hemos visto mediante operaciones referidas a sistemas de coordenadas, como mostraremos a continuación. Por simplicidad, anclaremos nuestro sistema de coordenadas a una base ortonormal: $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$.

Para los vectores $\mathbf{a} = a^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{e}}_3$ y $\mathbf{b} = b^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b^3 \hat{\mathbf{e}}_3$, la suma será representada por:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{e}}_3) + (b^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b^3 \hat{\mathbf{e}}_3) = (a^1 + b^1) \hat{\mathbf{e}}_1 + (a^2 + b^2) \hat{\mathbf{e}}_2 + (a^3 + b^3) \hat{\mathbf{e}}_3,$$

y obviamente, la resta:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{e}}_3) - (b^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b^3 \hat{\mathbf{e}}_3) = (a^1 - b^1) \hat{\mathbf{e}}_1 + (a^2 - b^2) \hat{\mathbf{e}}_2 + (a^3 - b^3) \hat{\mathbf{e}}_3,$$

con lo cual la distancia entre dos puntos P y M será:

$$d(P, M) = |(\mathbf{r}(P) = \mathbf{a}) - (\mathbf{r}(M) = \mathbf{b})| = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2}.$$

1.2.5 Dependencia e independencia lineal

Ahora es fácil estudiar la dependencia o independencia lineal en coordenadas. Otra vez, tres vectores: $\mathbf{a} = a^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{e}}_3$, $\mathbf{b} = b^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b^3 \hat{\mathbf{e}}_3$ y $\mathbf{c} = c^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + c^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + c^3 \hat{\mathbf{e}}_3$, serán *linealmente independientes* si se cumple que:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Por inspección podemos ver que la base canónica: $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{i}} \equiv (1, 0, 0)$, $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{j}} \equiv (0, 1, 0)$, $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{k}} \equiv (0, 0, 1)$ conforman un conjunto de vectores linealmente independientes y por lo tanto constituyen una base.

En general tendremos que:

$$\mathbf{0} = \alpha (a^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{e}}_3) + \beta (b^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b^3 \hat{\mathbf{e}}_3) + \gamma (c^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + c^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + c^3 \hat{\mathbf{e}}_3),$$

$$\mathbf{0} = (\alpha a^1 + \beta b^1 + \gamma c^1) \hat{\mathbf{e}}_1 + (\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2) \hat{\mathbf{e}}_2 + (\alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3) \hat{\mathbf{e}}_3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha a^1 + \beta b^1 + \gamma c^1 = 0, \\ \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 = 0, \\ \alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3 = 0. \end{cases}$$

Esto no es otra cosa que un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas: $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. La solución que estamos buscando $\alpha = \beta = \gamma = 0$ se cumplirá si:

$$\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = a^1 (b^2 c^3 - b^3 c^2) + a^2 (b^3 c^1 - b^1 c^3) + a^3 (b^1 c^2 - b^2 c^1) \neq 0.$$

1.2.6 Productos de vectores en componentes

Exploreemos más sobre el álgebra vectorial y los productos de vectores cuando los tenemos anclados a algún sistema de coordenadas.

1.2.6.1 Producto escalar

Todo lo expresado en la sección 1.1.4.1 lo representaremos ahora en término de una base ortonormal: $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$. Dados los vectores $\mathbf{a} = a^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{e}}_3$ y $\mathbf{b} = b^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b^3 \hat{\mathbf{e}}_3$, el producto escalar entre ellos es:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot (b^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b^3 \hat{\mathbf{e}}_3) = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3,$$

por ser ortonormales se tiene que:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = 1, \quad \text{y} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = 0, \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = 0, \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = 0. \end{cases}$$

Las propiedades del producto escalar en coordenadas cartesianas se comprueban fácilmente.

- El producto escalar de un vector consigo mismo, siempre es no negativo

$$\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 \geq 0,$$

y

$$(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 = 0 \Leftrightarrow a^1 = a^2 = a^3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Adicionalmente: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\zeta} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$.

- El producto escalar es conmutativo

$$\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 = b^1 a^1 + b^2 a^2 + b^3 a^3.$$

- El producto escalar es distributivo

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = [a^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{e}}_3] \cdot [(b^1 + c^1) \hat{\mathbf{e}}_1 + (b^2 + c^2) \hat{\mathbf{e}}_2 + (b^3 + c^3) \hat{\mathbf{e}}_3],$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} a^1 (b^1 + c^1) + a^2 (b^2 + c^2) + a^3 (b^3 + c^3) &= (a^1 b^1 + a^1 c^1) + (a^2 b^2 + a^2 c^2) + (a^3 b^3 + a^3 c^3), \\ &= (a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3) + (a^1 c^1 + a^2 c^2 + a^3 c^3), \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

- *La multiplicación por un escalar*

$$\alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha\mathbf{b}) = \alpha(a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3) = a^1(\alpha b^1) + a^2(\alpha b^2) + a^3(\alpha b^3).$$

- *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 \leq \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|.$$

- *Dos vectores no nulos son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar es nulo. Esta afirmación es inmediata:*

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}) = 0,$$

por lo cual:

$$a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3 = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}),$$

despejando:

$$\cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = \frac{a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2}},$$

de donde se deduce que para dos vectores perpendiculares:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow 0 = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3.$$

- *Del producto escalar surge el teorema del coseno*

Es inmediato generalizar el producto escalar de un vector consigo mismo, para ello suponemos que $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, con lo cual:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Rightarrow |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}),$$

que no es otra cosa que el teorema del coseno y está ilustrado en el cuadrante III de la figura 1.3.

Ejemplo 1.9 Si tenemos los vectores $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$, encontremos el ángulo que forman entre ellos.

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{[\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}] \cdot [2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}]}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2}} = \frac{2 + 12 + 30}{\sqrt{35} \sqrt{56}} = \frac{44}{\sqrt{35} \sqrt{56}} = \frac{22}{\sqrt{14} \sqrt{35}}.$$

Por lo tanto: $\theta = \arccos\left(\frac{22}{\sqrt{14}\sqrt{35}}\right) \approx 0.11088$.

Notemos que de la ecuación (1.1) para los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} y su componentes resulta que:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{\mathbf{a}} &= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{35}}, \quad \cos \beta_{\mathbf{a}} = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{\sqrt{35}}, \quad \cos \gamma_{\mathbf{a}} = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{5}{\sqrt{35}} \Rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{35}}\right]^2 + \left[\frac{3}{\sqrt{35}}\right]^2 + \left[\frac{5}{\sqrt{35}}\right]^2 = 1, \\ \cos \alpha_{\mathbf{b}} &= \frac{b_x}{|\mathbf{b}|} = \frac{2}{\sqrt{56}}, \quad \cos \beta_{\mathbf{b}} = \frac{b_y}{|\mathbf{b}|} = \frac{4}{\sqrt{56}}, \quad \cos \gamma_{\mathbf{b}} = \frac{b_z}{|\mathbf{b}|} = \frac{6}{\sqrt{56}} \Rightarrow \left[\frac{2}{\sqrt{56}}\right]^2 + \left[\frac{4}{\sqrt{56}}\right]^2 + \left[\frac{6}{\sqrt{56}}\right]^2 = 1. \end{aligned}$$

Y además podemos ver claramente que el ángulo entre los vectores y los cosenos directores está relacionado, como se muestra a continuación:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{35}} \frac{2}{\sqrt{56}} + \frac{3}{\sqrt{35}} \frac{4}{\sqrt{56}} + \frac{5}{\sqrt{35}} \frac{6}{\sqrt{56}} = \frac{22}{\sqrt{14}\sqrt{35}}.$$



1.2.6.2 Producto vectorial

De igual manera, lo que aprendimos en la sección 1.1.4.2 ahora lo expresamos en términos de las componentes de los vectores en una base ortonormal, $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, de la forma:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} [(a^2 b^3 - a^3 b^2) h_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) h_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) h_3 \hat{\mathbf{e}}_3] . \quad (1.2)$$

Donde los *factores de escala*: h_1, h_2 y h_3 , son una consecuencia de haber considerado una base ortonormal genérica $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$.

Lo anterior se puede organizar como el determinante de la matriz:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{\mathbf{e}}_1 & h_2 \hat{\mathbf{e}}_2 & h_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} ,$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}| &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sqrt{h_1^2 (a^2 b^3 - a^3 b^2)^2 + h_2^2 (a^3 b^1 - a^1 b^3)^2 + h_3^2 (a^1 b^2 - a^2 b^1)^2} \\ &= \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} \sin(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}) . \end{aligned}$$

Como veremos en la sección 3.2.7, los *factores de escala* garantizan que el vector desplazamiento infinitesimal sea el mismo en cualquier base ortogonal. Esto es

$$|d\mathbf{r}|^2 \equiv (ds)^2 = (h_1 d\tilde{x}^1)^2 + (h_2 d\tilde{x}^2)^2 + (h_3 d\tilde{x}^3)^2 \equiv \sum_{i=1}^3 (h_i d\tilde{x}^i)^2 ,$$

donde las $\tilde{x}^i, i = 1, 2, 3$, son las componentes del vector posición expresado en esa base ortonormal, i.e. $\mathbf{r} = \tilde{x}^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \tilde{x}^2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \tilde{x}^3 \hat{\mathbf{e}}_3$.

1.2.6.3 Triple producto mixto

Finalmente, analicemos el *pseudoescalar* que proviene de la multiplicación:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 c^1 & h_2 c^2 & h_3 c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} .$$

Obviamente, el valor absoluto de este número, $V = |\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|$, representa el volumen del paralelepípedo cuyos lados quedan definidos por los vectores: \mathbf{a}, \mathbf{b} y \mathbf{c} .

Ejemplo 1.10 Dados los vectores:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{b} = 4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} .$$

Revisemos si forman una base.

Podemos ver que $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}$ implica que:

$$\alpha [\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}] + \beta [4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}] + \gamma [3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}] = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta + 3\gamma = 0, \\ 2\alpha + 5\beta + 2\gamma = 0, \\ 3\alpha + \gamma = 0. \end{cases}$$

Cuya solución es: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Por lo tanto, el conjunto de vectores: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ es linealmente independiente y forman una base no ortogonal.

Por otro lado, si lo que queremos es calcular el volumen recurrimos al triple producto mixto:

$$\begin{aligned} V &= |\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]| = \left| [\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}] \cdot [4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}] \times [3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}] \right| \\ &= \left| [\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}] \cdot [5\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} - 7\hat{\mathbf{k}}] \right| = |-24| = 24. \end{aligned}$$

Analicemos el siguiente cálculo adicional: consideremos que tenemos un vector arbitrario, digamos, $\mathbf{d} = d^1\hat{\mathbf{i}} + d^2\hat{\mathbf{j}} + d^3\hat{\mathbf{k}}$, podemos construir las siguientes cantidades:

$$c^1 = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad c^2 = -\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad c^3 = -\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}.$$

Resultando:

$$c^1 = \frac{d^1 + 2d^2 + 3d^3}{24}, \quad c^2 = \frac{4d^1 + 5d^2}{24}, \quad c^3 = \frac{3d^1 + 2d^2 + d^3}{24},$$

podemos ver que si calculamos la siguiente expresión: $c^1(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + c^2(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + c^3(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{d}$, resulta que es igual a:

$$\begin{aligned} \frac{d^1 + 2d^2 + 3d^3}{24}(5\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} - 7\hat{\mathbf{k}}) &+ \frac{4d^1 + 5d^2}{24}(4\hat{\mathbf{i}} - 8\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}) + \frac{3d^1 + 2d^2 + d^3}{24}(-15\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}) \\ &+ d^1\hat{\mathbf{i}} + d^2\hat{\mathbf{j}} + d^3\hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Es decir,

$$c^1(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + c^2(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + c^3(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{d} = \mathbf{0},$$

siempre y cuando el conjunto: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sea linealmente independiente y \mathbf{d} un vector arbitrario.

Practicando con SymPy

Con el programa de manipulación simbólica SymPy haremos algunos cálculos sencillos con vectores. Nuevamente recomendamos ver el apéndice 6 como introducción al programa.

Mostraremos ahora que existe otra opción para el cálculo vectorial utilizando una librería llamada **sympy.vector**, como se muestra a continuación

```
[1]: import sympy
from sympy import *
```

```
[2]: from sympy.vector import *
R = CoordSys3D('R')
```

La biblioteca “sympy.vectores” es capaz de trabajar con sistemas de coordenadas cartesianos (también llamados rectangulares), esféricos y otros curvilíneos. El parámetro “R” indica el nombre asignado al sistema y se utiliza para fines de impresión en el cuaderno.

Una vez definido un sistema de coordenadas (CoordSys3D), se puede acceder a los vectores unitarios ortonormales y a las coordenadas x, y, z correspondientes.

Veamos el caso del vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$

```
[3]: R.i
type(R.i)
```

```
[3]: sympy.vector.vector.BaseVector
```


Cuando un “BaseVector” se multiplica por un escalar, resulta un VectorMul: el producto de un vector base y un escalar.

```
[4]: 2*R.i
      type(2*R.i)
```

```
[4]: sympy.vector.vector.VectorMul
```

Consideremos los vectores

```
[5]: A = 2*R.i + 4*R.j - 6*R.k
      B = R.i + 3*R.j + 5*R.k
      C = R.i + 2*R.j + 3*R.k
```

```
[6]: A + 2*B - C/2
```

```
[6]:  $\left(\frac{7}{2}\right)\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{R}} + (9)\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{R}} + \left(\frac{5}{2}\right)\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{R}}$ 
```

El vector cero es

```
[7]: D= Vector.zero
      D
```

```
[7]:  $\hat{\mathbf{0}}$ 
```

Los principales cálculos que se pueden hacer con estos vectores son:

```
[8]: # La magnitud de A
      sqrt(A.dot(A))
```

```
[8]:  $2\sqrt{14}$ 
```

Otras variantes

```
[9]: A.magnitude()
```

```
[9]:  $2\sqrt{14}$ 
```

```
[10]: # El vector unitario asociado a A
      A.normalize()
```

```
[10]:  $\left(\frac{\sqrt{14}}{14}\right)\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{R}} + \left(\frac{\sqrt{14}}{7}\right)\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{R}} + \left(-\frac{3\sqrt{14}}{14}\right)\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{R}}$ 
```

```
[11]: # Cuya magnitud es la unidad
      (_).magnitude()
```

```
[11]: 1
```

El producto escalar **a.b**

```
[12]: A.dot(B)
```

```
[12]: -16
```

El producto vectorial **a × b**

```
[13]: A.cross(B)
```

```
[13]: (38)*i_R + (-16)*j_R + (2)*k_R
El producto triple (a x b) · c
```

```
[14]: A.cross(B).dot(C)
```

```
[14]: 12
El ángulo entre los vectores
```

$$\varphi = \arccos \left[\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \right]$$

```
[15]: acos(A.dot(B)/(A.magnitude()*B.magnitude())) .round(3) # En radianes
```

```
[15]: 1.941
```

Para finalizar, podemos considerar el problema de la independencia lineal de vectores. Tomemos el conjunto de vectores del ejemplo 1.10, es decir, los vectores: $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b} = 4\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$. El sistema de ecuaciones a resolver era:

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + 5\beta + 2\gamma = 0 \\ 3\alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Ahora debemos aprender a escribir ecuaciones en SymPy con la función “linsolve”

```
[16]: α,β,γ = symbols('α β γ')
```

```
[17]: ec1= Eq(α+4*β+3*γ,0)
ec2= Eq(2*α+5*β+2*γ,0)
ec3= Eq(3*α+γ,0)
```

```
[18]: linsolve([ec1, ec2, ec3 ], (α, β, γ))
```

```
[18]: {(0, 0, 0)}
```

Repasemos el ejemplo 1.10. Primero escribamos los vectores

```
[19]: a = R.i + 2*R.j + 3*R.k
b = 4*R.i + 5*R.j + 0*R.k
c = 3*R.i + 2*R.j + 1*R.k
```

```
[20]: ec1= Eq(α + 4*β + 3*γ,0)
ec2= Eq(2*α +5*β + 2*γ,0)
ec3= Eq(3*α + γ,0)
```

```
[21]: linsolve([ec1, ec2, ec3 ], (α, β, γ))
```

```
[21]: {(0, 0, 0)}
```

El volumen es el valor absoluto del triple producto

```
[22]: V= abs(a.cross(b).dot(c))
V
```

[22] : 24

Ahora vamos a introducir un vector arbitrario

[23] : `d1,d2,d3 = symbols('d1 d2 d3')`

[24] : `d= d1*R.i + d2*R.j + d3*R.k`

y calculamos las cantidades c^1 , c^2 , y c^3 del ejemplo

[25] : `c1= -(a.dot(d))/(a.cross(b).dot(c))`
`c2= -(b.dot(d))/(a.cross(b).dot(c))`
`c3= -(c.dot(d))/(a.cross(b).dot(c))`

[26] : `c1`

[26] : $\frac{d_1}{24} + \frac{d_2}{12} + \frac{d_3}{8}$

[27] : `c2`

[27] : $\frac{d_1}{6} + \frac{5d_2}{24}$

[28] : `c3`

[28] : $\frac{d_1}{8} + \frac{d_2}{12} + \frac{d_3}{24}$

y ahora la expresión:

$$c^1(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + c^2(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + c^3(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{d}$$

[29] : `c1*(b.cross(c)) + c2*(c.cross(a)) + c3*(a.cross(b)) + d`

[29] : $\hat{\mathbf{0}}$

1.2.7 Ejercicios

1. Con la definición del producto escalar entre vectores, demuestre que si θ es el ángulo entre los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , entonces:

$$\cos \theta = \frac{a^1 b^1}{ab} + \frac{a^2 b^2}{ab} + \frac{a^3 b^3}{ab}.$$

Donde las cantidades a^i/a y b^i/b son los cosenos directores de \mathbf{a} y \mathbf{b} respectivamente y $a = |\mathbf{a}|$ y $b = |\mathbf{b}|$.

2. Encuentre la distancia del punto P al origen, si P viene dado por el vector posición: $\mathbf{r} = 2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$. Y si para un punto arbitrario el vector posición es: $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ ¿qué superficie describe este vector cuando $|\mathbf{r}| = 3$?
3. Encuentre los cosenos directores y los correspondientes ángulos para los siguientes vectores:
 - (a). $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$.
 - (b). $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$.
 - (c). $\mathbf{c} = 4\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$.

4. Verifique que los vectores $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ forman una base ¿Esta base será del tipo dextrógiro o levógiro?
5. ¿Son los siguientes conjuntos de vectores una base?
- (a). $\mathbf{a}_1 = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{a}_2 = \hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{a}_3 = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$.
- (b). $\mathbf{b}_1 = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b}_2 = 2\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b}_3 = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$.
6. Dados los vectores:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2 + 3\hat{\mathbf{e}}_3, \quad \mathbf{b} = 4\hat{\mathbf{e}}_1 + 5\hat{\mathbf{e}}_2 + 6\hat{\mathbf{e}}_3, \quad \mathbf{c} = 3\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \mathbf{d} = 6\hat{\mathbf{e}}_1 + 5\hat{\mathbf{e}}_2 + 4\hat{\mathbf{e}}_3.$$

- (a). Encuentre: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{d}$, $-\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{d}$.
- (b). El ángulo entre los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} y los vectores base $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_3$.
- (c). La magnitud de los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} .
- (d). El ángulo entre \mathbf{a} y \mathbf{b} y entre \mathbf{c} y \mathbf{d} .
- (e). La proyección de \mathbf{a} sobre \mathbf{b} .
- (f). ¿Son los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} coplanares?
- (g). Encuentre $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d})$.
- (h). Los productos $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ y los ángulos que estos forman con \mathbf{d} .
- (i). $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
7. Verifique la desigualdad triangular: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, para los siguientes vectores:
- (a). $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}$.
- (b). $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{b} = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$.
8. Si \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores arbitrarios y α y β números, demuestre que:

$$|\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}|^2 \leq \alpha^2|\mathbf{a}|^2 + 2\alpha\beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \beta^2|\mathbf{b}|^2.$$

9. Si \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} y \mathbf{d} son vectores arbitrarios y α , β , γ escalares que satisfacen:

$$\alpha(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{d} = \mathbf{0},$$

demuestre que si \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son linealmente independientes, entonces:

$$\alpha = -\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \beta = -\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \gamma = -\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}.$$

10. Si \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} y \mathbf{d} son vectores arbitrarios y α , β , γ escalares que satisfacen:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0},$$

demuestre que si \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son linealmente independientes, entonces:

$$\alpha = -\frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \beta = -\frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \gamma = -\frac{\mathbf{d} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}.$$

Ayuda: tome el producto escalar de la ecuación con $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

11. Demuestre que los vectores $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{c} = 4\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ son linealmente independientes. Escoja un vector \mathbf{d} y verifique los resultados de los dos últimos ejercicios.

1.3 Aplicaciones del álgebra vectorial

Uno de los terrenos más exitosos de las aplicaciones del álgebra vectorial es la geometría analítica. Esto se realiza en base a la definición que hiciéramos del radio vector: a cada punto P del espacio le

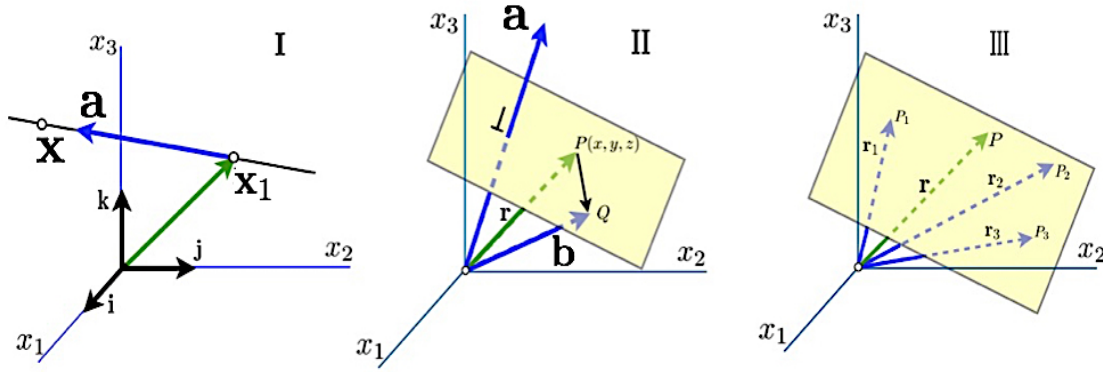


Figura 1.5: Tres ilustraciones de aplicación del álgebra de vectores a la geometría analítica: cómo expresar rectas y planos con vectores cartesianos. En el cuadrante I ilustramos la ecuación de una recta. En la imagen II mostramos la relación entre los vectores que están en el plano y el vector perpendicular a éste. Finalmente en III se especifican varios puntos del plano caracterizándolos con sus correspondiente radiovectores.

asociamos un radio vector posición, tal y como lo mostramos en el cuadrante I de la figura 1.4.

$$P \longleftrightarrow (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3) \Rightarrow \mathbf{r}(P) = x^1 \hat{\mathbf{i}} + y^2 \hat{\mathbf{j}} + z^3 \hat{\mathbf{k}} = x^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + x^2 \hat{\mathbf{i}}_2 + x^3 \hat{\mathbf{i}}_3 = \sum_{i=1}^3 x^i \hat{\mathbf{i}}_i.$$

A partir de esta definición todas las propiedades geométricas del espacio las podemos construir con vectores.

1.3.1 Rectas y vectores

La ecuación de la recta en término de vectores la definiremos fijando uno de sus puntos, digamos:

$$\mathbf{r}(P_1) \equiv \mathbf{x}(P_1) = \mathbf{x}_1 = x_1 \hat{\mathbf{i}} + y_1 \hat{\mathbf{j}} + z_1 \hat{\mathbf{k}} = x_{(1)}^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + x_{(1)}^2 \hat{\mathbf{i}}_2 + x_{(1)}^3 \hat{\mathbf{i}}_3,$$

y un vector que indique su dirección, por ejemplo, $\mathbf{a} = a^1 \hat{\mathbf{i}} + a^2 \hat{\mathbf{j}} + a^3 \hat{\mathbf{k}}$ (ver cuadrante I de la figura 1.5).

Con esto, la ecuación de una recta en lenguaje vectorial será:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{a} \Rightarrow x^i \hat{\mathbf{i}} + y^j \hat{\mathbf{j}} + z^k \hat{\mathbf{k}} = x_1 \hat{\mathbf{i}} + y_1 \hat{\mathbf{j}} + z_1 \hat{\mathbf{k}} + \lambda (a^1 \hat{\mathbf{i}} + a^2 \hat{\mathbf{j}} + a^3 \hat{\mathbf{k}}) \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + \lambda a^1, \\ y = y_1 + \lambda a^2, \\ z = z_1 + \lambda a^3. \end{cases}$$

Con $\mathbf{x} = x^i \hat{\mathbf{i}} + y^j \hat{\mathbf{j}} + z^k \hat{\mathbf{k}}$, el conjunto de puntos genéricos que cumplen con la ecuación de la recta en \mathbb{R}^3 .

Existe una manera más elegante, como veremos en la sección siguiente, de reescribir las ecuaciones anteriores utilizando la notación de índices⁵. Las ecuaciones ahora son más evidentes:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{a} \Rightarrow x^i \hat{\mathbf{i}}_i = x_{(1)}^i \hat{\mathbf{i}}_i + \lambda a^i \hat{\mathbf{i}}_i \Rightarrow x^i = x_{(1)}^i + \lambda a^i, \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

donde: $(x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ y $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}) \equiv (\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{i}}_3)$.

Nótese que efectivamente se cumplen tres ecuaciones escalares y cada una de éstas tiene la forma de una recta. Además, tal y como se muestra la figura 1.5, el punto genérico (x, y, z) lo describe (sobre la recta) la variación del módulo de \mathbf{a} mediante la constante de proporcionalidad λ . Si se requiere describir

⁵Suprimimos aquí el símbolo de sumatoria, esta convención quedará clara en la siguiente sección, pero mantengamos en mente que tenemos una suma sobre el índice i .

una recta que pase por dos puntos: (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) entonces una vez seleccionado uno de los puntos (digamos (x_1, y_1, z_1)) seleccionamos el vector $\mathbf{a} = \mathbf{r}(P_2) - \mathbf{r}(P_1)$ como la resta de los dos radio vectores a los puntos P_2 y P_1 . Esto es:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \lambda (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) .$$

Al despejar λ de las ecuaciones de las rectas resulta:

$$x^i = x_{(1)}^i + \lambda a^i \Rightarrow \lambda = \frac{x^i - x_{(1)}^i}{a^i} = \frac{x - x_1}{a^1} = \frac{y - y_1}{a^2} = \frac{z - z_1}{a^3} ,$$

y de manera equivalente:

$$x^i = x_{(1)}^i + \lambda (x_{(2)}^i - x_{(1)}^i) \Rightarrow \lambda = \frac{x^i - x_{(1)}^i}{x_{(2)}^i - x_{(1)}^i} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} .$$

1.3.2 Planos y vectores

Ocurre exactamente lo mismo cuando construimos la ecuación vectorial para un plano. En general, una superficie está definida por su vector normal (perpendicular). En el caso de una superficie plana (un plano), tendrá una única normal que lo define. Por lo tanto, un plano estará definido por su vector perpendicular en un punto, digamos $Q = P_1 : (x_1, y_1, z_1)$. La ecuación vectorial del plano vendrá dada por todos los vectores \overrightarrow{PQ} tales que sean perpendiculares a un determinado vector \mathbf{a} (ver cuadrante II de la figura 1.5). El punto P es un punto genérico (x, y, z) que define un radio vector. La ecuación vectorial del plano será:

$$\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{r}(P) - \underbrace{\mathbf{r}(P_1)}_{\mathbf{b}}] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_1}_b .$$

Esto es, se tiene que cumplir la condición:

$$\begin{aligned} (a^1 \hat{\mathbf{i}} + a^2 \hat{\mathbf{j}} + a^3 \hat{\mathbf{k}}) \cdot [(x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}) - (x_1 \hat{\mathbf{i}} + y_1 \hat{\mathbf{j}} + z_1 \hat{\mathbf{k}})] &= 0 , \\ (a^1 \hat{\mathbf{i}} + a^2 \hat{\mathbf{j}} + a^3 \hat{\mathbf{k}}) \cdot [(x - x_1) \hat{\mathbf{i}} + (y - y_1) \hat{\mathbf{j}} + (z - z_1) \hat{\mathbf{k}}] &= 0 , \\ \Rightarrow a^1 (x - x_1) + a^2 (y - y_1) + a^3 (z - z_1) &= 0 , \end{aligned}$$

con lo cual, la ecuación del plano queda como siempre la hemos conocido:

$$a^1 x + a^2 y + a^3 z - a^1 x_1 - a^2 y_1 - a^3 z_1 = 0 \Rightarrow a^1 x + a^2 y + a^3 z = b = a^1 x_1 + a^2 y_1 + a^3 z_1 .$$

Es claro que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_1 = b$ es la proyección del radio vector $\mathbf{r}(P_1)$ sobre la perpendicular que define al plano. Por lo tanto, será la distancia entre el plano y el origen de coordenadas. Si $b = 0$ el plano pasa por el origen de coordenadas.

Consideremos ahora el cuadrante III de la figura 1.5. Allí están especificados tres puntos en el espacio caracterizados por sus correspondientes radio vectores posición: $\mathbf{r}(P_1) = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}(P_2) = \mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}(P_3) = \mathbf{r}_3$. Estos tres puntos serán coplanares si:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] = 0 ,$$

y la ecuación vectorial del plano vendrá dada por:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot [(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] = 0 .$$

Consideremos los conceptos anteriores en algunos ejemplos. En particular en la Física de la materia condensada se aplican a la construcción de modelos de redes cristalinas. Las redes de Bravais, los

teselados⁶ de Escher y los embaldosados Penrose son ilustraciones perfectas para los conceptos que acabamos de desarrollar.

Ejemplo 1.11 Un plano viene determinado por los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$ y $C = (0, 0, 0)$. Encuentre la ecuación del plano

Para encontrar la ecuación del plano podemos hacer lo siguiente: Encontremos el vector posición de los puntos A y B ,

$$\mathbf{r}_{AB} = B - A = (0, 1, 2), \quad \mathbf{r}_{AC} = C - A = (-1, -1, -1),$$

un vector normal al plano es: $\mathbf{n} = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{r}_{AC} = (1, -2, 1)$.

Para la ecuación del plano, podemos escoger el vector $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ por lo que tenemos entonces que:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \Rightarrow (1, -2, 1) \cdot (x, y, z) = (1, -2, 1) \cdot (1, 1, 1) \Rightarrow x - 2y + z = 0.$$

Ejemplo 1.12 Dados los siguientes puntos en el espacio:

$$A = (1, 0, 3), B = (2, -1, 0), C = (0, -1, 1), d = (-1, 0, 1).$$

¿Estos puntos serán coplanares?

Consideremos los tres primeros puntos, que podemos considerar coplanares ya que bastan tres puntos para definir un plano. Estos tres puntos son los vértices de un triángulo cuya área podemos calcular de la siguiente manera:

Primero seleccionamos uno de los puntos como un vértice privilegiado (digamos $(2, -1, 0)$) respecto al cual construiremos dos vectores que representan dos de los lados del triángulo. Esto es:

$$\mathbf{a} = (1, 0, 3) - (2, -1, 0) \leftrightarrow \mathbf{a} = -\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{b} = (0, -1, 1) - (2, -1, 0) \leftrightarrow \mathbf{b} = -2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}},$$

con lo cual, el área del triángulo será la mitad del área del paralelogramo que tiene por lados estos dos vectores. Es decir:

$$A = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}} \Rightarrow A = \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}| = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

Por otro lado, la ecuación del plano que generan estos tres puntos se calcula con la siguiente ecuación:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot ((\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)) = 0,$$

donde:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{r}_1 = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{r}_2 = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{r}_3 = -\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}},$$

con lo cual la ecuación del plano queda como:

$$\begin{vmatrix} (x-1) & y & (z-3) \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(x-1) + 5y - 2(z-3) = 0 \Rightarrow x - 5y + 2z = 7.$$

Podemos verificar si el cuarto punto, $(-1, 0, 1)$, se encuentra en el plano, es decir, debemos verificar

⁶<http://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation>

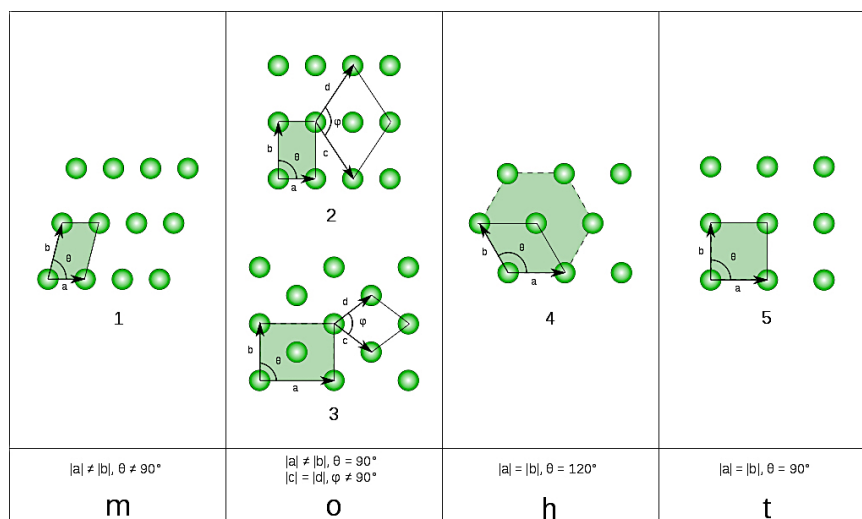


Figura 1.6: Las 5 redes de Bravais bidimensionales fundamentales: 1 Oblicuas, 2 rectangular, 3 rectangular centrada (rómbrica), 4 hexagonal, y 5 cuadrada. Figura tomada de http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice.

que cumple la ecuación que lo define.

$$x - 5y + 2z = 7 \Rightarrow (-1) - 5(0) + 2(1) \neq 7,$$

por lo tanto, los cuatro puntos no son coplanares. Podemos entonces calcular la distancia del cuarto punto al plano construyendo un vector unitario normal al plano.

$$\hat{\mathbf{n}}_P = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{30}} (\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}),$$

con lo cual la distancia al cuarto punto será:

$$d = |\hat{\mathbf{n}}_P \cdot \mathbf{c}| = \left| \frac{1}{\sqrt{30}} (\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}) \cdot (-3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \right| = \left| -\frac{6}{\sqrt{30}} \right| = \frac{6}{\sqrt{30}}.$$

Ejemplo 1.13 Auguste Bravais⁷ se dio cuenta que, replicando un arreglo geométrico muy simple, se puede describir una estructura cristalina. Dicho de otro modo, que conociendo una celda simple, podemos conocer la estructura cristalina. Esto es, que las posiciones de los átomos en una red cristalina puede ser descrita por un vector:

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = n^1 \mathbf{a}_1 + n^2 \mathbf{a}_2 + n^3 \mathbf{a}_3 = n^i \mathbf{a}_i,$$

donde los \mathbf{a}_i son vectores no coplanares (vectores primitivos o, simplemente en nuestro lenguaje, vectores base). Los n^i son números enteros (negativos, cero o positivos), y la posición de cada átomo de un cristal puede ser descrita como reescalamientos (discretos) de este vector genérico o, de manera más precisa, la traslación del origen de coordenadas por un vector. Ese concepto se conoce como redes de Bravais⁸. En cada red puede haber varios vectores primitivos⁹. Se puede definir la *celda primitiva* como la estructura mínima que replicada reproduce todo el cristal. Vale decir, la estructura cristalina es invariante bajo

⁷http://en.wikipedia.org/wiki/Auguste_Bravais

⁸http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice

⁹<http://www.engr.sjsu.edu/rkwok/Phys175A/Chapter%201.pdf>

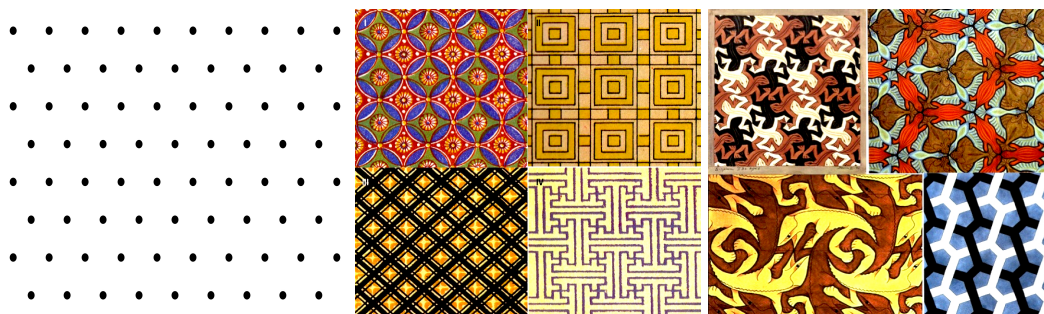


Figura 1.7: A la izquierda red cristalina bidimensional. Al centro cuatro detalles geométricos: mural egipcio, mural asirio, tejido tahití e ilustración en pieza de porcelana china. Tomado de: http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group. Finalmente, a la derecha, teselados de M.C. Escher, tomados de: <http://www.wikipaintings.org/en/paintings-by-genre/tessellation?firstArtist=m-c-escher#artist-m-c-escher>.

traslaciones espaciales del tipo:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} + \mathbf{T}, \quad \text{con } \mathbf{T} = m^i \mathbf{a}_i.$$

Tal y como muestra la figura 1.6 existen 5 tipos distintos de redes de Bravais bidimensionales. Maurits Cornelis Escher¹⁰ fue un fenomenal dibujante holandés, quien se interesó por las simetrías de los grupos de imágenes de papel tapiz. Berend, hermano de Maurits, era cristalógrafo y le mostró la belleza de las simetrías de la naturaleza. Los teselados¹¹ que presentamos a la derecha de la figura 1.7 constituyen también redes de Bravais bidimensionales.

Uno también se puede plantear redes aperiódicas que no presentan simetrías de traslación pero sí de rotación y reflexión. Estas estructuras fueron estudiadas por R. Penrose¹² en los años 70 como meras curiosidades matemáticas. Existen varias herramientas en la red que les permite construir interesantes figuras de los embaldosados de Penrose¹³. Luego, a principio de la década de los 80, se descubren materiales cuasi-cristalinos (cuasi-cristales o cristales cuasiperiódicos) que pueden ser modelados con este tipo de estructuras. Este tipo de materiales y los modelos que los describen motivaron un premio Nobel¹⁴.

En las **redes de Bravais tridimensionales** se complica un poco más el escenario. Se puede demostrar que existen 14 de estas redes, los volúmenes de ocupación atómica, para los sistemas: monoclinico, triclinico, ortorombico, tetragonal, romboédrico, hexagonal y cúbico, corresponden a las expresiones que se muestran en la figura 1.8.

El sistema cúbico, el más simple, corresponde a un sistema con un único parámetro de red $a = |\mathbf{a}|$, ya que $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Además, una posible descripción, para el caso más simple, es $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}}$, $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{k}}$, los tres vectores cartesianos ortogonales. Existen otros sistemas que también están asociados al cúbico. Estos son el sistema cúbico cara centrada (*fcc* por sus siglas en inglés) y cúbico cuerpo centrado (*bcc*). En el primero existen átomos en el centro de cada una de las caras del cubo definido por la tríada, $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$. En el sistema *fcc* se añade un átomo la centro del cubo simple.

¹⁰http://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher

¹¹<http://en.wikipedia.org/wiki/Tessellation>

¹²Roger Penrose (Premio Nobel 2020), descubre que la formación de agujeros negros es una predicción de la Relatividad General.

¹³<https://misc.0o0o.org/penrose/>

¹⁴El Premio Nobel de Química 2011 fue otorgado a Dan Shechtman por el descubrimiento de los cuasi-cristales.



















| Crystal family | Lattice system | 14 Bravais lattices | | | | |
|----------------|----------------|--|--|--|--|---|
| | | Primitive | Base-centered | Body-centered | Face-centered | Rhombohedrally-centered |
| triclinic | |  | | | | |
| monoclinic | | $\beta \neq 90^\circ$  | $\beta \neq 90^\circ$  | | | |
| | | $a \neq b \neq c$  | $a \neq b \neq c$  | | | |
| orthorhombic | | $a \neq b \neq c$  | $a \neq b \neq c$  | $a \neq b \neq c$  | $a \neq b \neq c$  | |
| | | $a \neq c$  | | $a \neq c$  | | |
| tetragonal | | $a \neq c$  | | $a \neq c$  | | |
| hexagonal | rhomboidal | | | | | $\gamma = 120^\circ$  |
| | hexagonal | $\gamma = 120^\circ$  | | | | |
| cubic | | $a = b = c$  | | $a = b = c$  | $a = b = c$  | |

Figura 1.8: Las 14 Redes de Bravais tridimensionales y las estructuras cristalinas asociadas. Tomado de: http://en.wikipedia.org/wiki/Bravais_lattice.

Practicando con SymPy

Consideremos el plano determinado por los puntos $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 4, 6)$ y $R = (2, 2, 2)$. Para construir la ecuación del plano primero ingresamos los vectores posición de cada punto.

```
[1]: import sympy
      from sympy import *
      from sympy.vector import *
      R = CoordSys3D('R')
```

Dados los vectores

```
[2]: a = R.i + R.j + R.k
      b = 2*R.i + 4*R.j + 6*R.k
      c = 2*R.i + 2*R.j + 2*R.k
```

Podemos verificar que los vectores se encuentren en el mismo plano simplemente calculando el triple producto vectorial: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ entre ellos. Sabemos que si es nulo es porque los vectores son coplanares.

```
[3]: a.cross(b).dot(c)
```

```
[3]: 0
```

Necesitamos ahora calcular los vectores que van del punto P al punto Q y del punto P al punto R , es decir, los vectores: $\mathbf{ab} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\mathbf{ac} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$

```
[4]: ab=b-a
     ac=c-a
```

Un vector normal al plano será sencillamente el vector: $\mathbf{n} = \mathbf{ab} \times \mathbf{ac}$:

```
[5]: n=ab.cross(ac)
     n
```

```
[5]: (-2)*i_R + (4)*j_R + (-2)*k_R
```

Podemos escoger cualquiera de los vectores originales, en este caso al vector \mathbf{a} , para escribir la ecuación del plano: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$.

Donde \mathbf{r} es:

```
[6]: x,y,z = symbols('x y z')
     r= x*R.i + y*R.j + z*R.k
```

```
[7]: Eq(n.dot(r),n.dot(a))
```

```
[7]: -2x + 4y - 2z = 0
```

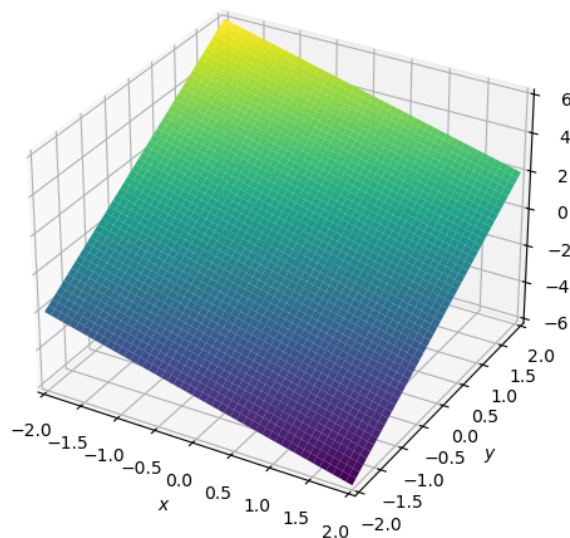
Probemos graficar este plano de la manera siguiente

```
[8]: ec=Eq(n.dot(r),n.dot(a))
     sol=solve(ec,z)
```

```
[9]: z=sol[0]
     z
```

```
[9]: -x + 2y
```

```
[12]: from sympy.plotting import plot3d
      plot3d(z, (x, -2, 2), (y, -2, 2))
```



1.3.3 Ejercicios

1. Para las rectas dadas a continuación:

(a). $L : \frac{3x-1}{4} = \frac{2y+3}{2} = 2 - 3z$.

(b). $L : \frac{2x+1}{3} = \frac{3y+2}{3} = -2 + 4z$.

Encuentre los vectores posición para dos puntos diferentes sobre la recta y un vector unitario paralelo a la recta L .

2. Dada una línea recta L_1 que pasa a través de los puntos $(-2, 3, 1)$ y $(1, 4, 6)$ encuentre:

(a). El vector posición de un punto sobre la recta y un vector paralelo a ésta.

(b). Una recta L_2 paralela a L_1 y que pase por el punto $(1, 2, 1)$.

3. Una línea recta tiene como ecuación vectorial: $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$, donde: $\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$.

Encuentre la ecuación cartesiana de la recta y las coordenadas de tres puntos sobre la recta.

4. Una línea recta pasa por el punto $(3, 2, -3)$ y paralela al vector $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$. Encuentre la ecuación cartesiana de la recta y las coordenadas de tres puntos sobre la recta.

5. Dado un plano que pasa por el punto $(2, 3, -5)$ y con vector normal $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}$, encuentre la forma cartesiana de la ecuación del plano.

6. Encuentre la ecuación del plano con normal \mathbf{a} y que contiene el punto P cuando:

(a). $\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, $P = (1, 0, 1)$.

(b). $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, $P = (2, -3, 4)$.

7. El ángulo entre dos planos se define como el ángulo entre sus normales. Encuentre el ángulo entre los siguientes planos:

(a). $x + 3y + 2z = 4$ y $2x - 5y + z = 2$.

(b). $3x + 2y - 2z = 4$ y $2x + y + 2z = 1$.

8. Demuestre que la ecuación de una esfera puede expresarse como:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{c}|^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{c}) = a^2,$$

donde \mathbf{c} es el vector posición del centro de la esfera y a el radio.

9. Considere el ejemplo 1.13 de las redes de Bravais.

(a). Dada la red bidimensional de la figura 1.7 (Izquierda) encuentre todos los posibles vectores primitivos y celdas primitivas asociadas.

(b). La humanidad ha estado seducida por la geometría desde que empezó a representar figuras. A partir de las cuatro imágenes que se ilustran en la figura 1.7 (Centro), encuentre todos los posibles vectores y celdas primitivas asociadas.

(c). En las cuatro obras del género de teselado de M.C. Escher, presentadas en la figura 1.7 (Derecha) encuentre todos los posibles vectores y celdas primitivas asociadas.

10. Considere otra vez el ejemplo 1.13 de las redes de Bravais, en este caso tridimensionales.

(a). Muestre que un sistema bcc también puede ser descrito por los vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{b} = a\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/2.$$

Dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.

(b). Muestre que un sistema bcc también puede ser descrito por los vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = a(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{i}})/2, \quad \mathbf{b} = a(\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})/2, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}})/2.$$

Dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.

- (c). Muestre que un sistema *fcc* también puede ser descrito por los vectores primitivos:

$$\mathbf{a} = a(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/2, \quad \mathbf{b} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}})/2, \quad \mathbf{c} = a(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})/2.$$

Otra vez, dibuje la celda primitiva y calcule su volumen.

- (d). Se puede definir la red recíproca como:

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}.$$

De esta manera es claro que, por construcción, $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = 0$ y además $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a} = 1$. Con lo cual podemos generalizarlo como $\hat{\mathbf{e}}^{i'} \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_j^{i'}$. Expresé los vectores y las celdas recíprocas para los sistemas cúbico simple, y los distintos *bcc* y *fcc*. Calcule además el volumen de cada celda recíproca.

1.4 Álgebra vectorial con índices

Antes de comenzar con la presentación de este esquema de cálculo cabe aclarar algunas costumbres y convenciones con la notación de índices, que estaremos utilizando durante el resto de este texto.

1.4.1 Convención de Einstein

El convenio de suma de Einstein, es una simplificación que se utiliza para abreviar la escritura de las sumatorias, en el que se suprime el símbolo de sumatoria y consiste en lo siguiente:

1. Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^3 a^m \mathbf{e}_m \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m = a^i \mathbf{e}_i.$$

2. Los índices repetidos son mudos (no importa las letras que los etiquete) y representan suma. Así:

$$k^j a_j = k^m a_m = k^1 a_1 + k^2 a_2 + k^3 a_3 = b.$$

En este punto del discurso, la posición de los índices (arriba y abajo) solo tiene sentido estético y solo así indican suma. Más adelante veremos que representan cantidades distintas.

3. Llamaremos contracción cuando sumamos respecto a un par de índices, vale decir:

$$A_i^j \Rightarrow \sum_i A_i^i = A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 \Rightarrow A_i^i = A_1^1 + A_2^2 + A_3^3.$$

Las cantidades con dos o más índices las llamaremos componentes de tensores, y deben entenderse como arreglos bidimensionales (tridimensionales, tetradimensionales, según el número de índices). Estas cantidades serán considerados en detalle posteriormente pero por ahora, contentémonos con saber qué cosas son cantidades con dos índices. Es claro que la contracción de índices convierte un conjunto de números $(i \times j) \rightarrow 1$, en un sólo número.

Los índices libres (aquellos que no están sumados) indican el número de objetos disponibles y deben mantenerse a ambos lados de la ecuación. Por ejemplo:

$$B_i = K_i^k A_k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} K_1^1 A_1 + K_1^2 A_2 + K_1^3 A_3 = B_1, \\ K_2^1 A_1 + K_2^2 A_2 + K_2^3 A_3 = B_2, \\ K_3^1 A_1 + K_3^2 A_2 + K_3^3 A_3 = B_1, \end{cases}$$

con lo cual $B_i = K_i^k A_k$ representa tres ecuaciones. La operación $B_{ij} = K_i^k A_{kj}$ representa nueve

ecuaciones.

La delta de Kronecker¹⁵ es un objeto matemático de dos índices, representa $\delta_i^k = 1$ si $i = k$, y es nula en los otros casos. Por ejemplo:

$$K_{ij}^k \delta_k^i = K_{1j}^1 \underbrace{\delta_1^1}_{=1} + K_{2j}^1 \underbrace{\delta_1^2}_{=0} + K_{3j}^1 \underbrace{\delta_1^3}_{=0} + K_{1j}^2 \underbrace{\delta_2^1}_{=0} + K_{2j}^2 \underbrace{\delta_2^2}_{=1} + K_{3j}^2 \underbrace{\delta_2^3}_{=0} + K_{1j}^3 \underbrace{\delta_3^1}_{=0} + K_{2j}^3 \underbrace{\delta_3^2}_{=0} + K_{3j}^3 \underbrace{\delta_3^3}_{=1},$$

es decir:

$$K_{ij}^k \delta_k^i = K_{kj}^k = K_{ij}^i = K_{1j}^1 + K_{2j}^2 + K_{3j}^3.$$

Además de la delta de Kronecker introduciremos el símbolo de permutación de Levi-Civita¹⁶, ε^{ijk} , para el caso de tres dimensiones: $i, j, k = 1, 2, 3$.

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{cuando } \{(i, j, k) = (1, 2, 3); (3, 1, 2); (2, 3, 1)\} \text{ permutación cíclica,} \\ -1 & \text{cuando } \{(i, j, k) = (1, 3, 2); (3, 2, 1); (2, 1, 3)\} \text{ permutación impar o anticíclica,} \\ 0 & \text{cuando } \{i = j, \quad i = k \quad \wedge \quad j = k\}. \end{cases}$$

Por lo tanto, es distinto de cero cuando todos los índices son diferentes. Toma el valor 1 si la permutación de índices es cíclica (o par), y toma el valor -1 si la permutación es anticíclica (o impar).

Si queremos calcular, por ejemplo: $c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k$, entonces resulta:

$$\begin{aligned} c^1 &= \varepsilon^{111} a_1 b_1 + \varepsilon^{112} a_1 b_2 + \varepsilon^{113} a_1 b_3 + \varepsilon^{121} a_2 b_1 + \varepsilon^{122} a_2 b_2 + \varepsilon^{123} a_2 b_3 + \varepsilon^{131} a_3 b_1 + \varepsilon^{132} a_3 b_2 + \varepsilon^{133} a_3 b_3, \\ c^2 &= \varepsilon^{211} a_1 b_1 + \varepsilon^{212} a_1 b_2 + \varepsilon^{213} a_1 b_3 + \varepsilon^{221} a_2 b_1 + \varepsilon^{222} a_2 b_2 + \varepsilon^{223} a_2 b_3 + \varepsilon^{231} a_3 b_1 + \varepsilon^{232} a_3 b_2 + \varepsilon^{233} a_3 b_3, \\ c^3 &= \varepsilon^{311} a_1 b_1 + \varepsilon^{312} a_1 b_2 + \varepsilon^{313} a_1 b_3 + \varepsilon^{321} a_2 b_1 + \varepsilon^{322} a_2 b_2 + \varepsilon^{323} a_2 b_3 + \varepsilon^{331} a_3 b_1 + \varepsilon^{332} a_3 b_2 + \varepsilon^{333} a_3 b_3, \end{aligned}$$

con lo cual:

$$c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \Rightarrow \begin{cases} c^1 = \varepsilon^{123} a_2 b_3 + \varepsilon^{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \\ c^2 = \varepsilon^{231} a_3 b_1 + \varepsilon^{213} a_1 b_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \quad y \\ c^3 = \varepsilon^{312} a_1 b_2 + \varepsilon^{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{cases}$$

A continuación enumeramos algunas propiedades de la delta de Kronecker y del símbolo de permutación de Levi-Civita, dejamos al lector su demostración. Ellas son:

$$\begin{aligned} \delta_j^j &= 3, \\ \varepsilon_{jkm} \varepsilon^{ilm} &= \delta_j^i \delta_k^l - \delta_k^i \delta_j^l = \delta_j^i \delta_k^l - \delta_j^l \delta_k^i, \\ \varepsilon_{jmn} \varepsilon^{imn} &= 2\delta_j^i, \quad y \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} &= 6. \end{aligned}$$

1.4.2 Vectores e índices

Disponemos ahora de una manera más elegante para escribir ecuaciones que involucren vectores. Veamos qué forma toma el álgebra vectorial con esta nueva notación. Recordemos que con la notación de índices podemos escribir un vector como: $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$, donde las cantidades a^i son las componentes del vector en la base $\{\mathbf{e}_i\}$.

¹⁵Leopold Kronecker (1823-1891, Berlin, Alemania) Matemático polaco con importantes contribuciones en teoría de números, funciones elípticas y álgebra, así como la interrelación entre estas disciplinas. https://es.wikipedia.org/wiki/Leopold_Kronecker.

¹⁶Tullio Levi-Civita (1873-1941, Roma, Italia) Geómetra italiano y uno de los desarrolladores del cálculo tensorial que más tarde sería utilizado por Einstein y Weyl como el lenguaje de la Relatividad General. https://es.wikipedia.org/wiki/Tullio_Levi-Civita.

1.4.2.1 Sumas de vectores

La suma de vectores será expresada de la siguiente manera:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i + b^i \mathbf{e}_i = (a^i + b^i) \mathbf{e}_i = c^i \mathbf{e}_i \Rightarrow c^i = a^i + b^i, \quad \text{con } i = 1, 2, 3.$$

1.4.2.2 Producto escalar

A partir da ahora y de forma equivalente, expresaremos el producto escalar en término de los índices.

De forma y manera que:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}) = a^i b_i, \quad \text{con } i = 1, 2, 3.$$

En este momento no explicaremos la razón por la que hemos escrito b_i , pero más adelante aclararemos esta situación. Por ahora seamos consistentes con la convención de índices de Einstein.

1.4.2.3 Producto vectorial

En términos de índices, la componente i del producto vectorial en coordenadas cartesianas se puede expresar como:

$$c^i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k, \quad \text{con } i, j, k = 1, 2, 3.$$

De esta manera, todas las particularidades de producto vectorial ahora descansan en las propiedades del símbolo de Levi-Civita.

Para el caso de una base ortonormal general, ahora expresado con índices tenemos

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^1 = \frac{1}{h_2 h_3} \varepsilon^{1jk} a_j b_k, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \frac{1}{h_1 h_3} \varepsilon^{2jk} a_j b_k, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^3 = \frac{1}{h_1 h_2} \varepsilon^{3jk} a_j b_k, \quad \text{con } j, k = 1, 2, 3.$$

Nótese que hemos dado prevalencia a la convención de suma con el tensor de Levi-Civita y dejado de lado etiquetar las componentes de vectores con superíndices.

1.4.2.4 Triple producto mixto

Para finalizar, analicemos ahora el número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación mixta:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cos(\theta_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}) = c^i \varepsilon_{ijk} a^j b^k = \varepsilon_{ijk} c^i a^j b^k = \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix},$$

y equivalentemente para una base general ortonormal

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{\varepsilon^{1jk} c_1 a_j b_k}{h_2 h_3} + \frac{\varepsilon^{2jk} c_2 a_j b_k}{h_1 h_3} + \frac{\varepsilon^{3jk} c_3 a_j b_k}{h_1 h_2}.$$

En los siguientes ejemplos ilustraremos la facilidad que implica la utilización de índices en el cálculo vectorial.

Ejemplo 1.14 Mostraremos a continuación dos casos de identidades vectoriales que pueden ser fácilmente demostradas mediante la utilización de índices.

- La identidad: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$

El resultado será un vector, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))^i &= \varepsilon^{ijk} a_j (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k = \varepsilon^{ijk} a_j \varepsilon_{kmn} b^m c^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{kmn} a_j b^m c^n = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} a_j b^m c^n \\
 &= (\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^j \delta_n^i) a_j b^m c^n = \delta_m^i \delta_n^j a_j b^m c^n - \delta_m^j \delta_n^i a_j b^m c^n \\
 &= \delta_m^i b^m \delta_n^j a_j c^n - \delta_n^i c^n \delta_m^j a_j b^m = \underbrace{b^i a_n c^n}_{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})} - \underbrace{c^i a_j b^j}_{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})} \\
 &= b^i (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - c^i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) .
 \end{aligned}$$

En la segunda línea hemos hecho uso de la identidad: $\varepsilon_{jkm} \varepsilon^{ilm} = \delta_j^i \delta_k^l - \delta_k^i \delta_j^l = \delta_j^i \delta_k^l - \delta_j^l \delta_k^i$.

- La identidad: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

El lado derecho es un escalar, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^l (\mathbf{c} \times \mathbf{d})_l \\
 &= \varepsilon^{ljk} a_j b_k \varepsilon_{lmn} c^m d^n = \varepsilon^{ljk} \varepsilon_{lmn} a_j b_k c^m d^n \\
 &= \varepsilon^{jkl} \varepsilon_{mnl} a_j b_k c^m d^n = (\delta_m^j \delta_n^k - \delta_m^k \delta_n^j) a_j b_k c^m d^n \\
 &= \delta_m^j \delta_n^k a_j b_k c^m d^n - \delta_m^k \delta_n^j a_j b_k c^m d^n \\
 &= \underbrace{\delta_m^j a_j c^m}_{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})} \underbrace{\delta_n^k b_k d^n}_{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})} - \underbrace{\delta_m^k b_k c^m}_{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})} \underbrace{\delta_n^j a_j d^n}_{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})} \\
 &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) .
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.15 Si tenemos tres vectores $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ queremos ver si se cumple:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0} .$$

En notación de índices resulta:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \epsilon^{lmi} a_m \epsilon_{ijk} b^j c^k + \epsilon^{lmi} b_m \epsilon_{ijk} c^j a^k + \epsilon^{lmi} c_m \epsilon_{ijk} a^j b^k ,$$

con lo cual, arreglando:

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{lmi} \epsilon_{ijk} a_m b^j c^k + \epsilon^{lmi} \epsilon_{ijk} b_m c^j a^k + \epsilon^{lmi} \epsilon_{ijk} c_m a^j b^k &= (\delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l) a_m b^j c^k \\
 &+ (\delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l) b_m c^j a^k \\
 &+ (\delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l) c_m a^j b^k ,
 \end{aligned}$$

y ahora desarrollando los productos de las δ 's, e identificando término a término, notamos que se anulan:

$$\underbrace{a_k b^l c^k}_I - \underbrace{a_k b^k c^l}_{II} + \underbrace{b_k c^l a^k}_{II} - \underbrace{b_k c^k a^l}_{III} + \underbrace{c_k a^l b^k}_{III} - \underbrace{c_k a^k b^l}_I = 0 .$$

1.4.3 Rotación de coordenadas

Consideremos un sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) y su base canónica $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, si rotamos el sistema de coordenadas un ángulo ϕ alrededor del eje z tendremos un nuevo sistema de coordenadas (x', y', z') y una nueva base $\{\hat{\mathbf{i}}', \hat{\mathbf{j}}', \hat{\mathbf{k}}'\}$. La ley de transformación que relaciona ambos sistemas de

coordenadas es:

$$\begin{cases} x = x' \cos \phi - y' \sin \phi \\ y = x' \sin \phi + y' \cos \phi \\ z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x \cos \phi + y \sin \phi \\ y' = -x \sin \phi + y \cos \phi \\ z' = z. \end{cases} \quad (1.3)$$

Mientras que las bases transformarán, como veremos más adelante, como:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}}' = \hat{\mathbf{i}} \cos \phi + \hat{\mathbf{j}} \sin \phi \\ \hat{\mathbf{j}}' = -\hat{\mathbf{i}} \sin \phi + \hat{\mathbf{j}} \cos \phi \\ \hat{\mathbf{k}}' = \hat{\mathbf{k}}. \end{cases}$$

Un triplete de números (a^1, a^2, a^3) definen las componente de un vector $\mathbf{a} = a^1 \hat{\mathbf{i}} + a^2 \hat{\mathbf{j}} + a^3 \hat{\mathbf{k}}$ si estas cantidades transforman bajo rotación de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a^{1'} = a^1 \cos \phi + a^2 \sin \phi \\ a^{2'} = -a^1 \sin \phi + a^2 \cos \phi \\ a^{3'} = a^3. \end{cases}$$

Notemos también lo siguiente, al usar la notación de índices podemos escribir las ecuaciones de transformación de coordenadas de una manera compacta:

$$\begin{cases} x' = x \cos \phi + y \sin \phi \\ y' = -x \sin \phi + y \cos \phi \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{1'} = a_1^{1'} x^1 + a_2^{1'} x^2 + a_3^{1'} x^3 \\ x^{2'} = a_1^{2'} x^1 + a_2^{2'} x^2 + a_3^{2'} x^3 \\ x^{3'} = a_1^{3'} x^1 + a_2^{3'} x^2 + a_3^{3'} x^3 \end{cases} \Rightarrow x^{i'} = A_j^{i'} x^j,$$

con: $i', j = 1, 2, 3$. Se puede ver fácilmente que las cantidades $A_j^{i'}$, en coordenadas cartesianas, vienen dadas por:

$$A_j^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j},$$

que no es otra cosa que el jacobiano de la transformación que consideraremos en la sección 3.2.8 y luego en la sección 5.1. En este caso es fácil identificar

$$A_1^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = \frac{\partial x'}{\partial x} = \cos \phi, \quad A_2^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = \frac{\partial x'}{\partial y} = \sin \phi, \quad A_3^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} = \frac{\partial x'}{\partial z} = 0 \dots$$

Como la transformación de coordenadas es invertible, el jacobiano no se anula y se tiene que:

$$x^j = \tilde{A}_{i'}^j x^{i'}, \quad \text{con} \quad \tilde{A}_{i'}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}.$$

Claramente se cumple la siguiente condición de ortogonalidad entre $A_k^{i'}$ y $\tilde{A}_{i'}^j$,

$$A_k^{i'} \tilde{A}_{i'}^j = \delta_k^j,$$

es decir, $A_k^{i'}$ y $\tilde{A}_{i'}^j$ son una la inversa de la otra.

Por lo tanto, en general, diremos que las componentes de un vector transformarán de la manera siguiente:

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} a^j \equiv A_j^{i'} a^j \iff a^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} a^{j'} \equiv \tilde{A}_{j'}^i a^{j'}. \quad (1.4)$$

$$\begin{pmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \\ a^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \\ a^{3'} \end{pmatrix}.$$

En esta ecuación hemos recurrido a la notación de matrices para representar la transformación de coordenadas.

Finalmente, el vector \mathbf{a} se podrá escribir en ambos sistemas de coordenadas:

$$\mathbf{a} = a^1 \hat{\mathbf{i}} + a^2 \hat{\mathbf{j}} + a^3 \hat{\mathbf{k}} = a^{1'} \hat{\mathbf{i}}' + a^{2'} \hat{\mathbf{j}}' + a^{3'} \hat{\mathbf{k}}' \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^i \hat{\mathbf{i}}_i = a^{i'} \hat{\mathbf{i}}_{i'}.$$

Observe que el valor del determinante para la matriz de transformación de coordenadas es $\det |A_j^{i'}| = 1$ por lo cual, las matrices asociadas con las rotaciones se denominan *transformaciones propias de coordenadas*. Este punto lo desarrollaremos con detalle en la próxima sección.

1.4.4 Escalares, pseudoescalares, vectores y pseudovectores

Además de las rotaciones podemos considerar otra clase de transformaciones: las reflexiones. Estas transformaciones, como por ejemplo: $(x^1, x^2, x^3) \rightarrow (-x^1, x^2, x^3)$, muestran una sutil diferencia entre dos tipos de cantidades vectoriales: los vectores polares y los axiales, diferencia que no se puede apreciar en las rotaciones.

Una reflexión del vector \mathbf{a} respecto al plano yz se puede representar como un cambio de signo en la componente x del vector:

$$(a_x, a_y, a_z) \rightarrow (-a_x, a_y, a_z), \quad (1.5)$$

o también, en nuestra notación de índices:

$$a^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{i}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{i}}_3 \rightarrow a^1 (-\hat{\mathbf{i}}_1) + a^2 \hat{\mathbf{i}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{i}}_3 \equiv (-a^1) \hat{\mathbf{i}}_1 + a^2 \hat{\mathbf{i}}_2 + a^3 \hat{\mathbf{i}}_3.$$

Diremos que los objetos que transforman de esta manera bajo reflexión son vectores polares o simplemente vectores. Nótese que esa transformación de coordenadas es equivalente a invertir el vector base: $\hat{\mathbf{i}}_1 \rightarrow -\hat{\mathbf{i}}_1$.

En general, podemos representar la reflexión (1.5) bajo el esquema que presentamos en (1.4), es decir, como transformaciones del tipo:

$$a^{i'} = A_j^{i'} a^j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^{1'} \\ a^{2'} \\ a^{3'} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix},$$

donde podemos identificar:

$$A_j^{i'} = \frac{\partial \tilde{x}^{i'}}{\partial x^j} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

como la matriz de transformación de coordenadas¹⁷.

Ahora bien, si dos vectores polares \mathbf{a} y \mathbf{b} , son transformados bajo una reflexión en el plano yz como en (1.5), entonces un vector axial \mathbf{c} transformará como:

$$\begin{aligned} c^1 &= a^2 b^3 - a^3 b^2 \Rightarrow \bar{c}^1 = a^{2'} b^{3'} - a^{3'} b^{2'} = a^2 b^3 - a^3 b^2 = c^1, \\ c^2 &= a^3 b^1 - a^1 b^3 \Rightarrow \bar{c}^2 = a^{3'} b^{1'} - a^{1'} b^{3'} = a^3 (-b^1) - (-a^1) b^3 = -c^2, \quad y \\ c^3 &= a^1 b^2 - a^2 b^1 \Rightarrow \bar{c}^3 = a^{1'} b^{2'} - a^{2'} b^{1'} = (-a^1) b^2 - a^2 (-b^1) = -c^3. \end{aligned}$$

¹⁷Pueden encontrar discusiones de vectores y pseudovectores, sus leyes de transformación e importancia en R.J. Quigley, (1973) "Pseudovectors and Reflections" American Journal of Physics 41, no. 3, 428-430; Hauser, W. (1986) "Vector products and pseudovectors" American Journal of Physics, 54(2), 168-172. y en el capítulo 52 del Vol. 1 de Feynman, R.P., Leighton, R.B. and Sands, M., (2013). "The Feynman Lectures on Physics", <https://www.feynmanlectures.caltech.edu>. Allí se exponen algunas de las consecuencias que se presentan cuando se consideran cantidades físicas y transformaciones de reflexión o paridad.

En el lenguaje de matrices tendremos

$$\tilde{c}^i = A_j^i c^j \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{c}^1 \\ \tilde{c}^2 \\ \tilde{c}^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c^1 \\ -c^2 \\ -c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}.$$

Claramente el vector resultante $(\tilde{c}^1, \tilde{c}^2, \tilde{c}^3) = (c^1, -c^2, -c^3) = -(c^1, c^2, c^3) = -\mathbf{c}'$. Es decir, no resulta \mathbf{c}' el reflejado de \mathbf{c} , sino su inverso. Entonces \mathbf{a} y \mathbf{b} transforman de una forma y \mathbf{c} de otra. Los dos primeros los consideramos vectores polares y el tercero un vector axial o pseudovector. Notemos además que el determinante de la matriz de transformación para los vectores polares es $\det |A_j^i| = -1$. Mientras que el valor determinante de la matriz de rotación que analizamos en la sección anterior fue $\det |A_j^i| = 1$. El hecho de que el $\det |A_j^i| = 1$ o $\det |A_j^i| = -1$, permite clasificar a las transformaciones de coordenadas en *transformaciones propias* e *impropias*, respectivamente. Las transformaciones de rotación se consideran *propias*, mientras que las reflexiones son transformaciones *impropias*.

Entonces, en general, diremos que las componentes de vectores y pseudovectores transformarán bajo reflexión de la siguiente manera:

$$\text{si: } A_j^i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \Rightarrow \begin{cases} a^{i'} = A_j^i a^j, & \text{vectores polares o simplemente vectores,} \\ p^{i'} = \det |A_j^i| A_j^i p^j, & \text{pseudovectores o vectores axiales.} \end{cases}$$

De igual forma notamos que $d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}'$ queda invariante bajo la transformación (1.5), mientras que $V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{c}' \cdot (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') = -V'$, cambia de signo. Siguiendo el ejemplo de vectores y pseudovectores, llamaremos escalar a d y pseudoescalar a V . Pseudovectores y vectores representan distintos objetos geométricos. Los primeros se asocian a orientaciones de superficies, mientras que los segundos lo están con segmentos de rectas orientadas.

Las transformaciones $\mathbf{a} \rightarrow -\mathbf{a}$ de paridad son otro tipo de transformaciones impropias de coordenadas que evidencian la distinción entre vectores y pseudovectores. En este tipo de transformaciones se invierten todos los vectores base $\hat{\mathbf{i}}_i \rightarrow -\hat{\mathbf{i}}_i$, con $i = 1, 2, 3$ y es fácil convencerse que,

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \mathbf{c}' \equiv \mathbf{c}.$$

Es decir, bajo transformaciones de paridad los vectores polares cambian de signo y los axiales o pseudovectores no.

Existen importantes cantidades físicas que vienen representadas por pseudovectores, entre ellas mencionamos: la cantidad de momento angular, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$; el torque $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ y la variación del campo de inducción magnética, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$. El vector velocidad angular, $\boldsymbol{\omega}$, es un pseudovector por cuanto \mathbf{r} y \mathbf{v} son vectores polares y $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Algo equivalente ocurre con la fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, donde \mathbf{B} es el campo magnético.

En el ejercicio 6 de la sección 2.2.4 de la página 116 mostraremos como estos conceptos de: escalares, vectores, pseudo-vectores y pseudo-escalares, se aplican en computación gráfica.

Practicando con SymPy

Para fines prácticos, las transformaciones de coordenadas del tipo rotaciones o reflexiones es de utilidad representarlas por matrices.

```
[1]: import sympy
      from sympy import *
      from sympy.vector import *
      R = CoordSys3D('R')
```

Por ejemplo, las rotaciones alrededor del eje z se puede representar como:

```
[2]: θ = symbols('θ', real=True)
      Rz=Matrix([[cos(θ), sin(θ), 0], [-sin(θ), cos(θ), 0], [0, 0, 1]])
      Rz
```

$$[2]: \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De manera que un vector \mathbf{a} transformará bajo esta rotación en un nuevo vector \mathbf{a}' .

```
[3]: a1, a2, a3 = symbols('a1 a2 a3')
      a = Matrix([[a1], [a2], [a3]])
      a
```

$$[3]: \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

```
[4]: Rz*a
```

$$[4]: \begin{bmatrix} a_1 \cos(\theta) + a_2 \sin(\theta) \\ -a_1 \sin(\theta) + a_2 \cos(\theta) \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Si la rotación se hace alrededor del eje x o y las matrices correspondientes son las siguientes:

```
[5]: Rx= Matrix([[1, 0, 0], [0, cos(θ), -sin(θ)], [0, sin(θ), cos(θ)]])
      Rx
```

$$[5]: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

```
[6]: Ry= Matrix([[cos(θ), 0, sin(θ)], [0, 1, 0], [-sin(θ), 0, cos(θ)]])
      Ry
```

$$[6]: \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Notemos que el determinante de éstas matrices es:

```
[7]: Rx.det()
```

$$[7]: \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$$

```
[8]: simplify(_)
```

```
[8]: 1
```

Si la rotación es en un ángulo de $\theta = 60^\circ$ entonces:

```
[9]: R60=Rx.subs(theta,60*pi/180)
R60
```

```
[9]: 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```

Si el eje de rotación se define a través de un vector unitario, digamos, $\hat{\mathbf{u}} = u_x\hat{\mathbf{i}} + u_y\hat{\mathbf{j}} + u_z\hat{\mathbf{k}}$, la matriz de rotación para un ángulo θ es:

```
[15]: ux,uy,uz,t = symbols('ux uy uz t')
t= 1-cos(theta)
R = Matrix([[cos(theta)+ux**2*t, ux*uy*t-uz*sin(theta), ux*uz*t+uy*sin(theta)],
            [uy*ux*t+uz*sin(theta), cos(theta)+uy**2*t, uy*uz*t-ux*sin(theta)],
            [uz*ux*t-uy*sin(theta), uz*uy*t+ux*sin(theta), cos(theta)+uz**2*t]])
R
```

```
[15]: 
$$\begin{bmatrix} ux^2 \cdot (1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta) & uxuy(1 - \cos(\theta)) - uz \sin(\theta) & uxuz(1 - \cos(\theta)) + uy \sin(\theta) \\ uxuy(1 - \cos(\theta)) + uz \sin(\theta) & uy^2 \cdot (1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta) & -ux \sin(\theta) + uyuz(1 - \cos(\theta)) \\ uxuz(1 - \cos(\theta)) - uy \sin(\theta) & ux \sin(\theta) + uyuz(1 - \cos(\theta)) & uz^2 \cdot (1 - \cos(\theta)) + \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

```

Por ejemplo, si el eje de rotación coincide con el vector $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{3}} + \frac{\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{3}} + \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{3}}$ y la rotación es en un ángulo de $\theta = 60^\circ$, entonces:

```
[16]: L=[(ux, 1/sqrt(3)), (uy, 1/sqrt(3)), (uz, 1/sqrt(3)),(theta,60*pi/180)]
```

```
[17]: Rt=R.subs(L)
Rt
```

```
[17]: 
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

```

De manera que un vector, por ejemplo, $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ transformará bajo esta rotación de la manera siguiente:

```
[18]: a = Matrix([[1], [2], [3]])
```

```
[19]: Rt*a
```

```
[19]: 
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```

Por otro lado, una reflexión en el plano zy es más sencilla de representar porque es la matriz:

[20]: `Re= Matrix([[-1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]])`
`Re`

[20]:
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si tenemos los siguientes vectores polares

[21]: `a = Matrix([[1],[2],[3]])`
`b = Matrix([[4],[5],[6]])`

Bajo la reflexión estos vectores transforman así:

[22]: `Re*a`

[22]:
$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

[23]: `Re*b`

[23]:
$$\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Veamos ahora cómo transforma el vector $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

[25]: `c= a.cross(b)`
`c`

[25]:
$$\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

[27]: `Re*c`

[27]:
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Es decir, \mathbf{c} es un pseudovector.

1.4.5 Ejercicios

1. Verifique las siguientes identidades:

- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$
- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{b}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] - \mathbf{a}[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})].$
- $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{d}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = 0.$
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = 0.$

$$(e). (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

$$(f). (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

2. Demuestre la siguiente tabla de relaciones:

| | | | | |
|--------------|---|--------------|---|---------------|
| vector | · | vector | = | escalar |
| vector | · | pseudovector | = | pseudoescalar |
| pseudovector | · | pseudovector | = | escalar |
| vector | × | vector | = | pseudovector |
| vector | × | pseudovector | = | vector |
| pseudovector | × | pseudovector | = | pseudovector |

3. Considere lo expuesto en la sección 1.4.3 y demuestre que:

$$A_k^{i'} \tilde{A}_{i'}^j = \delta_k^j,$$

y además, como un caso especial, establecer la relación con los cosenos directores que satisfacen:

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1.$$

4. Considere el radio vector posición $\mathbf{r} = x^i \hat{\mathbf{i}}_i \equiv x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ en 2 dimensiones. Dado el conjunto de transformaciones que se indican a continuación, demuestre en cuales casos las componentes de \mathbf{r} transforman como verdaderas componentes de vectores.

$$(x, y) \rightarrow (-y, x), \quad (x, y) \rightarrow (x, -y), \quad (x, y) \rightarrow (x - y, x + y), \quad (x, y) \rightarrow (x + y, x - y).$$

1.5 Un comienzo a la derivación e integración de vectores

En esta penúltima sección de este capítulo abordaremos una introducción somera a las consecuencias que imponen la variación de un vector. Mostraremos, de manera funcional y como una ejercitación a los conceptos de derivación e integración de vectores y campos vectoriales¹⁸.

1.5.1 Vectores variables

Los vectores podrán ser constantes o variables. Ahora bien, esta característica se verificará tanto en las componentes como en la base. Esto quiere decir que cuando un vector cambia podrá variar su módulo, su dirección, su sentido, o todo junto o por separado. Obviamente esta variabilidad del vector dependerá de la base en la cual se exprese. Por lo cual un vector podrá tener una componente constante en una base y variable en otra, vale decir:

$$\mathbf{a}(t) = a^i(t) \mathbf{e}_i(t) = \tilde{a}^k \tilde{\mathbf{e}}_k(t) = \bar{a}^m(t) \bar{\mathbf{e}}_m.$$

Nótese que hemos utilizado una base $\{\mathbf{e}_i(t)\}$ de vectores variables a diferencia de la tradicional base de vectores cartesianos $\{\hat{\mathbf{i}}_i\}$, los cuales **son constantes** en módulo, dirección y sentido (ver los cuadrantes I y II de la figura 1.9). Más aún, tal y como se muestra en cuadrante II de la figura 1.9, todo vector variable podrá ser expresado como la suma de uno variable, $\alpha(t)$, más otro constante \mathbf{c} .

$$\mathbf{a}(t) = \alpha(t) + \mathbf{c}.$$

¹⁸Un análisis más detallado lo presentaremos en el último capítulo 5.

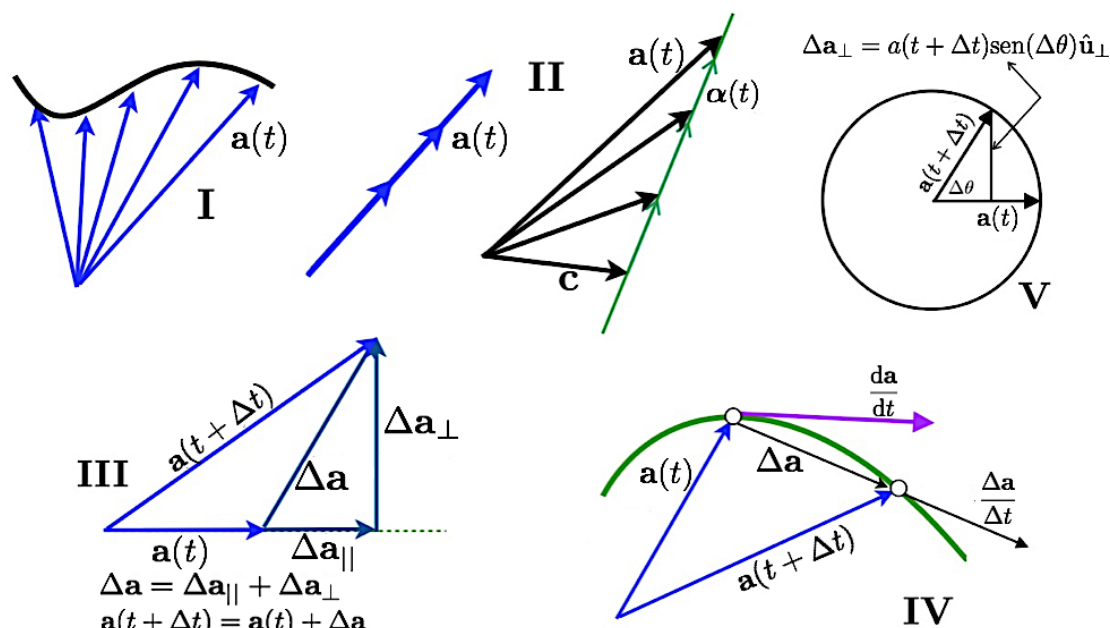


Figura 1.9: Diferentes representaciones para vectores que varían respecto a algún parámetro. En el cuadrante I representamos dos variaciones del vector $\mathbf{a}(t)$. En una varía su módulo, dirección y sentido. En otra solo su módulo. En la II $\mathbf{a}(t)$ tiene una variación muy particular que describe una línea recta $\alpha(t)$. En las zonas III, IV y V presentamos el detalle de la evolución ilustrando $\Delta \mathbf{a}$. En III separamos $\Delta \mathbf{a}$ en sus componentes paralelas y perpendiculares. La zona IV comparamos $d\mathbf{a}/dt$ con $\Delta \mathbf{a}/\Delta t$, y en V mostramos el módulo a_{\perp} .

1.5.2 Derivación

De esta manera, cuando uno piensa en un vector variable $\mathbf{a}(t)$ uno rápidamente intenta establecer un cociente incremental:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt}.$$

El cuadrante IV de la figura 1.9 ilustra gráficamente este cociente incremental.

Como siempre, las propiedades de esta operación derivación serán:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)] &= \frac{d}{dt} \mathbf{a}(t) + \frac{d}{dt} \mathbf{b}(t), \\ \frac{d}{dt} [\lambda(t) \mathbf{a}(t)] &= \left[\frac{d}{dt} \lambda(t) \right] \mathbf{a}(t) + \lambda(t) \left[\frac{d}{dt} \mathbf{a}(t) \right], \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)] &= \left[\frac{d}{dt} \mathbf{a}(t) \right] \cdot \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \cdot \left[\frac{d}{dt} \mathbf{b}(t) \right], \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)] &= \left[\frac{d}{dt} \mathbf{a}(t) \right] \times \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \times \left[\frac{d}{dt} \mathbf{b}(t) \right]. \end{aligned}$$

Ahora bien, esto implica que:

$$\mathbf{a}(t) = a^i(t) \mathbf{e}_i(t) \Rightarrow \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \frac{d[a^i(t) \mathbf{e}_i(t)]}{dt} = \frac{da^i(t)}{dt} \mathbf{e}_i(t) + a^i(t) \frac{d\mathbf{e}_i(t)}{dt}, \quad (1.6)$$

con lo cual hay que tener cuidado al derivar vectores y cerciorarse de la dependencia funcional de la base y de las componentes.

Habrán sistemas de coordenadas (bases de vectores) que serán constantes y otros en los cuales sus vectores bases cambiarán en su dirección. El primer término de (1.6) representa la variación del módulo,

y el segundo muestra la contribución de los cambios en dirección del vector. Más aún, mostraremos apoyándonos en la ilustración de el cuadrante III de la figura 1.9 que, independientemente del sistema de coordenadas, el cambio en el módulo apunta en la dirección del vector, mientras que las contribuciones en dirección apuntan en la dirección perpendicular al vector. Esto es:

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \frac{d|\mathbf{a}(t)|}{dt} \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} + |\mathbf{a}(t)| \hat{\mathbf{u}}_{\perp}, \quad \text{con } \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = 0.$$

Es fácil convencernos de la forma del primer término. Siempre podemos representar un vector como su módulo y un vector unitario en la dirección apropiada. Esto es, si:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= |\mathbf{a}(t)| \hat{\mathbf{u}}(t), \\ \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} &= \frac{d[|\mathbf{a}(t)| \hat{\mathbf{u}}(t)]}{dt} = \frac{d|\mathbf{a}(t)|}{dt} \hat{\mathbf{u}}(t) + |\mathbf{a}(t)| \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Como podemos ver a continuación cuando multiplicamos 1.5.2 por $\hat{\mathbf{u}}(t)$ resulta:

$$\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \left[\frac{d|\mathbf{a}(t)|}{dt} \hat{\mathbf{u}}(t) + |\mathbf{a}(t)| \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} \right] \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \frac{d|\mathbf{a}(t)|}{dt}, \\ \hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} = 0. \end{cases}$$

Es decir que el cambio en el módulo de un vector se manifiesta en la dirección del mismo vector, tal y como era intuitivo suponer. Adicionalmente, vemos que el vector $\hat{\mathbf{u}}$ siempre será perpendicular a su derivada. Gráficamente podemos apreciarlo en el cuadrante IV de la figura 1.9, pero también surge analíticamente si derivamos el vector unitario en la dirección de $\mathbf{a}(t)$:

$$\frac{d[\hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \hat{\mathbf{u}}(t)]}{dt} \equiv \frac{d(|\hat{\mathbf{u}}(t)|^2)}{dt} = \frac{d(1)}{dt} \equiv 0 = \hat{\mathbf{u}}(t) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} \Rightarrow \hat{\mathbf{u}}(t) \perp \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt},$$

es decir:

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \frac{d[|\mathbf{a}(t)| \hat{\mathbf{u}}(t)]}{dt} = \frac{d|\mathbf{a}(t)|}{dt} \hat{\mathbf{u}}(t) + |\mathbf{a}(t)| \frac{d\hat{\mathbf{u}}(t)}{dt} = \frac{d|\mathbf{a}(t)|}{dt} \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} + |\mathbf{a}(t)| \hat{\mathbf{u}}_{\perp}.$$

Supongamos que ahora definimos un vector $\Delta\theta = \Delta\theta \hat{\mathbf{v}}$, con:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} \perp \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} \\ \hat{\mathbf{v}} \perp \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} = \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \times \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \hat{\mathbf{v}}, \end{cases}$$

donde $\Delta\theta$ es el ángulo de rotación del vector $\mathbf{a}(t)$ (ver cuadrante V de la figura 1.9). Claramente:

$$\Delta\mathbf{a}_{\perp} = [a(t + \Delta t) \sin(\Delta\theta)] \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \approx [a(t + \Delta t) \Delta\theta] \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \Rightarrow \Delta\mathbf{a}_{\perp} = \Delta\theta \times \mathbf{a}(t),$$

entonces:

$$\frac{\Delta\mathbf{a}_{\perp}}{\Delta t} \equiv \left[\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} \cdot \mathbf{a}_{\perp} \right] \mathbf{a}_{\perp} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \times \mathbf{a}(t) \Rightarrow \left[\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \right] \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}(t),$$

donde hemos identificado $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{v}}$.

Podemos ir más allá observando el cuadrante V de la figura 1.9, vemos que si suponemos que el módulo del vector \mathbf{a} es constante, entonces:

$$\frac{d|\mathbf{a}(t)|}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = |\mathbf{a}(t)| \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \Rightarrow \left[\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\perp} \right] \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}(t).$$

1.5.3 Velocidades y aceleraciones

El radio vector posición de una partícula genera, como sabemos, los vectores velocidad y aceleración:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \Rightarrow \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2},$$

ahora bien:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{u}}_r = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}, \quad \text{con: } \hat{\mathbf{u}}_r = \cos(\theta)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}.$$

Si suponemos que la partícula describe una trayectoria, entonces:

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}, \quad \text{con: } \hat{\mathbf{u}}_r(t) = \cos(\theta(t))\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta(t))\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}.$$

Es muy común denotar a la derivada temporal sobre funciones de una variable con un punto, es decir, podemos utilizar la siguiente notación:

$$\dot{f}(t) \equiv \frac{df(t)}{dt},$$

con lo cual, y en el caso de que $z = z(t) = \text{constante}$, se tiene:

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = \frac{d[\cos(\theta(t))\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta(t))\hat{\mathbf{j}}]}{dt} = \dot{\theta}(t) \underbrace{[-\sin(\theta(t))\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta(t))\hat{\mathbf{j}}]}_{\hat{\mathbf{u}}_\theta} = \dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta.$$

Podemos ver que:

$$|\hat{\mathbf{u}}_r| = \sqrt{\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_r} = \sqrt{[\cos(\theta(t))\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta(t))\hat{\mathbf{j}}] \cdot [\cos(\theta(t))\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta(t))\hat{\mathbf{j}}]} = 1,$$

$$|\hat{\mathbf{u}}_\theta| = \sqrt{\hat{\mathbf{u}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta} = \sqrt{[-\sin(\theta(t))\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta(t))\hat{\mathbf{j}}] \cdot [-\sin(\theta(t))\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta(t))\hat{\mathbf{j}}]} = 1,$$

además:

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{u}}_r = \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_\theta = [-\sin(\theta(t))\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta(t))\hat{\mathbf{j}}] \cdot [\cos(\theta(t))\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta(t))\hat{\mathbf{j}}] = 0.$$

También podemos calcular:

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta}{dt} = \frac{d[-\sin(\theta(t))\hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta(t))\hat{\mathbf{j}}]}{dt} = -\dot{\theta}(t)[\cos(\theta(t))\hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta(t))\hat{\mathbf{j}}] = -\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_r.$$

Para una partícula que sigue un movimiento arbitrario, su trayectoria vendrá descrita, en coordenadas cartesianas, por:

$$\mathbf{r} = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}.$$

- Su velocidad será:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d[x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}]}{dt} = \dot{x}(t)\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}(t)\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}(t)\hat{\mathbf{k}} = v_x(t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(t)\hat{\mathbf{j}} + v_z(t)\hat{\mathbf{k}},$$

- y su aceleración:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{v}_x(t)\hat{\mathbf{i}} + \dot{v}_y(t)\hat{\mathbf{j}} + \dot{v}_z(t)\hat{\mathbf{k}} = a_x(t)\hat{\mathbf{i}} + a_y(t)\hat{\mathbf{j}} + a_z(t)\hat{\mathbf{k}}.$$

Mientras que en coordenadas polares las ecuaciones son:

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t).$$

- Velocidad:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d[r(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t)]}{dt} = \dot{r}(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t) + r(t)\frac{d\hat{\mathbf{u}}_r(t)}{dt} = \dot{r}(t)\hat{\mathbf{u}}_r(t) + r(t)\dot{\theta}(t)\hat{\mathbf{u}}_\theta(t).$$

• Aceleración:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d \left[\dot{r}(t) \hat{\mathbf{u}}_r(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) \right]}{dt} = \frac{d \left[\dot{r}(t) \hat{\mathbf{u}}_r(t) \right]}{dt} + \frac{d \left[r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) \right]}{dt}, \\ &= \ddot{r}(t) \hat{\mathbf{u}}_r(t) + \dot{r}(t) \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r(t)}{dt} + \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) + r(t) \ddot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta(t)}{dt}, \\ &= \left[\ddot{r}(t) - r(t) \left(\dot{\theta}(t) \right)^2 \right] \hat{\mathbf{u}}_r(t) + \left[2 \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t) \right] \hat{\mathbf{u}}_\theta(t). \end{aligned}$$

Claramente para el caso de un movimiento circular, donde $r = R = \text{constante}$, resulta:

$$\frac{dR}{dt} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{r}(t) = R \hat{\mathbf{u}}_r(t), \\ \mathbf{v}(t) = R \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) \quad y \\ \mathbf{a}(t) = -R \dot{\theta}(t)^2 \hat{\mathbf{u}}_r(t) + R \ddot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta(t). \end{cases}$$

De aquí podemos ver que el vector velocidad $\mathbf{v}(t)$ y el vector posición $\mathbf{r}(t)$ son ortogonales. La velocidad, $\mathbf{v}(t)$, siempre es tangente a la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ y en este caso la trayectoria es una circunferencia.

En general la trayectoria se puede representar por la sumatoria,

$$\sum_i \Delta \mathbf{r}(t_i) = \sum_i (\mathbf{r}(t_i + \Delta t_i) - \mathbf{r}(t_i)) \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \Delta \mathbf{r}(t_i) = \int d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t),$$

es decir, $d\mathbf{r}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \Delta \mathbf{r}(t_i)$ es tangente a la trayectoria. Es claro que:

$$d\mathbf{r}(t) = d \left[x(t) \hat{\mathbf{i}} + y(t) \hat{\mathbf{j}} + z(t) \hat{\mathbf{k}} \right] \equiv \frac{dx(t)}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{\mathbf{k}}.$$

Tal y como mencionamos arriba, para el sistema de coordenadas cartesiano podemos definir un vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ tal que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \times \hat{\mathbf{u}}_r &= \hat{\mathbf{u}}_v \\ \hat{\mathbf{u}}_v \times \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} &= \hat{\mathbf{u}}_r \\ \hat{\mathbf{u}}_r \times \hat{\mathbf{u}}_v &= \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t).$$

Supongamos por simplicidad que elegimos el sistema de coordenadas cartesiano, donde \mathbf{r} está en el plano xy . En este caso es inmediato comprobar que $v^i = \varepsilon^{ijk} \omega_j x_k$, y dado que \mathbf{r} y \mathbf{v} tienen únicamente componentes 1 y 2 entonces, necesariamente $\boldsymbol{\omega}$ tiene únicamente componente 3, es decir:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= r^i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{v} &= v^i \mathbf{e}_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} v^1 &= \varepsilon^{1j2} \omega_j x_2 \\ v^2 &= \varepsilon^{2j1} \omega_j x_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}| \mathbf{e}_3 = \omega \hat{\mathbf{k}},$$

como $\mathbf{r} = x(t) \hat{\mathbf{i}} + y(t) \hat{\mathbf{j}}$, entonces:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = v_x(t) \hat{\mathbf{i}} + v_y(t) \hat{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) = \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{k}} \times [x(t) \hat{\mathbf{i}} + y(t) \hat{\mathbf{j}}].$$

Esto se aprecia mucho más claro en coordenadas polares, esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) = [|\boldsymbol{\omega}| \hat{\mathbf{u}}_\theta(t)] \times [r(t) \hat{\mathbf{u}}_r(t)], \quad |\mathbf{r}(t)| = \text{const} \\ &= \underbrace{r(t) \dot{\theta}(t)}_{\mathbf{v}_\perp} \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) = |\boldsymbol{\omega}| r(t) \hat{\mathbf{u}}_\theta(t) \Rightarrow \dot{\theta}(t) \equiv |\boldsymbol{\omega}|. \end{aligned}$$

Desarrollemos un par de ejemplos con trayectorias descritas por distintas funciones y calcularemos la velocidad y aceleración en cada caso. Consideraremos también el movimiento de una partícula respecto a dos observadores que se mueven uno respecto al otro.

Ejemplo 1.16 Si una partícula se mueve a lo largo de una curva descrita por:

$$x(t) = 3t^2, \quad y(t) = 4t^3 - t, \quad z(t) = t,$$

calcular las expresiones para los vectores: posición, velocidad y aceleración de esa partícula.

Podemos ver que:

$$\mathbf{r}(t) = 3t^2\hat{\mathbf{i}} + (4t^3 - t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{v} = 6t\hat{\mathbf{i}} + (12t^2 - 1)\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{a} = 6\hat{\mathbf{i}} + 24t\hat{\mathbf{j}}.$$

Si nos proponemos encontrar las expresiones, más generales, de los vectores tangentes y perpendiculares en todo punto de la trayectoria de la partícula podemos ver que el vector tangente en todo punto de la trayectoria es el vector velocidad

$$\mathbf{v} = 6t\hat{\mathbf{i}} + (12t^2 - 1)\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}.$$

El vector perpendicular en todo punto, será un vector $\mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}$, tal que:

$$(6t\hat{\mathbf{i}} + (12t^2 - 1)\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \cdot (b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}}) = 6tb_x + (12t^2 - 1)b_y + b_z = 0,$$

con lo cual $\mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} - (6tb_x + (12t^2 - 1)b_y)\hat{\mathbf{k}}$.

Ejemplo 1.17 Para un observador la trayectoria de una partícula en el plano es la siguiente:

$$\mathbf{r}_1(t) = 5 \cos(3t^2) \hat{\mathbf{i}} + 5 \sin(3t^2) \hat{\mathbf{j}}.$$

Calculemos las expresiones para las velocidades radiales y tangenciales de esta partícula. Respecto a este observador la partícula describe un movimiento circular con $\theta(t) = 3t^2$, por lo tanto:

$$\mathbf{r}(t) = 5\hat{\mathbf{u}}_r \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 5 \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\mathbf{u}}_\theta = 30t \hat{\mathbf{u}}_\theta \Rightarrow \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = 30 \hat{\mathbf{u}}_\theta - 30t \hat{\mathbf{u}}_r.$$

Consideremos ahora un segundo observador, quien se mueve respecto al primero siguiendo una trayectoria representada por:

$$\mathbf{r}_{21}(t) = (t^3 - 4t)\hat{\mathbf{i}} + (t^2 + 4t)\hat{\mathbf{j}}.$$

Y queremos encontrar las expresiones para los vectores posición, velocidad y aceleración de la partícula medidos respecto al segundo observador.

Por lo tanto, la trayectoria de la partícula respecto al segundo observador será:

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_{21}(t) = 5 \cos(3t^2) \hat{\mathbf{i}} + 5 \sin(3t^2) \hat{\mathbf{j}} - ((t^3 - 4t)\hat{\mathbf{i}} + (t^2 + 4t)\hat{\mathbf{j}}),$$

con lo cual:

$$\mathbf{r}_2(t) = [5 \cos(3t^2) - t^3 + 4t] \hat{\mathbf{i}} + [5 \sin(3t^2) - t^2 - 4t] \hat{\mathbf{j}},$$

entonces:

$$\mathbf{v}_2(t) = \frac{d\mathbf{r}_2(t)}{dt} = -[30 \sin(3t^2)t + 3t^2 - 4] \hat{\mathbf{i}} + [30 \cos(3t^2)t - 2t - 4] \hat{\mathbf{j}},$$

y

$$\mathbf{a}_2(t) = \frac{d\mathbf{v}_2(t)}{dt} = -6[30 \cos(3t^2)t^2 + 5 \sin(3t^2) + t] \hat{\mathbf{i}} - 2[90 \sin(3t^2)t^2 - 15 \cos(3t^2) + 1] \hat{\mathbf{j}}.$$

1.5.4 Vectores y funciones

Antes de continuar con la integración repensemos algunas funciones de tipo $\phi(x^i)$ y $\mathbf{a}(x^i)$. Estas funciones de varias variables, se expresan en el caso cartesiano como:

$$\phi = \phi(x, y, z), \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z) = \hat{\mathbf{i}}a_x(x, y, z) + \hat{\mathbf{j}}a_y(x, y, z) + \hat{\mathbf{k}}a_z(x, y, z).$$

Un par de reflexiones se pueden hacer en este punto, primeramente, dado que hemos relacionado un punto del espacio con el radio vector posición, entonces:

$$P_{(x,y,z)} \leftrightarrow (x, y, z) \leftrightarrow \mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \Rightarrow \begin{cases} \phi = \phi(x, y, z) \equiv \phi(\mathbf{r}), \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z) \equiv \mathbf{a}(\mathbf{r}). \end{cases}$$

La primera función, $\phi(\mathbf{r})$, será una función escalar de argumento vectorial o, simplemente un campo escalar y la segunda, $\mathbf{a}(\mathbf{r})$, se conoce como una función vectorial de argumento vectorial o campo vectorial. Como hemos dicho, este tipo de funciones y las operaciones que pueden ser realizadas con ellas, y su significado, serán analizadas en detalle más adelante en el capítulo 5. En este capítulo haremos un desarrollo “operativo” y funcional, dejaremos los conceptos para el final de este texto.

En segundo lugar, siempre podremos parametrizar las coordenadas y tendremos

$$\phi = \phi(t) = \phi(x(t), y(t), z(t)),$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(x(t), y(t), z(t)) = a_x(x(t), y(t), z(t))\hat{\mathbf{i}} + a_y(x(t), y(t), z(t))\hat{\mathbf{j}} + a_z(x(t), y(t), z(t))\hat{\mathbf{k}}.$$

Este caso lo hemos encontrado en montones de situaciones. Por ejemplo, el movimiento parabólico viene descrito por vectores velocidad y posición dados por:

$$\mathbf{v}(t) = -gt\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{v}_0 = -gt\hat{\mathbf{k}} + (v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\hat{\mathbf{j}} + v_{0z}\hat{\mathbf{k}}) \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} \\ v_z = v_{0z} - gt, \end{cases}$$

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{g}{2}t^2\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{v}_0t = -\frac{g}{2}t^2\hat{\mathbf{k}} + (v_{0x}\hat{\mathbf{i}} + v_{0y}\hat{\mathbf{j}} + v_{0z}\hat{\mathbf{k}})t \Rightarrow \begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t \\ z = v_{0z}t - \frac{g}{2}t^2. \end{cases}$$

1.5.4.1 Derivada de funciones del tipo: $\phi(\mathbf{r}(t))$

Al derivar una función de argumento vectorial también se aplica la “regla de la cadena”. Esto es, si

$$\phi(\mathbf{r}(t)) = \phi(x(t), y(t), z(t)),$$

entonces:

$$\frac{d\phi(\mathbf{r}(t))}{dt} = \frac{\partial\phi(x(t), y(t), z(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial\phi(x(t), y(t), z(t))}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\partial\phi(x(t), y(t), z(t))}{\partial z} \frac{dz(t)}{dt}$$

$$= \left[\frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right] \cdot \left[\frac{dx(t)}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{\mathbf{k}} \right]$$

$$= \nabla\phi(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt},$$

donde hemos representado:

$$\nabla \phi(\mathbf{r}(t)) \equiv \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} = \partial^i \phi(x^j) \hat{\mathbf{i}}_i = \phi^i(x^j) \hat{\mathbf{i}}_i,$$

y lo llamaremos el **gradiente** de la función $\phi(\mathbf{r}(t))$.

El gradiente de un campo escalar es uno de los objetos más útiles que encontraremos en el estudio de problemas de Física-Matemática. Es bueno recordar que emerge como consecuencia de una derivación respecto a un parámetro. El gradiente mide el cambio espacial de la función $\phi(x, y, z)$. Cuando el gradiente de una función aumenta, el valor de la variación de esa función también crece.

La idea de gradiente nos lleva a considerar a ∇ como un operador vectorial (el operador nabla) que actúa sobre la función escalar de variable vectorial $\phi(\mathbf{r}(t))$. Esto es

$$\nabla \phi(\mathbf{r}(t)) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \phi(x, y, z) = \hat{\mathbf{i}}_i \partial^i \phi(x, y, z),$$

y con un poquito de imaginación:

$$\nabla(\circ) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) (\circ) = \hat{\mathbf{i}}_i \partial^i (\circ).$$

Las notaciones $\nabla(\circ)$ y $\partial^i(\circ)$ quieren enfatizar el carácter de operador del gradiente. Vale decir, que el Nabla y la derivada parcial actúan sobre una función $\nabla(\circ) \Leftrightarrow \nabla(\phi(x, y, z))$ y equivalentemente $\partial^i(\circ) \Leftrightarrow \partial^i(\phi(x, y, z))$.

1.5.4.2 Derivada de funciones del tipo: $\mathbf{a}(\mathbf{r}(t))$

Inspirados en la regla de la cadena de una función escalar de variable vectorial podemos comprobar que:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x(x, y, z)}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{da_y(x, y, z)}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{da_z(x, y, z)}{dt} \hat{\mathbf{k}} = \frac{da^i(x^j)}{dt} \hat{\mathbf{i}}_i,$$

por consiguiente, si \mathbf{a} , tiene por componentes cartesianas (a_x, a_y, a_z) las componentes del vector derivado serán: $\left(\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dt} \right)$. Con lo cual, para cada componente:

$$\frac{d(a^i(x(t), y(t), z(t)))}{dt} = \frac{d(a^i(x^j(t)))}{dt} = \frac{\partial(a^i(x^j))}{\partial x^k} \frac{dx^k(t)}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \cdot \nabla \right) a^i(x, y, z).$$

En términos vectoriales es:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \cdot \nabla \right) \mathbf{a} \equiv (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} \Rightarrow \frac{d(\circ)}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) (\circ) \equiv v^i \partial_i (\circ),$$

con \mathbf{v} la derivada del radio vector posición $\mathbf{r}(t)$, es decir, la velocidad. Entonces, estamos viendo que el cambio del vector \mathbf{a} respecto al tiempo es el cambio de sus componentes en la dirección de la velocidad.

Si se nos ocurre calcular la derivada del vector velocidad para encontrar la aceleración tendremos que nos quedará expresada como:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \Rightarrow a^i = (\mathbf{v} \cdot \nabla) v^i,$$

donde las componentes cartesianas de los vectores velocidad y aceleración son: $v^i = v^i(x(t), y(t), z(t))$ y $a^i = a^i(x(t), y(t), z(t))$, respectivamente.

1.5.5 El operador ∇

El operador vectorial $\nabla(\circ)$ merece un poco de atención en este nivel. Tal y como hemos visto cuando construimos:

El Gradiente:

$$\begin{aligned}\nabla\phi(x, y, z) &= \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \\ &= \partial^1\phi(x, y, z)\hat{\mathbf{i}}_1 + \partial^2\phi(x, y, z)\hat{\mathbf{i}}_2 + \partial^3\phi(x, y, z)\hat{\mathbf{i}}_3 = \partial^i\phi(x^j)\hat{\mathbf{i}}_i.\end{aligned}$$

Podemos ver ahora que existen otras posibilidades:

El Rotacional: Se puede construir la siguiente operación: $\nabla \times \mathbf{a}$, que denominaremos **rotacional** de \mathbf{a} , y vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{a} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \right) \times (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}) \\ &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)\hat{\mathbf{k}} = \varepsilon^{ijk}\partial_j a_k \hat{\mathbf{i}}_i.\end{aligned}$$

La Divergencia: También podemos hablar del “producto escalar” de ∇ por un vector \mathbf{a} . A esta operación la llamaremos **divergencia** de \mathbf{a} :

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a^i(x^j)}{\partial x^i} \equiv \partial_i a^i(x^j) \equiv \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z}.$$

Laplaciano. Finalmente se puede construir un operador escalar $\nabla \cdot \nabla(\circ) \equiv \nabla^2(\circ)$ y se lo podemos aplicar a:

- un campo escalar

$$\nabla^2\phi(x, y, z) = \partial^i \partial_i \phi(x, y, z) = \partial_x^2 \phi(x, y, z) + \partial_y^2 \phi(x, y, z) + \partial_z^2 \phi(x, y, z);$$

- un campo vectorial

$$\nabla^2 \mathbf{a}(x, y, z) = \partial^i \partial_i \mathbf{a}(x, y, z) = \partial_x^2 a_x(x, y, z)\hat{\mathbf{i}} + \partial_y^2 a_y(x, y, z)\hat{\mathbf{j}} + \partial_z^2 a_z(x, y, z)\hat{\mathbf{k}}.$$

Las expresiones del gradiente, del rotacional, la divergencia y el laplaciano que mostramos arriba corresponden a sus respectivas implementaciones en una base de vectores cartesianos, donde sus módulos, direcciones y sentidos permanecen constantes. Cuando consideremos una base ortonormal genérica $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$, el cálculo es mucho mas complicado y lo detallaremos en las secciones: 5.2.1.2, 5.2.2.2, 5.2.3.5 y 5.2.5.3, respectivamente. Por ahora consideremos ∇ como un vector.

En los próximos tres ejemplos haremos gimnasia de índices. Mostraremos algunas relaciones vectoriales que involucran al operador Nabla. El cuarto ejemplo corresponde a el cálculo típico que se desarrollo de expresiones para trayectorias de partículas bajo una fuerza central.

Ejemplo 1.18 Demostrar que:

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}).$$

El resultado es un gradiente, es decir un vector. El lado izquierdo será:

$$(\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}))^i = \partial^i(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \partial^i(a_j b^j) = (\partial^i a_j) b^j + (\partial^i b_j) a^j.$$

Mientras que el lado derecho:

$$\begin{aligned}
 (\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}))^i &= (a_j \partial^j) b^i + (b_j \partial^j) a^i + \varepsilon^{ijk} a_j (\nabla \times \mathbf{b})_k + \varepsilon^{ijk} b_j (\nabla \times \mathbf{a})_k \\
 &= (a_j \partial^j) b^i + (b_j \partial^j) a^i + \varepsilon^{ijk} a_j \varepsilon_{kmn} \partial^m b^n + \varepsilon^{ijk} b_j \varepsilon_{kmn} \partial^m a^n \\
 &= (a_j \partial^j) b^i + (b_j \partial^j) a^i + \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} a_j \partial^m b^n + \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{mnk} b_j \partial^m a^n \\
 &= (a_j \partial^j) b^i + (b_j \partial^j) a^i + (\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^j \delta_n^i) a_j \partial^m b^n + (\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^j \delta_n^i) b_j \partial^m a^n \\
 &= a_j \partial^j b^i + b_j \partial^j a^i + \delta_m^i \delta_n^j a_j \partial^m b^n - \delta_m^j \delta_n^i a_j \partial^m b^n + \delta_m^i \delta_n^j b_j \partial^m a^n - \delta_m^j \delta_n^i b_j \partial^m a^n \\
 &= a_j \partial^j b^i + b_j \partial^j a^i + a_n \partial^i b^n - a_m \partial^m b^i + b_n \partial^i a^n - b_m \partial^m a^i \\
 &= \underbrace{a_j \partial^j b^i - a_m \partial^m b^i}_{=0} + \underbrace{b_j \partial^j a^i - b_m \partial^m a^i}_{=0} + a_n \partial^i b^n + b_n \partial^i a^n \\
 &= a_n \partial^i b^n + b_n \partial^i a^n = \partial^i (a_j b^j) = \partial^i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) .
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.19 Demostrar la siguiente identidad:

$$\nabla \times (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = (\nabla \cdot \mathbf{a}) (\nabla \times \mathbf{a}) - [\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a})] \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) (\nabla \times \mathbf{a}) - [(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \nabla] \mathbf{a} .$$

Iniciamos la traducción a índices por el lado izquierdo de la ecuación, así:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} &= \varepsilon^{ijk} \partial_j (a_m \partial^m) a_k = \varepsilon^{ijk} (\partial_j a_m) \partial^m a_k + \varepsilon^{ijk} a_m \partial_j \partial^m a_k \\
 &= \varepsilon^{ijk} (\partial_j a_m) \partial^m a_k + a_m \partial^m (\varepsilon^{ijk} \partial_j a_k) .
 \end{aligned}$$

El lado derecho lo traduciremos término por término:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \cdot \mathbf{a}) (\nabla \times \mathbf{a}) &= (\partial^m a_m) (\varepsilon^{ijk} \partial_j a_k) \\
 - [\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a})] \mathbf{a} &= - [\partial_m \varepsilon^{mjk} \partial_j a_k] a^i = - [\varepsilon^{mjk} \partial_m \partial_j a_k] a^i = 0 \\
 (\mathbf{a} \cdot \nabla) (\nabla \times \mathbf{a}) &= a_m \partial^m (\varepsilon^{ijk} \partial_j a_k) \\
 - [(\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \nabla] \mathbf{a} &= - [\varepsilon^{mjk} \partial_j a_k \partial_m] a^i .
 \end{aligned}$$

El segundo término se anula por cuanto ε^{mjk} es antisimétrico respecto a los índices m, j , mientras que $\partial_m \partial_j$ es simétrico. El tercer término del desarrollo del lado derecho corresponde con el segundo del desarrollo del lado izquierdo. Por lo tanto, llegamos a la siguiente igualdad:

$$\varepsilon^{ijk} (\partial_j a_m) \partial^m a_k = (\partial^m a_m) (\varepsilon^{ijk} \partial_j a_k) - [\varepsilon^{mjk} \partial_j a_k \partial_m] a^i . \quad (1.7)$$

Para verificar la igualdad tendremos que evaluar componente a componente, esto es, para $i = 1$, el lado izquierdo de (1.7) resulta en:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^{1jk} (\partial_j a_m) \partial^m a_k &= \varepsilon^{123} (\partial_2 a_m) \partial^m a_3 + \varepsilon^{132} (\partial_3 a_m) \partial^m a_2 = (\partial_2 a_m) \partial^m a_3 - (\partial_3 a_m) \partial^m a_2 \\
 &= (\partial_2 a_1) \partial^1 a_3 + (\partial_2 a_2) \partial^2 a_3 + (\partial_2 a_3) \partial^3 a_3 \\
 &\quad - (\partial_3 a_1) \partial^1 a_2 - (\partial_3 a_2) \partial^2 a_2 - (\partial_3 a_3) \partial^3 a_2 .
 \end{aligned}$$

Para el primer término del lado derecho de (1.7) :

$$\begin{aligned}
 (\partial^m a_m) (\varepsilon^{1jk} \partial_j a_k) &= (\partial^m a_m) (\varepsilon^{123} \partial_2 a_3) + (\partial^m a_m) (\varepsilon^{132} \partial_3 a_2) \\
 &= \underbrace{\partial_2 a_3 \partial^1 a_1}_{\alpha} + \partial_2 a_3 \partial^2 a_2 + \partial_2 a_3 \partial^3 a_3 - \underbrace{\partial_3 a_2 \partial^1 a_1}_{\beta} - \partial_3 a_2 \partial^2 a_2 - \partial_3 a_2 \partial^3 a_3 ,
 \end{aligned}$$

y el segundo término de (1.7) se escribe como:

$$\begin{aligned} - \left[\left(\epsilon^{mjk} \partial_j a_k \right) \partial_m \right] a^i &= - \left(\epsilon^{1jk} \partial_j a_k \right) \partial_1 a^1 - \left(\epsilon^{2jk} \partial_j a_k \right) \partial_2 a^1 - \left(\epsilon^{3jk} \partial_j a_k \right) \partial_3 a^1 \\ &= - (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) \partial_1 a^1 - (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) \partial_2 a^1 - (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) \partial_3 a^1 \\ &= \underbrace{\partial_3 a_2 \partial_1 a^1}_{\beta} - \underbrace{\partial_2 a_3 \partial_1 a^1}_{\alpha} + \partial_1 a_3 \partial_2 a^1 - \underbrace{\partial_3 a_1 \partial_2 a^1}_{\gamma} + \underbrace{\partial_2 a_1 \partial_3 a^1}_{\gamma} - \partial_1 a_2 \partial_3 a^1. \end{aligned}$$

Al sumar ambos términos se eliminan los sumandos indicados con letras griegas, y queda como:

$$\begin{aligned} (\partial^m a_m) \left(\epsilon^{1jk} \partial_j a_k \right) - \left[\left(\epsilon^{mjk} \partial_j a_k \right) \partial_m \right] a^i &= \partial_2 a_3 \partial_2 a_2 + \partial_2 a_3 \partial_3 a_3 \\ &\quad - \partial_3 a_2 \partial_2 a_2 - \partial_2 a_2 \partial_3 a_3 + \partial_1 a_3 \partial_2 a_1 - \partial_1 a_2 \partial_3 a_1, \end{aligned}$$

y al compararlo con el desarrollo del lado derecho de (1.7) e identificar término a término queda demostrada la igualdad:

$$\epsilon^{1jk} (\partial_j a_m) \partial^m a_k = (\partial_2 a_1) \partial_1 a_3 + (\partial_2 a_2) \partial_2 a_3 + (\partial_2 a_3) \partial_3 a_3 - (\partial_3 a_1) \partial_1 a_2 - (\partial_3 a_2) \partial_2 a_2 - (\partial_3 a_3) \partial_3 a_2.$$

De igual manera se procede con $i = 2$ e $i = 3$.

Ejemplo 1.20 Utilizando la notación de índices muestre si se cumple la siguiente identidad:

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}.$$

Desarrollemos en índices el lado izquierdo:

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \epsilon^{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} a^l b^m) = (\delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j) \partial_j (a^l b^m) = \partial_m (a^i b^m) - \partial_l (a^l b^i),$$

expandiendo la derivada:

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = b^m \partial_m (a^i) + a^i \partial_m (b^m) - b^i \partial_l (a^l) - a^l \partial_l (b^i) \equiv (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\nabla \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b}.$$

Ejemplo 1.21 Tal vez, uno de los problemas que ilustra mejor el uso del álgebra vectorial y la derivación de vectores es el movimiento bajo fuerzas centrales. La ley de gravitación de Newton nos dice que para un sistema de dos masas, m y M se tiene:

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a} \Rightarrow m G \frac{M}{r_{mM}^2} \hat{\mathbf{u}}_r = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{GM}{r_{mM}^2} \hat{\mathbf{u}}_r.$$

Es costumbre definir la *velocidad areolar*, \mathbf{v}_a , como el área barrida por el radio vector posición, $\mathbf{r}(t)$, que describe la trayectoria de la partícula:

$$2\mathbf{v}_a \equiv \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d(r \hat{\mathbf{u}}_r)}{dt} = r \hat{\mathbf{u}}_r \times \left(\frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{u}}_r + r \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right) = r \hat{\mathbf{u}}_r \times r \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = r^2 \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt}.$$

Nótese que:

$$\frac{d}{dt} \left(\hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right) = 0 \Rightarrow \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = \mathbf{c} \Rightarrow 2\mathbf{v}_a = r^2 \hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = \text{const},$$

donde \mathbf{c} es un vector constante, con lo cual:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_a) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v}_a = \frac{GM}{r_{mM}^2} \hat{\mathbf{u}}_r \times \mathbf{v}_a = \frac{GM}{2} \left\{ \hat{\mathbf{u}}_r \times \left(\hat{\mathbf{u}}_r \times \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right) \right\} \\ &= \frac{GM}{2} \left\{ \left(\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right) \hat{\mathbf{u}}_r - (\hat{\mathbf{u}}_r \cdot \hat{\mathbf{u}}_r) \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \right\} = \frac{GM}{2} \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt}. \end{aligned}$$

Integrando:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v}_a = \frac{GM}{2} \hat{\mathbf{u}}_r + \mathbf{p},$$

donde \mathbf{p} es un vector arbitrario que aparece como constante de integración.

Finalmente nos damos cuenta que:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_a) &= r \hat{\mathbf{u}}_r \cdot \left(\frac{GM}{2} \hat{\mathbf{u}}_r + \mathbf{p} \right) = \frac{GM}{2} r + rp \cos(\theta) \\ &= \varepsilon^{ijk} r_i v_j v_{ak} \equiv \mathbf{v}_a \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_a = v_a^2, \end{aligned}$$

y entonces:

$$v_a^2 = \frac{GM}{2} r + rp \cos(\theta) \Rightarrow r = \frac{v_a^2}{\frac{GM}{2} + p \cos(\theta)} \equiv \frac{\frac{2v_a^2}{GM}}{1 + \frac{2p}{GM} \cos(\theta)},$$

que constituye la ecuación de una curva cónica ¿Cuál curva?

◀

1.5.6 Integración

Después de haber diferenciado campos escalares y vectoriales, el siguiente paso es integrarlos. Encontraremos algunos objetos vectoriales a integrar y serán:

- Integración de un vector por un escalar:

$$\int \mathbf{a}(u) du$$

- Integración de un escalar a lo largo de un vector:

$$\int_c \phi(x, y, z) d\mathbf{r}$$

- Integración de un vector a lo largo de otro vector:

$$\int_c \mathbf{a}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}$$

El primero de los casos es el tipo de integral que siempre hemos utilizado para encontrar la posición a partir de la velocidad. Los siguientes casos se conocen con el nombre de integrales de línea por cuanto es importante la “ruta” o trayectoria que sigamos al integrar. Esto aparece indicado por la letra C en la integral y será evidente más adelante. En general la integral de línea dependerá de la trayectoria.

1.5.6.1 Un vector por un escalar: $\int \mathbf{a}(u) du$

El primer caso de este tipo integrales es el trivial que ya sabemos calcular:

$$\int \mathbf{a}(u) du = \hat{\mathbf{i}} \int a_x(u) du + \hat{\mathbf{j}} \int a_y(u) du + \hat{\mathbf{k}} \int a_z(u) du = \left(\int a^i(u) du \right) \hat{\mathbf{i}}_i.$$

La integral de un vector (en un sistema de coordenadas cartesianas) por un escalar se convierte en la suma de tres integrales, cada una a lo largo de las componentes cartesianas del vector.

Recordemos que así integramos la aceleración en un movimiento parabólico:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{k}} \Rightarrow \mathbf{v} = \int \mathbf{a} dt = \hat{\mathbf{k}} \int -g dt = -\hat{\mathbf{k}}gt + \mathbf{v}_0 = -\hat{\mathbf{k}}gt + \hat{\mathbf{i}}v_{0x} + \hat{\mathbf{j}}v_{0y} + \hat{\mathbf{k}}v_{0z}.$$

Ahora bien, existen sutilezas en este caso que debemos tener en cuenta. Por ejemplo, considere la integral:

$$\int dt \left(\mathbf{a} \times \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} \right) = \int dt \left(\frac{d}{dt} \left(\mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right) - \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right) = \int dt \frac{d}{dt} \left(\mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right) = \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{c}.$$

Pero en general los casos quedan resueltos integrando componente a componente con la ayuda de la notación de índices:

$$\int dt (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \left[\int dt (\varepsilon^{ijk} a_j b_k) \right] \hat{\mathbf{i}}_i.$$

1.5.6.2 Un escalar a lo largo de un vector: $\int_C \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$

El segundo objeto que “tropezaremos” es la integración de funciones de varias variables a lo largo de una curva determinada. Esto es:

$$\int_C \phi(x, y, z) d\mathbf{r} = \int_C \phi(x^i) (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}) = \hat{\mathbf{i}} \int_C \phi(x^i) dx + \hat{\mathbf{j}} \int_C \phi(x^i) dy + \hat{\mathbf{k}} \int_C \phi(x^i) dz.$$

La integral se nos ha convertido en tres integrales, las cuales son ahora componentes de un vector. Esto es posible dado que la base $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ es una base constante. Ahora bien, cada una de estas integrales son interdependientes, dado que hay que seguir la misma curva C .

1.5.6.3 Un vector a lo largo de otro vector: $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$

Quizá la integral de línea más conocida sea una del tipo $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ por cuanto nos la hemos “tropezado” en el cálculo del trabajo que realiza una fuerza. Todo lo que hemos considerado al parametrizar la curva en el caso anterior, sigue siendo válido.

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C F_x(x, y, z) dx + \int_C F_y(x, y, z) dy + \int_C F_z(x, y, z) dz = \int_C F^i(x^j) dx_i.$$

En los próximos ejemplos ilustraremos casos de integración a lo largo de varias trayectorias. Primero integraremos un campo escalar y luego un par de campos vectoriales.

Ejemplo 1.22 Consideremos la siguiente función:

$$\phi(x, y) = 3x^2 + 2y.$$

Queremos calcular la siguiente integral de línea:

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) dx + \hat{\mathbf{j}} \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) dy.$$

Se requiere especificar la curva C a lo largo de la cual integraremos, en este caso, desde el punto $P_1 \rightarrow (0, 0)$ al punto $P_2 \rightarrow (1, 2)$. Podemos ir por diferentes recorridos:

- Si recorremos la ruta C_1 : $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 2)$ podemos hacerlo de la manera más sencilla:

$$(0, 0) \rightarrow (1, 0) \Rightarrow y = \text{cte} = 0$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,0)} (3x^2 + 2y) d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} \int_{(0,0)}^{(1,0)} (3x^2 + 2y) dx = \hat{\mathbf{i}} \int_0^1 (3x^2) dx = \hat{\mathbf{i}},$$

$$(1, 0) \rightarrow (1, 2) \Rightarrow x = \text{cte} = 1$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{j}} \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) dy = \hat{\mathbf{j}} \int_0^2 (3 + 2y) dy = 10\hat{\mathbf{j}},$$

con lo cual:

$$C_1 \longleftrightarrow \frac{(0,0) \rightarrow (1,0)}{C_1^A} \rightarrow \frac{(1,0) \rightarrow (1,2)}{C_1^B} \Rightarrow \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}}.$$

- Si hubiéramos seleccionado la recta que une a estos dos puntos como la curva C_2 entonces:

$$C_2: y = 2x \Rightarrow dy = 2dx,$$

esto es:

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) \, d\mathbf{r} &= \hat{\mathbf{i}} \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) \, dx + \hat{\mathbf{j}} \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) \, dy \\ &= \hat{\mathbf{i}} \int_0^1 (3x^2 + 2(2x)) \, dx + \hat{\mathbf{j}} \int_0^1 (3x^2 + 2(2x)) \, 2dx = 3\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

En general la curva C se puede parametrizar y las integrales en varias variables se convertirán en integrales a lo largo del parámetro que caracteriza la curva.

$$C : \{x = x(\tau), y = y(\tau), z = z(\tau)\}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_C \phi(x, y, z) \, d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \left(\frac{\partial x(\tau)}{\partial \tau} d\tau \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} d\tau \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial z(\tau)}{\partial \tau} d\tau \hat{\mathbf{k}} \right) \\ &= \hat{\mathbf{i}} \int_C \phi(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \frac{\partial x(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \hat{\mathbf{j}} \int_C \phi(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} d\tau \\ &\quad + \hat{\mathbf{k}} \int_C \phi(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \frac{\partial z(\tau)}{\partial \tau} d\tau.\end{aligned}$$

La parametrización de las curvas anteriores es muy simple:

$$C_1^A = \begin{cases} x = \tau \\ y = 0 \end{cases}; \quad C_1^B = \begin{cases} x = 2 \\ y = \tau \end{cases}; \quad C_2 = \begin{cases} x = \tau \\ y = 2\tau \end{cases}.$$

Con esta manera de parametrizar, la integral que resolvimos anteriormente tomando el camino C_2 :

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) \, d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) \, dx + \hat{\mathbf{j}} \int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) \, dy.$$

Queda ahora como:

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} (3x^2 + 2y) \, d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} \int_0^1 (3\tau^2 + 4\tau) \, d\tau + \hat{\mathbf{j}} \int_0^1 (3\tau^2 + 4\tau) \, 2d\tau = 3\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}},$$

ya que $0 \leq \tau \leq 1$

Ejemplo 1.23 Consideramos el siguiente campo vectorial:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (3x^2 + 2xy^3) \hat{\mathbf{i}} + 6xy \hat{\mathbf{j}}.$$

Queremos evaluar la siguiente integral:

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} ((3x^2 + 2xy^3) \hat{\mathbf{i}} + 6xy \hat{\mathbf{j}}) (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}}) \\ &= \int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} (3x^2 + 2xy^3) \, dx + \int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} 6xy \, dy.\end{aligned}$$

Consideremos que la curva que une esos puntos viene parametrizada por:

$$x = 2\tau^2, \quad y = \tau^3 + \tau \Rightarrow \frac{\partial x(\tau)}{\partial \tau} = 4\tau, \quad \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} = 3\tau^2 + 1,$$

entonces, la primera de las integrales resulta:

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} (3x^2 + 2xy^3) \, dx &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(3(2\tau^2)^2 + 2(2\tau^2)(\tau^3 + \tau)^3 \right) (4\tau) \, d\tau \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (16\tau^{12} + 48\tau^{10} + 48\tau^8 + 16\tau^6 + 48\tau^5) \, d\tau = 1 + \frac{9305}{24024}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Y la segunda:

$$\int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} 6xy \, dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 6(2\tau^2)(\tau^3 + \tau)(3\tau^2 + 1) \, d\tau = \frac{65}{32},$$

con lo cual:

$$\int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} (3x^2 + 2xy^3) \, dx + \int_{(0,0)}^{(1, \frac{3}{4}\sqrt{2})} 6xy \, dy = \frac{97}{32} + \frac{9305}{24024}\sqrt{2}.$$

Ejemplo 1.24 El campo de fuerzas de un oscilador anisótropo bidimensional se escribe como:

$$\mathbf{F} = -k_1 x^2 \hat{\mathbf{i}} + k_2 y \hat{\mathbf{j}}.$$

Encontremos el trabajo realizado

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

a lo largo de las siguientes trayectorias:

1. $(1, 1) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (4, 4)$

$$\int_{(1,1)}^{(4,1)} (\hat{\mathbf{i}} dx) \cdot (-k_1 x^2 \hat{\mathbf{i}} + k_2 \hat{\mathbf{j}}) + \int_{(4,1)}^{(4,4)} (\hat{\mathbf{j}} dy) \cdot (-k_1 16 \hat{\mathbf{i}} + k_2 y \hat{\mathbf{j}}) = -21k_1 + \frac{15k_2}{2}.$$

2. $(1, 1) \rightarrow (1, 4) \rightarrow (4, 4)$

$$\int_{(1,1)}^{(1,4)} (\hat{\mathbf{j}} dy) \cdot (-k_1 \hat{\mathbf{i}} + k_2 y \hat{\mathbf{j}}) + \int_{(1,4)}^{(4,4)} (\hat{\mathbf{i}} dx) \cdot (-k_1 x^2 \hat{\mathbf{i}} + k_2 4 \hat{\mathbf{j}}) = -21k_1 + \frac{15k_2}{2}.$$

3. $(1, 1) \rightarrow (4, 4)$ siguiendo la recta $x = y$

$$\int_{(1,1)}^{(4,4)} (\hat{\mathbf{i}} dx + \hat{\mathbf{j}} dy) \cdot (-k_1 x^2 \hat{\mathbf{i}} + k_2 x \hat{\mathbf{j}}) = \int_{(1,1)}^{(4,4)} (-k_1 x^2 + k_2 x) dx = -21k_1 + \frac{15k_2}{2}.$$

Dejamos al lector que calcule el trabajo para la trayectoria $y = x^2$.

Practicando con SymPy

1. SymPy nos permite hacer cálculos con el operador ∇ en coordenadas cartesianas, más adelante veremos que también es posible en otros sistemas de coordenadas. Los operadores que se pueden expresar son: **grad**(gradiente), **div** (divergencia), **curl** (rotacional), **laplacian** (laplaciano).

Veamos como funciona si queremos calcular el gradiente de la siguiente función:

$$f = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}.$$

```
[1]: import sympy
      from sympy import *
      from sympy.vector import *
      R = CoordSys3D('R')
```

Escribamos la función f

```
[2]: x,y,z = symbols('x y z')
f = (x**2+y**2)/(x**2+y**2+z**2)**(1/2)
f
```

[2]:
$$\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{0.5}}$$

Ahora bien, los escalares base (o coordenadas) se implementan en una clase especial llamada "BaseScalar" y se asignan a cada sistema de coordenadas, uno para cada eje coordenado x, y y z . Estas variables coordenadas se utilizan para formar expresiones de campos vectoriales o escalares en el espacio 3D. Se puede acceder a las coordenadas mediante las expresiones $R.x$, $R.y$ y $R.z$ respectivamente.

Por lo tanto, para generar la expresión de un campo escalar se debe escribir de la manera siguiente

```
[3]: f = (R.x**2+R.y**2)/(R.x**2+R.y**2+R.z**2)**(Rational(1,2))
f
```

[3]:
$$\frac{x_R^2 + y_R^2}{\sqrt{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2}}$$

Nota: En SymPy los números racionales se escriben como un par de dos enteros: el numerador y el denominador, por lo que $\text{Rational}(1,2)$ representa $1/2$, $\text{Rational}(5,2)$ representa $5/2$ y así sucesivamente.

Por lo tanto, si se incluyen números en una expresión de SymPy, se simplificarán automáticamente, pero hay un inconveniente que se debe tener en cuenta. Si se escribe una fracción $\frac{a}{b}$ dentro de una expresión SymPy, Python evaluará los dos números antes de que SymPy tenga la oportunidad de llegar a ellos. La solución es simplificar uno de los números, o usar la función "Rational".

Miremos el siguiente ejemplo:

```
[4]: x**(1/2)
```

[4]: $x^{0.5}$

```
[5]: x**(S(1)/2) # simplifica uno de los enteros
```

[5]: \sqrt{x}

```
[6]: x**Rational(1, 2) # se usa la clase Racional
```

[6]: \sqrt{x}

Volvamos a escribir la función

```
[7]: f = (R.x**2+R.y**2)/(R.x**2+R.y**2+R.z**2)**(S(1)/2)
f
```

[7]:
$$\frac{x_R^2 + y_R^2}{\sqrt{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2}}$$

```
[8]: delop = Del()
gradient = delop(f)
```

```
gradient
```

$$[8]: \left(\frac{\partial}{\partial x_R} \frac{x_R^2 + y_R^2}{\sqrt{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2}} \right) \hat{\mathbf{i}}_R + \left(\frac{\partial}{\partial y_R} \frac{x_R^2 + y_R^2}{\sqrt{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2}} \right) \hat{\mathbf{j}}_R + \left(\frac{\partial}{\partial z_R} \frac{x_R^2 + y_R^2}{\sqrt{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2}} \right) \hat{\mathbf{k}}_R$$

```
[9]: gradient.doit()
simplify(_)
```

$$[9]: \left(-\frac{x_R (x_R^2 + y_R^2)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x_R}{\sqrt{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2}} \right) \hat{\mathbf{i}}_R + \left(-\frac{y_R (x_R^2 + y_R^2)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2y_R}{\sqrt{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2}} \right) \hat{\mathbf{j}}_R + \left(-\frac{z_R (x_R^2 + y_R^2)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{\mathbf{k}}_R$$

También se puede llamar específicamente la función “gradient”

```
[10]: from sympy.vector import gradient
gradient(f)
simplify(_)
```

$$[10]: \left(\frac{x_R (x_R^2 + y_R^2 + 2z_R^2)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{\mathbf{i}}_R + \left(\frac{y_R (x_R^2 + y_R^2 + 2z_R^2)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{\mathbf{j}}_R + \left(-\frac{z_R (x_R^2 + y_R^2)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{\mathbf{k}}_R$$

Hagamos uso de los otros operadores. Por ejemplo, dado el vector:

$$\mathbf{a} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{j}} + \frac{z^2}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{k}},$$

calculemos la divergencia, $\nabla \cdot \mathbf{a}$.

```
[11]: A=R.x**2/(R.x**2+R.y**2)*R.i+R.y**2/(R.x**2+R.y**2)*R.j+R.z**2/(R.x**2+R.y**2)*R.k
A
```

$$[11]: \left(\frac{x_R^2}{x_R^2 + y_R^2} \right) \hat{\mathbf{i}}_R + \left(\frac{y_R^2}{x_R^2 + y_R^2} \right) \hat{\mathbf{j}}_R + \left(\frac{z_R^2}{x_R^2 + y_R^2} \right) \hat{\mathbf{k}}_R$$

```
[12]: from sympy.vector import divergence
simplify(divergence(A))
```

$$[12]: \frac{2(-x_R^3 - y_R^3 + (x_R^2 + y_R^2)(x_R + y_R + z_R))}{(x_R^2 + y_R^2)^2}$$

Calculemos ahora el rotacional $\nabla \times \mathbf{a}$

```
[13]: from sympy.vector import curl
simplify(curl(A))
```

$$[13]: \left(-\frac{2y_R z_R^2}{(x_R^2 + y_R^2)^2} \right) \hat{\mathbf{i}}_R + \left(\frac{2x_R z_R^2}{(x_R^2 + y_R^2)^2} \right) \hat{\mathbf{j}}_R + \left(\frac{2x_R y_R (x_R - y_R)}{(x_R^2 + y_R^2)^2} \right) \hat{\mathbf{k}}_R$$

Finalmente, calculemos el laplaciano de f , es decir, $\nabla^2 f$

```
[14]: from sympy.vector import laplacian
      laplacian(f)
```

$$[14]: \frac{(x_R^2 + y_R^2) \left(\frac{3z_R^2}{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2} - 1 \right)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{3x_R^2(x_R^2 + y_R^2)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^2} - \frac{4x_R^2}{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2} - \frac{x_R^2 + y_R^2}{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2} + 2}{\sqrt{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2}} + \frac{\frac{3y_R^2(x_R^2 + y_R^2)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^2} - \frac{4y_R^2}{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2} - \frac{x_R^2 + y_R^2}{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2} + 2}{\sqrt{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2}}$$

```
[15]: simplify(_)
```

$$[15]: \frac{4z_R^2}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Podemos verificar rápidamente que: $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$

```
[16]: divergence.gradient(f)
```

$$[16]: \frac{3x_R^2(x_R^2 + y_R^2)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{4x_R^2}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3y_R^2(x_R^2 + y_R^2)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{4y_R^2}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3z_R^2(x_R^2 + y_R^2)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3(x_R^2 + y_R^2)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4}{\sqrt{x_R^2 + y_R^2 + z_R^2}}$$

```
[17]: simplify(_)
```

$$[17]: \frac{4z_R^2}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2. SymPy integra simbólicamente funciones por medio del comando **integrate** ($expr, (x, a, b)$). Esto es, calcula la integral definida de la $expr$ respecto de x con los límites de integración a y b . Si se omiten los límites de integración se calcula la integral indefinida.

Por ejemplo, si queremos calcular la integral:

$$\int a \sin(x + b)^3 dx$$

Escribimos:

```
[18]: a, b = symbols('a b')
      integrate(a*sin(x+b)**3, x)
```

$$[18]: a \left(-\sin^2(b + x) \cos(b + x) - \frac{2 \cos^3(b + x)}{3} \right)$$

```
[19]: factor(_)
```

$$[19]: -\frac{a(3 \sin^2(b + x) + 2 \cos^2(b + x)) \cos(b + x)}{3}$$

Calculemos ahora el área de la región comprendida entre las funciones:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \quad y \quad g(x) = -x + 1.$$

Es decir, vamos a calcular la integral:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Aprovecharemos este ejercicio para aprender, entre otras cosas, a graficar y definir funciones.

```
[20]: f= x**3 - 3*x**2 + 1
      g= -x+1
```

Para encontrar los puntos donde las funciones se interceptan utilizaremos el comando `solve`, que resuelve la ecuación algebraica y devuelve una lista de igualdades con las variables despejadas. Si la expresión a resolver no es una igualdad, se supone que se quiere resolver la ecuación ya igualada a cero.

Calculemos los puntos donde se interceptan las curvas:

```
[21]: ec=Eq(f-g,0)
      s=solve(ec,x)
      s
```

```
[21]: [0, 3/2 - sqrt(5)/2, sqrt(5)/2 + 3/2]
```

Si queremos los valores numéricos de los elementos de la lista anterior hacemos lo siguiente:

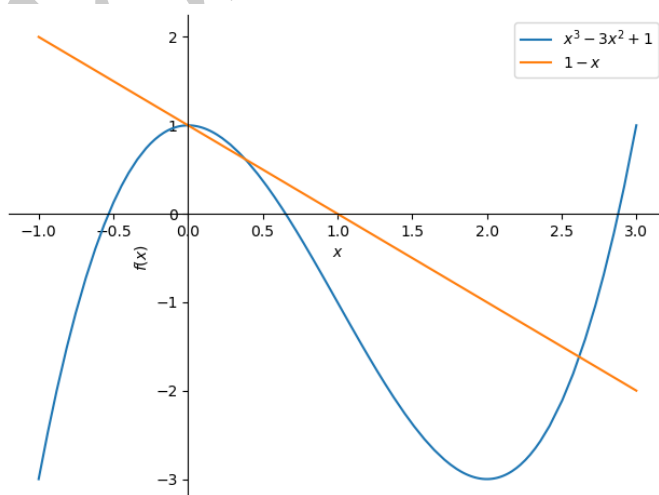
```
[22]: [(N(expr,3)) for expr in s]
```

```
[22]: [0, 0.382, 2.62]
```

Haremos la gráfica de las dos funciones.

En SymPy es necesario introducir las funciones como una lista, es decir, dentro de corchetes. Por otra parte, le pediremos al programa que grafique para los valores comprendidos de: $-1 \leq x \leq 3$. Entonces, para graficar las funciones $f(x)$ y $g(x)$ entre $[-1, 3]$ escribimos el siguiente comando:

```
[23]: plot(f, g, (x, -1, 3), legend = True)
```



Procedemos ahora sí a integrar la función diferencia para encontrar el área contenida dentro de las dos funciones. En este caso será la integral:

$$A = \int_0^{-\frac{\sqrt{5}-3}{2}} (f - g) \, dx + \int_{-\frac{\sqrt{5}-3}{2}}^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}} (-(f - g)) \, dx.$$

```
[24]: a = s[1]
      b = s[2]
```

```
[25]: integrate(f-g,(x,0,a)) - integrate(f-g,(x,a,b))
```

$$[25]: -\frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}\right)^4}{4} - \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}\right)^2}{2} - 2\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \frac{\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^4}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}\right)^3$$

```
[26]: round(_,2)
```

[26]: 2.82

3. Calculemos ahora las dos integrales que aparecen en el ejemplo 1.23. Es decir las integrales:

$$\int_{(0,0)}^{(1,\frac{3}{4}\sqrt{2})} (3x^2 + 2xy^3) dx, \quad \int_{(0,0)}^{(1,\frac{3}{4}\sqrt{2})} 6xy dy.$$

donde hicimos los cambio de variables: $x = 2t^2$, $y = t^3 + t$, $\Rightarrow dx = 4t dt$, $dy = (3t^2 + 1)dt$

Escribiremos primero los integrandos:

```
[27]: dx, dy, t = symbols('dx dy t')
      int1 = (3*x**2+2*x*y**3)*dx
      int2 = 6*x*y*dy
```

Realizaremos el cambio de variable a través de las siguientes instrucciones

```
[28]: L=[(x, 2*t**2), (dx, 4*t), (y, t**3+t), (dy, 3*t**2+1)]
      e1 =int1.subs(L)
      e2 =int2.subs(L)
      e1, e2
```

```
[28]: (4*t*(12*t**4 + 4*t**2*(t**3 + t)**3), 12*t**2*(3*t**2 + 1)*(t**3 + t))
```

Podemos introducir las integrales sin evaluarlas en el momento. En este caso la función no es evaluada y devuelve una expresión simbólica o imagen pictórica.

```
[29]: Integral(e1,(t,0,1/sqrt(2)))
```

$$[29]: \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 4t \left(12t^4 + 4t^2 (t^3 + t)^3 \right) dt$$

Para hacer efectivo del cálculo de la integral se puede escribir

```
[30]: (_).doit()
```

$$[30]: \frac{9305\sqrt{2}}{24024} + 1$$

```
[31]: Integral(e2,(t,0,1/sqrt(2)))
```

$$[31]: \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 12t^2 \cdot (3t^2 + 1) (t^3 + t) dt$$

```
[32]: (_).doit()
```

```
[32]: 65
      32
```

4. Como ya se mencionó en el apéndice 6 se puede asignar una expresión a una variable o definir una función. Veamos nuevamente cómo se hace.

Consideremos el movimiento de una partícula que sigue la trayectoria:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Primero escribiremos la expresión y se la asignamos a una variable que llamaremos x .

```
[33]: x0, v0, a, t = symbols('x0 v0 a t')
      x = x0+v0*t+a*t**2/2
      x
```

```
[33]:  a*t^2
      2 + t*v0 + x0
```

Si queremos evaluarla para algún valor de la variable t , digamos $t = 1$, entonces podemos escribir:

```
[34]: x.subs(t,1)
```

```
[34]:  a
      2 + v0 + x0
```

Si lo que queremos es evaluar la expresión con el resto de parámetros podemos hacer una lista de parámetros

```
[35]: P= [(t, 1), (a, -9.8), (x0, 0), (v0, 10)]
      x.subs(P)
```

```
[35]: 5.1
```

Las sustituciones se realizan pero no se asignan a las variables. Podemos ver que x sigue siendo lo que le asignamos originalmente.

```
[36]: x
```

```
[36]:  a*t^2
      2 + t*v0 + x0
```

La velocidad y la aceleración son funciones fáciles de calcular:

```
[37]: v=diff(x,t)
      v
```

```
[37]: at + v0
```

```
[38]: a=diff(x,t,2)
      a
```

```
[38]: a
```

```
[39]: v.subs(P)
```

```
[39]: 0.19999999999999999
```

```
[40]: a.subs(P)
```

```
[40]: -9.8
```

Ahora definamos la expresión anterior pero como la función $x(t)$. Para definir funciones en SymPy debemos hacer lo siguiente

```
[41]: def x(t):
      return x0+v0*t+a*t**2/2
```

```
[42]: x(t).subs(P)
```

```
[42]: 5.1
```

```
[43]: x(1)
```

```
[43]:  $\frac{a}{2} + v_0 + x_0$ 
```

```
[44]: x(t).diff(t)
```

```
[44]:  $at + v_0$ 
```

```
[45]: def v(t):
      return a*t+v0
```

```
[46]: v(1)
```

```
[46]:  $a + v_0$ 
```

```
[47]: v(t).subs(P)
```

```
[47]: 0.199999999999999
```

5. Cuando necesitemos manejar campos vectoriales podemos utilizar lo aprendido hasta ahora. Veamos el primer ejemplo de 1.16 donde:

$$\mathbf{r} = 3t^2\hat{\mathbf{i}} + (4t^3 - t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}.$$

Escribamos el vector posición:

```
[48]: r = 3*t**2*R.i + (4*t**3 + -t)*R.j + t*R.k
      r
```

```
[48]:  $(3t^2)\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{R}} + (4t^3 - t)\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{R}} + (t)\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{R}}$ 
```

```
[49]: v=r.diff(t)
      v
```

```
[49]:  $(6t)\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{R}} + (12t^2 - 1)\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{R}}$ 
```

```
[50]: a=r.diff(t,2)
      a
```

```
[50]:  $(6)\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{R}} + (24t)\hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{R}}$ 
```

Dado un vector arbitrario \mathbf{u}


```
[51]: bx, by, bz = symbols('bx by bz')
      u = bx*R.i + by*R.j + bz*R.k
      u
```

[51]: $(bx)\hat{\mathbf{i}}_R + (by)\hat{\mathbf{j}}_R + (bz)\hat{\mathbf{k}}_R$

```
[52]: v.dot(u)
```

[52]: $6bxt + by(12t^2 - 1) + bz$

```
[53]: solve(_, bz)
```

[53]: $[-6*bx*t - 12*by*t**2 + by]$

1.5.7 Ejercicios

1. Demuestre que:

- $\frac{d}{dt} [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \cdot \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt} \times \mathbf{c} \right) + \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{c}}{dt} \right)$
- $\frac{d}{dt} \left[\mathbf{a} \cdot \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} \right) \right] = \mathbf{a} \cdot \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{a}}{dt^3} \right)$
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{a} - \nabla \cdot \nabla \mathbf{a}$
- $\nabla \times (\phi \nabla \phi) = 0$
- $\nabla \times [\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a})] = 0$, si $\mathbf{a} = a_x(y, z)\hat{\mathbf{i}}$.

2. Considere que:

- $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} = x^i\hat{\mathbf{i}}_i$,
- $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(x, y, z) = a^i(x, y, z)\hat{\mathbf{i}}_i$ y $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \mathbf{b}(x, y, z) = b^i(x, y, z)\hat{\mathbf{i}}_i$,
- $\phi = \phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$ y $\psi = \psi(\mathbf{r}) = \psi(x, y, z)$.

Utilizando la notación de índices, e inspirándose en el ejemplo: 1.14 demuestre las siguientes identidades vectoriales:

- $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$.
- $\nabla \cdot (\phi\mathbf{a}) = \phi\nabla \cdot \mathbf{a} + (\nabla\phi) \cdot \mathbf{a}$.
- $\nabla \times \nabla\phi = 0$.
- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a})$ ¿Qué puede decir de $\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{a})$?
- $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$.
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2\mathbf{a}$.

3. Para los vectores dados a continuación, encuentre $d\mathbf{r}/ds$

- $\mathbf{r} = t\hat{\mathbf{i}} + 3t^2\hat{\mathbf{j}} - (t-1)\hat{\mathbf{k}}$, y $t = \ln(1+s^2)$.
- $\mathbf{r} = \sin(t)\hat{\mathbf{i}} + \cos(t)\hat{\mathbf{j}} + \tan(t)\hat{\mathbf{k}}$, y $t = 2+s^2$.

4. Una partícula describe un movimiento dado por el vector posición \mathbf{r} . Encuentre la componente de su velocidad en la dirección del vector indicado:

- $\mathbf{r} = t^2\hat{\mathbf{i}} + 4\cos(2t)\hat{\mathbf{j}} + 3\sin(2t)\hat{\mathbf{k}}$, $2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$.
- $\mathbf{r} = 3\cos(t)\hat{\mathbf{i}} + 3\sin(t)\hat{\mathbf{j}} + (t^2-2)\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$.

5. Si \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} son funciones que dependen del parámetro t , demuestre que:

- $\frac{d}{dt} [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})] = \mathbf{u} \cdot \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right) + \mathbf{u} \cdot \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{w} \right) + \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.
- $\frac{d}{dt} [\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})] = \mathbf{u} \times \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right) + \mathbf{u} \times \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{w} \right) + \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

6. Si $\mathbf{u} = 2t\hat{\mathbf{i}} - t^2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{v} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3t\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{w} = t\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}} - t\hat{\mathbf{k}}$. Utilice el resultado del ejercicio (a) anterior para encontrar: $\frac{d}{dt} [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})]$.
7. Si $\mathbf{u} = t\hat{\mathbf{i}} - t\hat{\mathbf{j}} + t^2\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{v} = -t\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}} - t^2\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{w} = 2t\hat{\mathbf{i}} - 2t\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$. Utilice el resultado del ejercicio (b) anterior para encontrar: $\frac{d}{dt} [\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})]$.
8. Encuentre el gradiente de los siguientes campos:
- $\phi(x, y, z) = x^2 + 3xyz - yz^2$.
 - $\phi(x, y, z) = (x^2 + 2y^2 + 4z^2)^{-1}$.
9. Encuentre la divergencia de los siguientes campos:
- $\mathbf{a}(x, y, z) = x^2y\hat{\mathbf{i}} + y^2z^2\hat{\mathbf{j}} + xz^3\hat{\mathbf{k}}$.
 - $\mathbf{a}(x, y, z) = (1 - x^2)\hat{\mathbf{i}} + \sin(yz)\hat{\mathbf{j}} + e^{xyz}\hat{\mathbf{k}}$.
10. Encuentre el rotacional de los siguientes campos:
- $\mathbf{a}(x, y, z) = xyz^2\hat{\mathbf{i}} + x^2yz\hat{\mathbf{j}} + xy^2\hat{\mathbf{k}}$.
 - $\mathbf{a}(x, y, z) = \sinh(xy)\hat{\mathbf{i}} + \cosh(yz)\hat{\mathbf{j}} + xyz\hat{\mathbf{k}}$.
11. Evalúe las siguientes integrales:
- $\int (t\sin(t)\hat{\mathbf{i}} + 2t^2\hat{\mathbf{j}} - 7t\hat{\mathbf{k}}) dt$.
 - $\int (\cosh^2(t)\hat{\mathbf{i}} + 2\sin^2(2t)\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}) dt$.
12. Un campo de fuerza:

$$\mathbf{F} = -kx\hat{\mathbf{i}} - ky\hat{\mathbf{j}},$$

actúa sobre un oscilador. Compare el trabajo hecho al moverse en contra de este campo al ir desde el punto $(1, 1)$ al punto $(4, 4)$, siguiendo los siguientes caminos:

- $(1, 1) \rightarrow (4, 1) \rightarrow (4, 4)$,
 - $(1, 1) \rightarrow (1, 4) \rightarrow (4, 4)$,
 - $(1, 1) \rightarrow (4, 4)$, siguiendo el camino: $x = y$.
13. Dado el campo de fuerza:

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{j}}.$$

Calcule el trabajo hecho en contra de este campo de fuerza al moverse alrededor de un círculo de radio uno y en el plano $x - y$.

- desde 0 a π en sentido contrario a la agujas del reloj.
 - desde 0 a $-\pi$ en sentido de las agujas del reloj.
14. Evaluar la siguiente integral:

$$\oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}.$$

15. Una partícula se mueve bajo la ley $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$, con:

$$x(t) = 2t^2; \quad y(t) = t^2 - 4t; \quad z(t) = 3t - 5.$$

Donde el parámetro t representa el tiempo. Encuentre las expresiones para la aceleración y la velocidad de la partícula, para $t = 1$ y en la dirección del vector $\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$.

16. Suponga ahora el caso general de una partícula que se mueve en una curva descrita por:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}.$$

Muestre que el vector velocidad es tangente a la trayectoria descrita.

17. Encuentre la ecuación vectorial para una trayectoria recta que pasa por los puntos $P \rightarrow (1, 2, 3)$ y $Q \rightarrow (1, 1, 1)$.

18. Encuentre el ángulo entre los siguientes planos: $x + y + z = 9$ y $x + y - z = 3$.
19. Un fluido se considera irrotacional si su campo de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}(x, y, z)$ cumple con la ecuación: $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Suponga, ahora que:

$$\mathbf{v} = (x + 2y + az)\hat{\mathbf{i}} + (bx - 3y - z)\hat{\mathbf{j}} + (4x + cy + 2z)\hat{\mathbf{k}}.$$

- (a). Encuentre el valor de a , b y c para que este campo de velocidades sea irrotacional.
- (b). Es intuitivo convencerse que si $\nabla \times \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \nabla\psi$. Encuentre la expresión para la función potencial $\psi = \psi(\mathbf{r}) = \psi(x, y, z)$.
20. Considere la siguiente integral: $I = \int_C \mathbf{dr} \cdot \mathbf{v}$. Donde \mathbf{v} es el mismo campo del ejemplo anterior y C es el circuito a recorrer.
- (a). Calcule el valor de la integral I a lo largo del trayecto: $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0)$ mediante una segmento de recta. Luego, de $(1, 1, 0) \rightarrow (2, 0, 0)$ a lo largo de otro segmento de recta. Finalmente regresando $(2, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$ también siguiendo una recta.
- (b). Calcule el valor de la integral I de $(0, 0, 0) \rightarrow (2, 0, 0)$ a lo largo de un arco de circunferencia que cumple con la ecuación: $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Ahora regresando de $(2, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 0)$ también a través de una recta.
- (c). ¿Qué puede concluir del campo \mathbf{v} ?

1.6 Vectores y números complejos

Desde los primeros cursos de matemática nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios. La solución a un polinomio cúbico:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2i \\ x = -2i \\ x = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow (x + 2i)(x - 2i)(x - 3) = 0,$$

o cuadrático:

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2i \\ x = -2i \end{array} \right\} \Rightarrow (x + 2i)(x - 2i) = 0.$$

Como no se entendía mucho se consideró definir $i^2 \equiv -1$. En la sección 1.6.2 veremos una presentación mas acertada del significado de esa igualdad.

De lo anterior podemos ver que al multiplicar el número imaginario i por cualquier número real obtendremos el número imaginario puro ib , con $b \in \mathbb{R}$. La nomenclatura de números imaginarios surgió de la idea de que estas cantidades no representaban mediciones físicas. Esa idea ha sido abandonada pero quedó el nombre¹⁹.

¹⁹Los números complejos comienzan a aparecer en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1672) mientras estudiaban las raíces de la ecuación cúbica. Pero es a René Descartes (1596-1650) a quién se le atribuye la afirmación: "ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación" y utilizó el término "números imaginarios". Caspar Wessel en 1799 y Jean-Robert Argand en 1806 proponen la estructura del plano complejo y la representación de la unidad imaginaria como el punto $(0, 1)$ del eje vertical de dicho plano. Pero el término, hoy usado de "números complejos" se debe a Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

1.6.1 Los números complejos y su álgebra

Un número complejo, z , es la generalización de los números imaginarios (puros), ib . Esto es:

$$z = a + ib \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} . \end{cases}$$

Obviamente los números reales serán $a + i0$ números complejos con su parte imaginaria nula. Los números imaginarios puros serán números complejos con su parte real nula, esto es, $0 + ib$. Por ello, en general diremos que:

$$z = a + ib \Leftrightarrow a = \operatorname{Re}(z) \quad \wedge \quad b = \operatorname{Im}(z) ,$$

es decir, a corresponde a la parte real de z y b a su parte imaginaria.

Cada número complejo z tendrá asociado un número complejo conjugado z^* tal que:

$$\begin{aligned} z = a + ib &\Leftrightarrow z^* = a - ib , \\ \Downarrow \\ (z^*)^* &= z \quad \wedge \quad z \cdot z^* = a^2 + b^2 , \end{aligned}$$

claramente:

$$z \cdot z^* \geq 0 \Rightarrow |z|^2 = |z^*|^2 = z \cdot z^* = a^2 + b^2 .$$

Es importante señalar que, en general, no existe relación de orden entre los números complejos. Vale decir, que no sabremos si un número complejo es mayor que otro. No está definida esta operación.

$$z_1 \not> z_2 \quad \vee \quad z_1 \not< z_2 .$$

Las relaciones de orden sólo se podrán establecer entre módulos de números complejos y no números complejos en general.

Rápidamente recordamos el álgebra de los números complejos:

- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 = b_2 .$$

- Se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias:

$$z_3 = z_1 + z_2 \Leftrightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3 ,$$

- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria

$$(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1) ,$$

y claramente $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$, también $z - z^* = 2 \operatorname{Im} z$. Igualmente es inmediato comprobar que:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* .$$

- Se multiplican números complejos por escalares multiplicando el escalar por sus partes reales e imaginarias:

$$z_3 = \alpha z_1 \Leftrightarrow \alpha (a_1 + ib_1) = \alpha a_1 + i(\alpha b_1) .$$

- Se multiplican números complejos entre si, multiplicando los dos binomios y teniendo cuidado que $i^2 = -1$:

$$z_3 = z_1 z_2 \Leftrightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) ,$$

también es inmediato comprobar que $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.

- Se dividen números complejos siguiendo la estrategia de racionalización de fracciones irracionales.

Esto es:

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

es claro que el divisor será cualquier número complejo excepto el cero complejo: $0 + i0$.

1.6.2 Vectores y el plano complejo

Mirando con cuidado el álgebra de números complejos nos damos cuenta que un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números, es decir:

$$z = (a + ib) \Leftrightarrow z = (a, b).$$

Las propiedades entre números complejos de igualdad, suma y multiplicación por un escalar arriba expuestas se cumplen de forma inmediata con esta nueva representación. Hay que definir las operaciones de multiplicación y división entre números complejos de forma que:

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) \quad \wedge \quad \frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right).$$

Con esta definición para la multiplicación de números complejos podemos ver que si la unidad compleja viene representada por el par $i = (0, 1)$, entonces

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

La asociación de un número complejo con una pareja de números inmediatamente nos lleva a imaginar un punto (x, y) en un plano (complejo), la primera componente (horizontal) representa la parte real y la segunda componente (vertical) representa la parte imaginaria.

De esta forma asociamos un número complejo a un vector que une ese punto (x, y) con el origen del plano complejo.

Como mencionamos con anterioridad, todo número complejo z tiene asociado su número complejo conjugado z^* .

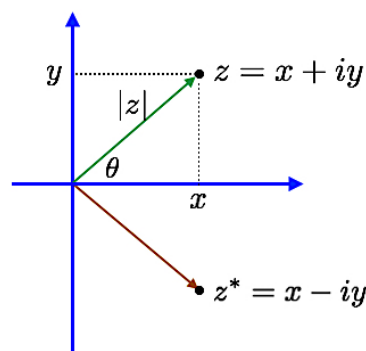


Figura 1.10: Representación del plano complejo. El eje horizontal recibe el nombre de eje real, y el eje vertical el nombre de eje imaginario.

La representación geométrica de z^* no es otra cosa que la reflexión de z respecto al eje real. Como puede verse en la figura 1.10.

Por otro lado, $|z| = \sqrt{zz^*}$ viene a ser la distancia del punto $(0, 0)$ al punto (x, y) , es decir, la longitud o norma del vector (x, y) . Esta representación de números complejos como vectores en el plano (complejo) se conoce con el nombre de Diagrama de Argand²⁰ a pesar que no fue Jean Argand, sino Caspar Wessel²¹ el primero en proponerlo. Por cierto, esta interpretación fue tres veces redescubierta,

²⁰Jean Robert Argand (1768-1822). Contador pero matemático aficionado, propuso esta interpretación de números complejos como vectores en un plano complejo en un libro autoeditado con sus reflexiones que se perdió y fue rescatado 7 años después, fecha a partir de la cual Argand comenzó a publicar en Matemáticas. https://es.wikipedia.org/wiki/Jean-Robert_Argand.

²¹Caspar Wessel (1745-1818) Matemático que se dedicó principalmente al levantamiento topográfico de Noruega. Su trabajo sobre los números complejos permaneció desconocido por casi 100 años. https://es.wikipedia.org/wiki/Caspar_Wessel.

primero por Caspar Wessel en 1799, luego por Jean Argand en 1806 y finalmente por Gauss²² en 1831.

De esta manera, como un recordatorio al plano real podemos ver que:

$$z = x + iy \Leftrightarrow z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)), \quad \text{con:} \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

El ángulo θ que el número complejo z forma con el eje real positivo en el plano complejo, se denomina argumento de z y se representa como $\arg z$. El argumento de un número complejo es una función multivaluada, lo que significa que existen infinitos valores posibles para θ que describen el mismo número complejo. Esto se debe a que las funciones $\cos \theta$ y $\operatorname{sen} \theta$ son periódicas, con un período de 2π . Por ejemplo, $\theta = 3\pi/2$ y $\theta = -\pi/2$ son ambos argumentos de $z = -i$. En general, si θ es un argumento de z , todos los valores:

$$\theta + 2\pi n = \arg z, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (z \neq 0),$$

también son argumentos de z . Para evitar esta ambigüedad, se define la “rama principal” del argumento de un número complejo, que se denota $\operatorname{Arg} z$, y se elige dentro de los siguientes intervalos:

$$\operatorname{Arg} z \in [0, 2\pi], \quad \arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

o bien:

$$\operatorname{Arg} z \in [-\pi, \pi], \quad \arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Bajo esta convención, tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} x = \operatorname{Re} z &\Leftrightarrow \text{componente real del vector } z \text{ o parte real de } z \\ y = \operatorname{Im} z &\Leftrightarrow \text{componente imaginaria del vector } z \text{ o parte imaginaria de } z \\ r = \sqrt{zz^*} = |z| &\Leftrightarrow \text{módulo, magnitud o valor absoluto de } z \\ \theta &\Leftrightarrow \text{ángulo polar o fase del número complejo } z. \end{aligned}$$

La interpretación vectorial de números complejos permite que la suma de números complejos: $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ sea representada por la “regla del paralelogramo”, es decir, en la representación gráfica de la suma es fácil ver que z_1 y z_2 limitan un paralelogramo cuya diagonal es $z_1 + z_2$.

Mientras que los productos escalar y vectorial nos llevan a:

$$z_1 \cdot z_2 = \operatorname{Re}(z_1 z_2^*) = \operatorname{Re}(z_1^* z_2) \quad \wedge \quad z_1 \times z_2 = \operatorname{Im}(z_1^* z_2) = -\operatorname{Im}(z_1 z_2^*).$$

Volviendo nuevamente a la relación $|z| = \sqrt{zz^*}$, observamos que:

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

Ya que si $|z_1 z_2|$, $|z_1|$ y $|z_2|$ son cantidades positivas, entonces:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(z_1 z_2)^* = z_1 z_2 z_1^* z_2^* = z_1 z_1^* z_2 z_2^* = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1| |z_2|)^2.$$

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

²²Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Uno de los matemáticos más geniales y precoces de la Historia. Desde los 7 años comenzó a mostrar sus condiciones de genialidad. Sus contribuciones en Astronomía y Matemáticas son múltiples y diversas. https://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss.

Veamos:

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* = (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* + z_1 z_2^* + z_1^* z_2 \\
 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 z_2^*) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 | \operatorname{Re}(z_1 z_2^*) | \\
 &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1 z_2^*| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |z_2^*| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |z_2| \\
 &= (|z_1| + |z_2|)^2.
 \end{aligned}$$

Notemos que la igualdad $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ se satisface si, y sólo si, $\operatorname{Re}(z_1 z_2^*) = |z_1 z_2^*|$.

1.6.3 Producto escalar

El producto escalar definido con anterioridad para vectores puede ser redefinido al caso de vectores con componentes complejas.

Definición 1.1 (Producto escalar complejo)

Dados los vectores: $\mathbf{a} = a^i \hat{\mathbf{i}}_i$ y $\mathbf{b} = b^i \hat{\mathbf{i}}_i$, con $\{a^i\}$ y $\{b^i\} \in \mathbb{C}$, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i)^* b^i.$$

Notemos que con esta definición, el producto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a^i)^* a_i$ siempre será un número real. Por lo tanto:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \in \mathbb{R}.$$

Esta definición hace que ahora cambien algunas de las propiedades del producto escalar.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^*, \quad (1.8)$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda^* \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.10)$$

1.6.4 Fórmulas de Euler y De Moivre

En cursos anteriores nos hemos encontrado con las series de Taylor²³ para funciones analíticas²⁴. Esta serie permite expresar cualquier función analítica alrededor de un punto x_0 de su dominio, como una serie infinita de potencias del argumento de la función. Esto es:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^3 + \dots$$

O de manera equivalente:

$$f(x) = C_n (x - x_0)^n \quad \text{con} \quad C_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} \quad \text{y} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Si consideramos que $x_0 = 0$, podremos ver a continuación algunos desarrollos en series de funciones

²³Brook Taylor (1685-1731) Físico y Matemático inglés contemporáneo de Newton y Leibniz y junto con ellos participó profundamente en el desarrollo del cálculo diferencial e integral. Además de sus aportes al estudio del magnetismo, capilaridad y termometría, desarrolló el área de diferencias finitas que hasta hoy utilizamos para cálculos en computación. Inventó la integración por partes y descubrió la serie que lleva su nombre. https://es.wikipedia.org/wiki/Brook_Taylor.

²⁴Básicamente, una función analítica es una función que puede expresarse como una serie de potencias convergente.

elementales:

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots \\ \operatorname{sen}(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \dots\end{aligned}$$

Es fácil convencerse que para la serie de e^x se tiene:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{6}i\theta^3 + \frac{1}{24}\theta^4 + \frac{1}{120}i\theta^5 - \frac{1}{720}\theta^6 - \frac{1}{5040}i\theta^7 + \dots$$

y que puede arreglarse como:

$$e^{i\theta} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 - \frac{1}{720}\theta^6 + \dots\right)}_{\cos(\theta)} + i \underbrace{\left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 - \frac{1}{5040}\theta^7 + \dots\right)}_{\operatorname{sen}(\theta)}$$

obteniéndose la importante relación:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta),$$

conocida como la relación de Euler²⁵. La fórmula de Euler, para $-\pi < \theta < \pi$ implica los siguientes simpáticos resultados:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -1 = e^{i\pi}, \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad 1 = e^{i2k\pi} \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

Entonces, tenemos tres formas de representar un número complejo:

$$z = x + iy \Leftrightarrow z = |z|(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \Leftrightarrow z = |z|e^{i\theta}.$$

La expresión $z = x + iy$ se conoce como forma cartesiana de representación de un número complejo, la forma $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$ será la trigonométrica o polar y la expresión $z = re^{i\theta}$ será la representación de Euler.

Es importante notar una sutileza implícita en esta notación. La forma cartesiana representa unívocamente a un número complejo, mientras que la forma polar (y la de Euler), es ambigua, ya que:

$$z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) = r(\cos(\theta + 2n\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2n\pi)), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Es decir, existen varios valores del argumento que definen el mismo número complejo.

En este par de ejemplo mostraremos algunos otros resultados que emergen de los números complejos

Ejemplo 1.25 El número $z = 1 + \sqrt{3}i$ lo podemos representar de las siguientes maneras:

$$\begin{aligned}z = 1 + \sqrt{3}i &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2e^{i(\frac{\pi}{3} + 2n\pi)} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)\right].\end{aligned}$$

Debemos tener en cuenta que r es siempre positivo, mientras que θ , como ya fue mencionado, puede tomar infinitos valores incluyendo valores negativos. El ángulo θ se relaciona con las coordenadas cartesianas por la ecuación $\tan(\theta) = y/x$ y es necesario especificar el cuadrante para su cálculo.

²⁵Leonhard Euler (1707-1783). Uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos. Desarrolló inmensamente campos como la geometría analítica y trigonometría, siendo el primero que consideró el coseno y el seno como funciones. Hizo aportes significativos en el desarrollo del cálculo diferencial e integral, astronomía, elasticidad y mecánica de medios continuos. https://es.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler.

Otro aspecto a rescatar de la forma de Euler o exponencial, es que la ecuación:

$$z = re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

no es más que una representación paramétrica del círculo $|z| = r$, es decir, de un círculo de radio r y centrado en el origen.

Por lo tanto, un círculo centrado en z_0 y de radio R tendrá como ecuación paramétrica:

$$|z - z_0| = R \Rightarrow z = z_0 + Re^{i\theta},$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como podemos apreciar en la figura 1.11.

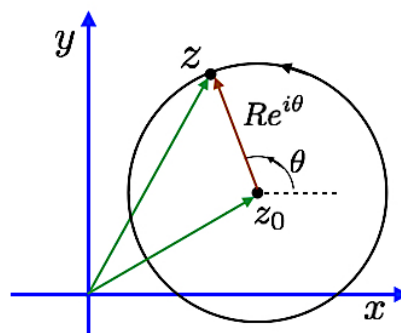


Figura 1.11: Representación en el plano complejo del círculo $|z - z_0| = R$.

Ejemplo 1.26 Un número complejo, digamos $z = -1 - i$ (tercer cuadrante) tendrá como valor principal:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \text{Arg}(-1 - i) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Este valor está dentro del intervalo $[-\pi, \pi]$, es decir, en la rama principal del argumento. Nota: no debe tomarse el valor $-\frac{5\pi}{4}$, ya que no se encuentra en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Lo que sí es cierto es que:

$$\arg(-1 - i) = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

lo cual describe todos los posibles valores del argumento de z .

Es claro que las sumas de números complejos se plantean más fácilmente en su forma cartesiana. Mientras la multiplicación y división serán directas en la forma de Euler. Si $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ y $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, entonces:

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} = |z_1 z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)). \quad (1.11)$$

Esto significa que para multiplicar dos números complejos se debe, por un lado, multiplicar sus módulos y por el otro, sumar sus argumentos. Geométricamente, al sumarse los argumentos, la multiplicación es en realidad un giro en el plano complejo por el producto de sus módulos, es decir, si multiplicamos un número por i , el resultado es un giro de un cuarto de vuelta hacia la izquierda, es por eso, que $i^2 = -1 = e^{i\pi}$.

Mientras que para la división:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

Podemos notar de esta última expresión que el inverso de un número complejo diferente de cero es:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-i\theta}. \quad (1.12)$$

Se puede mostrar que a partir de (1.11) y de (1.12) resulta que:

$$\begin{aligned} \arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2), \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2). \end{aligned}$$

Seguimos mostrando ejemplos de resultados con números complejos.

Ejemplo 1.27 Vimos en el ejemplo 1.26 que para el número complejo $z = -1 - i$, resultaba que

$$\arg(-1 - i) = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Si lo queremos escribir en la forma exponencial tenemos que hacer lo siguiente:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow -1 - i = \sqrt{2}e^{-i(\frac{3\pi}{4})}.$$

Pero en realidad hay infinitas posibilidades para la forma exponencial de $z = -1 - i$:

$$-1 - i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Ejemplo 1.28 Consideremos los números $z = 2 + 2i$ y $z = -\sqrt{3} + i$ y representémoslo en la forma polar.

Para representar $z = 2 + 2i$ en la forma polar debemos calcular primeramente su módulo:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

y luego el argumento:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{2}{2} \Rightarrow \theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Por lo tanto, $z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$, es un punto ubicado en el primer cuadrante cuyo radio vector hace un ángulo de 45° con respecto al eje x .

En cambio, para el número complejo $z = -\sqrt{3} + i$, resulta:

$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \theta = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Aquí debemos tener cuidado, pues el argumento principal en realidad es:

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

$z = -\sqrt{3} + i = 2(\cos(5\pi/6) + i \sin(5\pi/6))$, es un punto ubicado en el segundo cuadrante cuyo radio vector hace un ángulo de 150° con respecto al eje x .

Por otro lado, notemos lo siguiente: si $z = x + iy$, entonces

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)),$$

y a partir de la relación o fórmula de Euler se puede demostrar

$$z^n = |z|^n (e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta} \Rightarrow |z|^n (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)),$$

con n entero.

De manera que llegamos a la fórmula de De Moivre²⁶

$$[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), \quad \text{con } n \text{ entero.}$$

1.6.4.1 Algunas aplicaciones inmediatas de la fórmula de De Moivre

Presentaremos algunas aplicaciones inmediatas la fórmula de De Moivre en diferentes ámbitos, algunas de estas aplicaciones seguramente las recordamos de nuestra educación media.

²⁶Abraham De Moivre (1667-1754), matemático francés que tuvo que emigrar a Inglaterra por razones religiosas. Contemporáneo de Newton, Leibniz y Halley, fue pionero con sus contribuciones en geometría analítica y teoría de probabilidades. https://es.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre.

1. Identidades trigonométricas

La primera de las aplicaciones de la fórmula de De Moivre es para construir identidades trigonométricas en las cuales se expresa el coseno, o el seno, de factores de un ángulo. Veamos las siguientes (nada triviales) identidades trigonométricas:

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \quad \text{o} \quad \sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta).$$

Para demostrar estas (y otras) identidades utilizamos la fórmula de De Moivre, es decir:

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) &= [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^3 \\ &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + i[3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)]. \end{aligned}$$

Igualando ahora parte real e imaginaria tendremos:

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)[1 - \cos^2(\theta)] = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) \\ \sin(3\theta) &= 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta) = 3[1 - \sin^2(\theta)]\sin(\theta) - \sin^3(\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta). \end{aligned}$$

El método puede extenderse a expresiones de senos y cosenos de $n\theta$.

Igualmente podemos desarrollar un método para encontrar expresiones de potencias de funciones trigonométricas en término de funciones de factores de ángulo del tipo

$$(\cos(\theta))^n = F(\cos(n\theta), \sin(n\theta)).$$

Para empezar, supongamos que tenemos un número complejo de módulo 1, de tal forma que

$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \Rightarrow \begin{cases} z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta) \\ z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin(n\theta). \end{cases}$$

Estas identidades surgen de manera inmediata a partir de lo siguiente

$$\begin{aligned} z^n + \frac{1}{z^n} &= [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n + [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^{-n} \\ &= [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] + [\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)] \\ &= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) + \cos(n\theta) - i\sin(n\theta) = 2\cos(n\theta). \end{aligned}$$

Puede demostrarse la segunda de las afirmaciones anteriores. Supongamos además que $n = 1$, con lo cual se cumple que:

$$z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \quad \text{y} \quad z - \frac{1}{z} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta),$$

que también lo sabíamos desde la más temprana edad de nuestros cursos de bachillerato.

Ejemplo 1.29 Ahora podemos ver que a partir de

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

es posible construir expresiones como:

$$\cos^5(\theta) = \frac{1}{2^5} \left(z + \frac{1}{z} \right)^5 = \frac{1}{2^5} \left[\left(z^5 + \frac{1}{z^5} \right) + \left(5z^3 + \frac{5}{z^3} \right) + \left(10z + \frac{10}{z} \right) \right],$$

es decir:

$$\cos^5(\theta) = \frac{1}{2^5} [2\cos(5\theta) + 10\cos(3\theta) + 20\cos(\theta)].$$

De la misma manera se puede proceder con otras potencias y obviamente con potencias de la función seno.

2. Raíces de polinomios

Las raíces de un número complejo se obtienen de la relación:

$$z^{1/n} = [|z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))]^{1/n} = |z|^{1/n} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right],$$

donde $k = 0, 1, \dots, n-1$. De manera que la fórmula de De Moivre nos puede ayudar para encontrar raíces de polinomios.

Supongamos, para empezar, que queremos encontrar las n raíces de la ecuación:

$$z^n = 1.$$

Para ello procedemos con el siguiente artificio:

$$z^n = 1 = e^{i(2\pi k)} = \cos(2\pi k) + i \operatorname{sen}(2\pi k), \quad \text{donde } k = 0, 1, 2, \dots$$

con lo cual las n raíces de la ecuación $z^n = 1$ serán:

$$z^n = 1 = e^{i(2\pi k)} \Rightarrow z = e^{i\left(\frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad (1.13)$$

esto es:

$$z_0 = 1; z_1 = e^{2\pi i\left(\frac{1}{n}\right)}; z_2 = e^{2\pi i\left(\frac{2}{n}\right)}; z_3 = e^{2\pi i\left(\frac{3}{n}\right)}; \dots z_{n-2} = e^{2\pi i\left(\frac{n-2}{n}\right)}; z_{n-1} = e^{2\pi i\left(\frac{n-1}{n}\right)},$$

es decir, n raíces corresponderán a los n valores de $k = 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$. Mayores valores de k no proveen nuevas raíces.

Las raíces de la ecuación $z^3 = 1$ serán entonces:

$$z = e^{i\left(\frac{2\pi k}{3}\right)} \Rightarrow z_0 = 1, z_1 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}, z_2 = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}.$$

Como veremos más adelante, estas propiedades pueden extenderse a raíces de polinomios que contengan más términos.

Una afirmación que se nos ha enseñado, pero que quizás no conocemos su justificación, es la siguiente: *si un polinomio con coeficientes reales tiene raíces complejas, éstas serán complejas conjugadas entre sí*. Es decir, si la ecuación $z^5 - z^4 + 2z - 2 = 0$ tiene como raíz $(1 + i)$, también tendrá como raíz $(1 - i)$.

Esta afirmación se prueba de forma general si suponemos que tenemos la siguiente ecuación:

$$a_k z^k = 0, \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1, n \Rightarrow a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ son reales, es decir, $a_k = a_k^*$ para todos los valores del índice k .

Si tomamos el conjugado complejo de la ecuación, obtenemos:

$$a_0^* + a_1^* z^* + a_2^* (z^*)^2 \dots + a_{n-1}^* (z^*)^{n-1} + a_n^* (z^*)^n = 0.$$

Dado que los coeficientes son reales, esto se simplifica a:

$$a_0 + a_1 z^* + a_2 (z^*)^2 \dots + a_{n-1} (z^*)^{n-1} + a_n (z^*)^n = 0.$$

Así, si z es una solución de la ecuación, su conjugado z^* también lo será, porque ambos satisfacen la misma ecuación con los mismos coeficientes reales.

Los siguiente ejemplos muestran como surgen las raíces complejas de polinomios en variable compleja.

Ejemplo 1.30 Supongamos la siguiente ecuación polinómica con sus raíces:

$$z^5 - z^4 + 2z - 2 = 0 \Rightarrow (z^4 + 2)(z - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^4 + 2 = 0 \Rightarrow z^4 = -2 \\ z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

De la ecuación (1.13) podemos ver que:

$$z^4 = -2(1) = -2 \left(e^{i(2\pi k)} \right) \Rightarrow z = \left[-2 \left(e^{i(2\pi k)} \right) \right]^{1/4} = (-2)^{1/4} e^{i(\frac{2\pi k}{4})} = \frac{2^{3/4}}{2} (1 + i) e^{i(\frac{2\pi k}{4})},$$

donde hemos utilizado el hecho de que: $(-1)^{1/4} = i^{1/2} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{1/2} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2^{1/4}} (1 + i) \\ z_1 &= \frac{1}{2^{1/4}} (1 + i) e^{i(\frac{\pi}{2})} = \frac{i}{2^{1/4}} (1 + i) \\ z_2 &= \frac{1}{2^{1/4}} (1 + i) e^{i(\pi)} = -\frac{1}{2^{1/4}} (1 + i) \\ z_3 &= \frac{1}{2^{1/4}} (1 + i) e^{i(\frac{3\pi}{2})} = -\frac{i}{2^{1/4}} (1 + i) . \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación $z^5 - z^4 + 2z - 2 = 0$, tendrá las siguientes cinco raíces:

$$z_0 = \frac{1}{2^{1/4}} (1 + i) , \quad z_1 = -\frac{1}{2^{1/4}} (1 - i) , \quad z_2 = -\frac{1}{2^{1/4}} (1 + i) , \quad z_3 = \frac{1}{2^{1/4}} (1 - i) , \quad z_4 = 1 .$$

Ejemplo 1.31 Ahora consideremos el siguiente polinomio complejo:

$$P(z) = z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0 .$$

Encontremos sus raíces.

Sí por algún método comprobamos que $(z^3 - 2)$ es uno de sus factores, entonces podremos encontrar las raíces del polinomio $P(z)$.

Veamos, claramente si $(z^3 - 2)$ es un factor, entonces podemos expresar:

$$P(z) = z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = (z^3 - 2)(z^3 - z^2 + 4z - 4) = (z^3 - 2)(z - 1)(z^2 + 4) ,$$

con lo cual, como z es complejo, hay que tener cuidado con las raíces encubiertas. Entonces, la raíces son:

$$z^3 = 2, \quad z = 1, \quad z^2 = -4 .$$

- Para $z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm 2i$.
- Para $z^3 = 2 \Rightarrow z^3 = 2 \left(e^{i(2\pi k)} \right) \Rightarrow z = \left[2 \left(e^{i(2\pi k)} \right) \right]^{1/3} = 2^{1/3} e^{i(\frac{2\pi k}{3})}$.

Por lo tanto:

$$z_0 = 2^{1/3}, \quad z_1 = 2^{1/3} e^{i(\frac{2\pi}{3})} = -\frac{2^{1/3}}{2} [1 - \sqrt{3}i], \quad z_2 = 2^{1/3} e^{i(\frac{4\pi}{3})} = -\frac{2^{1/3}}{2} [1 + \sqrt{3}i] .$$

La ecuación: $z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0$, tendrá las siguientes seis raíces:

$$z = \sqrt[3]{2}, \quad z = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} [1 \pm \sqrt{3}i], \quad z = 1, \quad z = \pm 2i .$$

1.6.4.2 Logaritmos y potencias de números complejos

La motivación surge cuando queremos resolver la ecuación:

$$e^w = z = re^{i\theta}, \quad \text{con } w, z \in \mathbb{C} \text{ y } -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (1.14)$$

Notemos que al despejar w en realidad lo que tenemos es la función logarítmica, que como veremos en su debido tiempo puede escribirse de la forma $w = u + iv$. Por lo tanto:

$$e^{u+iv} = e^u e^{iv} = re^{i\theta} \Rightarrow e^u = r \wedge v = \theta + 2\pi n,$$

donde n es un entero. Por lo tanto, es claro que:

$$e^u = r \Rightarrow u = \ln(r),$$

y que la ecuación (1.14) se satisface si y sólo si:

$$w = \ln(r) + i(\theta + 2\pi n), \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Por lo tanto, si definimos la función multivaluada:

$$\text{Log}(z) \equiv \ln|r| + i(\theta + 2\pi n), \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.15)$$

podemos escribir la relación:

$$e^{\text{Log}(z)} = z \quad \text{con } z \neq 0.$$

Llamaremos *valor principal* de $\text{Log}(z)$ al valor que se obtiene cuando $n = 0$ en la ecuación (1.15) y lo denotaremos con $\text{Ln}(z)$.

$$\text{Ln}(z) = \ln|r| + i\theta. \quad (1.16)$$

Notemos que ésta es una función univaluada con $z \neq 0$, y además, si combinamos (1.15) y (1.16) obtenemos:

$$\text{Log}(z) = \text{Ln}(z) + i2\pi n, \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Podemos ver que cuando z es un número real positivo, es decir, $z = re^{i0}$, entonces recobramos la función logarítmica usual:

$$\text{Ln}(z) = \text{Ln}(r) = \ln(r).$$

En consecuencia, podemos ver que:

$$\begin{aligned} \text{Log}(1) &= \ln(1) + i(0 + 2\pi n) \quad \wedge \quad \text{Ln}(1) = 0 \\ \text{Log}(-1) &= \ln(1) + i(\pi + 2\pi n) \quad \wedge \quad \text{Ln}(-1) = i\pi, \end{aligned}$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Por otro lado, también:

$$\begin{aligned} \ln(z^n) &= \ln[\{|z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))\}^n] = n \ln[|z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))] = n \ln[|z| e^{i\theta}] \\ &= n \ln(|z|) + n(\theta + 2k\pi)i = n \ln(|z|) + (n\theta)i + (2nk\pi)i, \quad \text{con } k \text{ entero.} \end{aligned}$$

Ahora ejemplificamos el cálculo de logaritmos en variable compleja.

Ejemplo 1.32 Consideremos algunos ejemplos puntuales:

1. $z = \text{Log}(-3i)$

$$\text{Log}(-3i) = \text{Log}\left[3e^{i(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}\right] = \ln(3) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$$

Decimos que el valor principal de $\text{Log}(-3i)$ será $\text{Ln} = \ln(3) - i\frac{\pi}{2}$.

2. $z = i^{-5i}$

$$i^{-5i} \Rightarrow \operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(i^{-5i}) = -5i \operatorname{Log}(i) = -5i \operatorname{Log}\left[e^{i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}\right] = 5\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right).$$

Con lo cual $z = i^{-5i}$ ¡es un número real!

3. $z = i^i$

$$i^i = \left[e^{i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}\right]^i = e^{i^2(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)}.$$

4. $z = \operatorname{Log}\left[(\sqrt{3} + i)^3\right]$

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}\left[(\sqrt{3} + i)^3\right] &= 3\operatorname{Log}\left[2e^{i\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)}\right] = 3\left[\ln(2) + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)\right] \\ &= \ln(8) + i\left(\frac{\pi}{2} + 6n\pi\right). \end{aligned}$$

Practicando con SymPy

SymPy maneja números complejos escritos en la forma: $a + bi$. La unidad imaginaria es interpretada por el programa con la letra I .

```
[1]: import sympy
from sympy import *
```

1. Algunos cálculos básicos.

Los números imaginarios aparecen si queremos calcular la raíz cuadrada de un número negativo, por ejemplo, $\sqrt{-7}$

```
[2]: sqrt(-7)
```

```
[2]: sqrt(7)*I
```

El programa nos permite desarrollar toda el álgebra en variable compleja. Si queremos sumar $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 3 + 4i$, escribimos:

```
[3]: z1= 1 + 2*I
z2= 3 + 4*I
```

```
[4]: z1+z2
```

```
[4]: 4 + 6*I
```

La multiplicación

```
[5]: z1*z2
```

```
[5]: (1 + 2*I)*(3 + 4*I)
```

```
[6]: (z1*z2).expand()
```

```
[6]: -5 + 10*I
```

Para la división:

```
[7]: z1/z2
```

```
[7]: (1 + 2*I)*(3 - 4*I)
      25
```

```
[8]: z3=(z1/z2).expand()
      z3
```

```
[8]: 11 2i
      25 + 25
```

Probemos algunas funciones sobre los números complejos

```
[9]: re(z3)
```

```
[9]: 11
      25
```

```
[10]: im(z3)
```

```
[10]: 2
      25
```

```
[11]: Abs(z3)
```

```
[11]: sqrt(5)
      5
```

```
[12]: conjugate(z3)
```

```
[12]: 11 2i
      25 - 25
```

```
[13]: arg(z3)
```

```
[13]: atan(2/11)
```

```
[14]: polar_lift(-I)
```

```
[14]: e^{-i\pi/2}
```

```
[15]: z = exp(2*pi/3*I)
```

```
[16]: z.rewrite(cos)
```

```
[16]: -1/2 + sqrt(3)i/2
```

2. Los números complejos tienen una parte real x y una parte puramente imaginaria iy . Las formas euclidiana, polar y trigonométrica de un número complejo z son las siguientes

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

La segunda igualdad se conoce como fórmula de Euler

```
[17]: x, y, r, theta = symbols('x y r theta', real=True)
      z = x + I*y
      z
```

```
[17]: x + iy
```

```
[18]: z = r*exp(I*theta)
      z
```


[18]: $re^{i\theta}$

[19]: `z.rewrite(cos)`

[19]: $r(i \sin(\theta) + \cos(\theta))$

El modulo de z

[20]: `sqrt(z*conjugate(z).factor())`

[20]: $|r|$

3. Para una función, digamos $\tan(x + iy)$, la podemos escribir como exponenciales o funciones senos y cosenos.

[21]: `x, y = symbols('x y')`
`z= tan(x+I*y)`

[22]: `z2= z.rewrite(exp).factor()`
`z2`

[22]:
$$\frac{i(e^ye^{-ix} - e^{-y}e^{ix})}{e^ye^{-ix} + e^{-y}e^{ix}}$$

[23]: `z2.rewrite(cos).factor()`

[23]:
$$\frac{i(-i \sin(x) \cosh(y) + \cos(x) \sinh(y))}{-i \sin(x) \sinh(y) + \cos(x) \cosh(y)}$$

Dado el siguiente número complejo, su modulo será

[24]: `z3 = (3+2*I)`

[25]: `sqrt(conjugate(z3)*z3)`

[25]: $\sqrt{(3-2i)(3+2i)}$

[26]: `round(_,3)`

[26]: 3.606

4. Tomemos dos números complejos, o vectores del plano complejo:

[27]: `a, b, c, d = symbols('a b c d ',real=True)`
`z=a+b*I`
`w=c+d*I`

Revisemos la llamada igualdad del paralelogramo: la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados de un paralelogramo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las dos diagonales de éste. Es decir:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) .$$

Pero sabemos que $|z|^2 = zz^*$, y por lo tanto:

$$(w + z)(w + z)^* + (w - z)(w - z)^* = 2(|z|^2 + |w|^2) .$$

Calculemos el lado izquierdo de la ecuación anterior:

```
[28]: ((w+z)*conjugate(w+z) + (w-z)*conjugate(w-z)).simplify()
```

[28]: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2$

Ahora el lado derecho, es decir, la suma de las longitudes al cuadrado de los cuatro lados:

```
[29]: 2*(sqrt(conjugate(z)*z)**2 + sqrt(conjugate(w)*w)**2).simplify()
```

[29]: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2$

5. Para encontrar las raíces de un número complejo, debemos declarar a la variable como compleja.

```
[30]: z = symbols('z ', complex=True)
```

```
[31]: ec1 = Eq(z**3, 1)
ec1
```

[31]: $z^3 = 1$

```
[32]: solve(ec1, z)
```

[32]: $[1, -1/2 - \sqrt{3}I/2, -1/2 + \sqrt{3}I/2]$

En otro de los ejemplo que discutimos anteriormente teníamos la ecuación:

$$z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0,$$

por lo tanto:

```
[33]: ec2 = Eq(z**6 - z**5 + 4*z**4 - 6*z**3 + 2*z**2 - 8*z + 8, 0)
ec2
```

[33]: $z^6 - z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 2z^2 - 8z + 8 = 0$

```
[34]: factor(ec2)
```

[34]: $(z - 1)(z^2 + 4)(z^3 - 2) = 0$

```
[35]: sol = solve(ec2, z)
sol
```

[35]: $[1, 2^{1/3}, -2I, 2I, -2^{1/3}/2 - 2^{1/3}\sqrt{3}I/2, -2^{1/3}/2 + 2^{1/3}\sqrt{3}I/2]$

```
[36]: solus=[N((simplify(expr)),4) for expr in sol]
solus
```

[36]: $[1.000, 1.260, -2.0I, 2.0I, -0.63 - 1.091I, -0.63 + 1.091I]$

1.6.5 Ejercicios

1. Si los números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se pueden representar como vectores en el plano $\mathbf{z}_1 = x_1\hat{\mathbf{i}} + y_1\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{z}_2 = x_2\hat{\mathbf{i}} + y_2\hat{\mathbf{j}}$, muestre que:

$$z_1^* z_2 = \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 + i\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2).$$

2. Demuestre:

(a). $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha).$

(b). $\sin(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha).$

3. Demuestre:

(a). $\cos^4(\alpha) = \frac{1}{8} (3 + 4\cos(2\alpha) + \cos(4\alpha)).$

(b). $\cos^3(\alpha) + \sin^3(\alpha) = \frac{1}{4} (\cos(3\alpha) + 3\cos(\alpha) - \sin^3(\alpha) + 3\sin(\alpha)).$

4. Demuestre:

$$\left(\frac{ix-1}{ix+1}\right)^{iy} = e^{(-2y \cot^{-1}(x))},$$

donde x, y son números reales y $ix + 1 \neq 0$.

5. Encuentre todas las raíces de las siguientes expresiones:

(a). $\sqrt{2i}$

(b). $\sqrt{1 - \sqrt{3}i}$

(c). $(-1)^{1/3}$

(d). $8^{1/6}$

(e). $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}$

6. Demuestre que:

(a). $\text{Log}(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2}i.$

(b). $\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4}i.$

(c). $\text{Log}(e) = 1 + 2n\pi i.$

(d). $\text{Log}(i) = (2n + \frac{1}{2})\pi i.$

7. Dos funciones complejas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ cumplen con las siguientes ecuaciones:

$$\frac{df_1^*}{dt} = \frac{-i}{f_1 - f_2} \quad \text{y} \quad \frac{df_2^*}{dt} = \frac{-i}{f_2 - f_1}$$

Muestre que las siguientes cantidades son constantes:

(a). $f_1 + f_2$

(b). $|f_1 - f_2|$

(c). $|f_1|^2 + |f_2|^2$

8. Considere la siguiente ecuación:

$$z^7 - 4z^6 + 6z^5 - 6z^4 + 6z^3 - 12z^2 + 8z + 4 = 0.$$

Encuentre sus raíces sabiendo que $z^3 = 2$.

9. Muestre que la expansión binomial puede ser escrita como:

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^n a_m(n) x^m, \quad \text{con} \quad a_m(n) = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Si está convencido de la expansión anterior, considere ahora una parecida: $(1 + e^{i\theta})^n$ y muestre que:

$$\sum_{m=0}^n a_m(n) \cos(n\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right),$$

y

$$\sum_{m=0}^n a_m(n) \operatorname{sen}(n\theta) = 2^n \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\theta}{2}\right).$$

10. Las funciones hiperbólicas se definen como:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

y de manera análoga a las funciones trigonométricas tendremos el resto de funciones:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}; \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}; \quad \operatorname{csech}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}; \quad \operatorname{ctanh}(x) = \frac{1}{\tanh(x)};$$

- (a). Muestre las siguientes equivalencias:

$$\cosh(x) = \cos(ix); \quad i \sinh(x) = \operatorname{sen}(ix); \quad \cos(x) = \cosh(ix); \quad i \operatorname{sen}(x) = \sinh(x).$$

- (b). Muestre las siguientes identidades:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1; \quad \operatorname{sech}^2(x) = 1 - \tanh^2(x); \quad \cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x).$$

- (c). Resuelva las siguientes ecuaciones hiperbólicas:

$$\cosh(x) - 5\sinh(x) - 5 = 0; \quad 2\cosh(4x) - 8\cosh(2x) + 5 = 0; \quad \cosh(x) = \sinh(x) + 2\operatorname{sech}(x).$$

11. Utilizando un programa de manipulación simbólica (ver el Apéndice 6) realice las siguientes tareas.

- (a). Calcule la función $f(z) = e^z$ a partir de su expansión en serie que la define. Calcule también $f(z)$ cuando $z = e^{\frac{in\pi}{6}}$ para $n = 0, 1, 2, \dots, 12$. Para los diferentes valores de n haga una tabla con los valores de: $\theta = \frac{n\pi}{6}$, $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\operatorname{Re}(e^z)$, $\operatorname{Im}(e^z)$, $|z|$ y la fase de e^z .

- (b). Calcule y haga una tabla para los valores

$$(x; y) = (0, 0; 0, 0)(0, 1; 0, 1)(0, 5; 0, 5)(1, 0; 1, 0)$$

de: $\operatorname{Re}(\sinh(z))$, $\operatorname{Im}(\sinh(z))$, $|\sinh(z)|$ y la fase de $\sinh(z)$.

- (c). Calcule y haga una tabla para los valores de

$$(x; y) = (0, 0; 0, 0)(0, 1; 0, 1)(0, 5; 0, 5)(1, 0; 1, 0)$$

de: $\operatorname{Re}(\cosh(z))$, $\operatorname{Im}(\cosh(z))$, $|\cosh(z)|$ y la fase de $\cosh(z)$.

Bibliografía

- [1] Arfken, G.B., Weber, H.J., y Harris, F.E. (2011). *Mathematical methods for physicists*. (Academic press, Nueva York)
- [2] Riley, K. F., Hobson, M.P., y Bence, S.J. (2006). *Mathematical methods for physics and engineering: a comprehensive guide*. (Cambridge University Press, Cambridge).
- [3] Santaló, L.A. (1969) *Vectores y Tensores*. (Editorial Universitaria, Buenos Aires).
- [4] Spiegel, M. (1959) *Vector Analysis* (Schaums Outline Series, McGraw Hill Nueva York).
- [5] Brown, J.W., y Churchill, R.V. (2004) *Complex Variables and Applications* (McGraw Hill, Nueva York).