

Vectores duales y tensores

La ruta de este capítulo

Este capítulo completa el esfuerzo de formalización de conceptos que comenzamos en el capítulo anterior. Iniciamos con el estudio de los funcionales lineales, extendimos el concepto de función al de una aplicación entre elementos de espacios vectoriales, y esta extensión nos llevó a la definición de los espacios vectoriales duales.

Luego incorporamos el concepto de 1-*forma* como el conjunto de funcionales que conforman un espacio vectorial dual. Ahora el producto interno se definirá entre 1-*formas* y vectores. En la sección 3.2 construiremos una nueva clase de objetos matemáticos: los tensores. Estos objetos pueden verse como arreglos multilineales y constituyen una extensión de objetos ya conocidos: los escalares, los vectores y las 1-*formas*. Presentaremos las tres definiciones de un tensor: como un mapa multilineal, como el resultado de un producto tensorial de espacios vectoriales y finalmente como un objeto que satisface ciertas reglas de transformación (un tensor en términos de bases coordenadas).¹

Desarrollaremos el álgebra tensorial y sus leyes de transformación, tanto desde el punto de vista de los vectores abstractos como en bases coordenadas. Ejemplificamos la utilización de este concepto en Física cuando discutimos, en la sección 3.3, el tensor de inercia y el de esfuerzos (*stress*). En la sección 3.4 incursionaremos en los espacios pseudoeuclidianos para mostrar una situación en la cual podemos diferenciar 1-*formas* de vectores, y aprovechamos además para introducir algunas nociones básicas de la teoría especial de la relatividad.

Para finalizar, en la sección 3.5 extenderemos los conceptos de espacios vectoriales y bases discretas a espacios de funciones y bases continuas y en ese contexto discutimos algunos rudimentos de teorías de distribuciones. Como en los capítulos anteriores, los códigos de SymPy están en el siguiente enlace <https://github.com/nunezluis/CodigosLibroMatematicas/tree/main/Capitulo03>.

3.1 Funcionales lineales

En los cursos más elementales de cálculo se estudiaron funciones de una y varias variables reales. Estas funciones pueden considerarse que actúan sobre vectores en \mathbb{R}^3 y podemos extender esta idea para

¹Una referencia muy ilustrativa es Lek-Heng Lim (2021) “Tensors in Computations” Acta Numerica, 30, 555-764. También está disponible en: <https://arxiv.org/abs/2106.08090>.

otras que tengan como argumento vectores de un espacio vectorial abstracto.

Como hemos visto, los espacios vectoriales pueden estar formados por funciones, es decir, por aplicaciones que transforman unas funciones en otras. Comenzaremos con las más sencillas, las lineales, que también son conocidas como *funcionales lineales*.

Definición 3.1 (Funcional lineal)

Un funcional lineal es una aplicación \mathcal{F} que asocia a cada vector $|v\rangle$ de un espacio vectorial V sobre un cuerpo K (generalmente \mathbb{R} o \mathbb{C}) un número en K , es decir:

$$\forall |v\rangle \in V, \quad \mathcal{F}(|v\rangle) \in K.$$

Además, cumple con la propiedad de linealidad:

$$\mathcal{F}(\alpha |v_1\rangle + \beta |v_2\rangle) = \alpha \mathcal{F}(|v_1\rangle) + \beta \mathcal{F}(|v_2\rangle), \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in K.$$

En otras palabras, un funcional lineal (o forma lineal) es un *morfismo*² del espacio lineal V a un espacio K .

Cuando se escoge una base $\{|e_i\rangle\}$ para un espacio vectorial V se puede expresar cualquier vector $|v\rangle \in V$ como una combinación lineal respecto a esa base. Es decir, $|v\rangle = \xi^i |e_i\rangle$ (recordemos el uso de la convención de Einstein para las suma: 1.4.1). Las cantidades $\{\xi^i\}$ son las componentes del vector $|v\rangle$ en esa base. Entonces, lo que se tiene para cada componente es un funcional lineal, como por ejemplo, $\mathcal{F}_{|e_i\rangle} [|v\rangle] = \xi^i$.

Algo parecido ocurre con el producto interno, cuando se define el producto escalar $\langle v_0 | v \rangle$, del vector $|v\rangle$ con un vector fijo $|v_0\rangle$. En ese caso, lo que tenemos es un funcional lineal $\mathcal{F}_{|v_0\rangle} [|v\rangle] = \langle v_0 | v \rangle = \alpha \in K$.

Otro ejemplo sencillo de un funcional lineal es la integral definida que podemos interpretar de la manera siguiente:

$$\mathcal{F}_{f_0(x)} [|f\rangle] = \int_a^b f_0(x) f(x) dx,$$

donde $f(x), f_0(x) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, es decir, pertenece al espacio vectorial de funciones reales y continuas en el intervalo $[a, b]$ y $f_0(x)$ es una función que se toma como fija. Este concepto nos servirá de base para extender, en la sección 3.5.2 la idea de función a distribución

3.1.1 Espacio vectorial dual

El conjunto de funcionales lineales $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \dots, \mathcal{F}_n, \dots\}$ constituye un espacio vectorial, el cual se denomina espacio vectorial dual de V (el espacio original) y se denota como V^* . Aquí, el símbolo $*$ indica el dual y no debe confundirse con el complejo conjugado de V , que denotaremos por V^* .

Es fácil convencerse que los funcionales lineales forman un espacio vectorial ya que, dados $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in V^*$ se tiene:

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) [|v\rangle] &= \mathcal{F}_1 [|v\rangle] + \mathcal{F}_2 [|v\rangle] \\ (\alpha \mathcal{F}) [|v\rangle] &= \alpha \mathcal{F} [|v\rangle] \end{aligned} \right\} \quad \forall |v\rangle \in V.$$

²Entenderemos por morfismo a toda aplicación lineal que asigne a cada vector $|v\rangle$ de un espacio vectorial V un vector $|w\rangle$ de un espacio vectorial W y usualmente se denota por $\mathcal{F} : V \Rightarrow W$.

A este espacio lineal se le llama espacio de formas lineales y, a los funcionales se les denomina 1-formas o covectores. Más aún, si V es de dimensión finita n , entonces $\dim V = \dim V^* = n$.

Como ya lo mencionamos, en aquellos espacios lineales con producto interno definido, el mismo producto interno constituye una expresión natural de un funcional. Así tendremos que:

$$\mathcal{F}_a [|v\rangle] \equiv \langle a|v\rangle \quad \forall \quad |v\rangle \in V \quad \wedge \quad \forall \quad \langle a| \in V^*.$$

Es claro comprobar que el producto interno garantiza que los $\{\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b, \dots\}$ forman un espacio vectorial:

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{F}_a + \mathcal{F}_b) [|v\rangle] &= \mathcal{F}_a [|v\rangle] + \mathcal{F}_b [|v\rangle] = \langle a|v\rangle + \langle b|v\rangle \\ (\alpha \mathcal{F}_a) [|v\rangle] &= \langle \alpha a|v\rangle = \alpha^* \langle a|v\rangle = \alpha^* \mathcal{F}_a [|v\rangle] \end{aligned} \right\} \quad \forall \quad |v\rangle \in V.$$

Esta última propiedad se conoce como antilinealidad.

Se establece entonces una correspondencia 1 a 1 entre *kets*, $|v\rangle$ y *bras*, $\langle v|$, entre vectores y funcionales lineales (o 1-formas o vectores duales) ³:

$$\lambda_1 |v_1\rangle + \lambda_2 |v_2\rangle \quad \rightleftharpoons \quad \lambda_1^* \langle v_1| + \lambda_2^* \langle v_2|,$$

que ahora la podemos precisar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \langle a|v\rangle &= \langle v|a\rangle^*, \\ \langle a|\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\rangle &= \lambda_1 \langle a|v_1\rangle + \lambda_2 \langle a|v_2\rangle, \\ \langle \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2|v\rangle &= \lambda_1^* \langle a_1|v\rangle + \lambda_2^* \langle a_2|v\rangle. \end{aligned}$$

Más aún, dada una base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots |e_n\rangle\}$ para V siempre es posible asociar una base para V^* de tal manera que:

$$|v\rangle = \xi^i |e_i\rangle \quad \rightleftharpoons \quad \langle v| = \xi_i^* \langle e_i|, \quad \text{con } \xi^i = \langle e^i|v\rangle \wedge \xi_i^* = \langle v|e_i\rangle, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Este tipo de base dual la llamaremos recíproca y la discutiremos mas adelante en la sección 3.1.2.

Se puede ver también que si $|v\rangle = \xi^i |e_i\rangle$, entonces

$$\mathcal{F} [|v\rangle] = \mathcal{F} [\xi^i |e_i\rangle] = \xi^i \mathcal{F} [|e_i\rangle] = \xi^i \omega_i, \quad \text{con } \mathcal{F} [|e_i\rangle] \equiv \omega_i.$$

Nótese que estamos utilizando la notación de Einstein en la que índices repetidos indican suma. También que las bases del espacio dual de formas diferenciales $\{\langle e^k|\}$ llevan los índices arriba, los llamaremos índices contravariantes, mientras que los índices abajo serán covariantes. Por lo tanto, las componentes de las formas diferenciales en una base dada, llevan índices abajo $\langle a| = a_i \langle e^i|$ mientras que las componentes de los vectores los llevan arriba $|v\rangle = \xi^j |e_j\rangle$.

Observe también que dada una base ortonormal en el espacio directo $\{|\hat{e}_i\rangle\}$ existe una única base canónica en el dual definida como:

$$\langle \hat{e}^i|\hat{e}_j\rangle = \mathcal{F}^i [| \hat{e}_j\rangle] = \delta_j^i.$$

Esta 1-forma o vector dual, al actuar sobre un vector arbitrario resulta en:

$$\mathcal{F}^i [|v\rangle] = \mathcal{F}^i [\xi^j |\hat{e}_j\rangle] = \xi^j \mathcal{F}^i [| \hat{e}_j\rangle] = \xi^j \delta_j^i = \xi^i,$$

su componente contravariante. El conjunto de 1-formas $\{\mathcal{F}^i\}$ será linealmente independiente.

Si $|v\rangle = \xi^i |\hat{e}_i\rangle$ es un vector arbitrario en el espacio directo y $\langle a| = a_i \langle \hat{e}^i|$ un vector en el espacio

³Puede consultar una visión distinta para definir kets en Gurevich, Y., y Blass, A. (2024). "What are kets?". arXiv preprint arXiv:2405.10055.

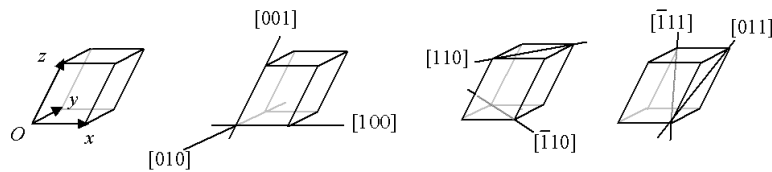


Figura 3.1: Bases directas y recíprocas. Note como los covectores representan planos perpendiculares a dos vectores de la base directa. Figura tomada de <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=457850> CC BY-SA 3.0. Los cristalógrafos lograron ejemplificar las bases duales y luego la aplicación de la difracción de rayos X a la cristalografía potenció utilidad de este concepto.

dual, entonces:

$$\langle a|v \rangle = \langle a_i \langle \hat{e}^i | \mid |\xi^i \langle \hat{e}_i \rangle \rangle = a_i^* \xi^j \langle \hat{e}^i | \hat{e}_j \rangle = a_i^* \xi^j \delta_j^i = a_i^* \xi^i,$$

y para bases arbitrarias, oblicuas (no ortogonales), $\{|w_i\rangle\}$ de V y $\{\langle w^i|\}$ de V^* se tiene:

$$\langle a|v \rangle = \langle w^i | w_j \rangle a_i^* \xi^j.$$

Es claro que $\langle w^i | w_j \rangle$ son las proyecciones de cada uno de los vectores base en las distintas direcciones.

3.1.2 Espacios duales, bases duales y recíprocas

Un ejemplo que ilustra la construcción de las bases duales son las llamadas bases recíprocas que mencionamos anteriormente en los ejercicios de aplicaciones del álgebra vectorial de la sección 1.3.3, en la página 34. Ese ejemplo ilustra la pregunta de siempre: si los vectores se representan geoméricamente como un segmento orientado, con módulo, dirección y sentido ¿cómo representamos geoméricamente una forma lineal o covector? Las formas diferenciales representan vectores perpendiculares a planos formados por dos vectores de la base directa. Los cristalógrafos lograron ejemplificar las bases duales y luego la aplicación de la difracción de rayos X a la cristalografía potenció la utilidad de este concepto.

Consideremos un espacio vectorial V , su dual V^* y una definición de producto interno $\langle a|b \rangle = \langle b|a \rangle^*$. Para la construcción de las bases en los espacios duales, distinguiremos dos conceptos

- **Base duales:** Procedemos mediante la traducción directa de *kets* por *bras*, conjugando las componentes. Entonces dado un vector genérico, $|v\rangle = \zeta^i |w_i\rangle \Leftrightarrow \langle v| = \zeta_i^* \langle w^i|$. En este caso las bases $\{|w_i\rangle\}$ y $\{\langle w^i|\}$ no son, necesariamente, ortogonales y el producto interno queda expresado como

$$\langle a|b \rangle = \langle b|a \rangle^* = b^j (a^*)_i \langle w^i | w_j \rangle \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

- **Bases recíprocas.** Por construcción asociamos las bases $\{|w_i\rangle\}$ y $\{\langle w^i|\}$ de V , su dual V^* , garantizando que $\langle e^i | e_j \rangle = \delta_j^i$. En este caso, para un vector genérico tendremos $|v\rangle = \xi^i |e_i\rangle \Leftrightarrow \langle v| = \xi_i^* \langle e^i|$ y se cumple que $\xi^i = \langle e^i | v \rangle$ y $\xi_i^* = \langle v | e_i \rangle$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Por su parte el producto interno queda como

$$\langle a|b \rangle = \langle b|a \rangle = b_i a^j \langle \hat{e}^i | \hat{e}_j \rangle = b_i a^j \delta_j^i = a^i b_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

$$|v\rangle = \xi^i |e_i\rangle \Leftrightarrow \langle v| = \xi_i^* \langle e^i|, \quad \text{con } \xi^i = \langle e^i | v \rangle \wedge \xi_i^* = \langle v | e_i \rangle, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

En los siguientes ejemplos, recordando a los cristalógrafos, construimos bases duales a partir de una base dada.

Ejemplo 3.1 Consideremos el problema de expandir un vector $|a\rangle$ con respecto a una base oblicua (no es ortogonal), $\{|w_i\rangle\}$, de tal forma que, $|a\rangle = a^i |w_i\rangle$. Por simplicidad, tomemos el caso \mathbb{R}^3 , de manera que

$\mathbf{a} = a^i \mathbf{w}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Al proyectar el vector \mathbf{a} sobre los ejes de algún sistema de coordenadas, es posible resolver el sistema de tres ecuaciones que resulta para las incógnitas a^i . Las bases de vectores $\{\mathbf{w}_i\}$ y de formas o covectores $\{\mathbf{w}^i\}$ serán duales, y por construcción satisfacen $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}^j = \delta_i^j$. Es decir, cada uno de los vectores bases duales es perpendicular a los otros dos de la base dual: \mathbf{w}^1 será perpendicular a \mathbf{w}_2 y \mathbf{w}_3 : $\mathbf{w}^1 = \alpha(\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3)$.

Como $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}^1 = 1$, entonces:

$$\alpha \mathbf{w}_1 \cdot (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\mathbf{w}_1 \cdot (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3)} \Rightarrow \mathbf{w}^1 = \frac{\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3}{\mathbf{w}_1 \cdot (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3)},$$

y en general, es fácil ver que:

$$\mathbf{w}^i = \frac{\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k}{\mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k)}, \quad (3.1)$$

donde i, j, k son permutaciones cíclicas de 1, 2, 3.

La definición (3.1) nos permite construir la base de *1-formas* o covectores, a partir de su ortogonalidad con los vectores de la base directa. Notemos también que $V = \mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k)$ es el volumen del paralelepípedo que soportan los vectores $\{\mathbf{w}_i\}$ y que además se puede obtener una expresión análoga para los $\{\mathbf{w}^i\}$ en término de los $\{\mathbf{w}^i\}$.

Al ser $\{\mathbf{w}_i\}$ y $\{\mathbf{w}^i\}$ duales, $\mathbf{a} = a^j \mathbf{w}_j \Rightarrow \mathbf{w}^i \cdot \mathbf{a} = \mathbf{w}^i \cdot (a^j \mathbf{w}_j) = a^j (\mathbf{w}^i \cdot \mathbf{w}_j) = a^j \delta_j^i = a^i$, con $i = 1, 2, 3$ y equivalentemente, el covector de \mathbf{a} : $\bar{\mathbf{a}} = \bar{a}_j \mathbf{w}^j \Rightarrow \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{w}_i = (\bar{a}_j \mathbf{w}^j) \cdot \mathbf{w}_i = \bar{a}_j (\mathbf{w}^j \cdot \mathbf{w}_i) = \bar{a}_j \delta_i^j = \bar{a}_i$, con $i = 1, 2, 3$. Hemos querido enfatizar el carácter dual del covector $\bar{\mathbf{a}}$ al vector \mathbf{a} y obviamente $\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$.

De la misma ecuación (3.1) se puede ver que la representación gráfica de una forma será una superficie orientada. La figura 3.1 muestra como, a partir de una base directa de vectores oblicuos se construyen planos perpendiculares a esos vectores y la orientación (dirección y sentido) representan las direcciones de los vectores duales. En cristalografía esa base dual se le representa como los índices de Miller. Claramente si las base directa es ortonormal su dual también lo será y, más importante aún, ambas bases coinciden $\mathbf{e}^i \equiv \mathbf{e}_i$, y si la base original o directa es dextrógira su dual también lo será.

Ejemplo 3.2 Sean los vectores: $\mathbf{u}_1 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{u}_2 = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, y $\mathbf{u}_3 = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$. Revisaremos si estos vectores son mutuamente ortogonales. Encontraremos la base recíproca \mathbf{u}^i , el tensor métrico en ambas bases y para el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ encontraremos sus componentes covariantes.

Para saber si son ortogonales simplemente calculamos el producto escalar entre ellos:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 9, \quad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 6 \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = 7,$$

por lo tanto no son ortogonales y, adicionalmente, sabemos que:

$$\mathbf{u}^i = \frac{\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_i \cdot (\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k)}.$$

Procederemos a calcular primero el denominador:

$$V = \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) \Rightarrow (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}) \cdot \left([\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}] \times [\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}] \right) = 6.$$

En general:

$$\mathbf{u}^i = \frac{\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k}{V} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}^1 = \frac{\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3}{V} = \frac{17}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} - \frac{5}{6}\hat{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{u}^2 = \frac{\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1}{V} = -\frac{5}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{u}^3 = \frac{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2}{V} = -\frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{6}\hat{\mathbf{k}}. \end{cases}$$

Notemos que:

$$\tilde{V} = \mathbf{u}^1 \cdot (\mathbf{u}^2 \times \mathbf{u}^3) \Rightarrow \left(\frac{17}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} - \frac{5}{6}\hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(\left[-\frac{5}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{k}} \right] \times \left[-\frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{6}\hat{\mathbf{k}} \right] \right) = \frac{1}{6}.$$

3.1.3 Vectores, formas, componentes y leyes de transformación

Tal y como hemos mencionado anteriormente (tempranamente en la sección 1.4.3 y luego en la sección 2.3.4), un vector $|a\rangle \in V$ puede expresarse en una base ortonormal $\{|\hat{e}_j\rangle\}$ como: $a^j|\hat{e}_j\rangle$ donde las a^j son las componentes *contravariantes* del vector en esa base. En general, como es muy largo decir “componentes del vector contravariante” uno se refiere (y nos referiremos de ahora en adelante) al conjunto $\{a^j\}$ como un *vector contravariante* obviando la precisión de *componente*, pero realmente las a^j **son** las componentes del vector.

Adicionalmente, en esta etapa pensaremos a las bases como distintos observadores o sistemas de referencias. Con ello tendremos (algo que ya sabíamos) que un vector se puede expresar en distintas bases y tendrá distintas componentes referidas a esa base

$$|a\rangle = a^j|\hat{e}_j\rangle = a^{j'}|\hat{e}_{j'}\rangle. \quad (3.2)$$

Así, una misma cantidad física vectorial se verá distinta (tendrá distintas componentes) desde diferentes sistemas de coordenadas. Las distintas “visiones” están conectadas mediante una transformación del sistema de referencia como veremos más adelante. Con lo cual avanzamos otra vez en la interpretación de este tipo de objetos: una cantidad física escalar se verá igual (será invariante) desde distintos sistemas de referencia.

Sabemos que unas y otras componentes se relacionan y por (3.2) tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \langle \hat{e}^i | a \rangle &= a^j \langle \hat{e}^i | \hat{e}_j \rangle = a^j \delta_j^i = a^{j'} \langle \hat{e}^i | \hat{e}_{j'} \rangle \\ \langle \hat{e}^{i'} | a \rangle &= a^{j'} \langle \hat{e}^{i'} | \hat{e}_{j'} \rangle = a^{j'} \delta_{j'}^{i'} = a^j \langle \hat{e}^{i'} | \hat{e}_j \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a^i = A_{j'}^i a^{j'} \\ a^{i'} = A_j^{i'} a^j, \end{cases}$$

donde claramente:

$$\langle \hat{e}^i | \hat{e}_{j'} \rangle = A_{j'}^i, \quad \langle \hat{e}^{i'} | \hat{e}_j \rangle = A_j^{i'} \quad \text{y} \quad A_{k'}^i A_j^{k'} = \delta_j^i \iff A_{j'}^i = \left(A_j^{i'} \right)^{-1}.$$

Diremos entonces que aquellos objetos cuyas componentes transforman como: $a^i = A_{j'}^i a^{j'}$ o, equivalentemente como: $a^{i'} = A_j^{i'} a^j$ serán vectores, o en un lenguaje un poco más antiguo, vectores contravariantes.

Tradicionalmente, e inspirados en la ley de transformación, la representación matricial de las componentes contravariantes de un vector, $\langle \hat{e}^i | a \rangle = a^i$, para una base determinada $\{|\hat{e}_j\rangle\}$ se representan

como una columna

$$|a\rangle \Rightarrow a^i = \langle \hat{e}^i | a \rangle \iff \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix},$$

con: $i = 1, 2, 3, \dots, n$. De la misma manera, en el espacio dual, V^* , las formas diferenciales se podrán expresar en término de una base de ese espacio vectorial como

$$\langle b | = b_i \langle \hat{e}^i | = b_{i'} \langle \hat{e}^{i'} |.$$

Las $\{b_i\}$ serán las componentes de las formas diferenciales o las componentes *covariantes* de un vector $|b\rangle$, o –dicho rápidamente– un *vector covariante* o *covector* o *vector dual*. Al igual que en el caso de las componentes contravariantes las componentes covariantes transforman de un sistema de referencia a otro mediante la siguiente ley de transformación:

$$\left. \begin{aligned} \langle b | \hat{e}_j \rangle &= b_i \langle \hat{e}^i | \hat{e}_j \rangle = b_i \delta_j^i = b_{i'} \langle \hat{e}^{i'} | \hat{e}_j \rangle \\ \langle b | \hat{e}_{j'} \rangle &= b_{i'} \langle \hat{e}^{i'} | \hat{e}_{j'} \rangle = b_{i'} \delta_{j'}^{i'} = b_i \langle \hat{e}^i | \hat{e}_{j'} \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b_j = b_{i'} A_j^{i'} \\ b_{j'} = b_i A_{j'}^i. \end{cases}$$

Otra vez, objetos cuyas componentes transformen como $b_j = b_{i'} A_j^{i'}$ los denominaremos formas diferenciales o *vectores covariantes* o *covectores* y serán representados como matrices en un arreglo tipo fila:

$$\langle b | \Rightarrow b_i = \langle b | \hat{e}_i \rangle \iff \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

con: $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Quizá hasta este punto la diferencia de formas y vectores, de componentes covariantes y contravariantes, así como sus esquemas de transformación es todavía confusa. No disponemos de ejemplos contundentes que ilustren esa diferencia. Estos serán evidentes cuando nos toque discutir las características de los espacios pseudoeuclidianos en la sección 3.4.

A continuación algunos ejemplos en los cuales construimos bases duales a partir de bases vectoriales. En el ejemplo 3.5 será clara la diferencia entre *1-formas* y vectores para vectores complejos.

Ejemplo 3.3 Consideremos $V = \mathbb{R}^3$ como el espacio vectorial conformado por todos los vectores columna

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix},$$

el cual al representarse en su base canónica $\{|\hat{i}_i\rangle\}$ resulta en:

$$|v\rangle = \xi^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \xi^1 |\hat{i}_1\rangle + \xi^2 |\hat{i}_2\rangle + \xi^3 |\hat{i}_3\rangle = \xi^i |\hat{i}_i\rangle.$$

Sea un funcional lineal $\mathcal{F} \in V^*$, de manera que los vectores duales $\mathcal{F}[\circ] \equiv \langle F | \leftrightarrow (w_1, w_2, w_3)$, puedan ser representados por “vectores” filas.

Notemos que la base de funcionales lineales $\zeta^i[\circ] \equiv \langle \hat{i}^i |$, la definimos como:

$$\zeta^i [|\hat{i}_j\rangle] = \langle \hat{i}^i | \hat{i}_j \rangle = \delta_j^i \Rightarrow \langle \hat{i}^1 | \hat{i}_1 \rangle = 1, \langle \hat{i}^1 | \hat{i}_2 \rangle = 0, \langle \hat{i}^1 | \hat{i}_3 \rangle = 0, \langle \hat{i}^2 | \hat{i}_1 \rangle = 0, \langle \hat{i}^2 | \hat{i}_2 \rangle = 1, \dots$$

En este caso $\zeta^i = \langle \hat{i}_i |$, entonces: $\zeta^1 = (1, 0, 0)$, $\zeta^2 = (0, 1, 0)$, $\zeta^3 = (0, 0, 1)$ y además,

$$\zeta^1 [|v\rangle] = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \xi^1, \quad \zeta^2 [|v\rangle] = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \xi^2, \quad \zeta^3 [|v\rangle] = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \xi^3.$$

Ejemplo 3.4 Encontremos la base dual para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$, con base ortogonal:

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, |e_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Todo vector de ese espacio queda representado en esa base por:

$$|v\rangle = v^i |e_i\rangle = v^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + v^2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + v^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 + 2v^2 \\ v^1 - v^2 - v^3 \\ -v^1 + v^2 - v^3 \end{pmatrix}.$$

Sea un funcional lineal $\mathcal{F} \in V^*$ que representa vectores duales $\mathcal{F}[\phi] \equiv \langle F | \leftrightarrow (w_1, w_2, w_3)$ y la base en el dual: $\langle \hat{e}^i | = (a_i, b_i, c_i)$ que supondremos satisface la condición $\langle \hat{e}^i | \hat{e}_j \rangle = \delta_j^i$.

Podemos hacer los siguientes cálculos con los vectores previamente normalizados

$$\langle \hat{e}^1 | \hat{e}_1 \rangle = (a_1, b_1, c_1) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (a_1 + b_1 - c_1) = 1,$$

$$\langle \hat{e}^1 | \hat{e}_2 \rangle = (a_1, b_1, c_1) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2a_1 - b_1 + c_1) = 0,$$

$$\langle \hat{e}^1 | \hat{e}_3 \rangle = (a_1, b_1, c_1) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-b_1 - c_1) = 0.$$

Si resolvemos este sistema de tres ecuaciones resulta: $\left\{ a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$.

Repetimos los cálculos para el segundo vector:

$$\langle \hat{e}^2 | \hat{e}_1 \rangle = (a_2, b_2, c_2) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (a_2 + b_2 - c_2) = 0,$$

$$\langle \hat{e}^2 | \hat{e}_2 \rangle = (a_2, b_2, c_2) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2a_2 - b_2 + c_2) = 1,$$

$$\langle \hat{e}^2 | \hat{e}_3 \rangle = (a_2, b_2, c_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-b_2 - c_2) = 0.$$

Ahora la solución que resulta es: $\left\{ a_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}, b_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}, c_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \right\}$.

Para finalizar:

$$\begin{aligned}\langle \hat{e}^3 | \hat{e}_1 \rangle &= (a_3, b_3, c_3) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (a_3 + b_3 - c_3) = 0, \\ \langle \hat{e}^3 | \hat{e}_2 \rangle &= (a_3, b_3, c_3) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2a_3 - b_3 + c_3) = 0, \\ \langle \hat{e}^3 | \hat{e}_3 \rangle &= (a_3, b_3, c_3) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-b_3 - c_3) = 1.\end{aligned}$$

Con: $\left\{ a_3 = 0, b_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, c_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$.

Por lo tanto, la base recíproca es la siguiente:

$$\langle \hat{e}^1 | = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \langle \hat{e}^2 | = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \quad \langle \hat{e}^3 | = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

de manera que:

$$\langle F | = w_1 \langle \hat{e}^1 | + w_2 \langle \hat{e}^2 | + w_3 \langle \hat{e}^3 |.$$

Ejemplo 3.5 Consideremos un espacio vectorial complejo $V = \mathbb{C}^3$, vale decir un espacio en el cual los vectores tengan componentes complejas y puedan ser representados por un vector columna de la forma

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} x^1 + iy^1 \\ x^2 + iy^2 \\ x^3 + iy^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r_1 e^{i\theta_1} \\ r_2 e^{i\theta_2} \\ r_3 e^{i\theta_3} \end{pmatrix}.$$

Claramente, dependiendo de la representación del número complejo tendremos bases diferentes. La primera la hemos denominado representación vectorial, mientras que la segunda la conocemos como representación polar.

Si utilizamos la representación vectorial pudiéramos tener una posible base de la forma:

$$|w_1\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |w_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |w_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

Dejamos al lector comprobar que ésta es una base para este espacio vectorial complejo y que cualquier vector complejo puede ser expresado como combinación lineal de esta base. Esto es, cualquier número complejo $|z\rangle$ podrá ser expresado como: $|z\rangle = z^i |w_i\rangle$.

Para calcular la base recíproca necesitaremos la definición de producto interno. Una posible definición es la que adelantamos en el la sección 1.6.3 en la página 73: $\langle a | b \rangle = (a_i)^* b^i$ y si utilizamos esta definición la base dual será:

$$\langle w_1 | = (-i, 0, 0), \quad \langle w_2 | = (0, -i, 0) \text{ y } \langle w_3 | = (0, 0, -i).$$

Si ahora consideramos un espacio vectorial complejo $V = \mathbb{C}^2$

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 + i\tilde{y}^1 \\ \tilde{x}^2 + i\tilde{y}^2 \end{pmatrix} \quad \text{la base sería} \quad |\tilde{w}_1\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\tilde{w}_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

Para una definición distinta de producto interno $\langle \tilde{a} | \tilde{b} \rangle = (a_1)^* b^1 + 2(a_2)^* b^2$ la base recíproca será:

$$\langle \tilde{w}_1 | = (-i, 0) \text{ y } \langle \tilde{w}_2 | = (0, -i/2).$$



Practicando con SymPy

1. Tenemos para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$, la base ortogonal:

$$|e_1\rangle = (1, 1, -1), |e_2\rangle = (2, -1, 1), |e_3\rangle = (0, -1, -1).$$

Con $\mathcal{F} \in V^*$ donde $\mathcal{F}[o] \equiv \langle F | \leftrightarrow (w_1, w_2, w_3)$ y $\langle \hat{e}^i | = (a_i, b_i, c_i)$, con $\langle \hat{e}^i | \hat{e}^j \rangle = \delta_j^i$.

Comencemos introduciendo los vectores en las filas de matriz, pero los vectores ya normalizados.

```
[2]: E = Matrix([[1/sqrt(3), 1/sqrt(3), -1/sqrt(3)], [2/sqrt(6), -1/sqrt(6), 1/
↪ sqrt(6)], [0, -1/sqrt(2), -1/sqrt(2)]])
E
```

[2]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

```
[3]: a1, b1, c1 = symbols('a1 b1 c1')
t1= Matrix([[a1], [b1], [c1]])
```

De manera que podemos construir una nueva matriz pero donde cada fila contenga cada una de las ecuaciones que queremos resolver

```
[4]: M1=E*t1
ec1=Eq(M1[0],1)
ec2=Eq(M1[1],0)
ec3=Eq(M1[2],0)
```

Resolvemos este sistema de ecuaciones:

```
[5]: sol1=list(linsolve([ec1,ec2,ec3],[a1,b1,c1]))
sol1
```

```
[5]: [(sqrt(3)/3, sqrt(3)/3, -sqrt(3)/3)]
```

Debemos repetir los pasos anteriores dos veces más.

```
[6]: a2, b2, c2 = symbols('a2 b2 c2')
t2= Matrix([[a2], [b2], [c2]])
M2=E*t2
ec4=Eq(M2[0],0)
ec5=Eq(M2[1],1)
ec6=Eq(M2[2],0)
sol2=list(linsolve([ec4,ec5,ec6],[a2,b2,c2]))
```

```
[7]: a3, b3, c3 = symbols('a3 b3 c3')
t3= Matrix([[a3], [b3], [c3]])
```

```

M3=E*t3
ec7=Eq(M3[0],0)
ec8=Eq(M3[1],0)
ec9=Eq(M3[2],1)
sol3=list(linsolve([ec7,ec8,ec9],[a3,b3,c3]))

```

```

[8]: d1 = Matrix(list(sol1)[0])
      d2 = Matrix(list(sol2)[0])
      d3 = Matrix(list(sol3)[0])

```

Podemos ver que son ortogonales

```

[9]: d1.dot(d2), d1.dot(d3), d3.dot(d2)

```

```

[9]: (0, 0, 0)

```

y unitarios

```

[10]: d1.dot(d1), d2.dot(d2), d3.dot(d3)

```

```

[10]: (1, 1, 1)

```

También podemos reducir todo lo anterior a un programa

```

[11]: # Se define una matriz E que representa la base ortonormal
      E = Matrix([[1/sqrt(3), 1/sqrt(3), -1/sqrt(3)],
                  [2/sqrt(6), -1/sqrt(6), 1/sqrt(6)],
                  [0, -1/sqrt(2), -1/sqrt(2)]])
      # Definimos las variables simbólicas
      a, b, c = symbols('a b c')
      # Inicializamos una lista para almacenar las soluciones de la base dual
      dual_basis = []
      # Iteramos sobre cada columna de E para calcular las soluciones
      for i in range(E.shape[1]):
          # Definir las variables simbólicas para la nueva columna
          t = Matrix([a, b, c])
          # Calculamos el producto matriz-vector para obtener la nueva columna
          M = E * t
          # Se definen las ecuaciones para igualar cada componente
          equations = [Eq(M[j], 1 if j == i else 0) for j in range(E.shape[0])]
          # Resolvemos el sistema de ecuaciones
          sol = linsolve(equations, (a, b, c))
          # Agregamos la solución a la lista de la base dual
          dual_basis.append(Matrix(list(sol)[0]))
      # Productos internos de los vectores de la base dual con ellos mismos
      dot_products = [(dual_basis[i].dot(dual_basis[j])) for i in
                      ↪range(len(dual_basis)) for j in range(i, len(dual_basis))]

```

```
# Se muestran los resultados
print("Base Dual:")
for i, vector in enumerate(dual_basis, 1):
    print(f"d{i} =", vector)
print("\nProductos internos de los vectores de la base dual con ellos_
↪mismos:")
for i, product in enumerate(dot_products):
    print(f"d{i+1}.dot(d{i+1}) =", product)
```

Base Dual:

```
d1 = Matrix([[sqrt(3)/3], [sqrt(3)/3], [-sqrt(3)/3]])
d2 = Matrix([[sqrt(6)/3], [-sqrt(6)/6], [sqrt(6)/6]])
d3 = Matrix([[0], [-sqrt(2)/2], [-sqrt(2)/2]])
```

Productos internos de los vectores de la base dual con ellos mismos:

```
d1.dot(d1) = 1
d2.dot(d2) = 0
d3.dot(d3) = 0
d4.dot(d4) = 1
d5.dot(d5) = 0
d6.dot(d6) = 1
```

2. En este ejercicio veremos la manera de construir la matriz de transformación entre bases y el cálculo de las bases recíprocas.

Si tenemos las siguientes bases:

$$|w_1\rangle = |j\rangle + |k\rangle, \quad |w_2\rangle = |i\rangle + |k\rangle, \quad |w_3\rangle = |i\rangle + |j\rangle.$$

Para calcular la matriz de transformación:

$$|w_i\rangle = A_i^{j'} |i_{j'}\rangle,$$

podemos trabajar de la manera siguiente. Primero introducimos los vectores como una matriz y luego calculamos la transpuesta:

```
[12]: # Los vectores w1, w2, w3
w1 = [0, 1, 1]
w2 = [1, 0, 1]
w3 = [1, 1, 0]
# Creamos la matriz Aij
Aij = Matrix([w1, w2, w3]).transpose()
Aij
```

[12]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación inversa $|i_{i'}\rangle = A_{i'}^j |w_j\rangle$, es simplemente la matriz inversa:

```
[13]: Aij.inv()
```

[13]:
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Es claro que $A_{k'}^j A_i^{k'} = \delta_i^j$

```
[14]: Aij*Aij.inv()
```

[14]:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Con el uso de la librería “sympy.vector” podemos hacer algunos cálculos sencillos con vectores, como por ejemplo, el cálculo de las bases recíprocas.

Dado el siguiente conjunto de vectores:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2 = -\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{e}_3 = 2\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

Calcularemos la base recíproca a través de:

$$\mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)},$$

```
[15]: from sympy.vector import *
R = CoordSys3D('R')
```

Primero que todo, debemos introducir los vectores

```
[16]: b1 = R.i + R.j + 2*R.k
b2 = -R.i - R.j - R.k
b3 = 2*R.i - 2*R.j + R.k
b1,b2,b3
```

```
[16]: (R.i + R.j + 2*R.k, (-1)*R.i + (-1)*R.j + (-1)*R.k, 2*R.i + (-2)*R.j + R.k)
↪ k)
```

Podemos comprobar si la base original \mathbf{b}_i es ortogonal calculando sus productos escalares:

```
[17]: b1.dot(b2), b1.dot(b3), b2.dot(b3)
```

```
[17]: (-4, 2, -1)
```

Por lo tanto, no son ortogonales. Ahora, los vectores recíprocos \mathbf{e}^i se calculan de la manera siguiente:

```
[18]: e1 = b2.cross(b3)/(b1.cross(b2).dot(b3))
e2 = b3.cross(b1)/(b1.cross(b2).dot(b3))
e3 = b1.cross(b2)/(b1.cross(b2).dot(b3))
e1,e2,e3
```

[18]: $((-3/4)*R.i + (-1/4)*R.j + R.k,$
 $(-5/4)*R.i + (-3/4)*R.j + R.k,$
 $1/4*R.i + (-1/4)*R.j)$

La base recíproca es entonces:

$$\mathbf{e}^1 = -\frac{3}{4}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{4}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{e}^2 = -\frac{5}{4}\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{4}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{1}{4}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{4}\hat{\mathbf{j}}$$

Que tampoco es ortogonal:

[19]: `e1.dot(e2), e1.dot(e3), e2.dot(e3)`

[19]: $(17/8, -1/8, -1/8)$

Como veremos más adelante, podemos construir un objeto con dos índices para la base original:

$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ de la manera siguiente:

[20]: `gb = Matrix([[b1.dot(b1), b1.dot(b2), b1.dot(b3)], [b2.dot(b1), b2.`
`↪dot(b2), b2.dot(b3)], [b3.dot(b1), b3.dot(b2), b3.dot(b3)])]`
`gb`

[20]:
$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

Para la base recíproca: $g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$

[21]: `ge = Matrix([[e1.dot(e1), e1.dot(e2), e1.dot(e3)], [e2.dot(e1), e2.`
`↪dot(e2), e2.dot(e3)], [e3.dot(e1), e3.dot(e2), e3.dot(e3)])]`
`ge`

[21]:
$$\begin{bmatrix} \frac{13}{8} & \frac{17}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{17}{8} & \frac{25}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

De manera que: $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = g_j^i = \delta_j^i$:

[22]: `gb*ge`

[22]:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.4 Ejercicios

1. Encuentre las bases duales para los siguientes espacios vectoriales:

(a). \mathbb{R}^2 , donde: $|e_1\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $|e_2\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b). \mathbb{R}^3 , donde: $|e_1\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $|e_2\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $|e_3\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Si V es el espacio vectorial de todos los polinomios reales de grado $n \leq 1$, y definimos:

$$\zeta^1 [|p\rangle] = \int_0^1 p(x)dx \quad \wedge \quad \zeta^2 [|p\rangle] = \int_0^2 p(x)dx,$$

donde $\{\zeta^1, \zeta^2\} \in V^*$. Encuentre una base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\} \in V$ que resulte ortogonal a la dual $\{\zeta^1, \zeta^2\}$.

3. Si V es el espacio vectorial de todos los polinomios reales de grado $n \leq 2$, y si además definimos

$$\zeta^1 [|p\rangle] = \int_0^1 p(x)dx = 1, \quad \zeta^2 [|p\rangle] = \left. \frac{dp(x)}{dx} \right|_{x=2} \quad \wedge \quad \zeta^3 [|p\rangle] = p(1),$$

donde $\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\} \in V^*$. Encuentre una base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\} \in V$ que resulte ortogonal a la dual $\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$.

4. Sean $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle \in V$ y supongamos que $\mathcal{F} [|v_1\rangle] = 0$ implica que $\mathcal{F} [|v_2\rangle] = 0 \quad \forall \mathcal{F} \in V^*$.

Muestre que $|v_2\rangle = \alpha |v_1\rangle$ con $\alpha \in K$.

5. Sean \mathcal{F}_1 y $\mathcal{F}_2 \in V^*$ y supongamos que $\mathcal{F}_1 [|v\rangle] = 0$ implica que $\mathcal{F}_2 [|v\rangle] = 0 \quad \forall |v\rangle \in V$.

Muestre que $\mathcal{F}_2 = \alpha \mathcal{F}_1$ con $\alpha \in K$.

6. En el caso tridimensional tenemos que, si $\{\mathbf{e}_i\}$ define un sistema de coordenadas (dextrógiro) y no necesariamente ortogonal, entonces demuestre que:

(a).

$$\mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ y sus permutaciones cíclicas},$$

(b). Si los volúmenes: $V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$ y $\tilde{V} = \mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)$, entonces $V\tilde{V} = 1$.

(c). ¿Qué vector satisface $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i = 1$? Demuestre que \mathbf{a} es único.

(d). Encuentre el producto vectorial de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} que están representados en un sistema de coordenadas oblicuo: Dada la base: $\mathbf{w}_1 = 4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{w}_2 = 3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{w}_3 = 2\hat{\mathbf{k}}$. Entonces encuentre:

I. Las bases recíprocas $\{\mathbf{e}^i\}$.

II. Las componentes covariantes y contravariantes del vector $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$.

7. Considere una vez más el espacio vectorial de matrices hermíticas 2×2 y la definición de producto interno $\langle a | b \rangle \Rightarrow \text{Tr}(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{B})$ que introdujimos en los ejercicios de la sección 2.2.4. Hemos comprobado que la matriz unitaria y las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ –presentadas también en los ejercicios de la sección 2.2.4– forman base para ese espacio (ver ejercicios sección 2.3.6). Encuentre entonces la base dual asociada a las base de Pauli y, adicionalmente, dado un vector genérico en este espacio vectorial encuentre su 1-forma asociada.

3.2 Tensores y producto tensorial

Las funciones más simples que se pueden definir sobre un espacio vectorial son los funcionales lineales y éstos nos permiten extendernos al concepto de tensor. Para llegar a la noción de tensores ampliaremos la idea de funcionales lineales, que actúan sobre un único vector, al de funcionales bilineales (o formas bilineales) que tienen dos vectores en su argumento. Como veremos más adelante, este tipo de funcionales nos revelarán un contenido geométrico de gran riqueza. Es conocido que presentar el concepto de tensores para estudiantes de pregrado o, estudiantes graduados de ingeniería tiene algunas

barreras⁴ y, la principal quizá sea la notación. En este capítulo presentaremos la notación que mas nos sedujo desde las épocas de estudiantes. Es tomada de dos libros clásicos⁵, que han marcado una huella en nuestra generación y creemos que permite su aplicación a variados campos.

3.2.1 Tensores, una definición funcional

Definiremos como un tensor a un funcional lineal (bilineal en este caso) que asocia un elemento del campo \mathbf{K} , complejo o real, a un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}$, a una forma $\langle u| \in \mathbf{V}^*$, o ambas, y cumple con la linealidad. Esto es:

$$\forall |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^* \rightarrow \mathcal{T}[\langle u|; |v\rangle] \in \mathbb{C}.$$

De esta manera:

1. $\mathcal{T}[\langle u|; \alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle] \equiv \alpha\mathcal{T}[\langle u|; |v_1\rangle] + \beta\mathcal{T}[\langle u|; |v_2\rangle] \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V} \wedge \langle u| \in \mathbf{V}^*.$
2. $\mathcal{T}[\mu\langle u_1| + \nu\langle u_2|; |v\rangle] \equiv \mu^*\mathcal{T}[\langle u_1|; |v\rangle] + \nu^*\mathcal{T}[\langle u_2|; |v\rangle] \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V} \wedge \langle u_1|, \langle u_2| \in \mathbf{V}^*.$

En pocas palabras: un tensor es un funcional generalizado cuyos argumentos son vectores y/o formas⁶, lo que significa que $\mathcal{T}[\circ; \bullet]$ es una cantidad con dos “puestos” y una vez “cubiertos” se convierte en un número complejo o real.

Las combinaciones son muy variadas:

- Un tensor, con un argumento correspondiente a un vector y un argumento correspondiente a una forma, lo podremos representar de la siguiente manera:

$$\mathcal{T} \left[\begin{array}{c} |v\rangle \quad \langle u| \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \circ; \bullet \end{array} \right] \in \mathbb{C} \Rightarrow \text{tensor de tipo } \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right).$$

- Un tensor con dos argumentos correspondientes a vectores y uno a una forma sería:

$$\mathcal{T}[\circ, \circ; \bullet] \Rightarrow \mathcal{T} \left[\begin{array}{ccc} |v_1\rangle & |v_2\rangle & \langle u| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ & \circ & \bullet \end{array} \right] \in \mathbb{C} \Rightarrow \text{tensor de tipo } \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right),$$

- Un tensor con dos argumentos correspondientes a formas y uno a un vector:

$$\mathcal{T}[\circ; \bullet, \bullet] \Rightarrow \mathcal{T} \left[\begin{array}{ccc} |v\rangle & \langle u_1| & \langle u_2| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ; \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right] \in \mathbb{C} \Rightarrow \text{tensor de tipo } \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right).$$

- En general:

$$\mathcal{T} \left[\begin{array}{ccccccc} |v_1\rangle & |v_2\rangle & & |v_n\rangle & \langle u_1| & \langle u_2| & \langle u_m| \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{array} \right] \in \mathbb{C} \Rightarrow \text{tensor de tipo } \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array} \right).$$

En esta notación el punto y coma (;) separa las “entradas” formas de las “entradas” vectores. Es importante recalcar que **el orden si importa**, no sólo para las cantidades separadas por el punto y coma, sino el orden de los “puestos” vectores y “puestos” formas separados por coma, y repercutirá en las propiedades de los tensores. Por ejemplo: **si el orden de las “entradas” vectores no importa**, podremos

⁴Tal y como lo plantea Battaglia, Franco, y Thomas F. George (2013) “Tensors: A guide for undergraduate students” American Journal of Physics, 81, 498-51.

⁵Misner, C. W., K. S. Thorne, y J. A. Wheeler (2017) “Gravitation”, (Princeton University Press, Princeton) y Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. y Laloë, F., (1977) “Quantum Mechanics” vol 1 (Hermann, Paris).

⁶Una presentación interesante y detallada de la utilización del concepto de tensor para el manejo de datos en computación la pueden encontrar en: Lu, H., Plataniotis, K. N., y Venetsanopoulos, A. N. (2011). “A survey of multilinear subspace learning for tensor data. Pattern Recognition”, 44 (7), 1540-1551.

permutarlas sin alterar al tensor, **tendremos entonces tensores simétricos respecto a esos “puestos” o “entradas”**; del mismo modo, serán tensores antisimétricos aquellos en los cuales **el orden si importa** y al permutar esos “puestos” o “entradas” hay un cambio de signo en el tensor. Todos estos casos serán tratados con detalle más adelante, pero vale la pena recalcar que en general, para un tensor genérico el orden de la “entradas” o “puestos” si importa pero no necesariamente se comporta como los casos reseñados anteriormente.

Notemos que en el caso general un tensor es básicamente un aplicación multilinear \mathcal{T} sobre $V^* \times V$:

$$\mathcal{T} : V^{*m} \times V^n = \underbrace{V^* \times V^* \cdots V^* \times V^*}_m \times \underbrace{V \times V \cdots V \times V}_n \Rightarrow \mathbb{C},$$

con n el orden covariante y m el orden contravariante. Hay que hacer notar que por simplicidad hemos construido el espacio tensorial a partir de una solo espacio vectorial V y su conjugado V^* , pero muy bien cada espacio vectorial puede ser diferente.

Por lo tanto, **un tensor** $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ es un funcional multilinear que asocia m 1-formas y n vectores con \mathbb{C} . Un ejemplo sencillo de un funcional bilinear sobre un espacio vectorial V^n con una base $|e_i\rangle$ es:

$$\mathcal{T}[|v_1\rangle, |v_2\rangle] = a_{ij} \xi^i \zeta^j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

donde:

$$|v_1\rangle = \xi^i |e_i\rangle \wedge |v_2\rangle = \zeta^i |e_i\rangle,$$

son vectores arbitrarios $\in V^n$ y los a_{ij} son números. Notemos que:

$$\mathcal{T}[|v_1\rangle, |v_2\rangle] = \mathcal{T}[\xi^i |e_i\rangle, \zeta^j |e_j\rangle] = \xi^i \zeta^j \mathcal{T}[|e_i\rangle, |e_j\rangle] = \xi^i \zeta^j a_{ij}.$$

Diremos que ésta será la representación del funcional bilinear para V^n .

Obviamente las formas pueden ser representadas por tensores ya que son funcionales lineales de vectores. Para finalizar, notemos lo siguiente:

- **Un vector** es un tensor del tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{T} \begin{bmatrix} \langle u| \\ \bullet \end{bmatrix} \in \mathbb{C}.$$

Los vectores constituyen un caso especial de tensores.

- **Una forma** es un tensor del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{T} \begin{bmatrix} |v\rangle \\ \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{C},$$

porque son funcionales lineales para las formas diferenciales.

- **Un escalar** es un tensor del tipo:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}.$$

3.2.2 Producto tensorial

Los tensores (*simples*) pueden provenir del *producto tensorial* o *producto directo* de espacios vectoriales. Esto es, consideraremos E_1 y E_2 dos espacios vectoriales con dimensiones n_1 y n_2 , respectivamente y vectores genéricos, $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ pertenecientes a espacios vectoriales: $|\varphi(1)\rangle \in E_1$ y $|\chi(2)\rangle \in E_2$.

Definiremos el *producto tensorial* o *producto directo* de espacios vectoriales, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$, si a cada par de vectores $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ le asociamos un tensor tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, si

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle \equiv |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \Leftrightarrow \mathcal{T} \begin{bmatrix} \langle \psi(1) | \downarrow & \langle v(2) | \downarrow \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix} = \langle \psi(1) | \varphi(1) \rangle \langle v(2) | \chi(2) \rangle \in \mathbb{C},$$

y además se cumplen las siguientes propiedades:

1. La suma entre tensores de \mathbf{E} viene definida como:

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle = |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle.$$

2. El producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales λ y μ :

$$[\lambda \varphi(1)] \otimes |\chi(2)\rangle = [\lambda \varphi(1)] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] = \lambda |\varphi(1)\chi(2)\rangle,$$

$$|\varphi(1)\rangle \otimes [\mu \chi(2)] = |\varphi(1)\rangle \otimes [\mu \chi(2)] = \mu [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] = \mu |\varphi(1)\chi(2)\rangle.$$

3. El producto tensorial es distributivo respecto a la suma:

$$|\varphi(1)\rangle \otimes [|\chi_1(2)\rangle + |\chi_2(2)\rangle] = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_1(2)\rangle + |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_2(2)\rangle$$

$$[|\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle.$$

Nótese que las etiquetas (1) y (2) denotan la pertenencia al espacio respectivo.

3.2.3 Espacios tensoriales

Es fácil convencerse de que los tensores $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ forman un espacio vectorial (que llamaremos espacio tensorial) y la demostración se basa en comprobar los axiomas o propiedades de los espacios vectoriales tal y como lo describimos en la sección 2.1.3:

1. La operación suma \boxplus es cerrada en \mathbf{V} : $\forall |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |v_k\rangle = |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle \in \mathbf{V}$.

Esto se traduce en demostrar que sumados dos tensores $|\varphi(1)\chi(2)\rangle$ y $|\zeta(1)\xi(2)\rangle \in \mathbf{E}$ el tensor suma también pertenece a \mathbf{E} , con α y β pertenecientes al campo del espacio vectorial

$$\alpha |\varphi(1)\chi(2)\rangle + \beta |\zeta(1)\xi(2)\rangle = |\alpha \varphi(1) + \beta \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle,$$

y esto se cumple siempre ya que, el producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales, y por ser \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 espacios vectoriales se cumple:

$$\left. \begin{aligned} |\alpha \varphi(1) + \beta \zeta(1)\rangle &= \alpha |\varphi(1)\rangle + \beta |\zeta(1)\rangle \in \mathbf{E}_1 \\ |\chi(2) + \xi(2)\rangle &= |\chi(2)\rangle + |\xi(2)\rangle \in \mathbf{E}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\alpha \varphi(1) + \beta \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \in \mathbf{E}.$$

2. La operación suma \boxplus es conmutativa y asociativa.

Conmutativa: $\forall |v_i\rangle, |v_j\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |v_i\rangle$.

Esta primera es clara de la definición de suma:

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle = |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle$$

$$|\zeta(1)\xi(2)\rangle + |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\zeta(1) + \varphi(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle,$$

por ser \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 dos espacios vectoriales.

Asociativa: $\forall |v_i\rangle, |v_j\rangle, |v_k\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow (|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) \boxplus |v_k\rangle = |v_j\rangle \boxplus (|v_i\rangle \boxplus |v_k\rangle)$

Una vez más, esto se traduce en:

$$(|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle) + |\kappa(1)\kappa(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle + (|\zeta(1)\xi(2)\rangle + |\kappa(1)\kappa(2)\rangle),$$

con lo cual, por la definición de suma, la expresión anterior queda como:

$$(|\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle) + |\kappa(1)\kappa(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle + (|\zeta(1) + \kappa(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \kappa(2)\rangle) \\ |(\varphi(1) + \zeta(1)) + \kappa(1)\rangle \otimes |(\xi(2) + \chi(2)) + \kappa(2)\rangle = |\varphi(1) + (\zeta(1) + \kappa(1))\rangle \otimes |\xi(2) + (\chi(2) + \kappa(2))\rangle.$$

3. Existe un único elemento neutro: $\exists |0\rangle / |0\rangle \boxplus |v_j\rangle = |v_j\rangle \boxplus |0\rangle = |v_j\rangle \forall |v_j\rangle \in V$.

Es decir:

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |0(1)0(2)\rangle = |\varphi(1) + 0(1)\rangle \otimes |\chi(2) + 0(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\chi(2)\rangle.$$

4. Existe un elemento simétrico para cada elemento de V : $\forall |v_j\rangle \in V \exists |-v_j\rangle / |v_j\rangle \boxplus |-v_j\rangle = |0\rangle$.

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle - |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1) - \varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2) - \chi(2)\rangle = |0(1)\rangle \otimes |0(2)\rangle = |0(1)0(2)\rangle.$$

5. $\alpha(\beta|v_i\rangle) = (\alpha\beta)|v_i\rangle$:

$$\alpha(\beta|\varphi(1)\chi(2)\rangle) = \alpha(|\beta\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle) = |\alpha\beta\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle = (\alpha\beta)|\chi(2)\rangle \otimes |\varphi(1)\rangle = (\alpha\beta)|\varphi(1)\chi(2)\rangle.$$

6. $(\alpha + \beta)|v_i\rangle = \alpha|v_i\rangle + \beta|v_i\rangle$:

$$(\alpha + \beta)|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |(\alpha + \beta)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\alpha\chi(2) + \beta\chi(2)\rangle \\ = |\varphi(1)\rangle \otimes [(\alpha|\chi(2)\rangle + \beta|\chi(2)\rangle)] \\ = \alpha|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + \beta|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle.$$

7. $\alpha(|v_i\rangle \boxplus |v_j\rangle) = \alpha|v_i\rangle \boxplus \alpha|v_j\rangle$:

$$\alpha(|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle) = \alpha(|\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle) = |\alpha(\varphi(1) + \zeta(1))\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle \\ = |\alpha\varphi(1) + \alpha\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2) + \chi(2)\rangle = |\alpha\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\alpha\zeta(1)\xi(2)\rangle \\ = \alpha|\varphi(1)\chi(2)\rangle + \alpha|\zeta(1)\xi(2)\rangle.$$

Equivalentemente, podemos construir el producto tensorial entre espacios de formas diferenciales. Sean E_1^* y E_2^* dos espacios vectoriales duales a E_1 y E_2 , de dimensiones n_1 y n_2 , respectivamente. En estos espacios, consideremos las formas diferenciales genéricas $\langle\zeta(1)| \in E_1^*$ y $\langle\xi(2)| \in E_2^*$.

Definimos el producto tensorial de los espacios vectoriales duales como $E^* = E_1^* \otimes E_2^*$. A cada par de formas diferenciales $\langle\zeta(1)| \in E_1^*$ y $\langle\xi(2)| \in E_2^*$ le asociamos un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, es decir:

$$\langle\zeta(1)\xi(2)| = \langle\zeta(1)| \otimes \langle\xi(2)|.$$

Es importante aclarar que el número $\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)|\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\tilde{\varphi}(1)|\varphi(1)\rangle \cdot \langle\tilde{\chi}(2)|\chi(2)\rangle$, NO representa el producto interno entre los tensores, $\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)|$ y $|\varphi(1)\chi(2)\rangle$. Tal y como hemos descrito arriba,

$$\mathcal{T}[|\varphi(1)\rangle, |\chi(2)\rangle] \equiv \mathcal{T}^*[\langle\tilde{\varphi}(1)|, \langle\tilde{\chi}(2)|] = \langle\tilde{\varphi}(1)|\varphi(1)\rangle \cdot \langle\tilde{\chi}(2)|\chi(2)\rangle,$$

representa las evaluaciones de los funcionales $\mathcal{T}[\circ]$ y $\mathcal{T}^*[\bullet]$, respectivamente.

3.2.4 Bases para un producto tensorial

Si $\{|u_i(1)\rangle\}$ y $\{|v_j(2)\rangle\}$ son, respectivamente, bases discretas para E_1 y E_2 entonces podremos construir el tensor:

$$|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \in E,$$

el cual funcionará como una base para E .

Podremos construir un tensor genérico de E :

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \varphi^i \chi^j |u_i(1)v_j(2)\rangle,$$

donde φ^i y χ^j son las componentes de $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ en sus respectivas bases. En otras palabras, las componentes de un tensor en \mathbf{E} corresponden a la multiplicación de las componentes de los vectores en \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 . Recuerde que estamos utilizando la convención de Einstein de suma tácita en índices covariantes y contravariantes, en la cual $c^k|v_k\rangle \equiv \sum_{k=1}^n c^k|v_k\rangle$.

Es importante señalar que si bien un tensor genérico $|\Psi\rangle \in \mathbf{E}$ siempre se puede expandir en la base $|u_i(1)v_j(2)\rangle$ no es cierto que todo tensor de \mathbf{E} provenga del producto tensorial de \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 . Es decir, \mathbf{E} tiene más tensores de los que provienen el producto tensorial. Esta afirmación puede intuirse del hecho de que si $|\Psi\rangle \in \mathbf{E}$ entonces:

$$|\Psi\rangle = c^{ij}|u_i(1)v_j(2)\rangle,$$

por ser $\{|u_i(1)v_j(2)\rangle\}$ base para \mathbf{E} . Es claro que dados dos números α_1 y α_2 habrá c^{ij} que no provienen de la multiplicación de $\alpha_1\alpha_2$.

El conjunto de todas funciones bilineales $\mathcal{T}[\langle u|; |v\rangle]$ forman un espacio vectorial sobre el espacio directo \mathbf{E} . Este espacio vectorial de funciones tendrá una base dada por:

$$|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle.$$

3.2.5 Tensores, sus componentes y sus contracciones

Hemos mencionado anteriormente, ubicándonos en \mathbb{R}^3 , que un escalar es una cantidad que se puede especificar, independientemente del sistema de coordenadas, por un sólo número. Los vectores geométricos que dibujábamos con flechas los sustituimos ahora por tres números respecto a una base seleccionada, es decir, a través de sus tres componentes. Los escalares y los vectores son casos particulares de objetos más generales que denominamos tensores, tensores de orden o rango k y cuya especificación en cualquier sistema de coordenadas requerirá de 3^k números, llamados componentes del tensor. Esto significa que un escalar es un tensor de orden 0 ($3^0 = 1$ componente) y un vector un tensor de orden 1 ($3^1 = 3$ componentes). Si el espacio vectorial es de dimensión n , entonces un tensor de orden k tendrá n^k componentes⁷.

Los tensores son mucho más que simples números respecto a un sistema de coordenadas y la clave radica en la “ley de transformación” de sus componentes, es decir, en la relación que existe entre las componentes de un tensor en un sistema de coordenadas y las componentes del mismo tensor en otro sistema de coordenadas diferente. Lo que hay detrás de todo esto es el hecho que las leyes matemáticas que describen los fenómenos físicos deben ser “invariantes” bajo transformaciones de coordenadas, como por ejemplo: traslaciones (el espacio es homogéneo) y rotaciones (el espacio es isótropo).

3.2.5.1 Componentes de un tensor

Consideremos un espacio tensorial $\mathbf{V} = \mathbf{E}_1^* \otimes \mathbf{E}_2^* \otimes \mathbf{E}_3^* \otimes \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$. Denominaremos componentes de un tensor, aquellos números que surgen al evaluar los funcionales (formas diferenciales o vectores) con la bases de los espacios que lo constituyen. Así, si $\{|u_i(1)\rangle\}$ y $\{|x_i(1)\rangle\}$ son base para \mathbf{E}_1 , mientras $\{|v_j(2)\rangle\}$ y $\{|y_j(2)\rangle\}$ lo son para \mathbf{E}_2 y finalmente $\{|t_k(3)\rangle\}$ para \mathbf{E}_3 , entonces las componentes de un

⁷Existen varias presentaciones operativas de estos conceptos para Física e Ingeniería, pueden consultar:

- Battaglia, F., y George, T. F. (2013). “Tensors: A guide for undergraduate students”, American Journal of Physics, 81(7), 498-511.
- Comon, P. (2014). “Tensors: a brief introduction”, IEEE Signal Processing Magazine, 31(3), 44-53.

tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ serán:

$$S^{mn}_{ijk} = \mathcal{S} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \langle x^m(1) | & \langle y^n(2) | & |u_i(1)\rangle & |v_j(2)\rangle & |w_k(3)\rangle \\ \downarrow & \downarrow & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & & & \end{array} \right] \Rightarrow \mathcal{S} = S^{mn}_{ijk} [x_m(1), y_n(2); u^i(1), v^j(2), t^k(3)] ,$$

donde hemos denotado

$$[x_m(1), y_n(2); u^i(1), v^j(2), t^k(3)] \equiv |x_m(1)\rangle \otimes |y_n(2)\rangle \otimes \langle u^i(1)| \otimes \langle v^j(2)| \otimes \langle t^k(3)| .$$

como el tensor base.

Podemos comentar varias cosas:

- Por simplicidad hemos considerado un espacio tensorial de la forma $V = E_1^* \otimes E_2^* \otimes E_3^* \otimes E_1 \otimes E_2$, pero claramente pudimos haberlo construido mas general, $W = E_1^* \otimes E_2^* \otimes E_3^* \otimes E_4 \otimes E_5$. Donde todos los espacios euclidianos E_i son distintos $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
- En este ejemplo, en la base del espacio tensorial $[x_m(1), y_n(2); u^i(1), v^j(2), t^k(3)]$, hemos colocado primero su “parte” vectorial y luego su “parte” forma \circ vectores duales. Los índices de las componentes heredan esta convención S^{mn}_{ijk} : primero irán los contravariantes y luego los covariantes. Pero lo importante es que los índices etiqueten el espacio al cual corresponde.
- Nuestra notación será la siguiente.

- Para un producto tensorial de dos vectores:

$$|\psi(1), \phi(2)\rangle \equiv |\psi(1)\rangle \otimes |\phi(2)\rangle = C^{ij} |u_i(1), v_j(2)\rangle = \tilde{C}^{ij} |x_i(1), v_j(2)\rangle = \bar{C}^{ij} |u_i(1), y_j(2)\rangle .$$

Es decir un tensor perteneciente a un espacio tensorial conformado por dos espacios vectoriales y que se pueden expresar en varias de las bases de esos espacios.

- Para un producto tensorial de dos vectores duales:

$$\langle \psi(1), \phi(2) | \equiv \langle \psi(1) | \otimes \langle \phi(2) | = K_{ij} \langle u^i(1), v^j(2) | = \tilde{K}_{ij} \langle x^i(1), v^j(2) | = \bar{K}_{ij} \langle u^i(1), y^j(2) | .$$

Igual que para el caso anterior pero a partir de I -formas.

- Para un producto tensorial de formas y vectores: $[\phi(2); \psi(1)] \equiv |\phi(2)\rangle \otimes \langle \psi(1)| = M_i^j [v_j(2); u^i(1)] = \tilde{M}_i^j [v_j(2); x^i(1)] = \bar{M}_i^j [y_j(2); u^i(1)]$. Un tensor mixto

Es importante convenir el orden en el cual se presenten los espacios con los cuales se realiza el producto tensorial

Es de hacer notar que la selección de las bases no es arbitraria sino que deben corresponderse, entre el espacio directo, E , y su dual E^* , i.e.

$$\{|u_i(1)\rangle, |v_j(2)\rangle, |w_k(3)\rangle\} \otimes \{\langle x^m(1)|, \langle y^n(2)|\} \Leftrightarrow \{|x_p(1)\rangle, |y_q(2)\rangle\} \otimes \{\langle u^a(1)|, \langle v^b(2)|, \langle w^c(2)|\} .$$

Si consideramos un tensor como resultado de un producto tensorial y consideramos las bases: $\{|u_i(1)\rangle, \langle x^m(1)|\}$, sus componentes se pueden expresar $\{\varphi^m(1)\chi_i(1)\}$, vale decir:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow |\varphi(1)\rangle \otimes \langle \Delta(1)| \Rightarrow \langle x^m(1) | \varphi(1) \rangle \otimes \langle \Delta(1) | u_i(1) \rangle \Rightarrow \{\varphi^m(1)\chi_i(1)\} .$$

3.2.5.2 Combinaciones lineales de tensores

Es claro que podremos sumar (componentes) de tensores como lo hemos hecho con la suma de (componentes) de vectores:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \hat{\mathbf{i}} + (a_y + b_y) \hat{\mathbf{j}} + (a_z + b_z) \hat{\mathbf{k}} = (a^1 + b^1) \hat{\mathbf{i}} + (a^2 + b^2) \hat{\mathbf{j}} + (a^3 + b^3) \hat{\mathbf{k}} = (a^i + b^i) |i\rangle ,$$

esto es: $R_{kl}^{ij} = \alpha Q_{kl}^{ij} + \beta P_{kl}^{ij}$.

3.2.5.3 Producto tensorial de tensores

Podemos extender aún más la idea del producto directo y extenderla para tensores. Así, para dos tensores, uno tipo:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \mathcal{T} \begin{bmatrix} \langle \zeta(1)| & \langle \xi(2)| \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix},$$

y el otro tipo:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\mu(1)\kappa(2)\Theta(1)\rangle = |\mu(1)\rangle \otimes |\kappa(2)\rangle \otimes \langle \Theta(1)| = \mathcal{P} \begin{bmatrix} |u_i(1)\rangle & \langle \varepsilon(1)| & \langle \phi(2)| \\ \circ & \bullet & \bullet \end{bmatrix},$$

el producto directo es:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\chi(2)\rangle \otimes |\mu(1)\kappa(2)\Theta(1)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \otimes |\mu(1)\rangle \otimes |\kappa(2)\rangle \otimes \langle \Theta(1)| \\ &= \mathcal{T} \begin{bmatrix} \langle \zeta(1)| & \langle \xi(2)| \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix} \otimes \mathcal{P} \begin{bmatrix} |u_i(1)\rangle & \langle \varepsilon(1)| & \langle \phi(2)| \\ \circ & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{R} \begin{bmatrix} |u_i(1)\rangle & \langle \varepsilon(1)| & \langle \phi(2)| & \langle \zeta(1)| & \langle \xi(2)| \\ \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En componentes será como se muestra a continuación: $R_k^{ij\ lm} = T^{ij} P_k^{lm}$. Un vez más, note que los puestos de los índices en las componentes de los tensores heredan las posiciones de los vectores y formas que construyeron el espacio tensorial a partir del producto directo o tensorial.

3.2.5.4 Contracción de un tensor

Denominaremos una contracción cuando sumamos las componentes covariantes y contravariantes, esto es, si tenemos $\varphi^i(1)\chi_i(1)$, entonces se genera un escalar independiente de la base. La situación será más evidente cuando definamos métricas y contracción de tensores. Por analogía y considerando un caso más general, dada las componentes S_{ijk}^{mn} correspondiente a un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ podremos construir

un nuevo tensor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a partir de una contracción. Las componentes de este nuevo tensor serán: $S_{ijk}^{mn} \Rightarrow S_{ijk}^{in} \equiv S_{jk}^n$.

Del mismo modo, dadas las componentes de dos tensores, P^{lm} y Q_{zk}^{ij} generarán componentes de nuevos tensores $R_k^{lij} = P^{lm} Q_{mk}^{ij}$. Así:

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &\Rightarrow P^{lm} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} &\Rightarrow Q_{zk}^{ij} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_k^{lij} = P^{lm} Q_{mk}^{ij}.$$

Es claro que si dos tensores derivan de productos tensoriales y si $\{|u_i(1)\rangle\}$, $\{|u^m(1)\rangle\}$ y $\{|v_i(2)\rangle\}$ son

bases ortonormales para E_1 , E_1^* y E_2 , entonces sus productos tensoriales podrán ser expresados como:

$$|\gamma(1); \delta(2)\rangle = \underbrace{(\gamma^i(1)\delta^j(2))}_{P^{ij}} |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle, \quad [\alpha(1); \beta(1)] = \underbrace{(\alpha^l(1)\beta_m(1))}_{Q_m^l} |u_l(1)\rangle \otimes \langle u^m(1)|,$$

$$\begin{aligned} \text{entonces: } & ((\alpha^l(1)\beta_m(1)) |u_l(1)\rangle \otimes \langle u^m(1)|) ((\gamma^i(1)\delta^j(2)) |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle) = \\ & = \alpha^l(1)\beta_m(1) (\gamma^i(1)\delta^j(2)) \underbrace{\{\langle u^m(1)|u_i(1)\rangle\}}_{\delta_i^m} |v_j(2)\rangle \otimes |u_l(1)\rangle, \\ & = \alpha^l(1)\beta_k(1) (\gamma^k(1)\delta^j(2)) |v_j(2)\rangle \otimes |u_l(1)\rangle, \\ & = P^{ij} Q_i^l |u_l(1); v_j(2)\rangle, \\ & = R^{jl} |u_l(1); v_j(2)\rangle. \end{aligned}$$

Pero más aún, si $|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle \in E$ es base de E entonces se puede demostrar lo anterior sin circunscribirnos a tensores cuyas componentes provengan de multiplicación de las componentes en cada espacio vectorial.

3.2.5.5 Simetrización de tensores

Un tensor y sus componentes será simétrico respecto a dos de sus índices si su permutación no cambia su valor:

$$S_{ij} = S_{ji}, \quad S^{ij} = S^{ji}, \quad S_{ij\dots kl\dots mn} = S_{ij\dots lk\dots mn}, \quad S^{ij\dots kl\dots mn} = S^{ij\dots lk\dots mn},$$

y será antisimétrico si:

$$A_{ij} = -A_{ji}, \quad A^{ij} = -A^{ji}, \quad A_{ij\dots kl\dots mn} = -A_{ij\dots lk\dots mn}, \quad A^{ij\dots kl\dots mn} = -A^{ij\dots lk\dots mn}.$$

Un tensor de rango 2, viene representado por una matriz que tendrá $3^2 = 9$ componentes. Si la matriz es simétrica tendrá como máximo 6 componentes distintas.

$$S_j^i = S_i^j = \begin{pmatrix} S_1^1 & S_2^1 & S_3^1 \\ S_1^2 & S_2^2 & S_3^2 \\ S_1^3 & S_2^3 & S_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1^1 & S_2^1 & S_3^1 \\ S_2^1 & S_2^2 & S_2^3 \\ S_3^1 & S_3^2 & S_3^3 \end{pmatrix}.$$

Mientras que un tensor antisimétrico de segundo orden tendrá, como máximo, tres componentes con valor absoluto distintos de cero,

$$A_j^i = -A_i^j = \begin{pmatrix} 0 & A_2^1 & A_3^1 \\ -A_1^2 & 0 & A_3^2 \\ -A_1^3 & -A_2^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siempre es posible construir tensores simétricos y antisimétricos a partir de un tensor genérico.

Esto es:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) \equiv T_{(ij)} \quad \Longleftrightarrow \quad S_{ij\dots kl\dots mn} = \frac{1}{2}(T_{ij\dots kl\dots mn} + T_{ij\dots lk\dots mn}) = T_{ij\dots (kl)\dots mn}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \equiv T_{[ij]} \quad \Longleftrightarrow \quad A_{ij\dots kl\dots mn} = \frac{1}{2}(T_{ij\dots kl\dots mn} - T_{ij\dots lk\dots mn}) = T_{ij\dots [kl]\dots mn}.$$

Es evidente que las componentes de un tensor genérico, T_{ij} , pueden expresarse como una combinación de su parte simétrica y antisimétrica:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}.$$

Obviamente que algo equivalente se puede realizar para componentes contravariantes de tensores.

Ejemplo 3.6 Producto tensorial, vectores y matrices Para fijar los conceptos que hemos desarrollado en las secciones 3.2.2, y 3.2.5 consideremos dos espacios vectoriales V_1 , V_2 y sus duales V_1^* y V_2^* cuyos vectores y formas pueden ser representados como

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \in V_1, \langle v| = (v_1 \ v_2 \ v_3) \in V_1^* \quad y \quad |u\rangle = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} \in V_2, \langle u| = (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4) \in V_2^*$$

Para ejemplificar las componentes y bases de los espacios tensoriales a partir de los espacios vectoriales y sus duales previamente identificados, podemos entonces definir la siguiente operación, como el producto tensorial:

Para vectores

$$|v(1)\rangle \otimes |u(2)\rangle = |v(1)u(2)\rangle = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 u^1 \\ v^1 u^2 \\ v^1 u^3 \\ v^1 u^4 \\ v^2 u^1 \\ v^2 u^2 \\ v^2 u^3 \\ v^2 u^4 \\ v^3 u^1 \\ v^3 u^2 \\ v^3 u^3 \\ v^3 u^4 \end{pmatrix} \in V_3 = V_1 \otimes V_2.$$

Para formas

$$\langle v(1)| \otimes \langle u(2)| = \langle v(1)u(2)| = (v_1 u_1 \ v_1 u_2 \ v_1 u_3 \ v_1 u_4 \ v_2 u_1 \ v_2 u_2 \ v_2 u_3 \ v_2 u_4 \ v_3 u_1 \ v_3 u_2 \ v_3 u_3 \ v_3 u_4) \in V_3^* = V_1^* \otimes V_2^*.$$

Para productos tensoriales entre formas y vectores:

$$|v(1)\rangle \otimes \langle u(2)| \equiv [v(1)u^*(2)] = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \otimes (u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4) = \begin{pmatrix} v^1 u_1 & v^1 u_2 & v^1 u_3 & v^1 u_4 \\ v^2 u_1 & v^2 u_2 & v^2 u_3 & v^2 u_4 \\ v^3 u_1 & v^3 u_2 & v^3 u_3 & v^3 u_4 \end{pmatrix} \in \tilde{V}_3 = V_1 \otimes V_2^*.$$

y del mismo modo el dual del producto anterior

$$\langle w(1)| \otimes |z(2)\rangle \equiv [w^*(1) z(2)] = (w_1 \ w_2 \ w_3) \otimes \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^1 w_1 & z^1 w_2 & z^1 w_3 \\ z^2 w_1 & z^2 w_2 & z^2 w_3 \\ z^3 w_1 & z^3 w_2 & z^3 w_3 \\ z^4 w_1 & z^4 w_2 & z^4 w_3 \end{pmatrix} \in \tilde{V}_3^* = V_1^* \otimes V_2.$$

Notemos que $|v(1)u(2)\rangle$, $\langle v(1)u(2)|$, $[v(1)u^*(2)]$ y $[v^*(1)u(2)]$ son funcionales bilineales tal y como lo definimos en 3.2.2. Es fácil convencerse que $|v(1)u(2)\rangle$ y $\langle v(1)u(2)|$, como $[v(1)u^*(2)]$ y $[v^*(1)u(2)]$ son tensores duales uno del otro.

Consideremos que si $\{|e_1(1)\rangle, |e_2(1)\rangle, |e_3(1)\rangle\}$ es una base para V_1 con $\{\langle e^1(1)|, \langle e^2(1)|, \langle e^3(1)|\}$ y su dual en V_1^* , entonces, éstas pueden ser definidas como:

$$|e_1(1)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2(1)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_3(1)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mientras que por otro lado

$$\langle e^1(1) | = (100), \langle e^2(1) | = (010), \langle e^3(1) | = (001) .$$

De igual forma las bases para V_2 y V_2^* pueden ser definidas como

$$|e_1(2)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_2(2)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_3(2)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |e_4(2)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y respectivamente:

$$\langle e^1(2) | = (1000), \langle e^2(2) | = (0100), \langle e^3(2) | = (0010), \langle e^4(2) | = (0001) .$$

Entonces con el producto tensorial previamente definido, podemos construir la siguiente base para el espacio tensorial $V_3 = V_1 \otimes V_2^*$:

$$\begin{aligned} [e_1(1); e^1(2)] &= |e_1(1)\rangle \otimes \langle e^1(2)| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [e_1(1); e^2(2)] &= |e_1(1)\rangle \otimes \langle e^2(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [e_1(1); e^3(2)] &= |e_1(1)\rangle \otimes \langle e^3(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [e_1(1); e^4(2)] &= |e_1(1)\rangle \otimes \langle e^4(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [e_2(1); e^1(2)] &= |e_2(1)\rangle \otimes \langle e^1(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [e_2(1); e^2(2)] &= |e_2(1)\rangle \otimes \langle e^2(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [e_2(1); e^3(2)] &= |e_2(1)\rangle \otimes \langle e^3(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [e_2(1); e^4(2)] &= |e_2(1)\rangle \otimes \langle e^4(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [e_3(1); e^1(2)] &= |e_3(1)\rangle \otimes \langle e^1(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [e_3(1); e^2(2)] &= |e_3(1)\rangle \otimes \langle e^2(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ [e_3(1); e^3(2)] &= |e_3(1)\rangle \otimes \langle e^3(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, [e_3(1); e^4(2)] &= |e_3(1)\rangle \otimes \langle e^4(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Invocando la correspondencia entre *kets* y *bras* que expresamos en 3.1.1 construimos la base tensorial dual $[e^i(1); e_j(2)] = \langle e^i(1) | \otimes |e_j(2)\rangle \in V_3^*$ y tendremos

$$[e^1(1); e_1(2)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [e^1(1); e_2(2)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [e^1(1); e_3(2)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
[e^1(1); e_4(2)] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [e^2(1); e_1(2)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [e^2(1); e_2(2)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
[e^2(1); e_3(2)] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [e^2(1); e_4(2)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, [e^3(1); e_1(2)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
[e^3(1); e_2(2)] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [e^3(1); e_3(2)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [e^3(1); e_4(2)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como no tenemos definido un producto interno entre tensores y sus duales no podemos afirmar que esta base sea ortogonal, pero es claro que ambos conjuntos de vectores $\{[e_k(1); e^m(2)]\}$ y sus duales $\{[e^i(1); e_j(2)]\}$ son linealmente independientes en V_3 y V_3^* , respectivamente. Por lo tanto, cualquier tensor, $[v(1); u^*(2)] \in V_3$ se puede expresar como combinación lineal de esta base

$$|v(1)\rangle \otimes \langle u(2)| \equiv [v(1); u^*(2)] = v^i u_j [e_i(1); e^j(2)] \equiv U_j^i [e_i(1); e^j(2)],$$

donde los $U_j^i = v^i u_j$ son las componentes del tensor en esta base.

Equivalentemente, el tensor $[w^*(1); z(2)] \in V_3^*$, también podrá expresarse en la base dual

$$\langle w(1)| \otimes |z(2)\rangle \equiv [w^*(1); z(2)] = [e^i(1); e_j(2)] z^j w_i \equiv [e^i(1); e_j(2)] W_i^j.$$

Otra vez, los $W_i^j = z^j w_i$ son las componentes del tensor $[w^*(1); z(2)]$ en la base $[e^i(1); e_j(2)]$.

◀

3.2.6 Tensor métrico, bases y componentes

Para una base genérica, $\{|u_j\rangle\}$, no necesariamente ortogonal, de un espacio vectorial con producto interno, podemos definir la expresión de un tensor simétrico, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que denominaremos “tensor métrico”, de la siguiente manera:

$$\mathbf{g} \left[\begin{matrix} |u_i\rangle & |u_j\rangle \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ & \circ \end{matrix} \right] = \mathbf{g} [|u_i\rangle, |u_j\rangle] = g_{|u_i\rangle |u_j\rangle} \equiv g_{|u_j\rangle |u_i\rangle}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{g} \left[\begin{matrix} \langle u^i| & \langle u^j| \\ \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \bullet \end{matrix} \right] = \mathbf{g} [\langle u^i|, \langle u^j|] = g^{\langle u^i| \langle u^j|} \equiv g^{\langle u^j| \langle u^i|}, \quad (3.4)$$

con $g^{\langle u^i| \langle u^j|} = (g_{|u_i\rangle |u_j\rangle})^{-1}$.

Nótese que las $g_{|u_i\rangle |u_j\rangle} \equiv g_{|u_j\rangle |u_i\rangle}$ son las componentes del tensor $\mathbf{g} [\circ, \circ]$ una vez que la base $\{|u_j\rangle\}$ ha actuado. Esto hace que podamos definir una forma a partir del tensor métrico como $\mathbf{g} [|u_i\rangle, \circ] = \langle u^i|$ y equivalentemente un vector como $\mathbf{g} [\langle u^j|, \bullet] = |u_j\rangle$.

Ambas asociaciones nos llevan a pensar que el tensor métrico está relacionado a una función del

producto interno, vale decir $\mathbf{g}[\langle u^i |, \langle u^j |] = g^{\langle u^i | \langle u^j |} \equiv g^{\langle u^j | \langle u^i |} = \mathcal{F}[\langle u^i | u_j \rangle]$, que preserve la idea de métrica: $\mathcal{F} \in \mathbb{R}$, que sea simétrico respecto a los índices i, j y que cumpla con la desigualdad triangular. Entonces, la denominación de tensor **métrico**, no es gratuita, \mathbf{g} cumple con todas las propiedades de la métrica definida para un **espacio vectorial euclidiano** expuestas en la sección 2.2.1, vale decir:

1. $\mathbf{g}[\langle u_i |, \langle u_j |] = g_{ij} \equiv g_{ji} \geq 0 \quad \forall \langle u_j |$, y si $\mathbf{g}[\langle u_i |, \langle u_j |] = 0 \Rightarrow i = j$.
2. $\mathbf{g}[\langle u_i |, \langle u_j |] = \mathbf{g}[\langle u_j |, \langle u_i |] \Rightarrow g_{ij} \equiv g_{ji}$.
3. $\mathbf{g}[\langle u_i |, \langle u_j |] \leq \mathbf{g}[\langle u_i |, \langle u_k |] + \mathbf{g}[\langle u_k |, \langle u_j |]$: La desigualdad Triangular.

Si la base genérica es ortonormal, $\{\langle u_i | \} \rightarrow \{\langle \hat{e}_i | \}$, entonces tendremos, de manera natural:

$$\mathbf{g}[\langle \hat{e}_i |, \langle \hat{e}_j |] \equiv g_{ij} \langle \hat{e}^i | \otimes \langle \hat{e}^j | \equiv g_{ji} \langle \hat{e}^j | \otimes \langle \hat{e}^i | \quad \text{y} \quad \mathbf{g}[\langle \hat{e}_i |, \langle \hat{e}_j |] \equiv g^{ij} |\hat{e}_i\rangle \otimes |\hat{e}_j\rangle \equiv g^{ji} |\hat{e}_j\rangle \otimes |\hat{e}_i\rangle, \quad (3.5)$$

claramente sus componentes tensoriales serán simétricas $g_{ij} = g_{ji}$, (igualmente las componentes contravariantes $g^{ij} = g^{ji}$) y

$$(g_{ij} \langle \hat{e}^i | \otimes \langle \hat{e}^j |) (g^{km} |\hat{e}_k\rangle \otimes |\hat{e}_m\rangle) = g_{ij} g^{km} \langle \hat{e}^i | \hat{e}_k \rangle \langle \hat{e}^j | \hat{e}_m \rangle = g_{ij} g^{km} \delta_k^i \delta_m^j = g_{ij} g^{ji} = \delta_i^i = n,$$

ya que $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Por lo tanto, g_{ij} es la matriz inversa de g^{ij} , es decir, hemos definido las componentes covariantes y contravariantes del tensor de modo que cumplan con $g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$.

También es claro que si $|a\rangle = a^k |\hat{e}_k\rangle$, entonces:

$$(g_{ij} \langle \hat{e}^i | \otimes \langle \hat{e}^j |) |a\rangle = a^k (g_{ij} \langle \hat{e}^i | \otimes \langle \hat{e}^j |) |\hat{e}_k\rangle = a^k g_{ij} \langle \hat{e}^i | \hat{e}_k \rangle \langle \hat{e}^j | = a^k g_{ij} \delta_k^i \langle \hat{e}^j | = a^k g_{ik} \langle \hat{e}^j | \equiv a_i \langle \hat{e}^j |,$$

con lo cual $a_i = a^k g_{ik}$. De la misma forma:

$$\langle a | (g^{ij} |\hat{e}_i\rangle \otimes |\hat{e}_j\rangle) = \langle a | (g^{ij} |\hat{e}_i\rangle \otimes |\hat{e}_j\rangle) = g^{ij} \langle a | \hat{e}_i \rangle \otimes |\hat{e}_j\rangle = a_k g^{ij} \langle \hat{e}^k | \hat{e}_i \rangle \otimes |\hat{e}_j\rangle = a_k g^{kj} |\hat{e}_j\rangle \equiv a^j |\hat{e}_j\rangle,$$

otra vez $a^j = a_k g^{kj}$, ahora subimos el índice correspondiente.

De esta manera, el tensor métrico nos permite asociar formas con vectores, componentes covariantes (de las formas) a componentes contravariantes (de los vectores). Dicho rápido y feo, pero de uso muy frecuente: el tensor métrico nos permite “subir y bajar índices”.

Otra forma de verlo es combinando las propiedades del producto directo de tensores y contracción de índices:

$$g^{ij} |\hat{e}_i\rangle \otimes |\hat{e}_j\rangle \otimes P_k^{lmn} |\hat{e}_l\rangle \otimes |\hat{e}_m\rangle \otimes |\hat{e}_n\rangle \otimes \langle \hat{e}^k | \Rightarrow g^{ij} P_k^{lmn} |\hat{e}_j\rangle \otimes P_k^{lmn} |\hat{e}_l\rangle \otimes |\hat{e}_m\rangle \otimes |\hat{e}_n\rangle \otimes \langle \hat{e}^k | \hat{e}_i \rangle$$

$$g^{ij} P_k^{lmn} |\hat{e}_j\rangle \otimes |\hat{e}_l\rangle \otimes |\hat{e}_m\rangle \otimes |\hat{e}_n\rangle \cdot \underbrace{\langle \hat{e}^k | \hat{e}_i \rangle}_{\delta_i^k} = P^{jlmn} |\hat{e}_j\rangle \otimes |\hat{e}_l\rangle \otimes |\hat{e}_m\rangle \otimes |\hat{e}_n\rangle \Rightarrow g^{ij} P_i^{lmn} \equiv P^{jlmn}.$$

Adicionalmente, el tensor métrico permite la contracción de índices. Así, dado un producto tensorial de dos vectores que se pueden expresar en una base ortonormal $\{|\hat{e}_i\rangle\}$:

$$|a, b\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle = a^k b^m |\hat{e}_k\rangle \otimes |\hat{e}_m\rangle$$

\Downarrow

$$(g_{ij} \langle \hat{e}^i | \otimes \langle \hat{e}^j |) (a^k |\hat{e}_k\rangle \otimes b^m |\hat{e}_m\rangle) = a^k b^m g_{ij} \delta_k^i \delta_m^j = a^k b^m g_{km} = a^k b_k = \langle b | a \rangle = \langle a | b \rangle.$$

Es decir, el producto interno de dos vectores involucra, de manera natural, la métrica del espacio,

$$\langle b | a \rangle = \langle a | b \rangle = a^k b_k = a_k b^k = a^k b^m g_{km} = a_k b_m g^{km}.$$

Obviamente la norma de un vector, también incluirá al tensor métrico:

$$\| |a\rangle \|^2 = \langle a | a \rangle = a_i a^i \langle \hat{e}^i | \hat{e}_j \rangle = a_i a^i = a_i a_j g^{ij} = a^i a^j g_{ij}.$$

Si partimos de la definición general de un tensor, cuando es evaluado en dos vectores tendremos

$$\mathbf{g} \left[\begin{smallmatrix} |a\rangle & |b\rangle \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ & \circ \end{smallmatrix} \right] = \mathbf{g} [|a\rangle, |b\rangle] = g_{ij} a^k b^m \langle \hat{e}^i | \hat{e}_k \rangle \langle \hat{e}^j | \hat{e}_m \rangle = a^k b^m g_{ij} \delta_k^i \delta_m^j = a^k b^m g_{km} = a^k b_k = \langle b|a \rangle = \langle a|b \rangle.$$

Consideramos la definición (3.3) para una base genérica, $\{|u_j\rangle\}$, no necesariamente ortogonal, tendremos

$$\mathbf{g} \left[\begin{smallmatrix} |a\rangle & |b\rangle \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ & \circ \end{smallmatrix} \right] = \langle b|a \rangle = \langle a|b \rangle \Rightarrow \mathbf{g} \left[\begin{smallmatrix} |u_i\rangle & |u_j\rangle \\ \downarrow & \downarrow \\ \circ & \circ \end{smallmatrix} \right] = g_{|u_i\rangle|u_j\rangle} \Leftrightarrow \langle u^i | u_i \rangle. \quad (3.6)$$

Estamos asociando la componente del tensor métrico al producto interno de la base de vectores (genérica, no necesariamente ortonormal). Hay que aclarar que utilizamos la palabra asociar para no violentar nuestra notación de base directas y duales. Adicionalmente, debemos garantizar que $g^{\langle u^i | \langle u^j |} = \left(g_{|u_i\rangle|u_j\rangle} \right)^{-1}$. Analizaremos algunos ejemplos concretos en las secciones 3.3 y 3.4.

3.2.7 Métrica, elemento de línea y factores de escala

El caso más emblemático lo constituye la norma de un desplazamiento infinitesimal⁸. Para una base genérica, $\{|u_i\rangle\}$, no necesariamente ortogonal de un espacio vectorial con producto interno, el desplazamiento infinitesimal puede expresarse como:

$$ds^2 \equiv \langle dr | dr \rangle = \left(dx_k \langle u^k | \right) (dx^m | u_m \rangle) = \langle u^k | u_m \rangle dx_k dx^m = dx_m dx^m = g_{km} dx^k dx^m. \quad (3.7)$$

Si las bases de formas y vectores son ortogonales, $\{|e_i\rangle\}$, (cosa más o menos común pero no necesariamente cierta siempre) y como en general $\| |e_i\rangle \| \neq 1$, entonces surgen los llamados factores de escala $h_i = \sqrt{g_{ii}}$:

$$g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}} \Rightarrow (ds)^2 = (h_1 dx^1)^2 + (h_2 dx^2)^2 + (h_3 dx^3)^2, \quad (3.8)$$

donde $h_i = \sqrt{g_{ii}}$, con $i, j = 1, 2, 3$ (aquí no hay suma).

De esta manera, las componentes covariantes y contravariantes estarán relacionadas, a través de los factores de escala como:

$$a_j = g_{jk} a^k \Rightarrow a_i = h_{[i]} a^{[i]}. \quad (\text{Aquí } h_{[i]} a^{[i]} \text{ NO indica suma}).$$

En otras palabras, “subir” y “bajar” índices puede incluir los cambios de escala. Obviamente, si la base $\{|i_i\rangle\}$ es la canónica, es fácil ver que:

$$(ds)^2 \equiv \langle dr | dr \rangle = \delta_m^k dx_k dx^m = dx_m dx^m.$$

es decir: $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$, esto significa que en coordenadas cartesianas, el desplazamiento infinitesimal, es la ya conocida expresión: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

A continuación analizaremos dos ejemplos en los cuales construiremos los tensores métricos a partir de dos bases para \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 3.7 Bases oblicuas, bases recíprocas y tensores métricos.

Consideremos una base genérica oblicua para \mathbb{R}^3 , formada por los vectores:

$$\mathbf{u}_1 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{u}_2 = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}} \text{ y } \mathbf{u}_3 = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}.$$

Revisaremos si estos vectores son mutuamente ortogonales. Encontraremos la base recíproca \mathbf{u}^i , el

⁸Para fijar conceptos, en esta sección hacemos una digresión y esbozamos algunas consecuencias de la métrica, los sistemas de coordenadas y los factores de escala. Estos temas serán tratados con todo detalle en la sección 5.1, cuando consideremos los elementos del análisis vectorial en coordenadas curvilíneas.

tensor métrico en ambas bases y para el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ encontraremos sus componentes covariantes.

Para saber si son ortogonales simplemente calculamos el producto escalar entre ellos:

$$\tilde{\mathbf{u}}^1 \cdot \mathbf{u}_2 = 9, \quad \tilde{\mathbf{u}}^1 \cdot \mathbf{u}_3 = 6 \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{u}}^2 \cdot \mathbf{u}_3 = 7,$$

por lo tanto no son ortogonales y, adicionalmente, sabemos que (ver 3.1)

$$\langle \mathbf{u}^i | = \frac{|\mathbf{u}_j\rangle \times |\mathbf{u}_k\rangle}{|\mathbf{u}_i\rangle \cdot (|\mathbf{u}_j\rangle \times |\mathbf{u}_k\rangle)}.$$

Otra vez, hemos hecho diferencia entre una base dual $\{\tilde{\mathbf{u}}^i\}$ y una base recíproca $\{\mathbf{u}^j\}$. A pesar que hemos exagerado con la notación, esto no es otra cosa que la receta para construir la base recíproca que, en el lenguaje de formas y vectores coincide con una base dual del espacio de 1-formas.

En general la base dual será:

$$\langle \mathbf{u}^i | \Rightarrow \mathbf{u}^i = \frac{\mathbf{u}_j \times \mathbf{u}_k}{V} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}^1 = \frac{\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3}{V} = \frac{17}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} - \frac{5}{6}\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{u}^2 = \frac{\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1}{V} = -\frac{5}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{u}^3 = \frac{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2}{V} = -\frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{6}\hat{\mathbf{k}}, \end{cases}$$

donde $V = \mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3) \Rightarrow (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}) \cdot ((\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}) \times [\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}]) = 6$.

Notemos que el volumen unitario del espacio dual se construye:

$$\tilde{V} = \mathbf{u}^1 \cdot (\mathbf{u}^2 \times \mathbf{u}^3) \Rightarrow \left(\frac{17}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} - \frac{5}{6}\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\left[-\frac{5}{3}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{3}\hat{\mathbf{k}}\right] \times \left[-\frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{6}\hat{\mathbf{k}}\right]\right) = \frac{1}{6}.$$

Construimos entonces el tensor métrico para la base recíproca implementando la ecuación (3.6), y siguiendo lo desarrollando en el ejemplo 3.6. Tendremos entonces

$$g^{ij} = g^{ji} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{u}^1 \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^1 \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^1 \mathbf{u}^3 \\ \mathbf{u}^2 \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^2 \mathbf{u}^3 \\ \mathbf{u}^3 \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^3 \mathbf{u}^2 \\ \mathbf{u}^3 \mathbf{u}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{4} \\ -\frac{16}{3} \\ -\frac{7}{12} \\ -\frac{16}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} \end{pmatrix},$$

mientras que para la base directa:

$$g_{ij} = g_{ji} \Leftrightarrow (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3) = (6, 9, 6, 9, 14, 7, 6, 7, 26).$$

En ambos casos hemos denotado $\mathbf{u}^i \mathbf{u}^j$ como el producto escalar entre los vectores \mathbf{u}^i y \mathbf{u}^j y su equivalente en la base recíproca. También se debe cumplir que $g_{ia} g^{aj} = \delta_i^j$.

Es imperioso señalar que la forma como organizar las componentes como un arreglo de números es una convención. Los vectores se suponen como arreglos columnas, los vectores duales son arreglos filas. La cosas con los arreglos de dos dimensiones son menos intuitivas. Tal y como lo presentamos en el ejemplo 3.6, las componentes contravariantes de tensores T^{ij} , por razones pedagógicas, también las supondremos como arreglos columnas. De este modo seremos consistentes con su herencia de producto tensorial entre dos vectores organizados como arreglos columnas. Igualmente, en ese mismo ejemplo,

ilustramos como las componentes covariantes de los tensores, T_{ij} , se representan como arreglos filas. Finalmente, las componentes mixtas T_j^i serán matrices.

Entonces, para un vector dado por: $\mathbf{a} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, podemos calcular sus componentes covariantes de la manera siguiente:

$$a_i = g_{ij}a^j = \begin{cases} a_1 = g_{11}a^1 + g_{12}a^2 + g_{13}a^3 = (6)(3) + (9)(2) + (6)(1) = 42 \\ a_2 = g_{21}a^1 + g_{22}a^2 + g_{23}a^3 = (9)(3) + (14)(2) + (7)(1) = 62 \\ a_3 = g_{31}a^1 + g_{32}a^2 + g_{33}a^3 = (6)(3) + (7)(2) + (26)(1) = 58 \end{cases}$$

Esto es: $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}} = 42\mathbf{u}^1 + 62\mathbf{u}^2 + 58\mathbf{u}^3$.

Lo importante es cuál es el valor que tengan las cantidades g_{ij} y g^{ij} , además que se cumplan las relaciones $a_i = g_{ij}a^j$, donde los índices repetidos indican suma. Entonces, como una estrategia práctica (y tácita) se ha acordado organizar como matrices tanto las componentes covariantes, como contravariantes como matrices. De este modo tendremos que

$$g_{ia}g^{aj} = \delta_i^j = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 9 & 14 & 7 \\ 6 & 7 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{35}{4} & -\frac{16}{3} & -\frac{7}{12} \\ -\frac{16}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue usaremos esta convención, que violenta nuestra notación pedagógica pero es mas común en la literatura.

Ejemplo 3.8 Bases ortogonales, bases recíprocas y tensores métricos. El segundo ejemplo será construir una base dual recíproca a partir de una base de vectores. Es decir, dos bases de vectores mutuamente ortogonales. Para ello consideraremos los siguientes vectores

$$\mathbf{w}_1 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{w}_2 = -\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{w}_3 = 3\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}.$$

Si comprobamos su ortogonalidad entre la base directa y su dual tendremos $\tilde{\mathbf{w}}^1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0$, $\tilde{\mathbf{w}}^1 \cdot \mathbf{w}_3 = 0$ y $\tilde{\mathbf{w}}^2 \cdot \mathbf{w}_3 = 0$.

La base recíproca se construye a partir de:

$$\mathbf{w}^i = \frac{\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k}{\mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k)},$$

donde el denominador es:

$$V = \mathbf{w}_1 \cdot (\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3) \Rightarrow (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}) \cdot ([-\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}] \times [3\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}]) = 18,$$

y por lo tanto:

$$\mathbf{w}^i = \frac{\mathbf{w}_j \times \mathbf{w}_k}{V} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{w}^1 = \frac{\mathbf{w}_2 \times \mathbf{w}_3}{V} = \frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{w}^2 = \frac{\mathbf{w}_3 \times \mathbf{w}_1}{V} = -\frac{1}{3}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{w}^3 = \frac{\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2}{V} = \frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}}. \end{cases}$$

El volumen recíproco, como era de esperarse:

$$\tilde{V} = \mathbf{w}^1 \cdot (\mathbf{w}^2 \times \mathbf{w}^3) \Rightarrow \left(\frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\left[-\frac{1}{3}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{3}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\hat{\mathbf{k}}\right] \times \left[\frac{1}{6}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{6}\hat{\mathbf{j}}\right]\right) = \frac{1}{18},$$

mientras que el tensor métrico para la base recíproca es:

$$\bar{g}^{ij} = \bar{g}^{ji} = \mathbf{w}^i \otimes \mathbf{w}^j = \begin{pmatrix} \mathbf{w}^1 \mathbf{w}^1 & \mathbf{w}^1 \mathbf{w}^2 & \mathbf{w}^1 \mathbf{w}^3 \\ \mathbf{w}^2 \mathbf{w}^1 & \mathbf{w}^2 \mathbf{w}^2 & \mathbf{w}^2 \mathbf{w}^3 \\ \mathbf{w}^3 \mathbf{w}^1 & \mathbf{w}^3 \mathbf{w}^2 & \mathbf{w}^3 \mathbf{w}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{18} \end{pmatrix},$$

y para la base original

$$g_{ij} = g_{ji} = \mathbf{w}_i \otimes \mathbf{w}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_3 \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_3 \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \mathbf{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Entonces el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, tendrá como componentes covariantes

$$a_i = g_{ij}a^j = \begin{cases} a_1 = g_{11}a^1 = (6)(3) = 18 \\ a_2 = g_{22}a^2 = (3)(2) = 6 \\ a_3 = g_{33}a^3 = (18)(1) = 18. \end{cases}$$

Esto es: $\mathbf{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}} = 18\mathbf{w}^1 + 6\mathbf{w}^2 + 18\mathbf{w}^3$.

Notemos que si la base original hubiese sido ortonormal:

$$\mathbf{w}_1 = (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})/\sqrt{6}, \quad \mathbf{w}_2 = (-\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/\sqrt{3}, \quad \mathbf{w}_3 = (3\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}})/\sqrt{18},$$

entonces:

$$g_{ij} = \bar{g}^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a^1 \\ a_2 = a^2 \\ a_3 = a^3. \end{cases}$$

3.2.8 Vectores, formas, tensores y leyes de transformación

En esta sección discutiremos la importancia de caracterizar objetos identificando las leyes de transformación. La invariancia bajo determinadas leyes de transformación es clave en Física y nos permite identificar propiedades fundamentales. Ya hemos visto, en la sección 1.4.4, como los esquemas de transformación de coordenadas nos han permitido diferenciar escalares y pseudoescalares y vectores de pseudovectores. En esta sección puntualizaremos como transforman vectores y formas y como esos esquemas de transformaciones los heredan los tensores.

En general las afirmaciones anteriores se pueden generalizar considerando que las coordenadas que definen un determinado punto, P , expresado en un sistema de coordenadas particular, son (x^1, x^2, \dots, x^n) y las coordenadas de ese mismo punto P , expresado en otro sistema de coordenadas son $(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'})$. Ambas coordenadas estarán relacionadas por:

$$\left. \begin{matrix} x^{1'} = x^{1'}(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ x^{2'} = x^{2'}(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \vdots \\ x^{n'} = x^{n'}(x^1, x^2, \dots, x^n) \end{matrix} \right\} \iff \left\{ \begin{matrix} x^1 = x^1(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'}) \\ x^2 = x^2(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'}) \\ \vdots \\ x^n = x^n(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'}) \end{matrix} \right.$$

En una notación más compacta lo que tenemos es:

$$x^{i'} = x^{i'}(x^j) \iff x^i = x^i(x^{j'}), \quad (3.9)$$

con: $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ y $i', j' = 1, 2, 3, \dots, n$.

Retomemos lo que discutimos en la sección 3.1.3, pero ahora en el lenguaje de coordenadas. En esa oportunidad mostramos como transformaban las bases y las componentes de formas y vectores. Ahora lo generalizaremos a los tensores. Otra vez, sólo exigiremos (y es bastante) que:

1. Las funciones $x^i = x^i(x^{m'})$ y $x^{j'} = x^{j'}(x^m)$ sean al menos C^2 (función y derivada segunda continua)
2. Que el determinante de la matriz jacobiana sea finito y distinto de cero, esto es

$$\det \left| \frac{\partial x^i(x^{m'})}{\partial x^{j'}} \right| \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial x^{n'}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \dots & \frac{\partial x^2}{\partial x^{n'}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^n}{\partial x^{2'}} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial x^{n'}} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow x^i = x^i(x^{m'}) \iff x^{j'} = x^{j'}(x^m).$$

La matriz jacobiana es un concepto clave en la transformación de coordenadas porque garantiza que la transformación sea invertible. En los ejemplos 3.9, 3.12, 3.14 y 3.15 detallaremos su utilidad. Luego, en el capítulo 5, lo aplicaremos a diversos sistemas de coordenadas.

Ahora bien, una vez más, derivando y utilizando la regla de la cadena:

$$x^i = x^i(x^{j'}(x^m)) \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^m} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m} = \delta_m^{j'} \Rightarrow dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} dx^{j'},$$

como hemos comprobado para los dos casos particulares estudiados con anterioridad.

De ahora en adelante tendremos las siguientes redefiniciones:

1. Un conjunto de cantidades $\{a^1, a^2, \dots, a^n\}$ se denominarán componentes *contravariantes* de un vector $|a\rangle \in \mathbf{V}$ en un punto P de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) , si:
 - (a). dadas dos bases ortonormales de vectores coordenados: $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, \dots, |\hat{e}_n\rangle\}$ y $\{|\hat{e}_{1'}\rangle, |\hat{e}_{2'}\rangle, \dots, |\hat{e}_{n'}\rangle\}$, se cumple que:

$$|a\rangle = a^i |\hat{e}_i\rangle = a^{i'} |\hat{e}_{i'}\rangle \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle \hat{e}^i | a \rangle = a^i \\ \langle \hat{e}^{i'} | a \rangle = a^{i'} \end{array} \right\} \Rightarrow a^{i'} = a^j \langle \hat{e}^{i'} | \hat{e}_j \rangle;$$

- (b). o equivalentemente, bajo una transformación de coordenadas: $x^i = x^i(x^{j'})$ (con $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ e $i', j' = 1, 2, 3, \dots, n$), estas cantidades transforman como:

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} a^k \iff a^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} a^{k'}, \text{ con: } \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} = \delta_l^i, \quad (3.10)$$

2. Un conjunto de cantidades $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ se denominarán componentes *covariantes* de un vector $\langle b| \in \mathbf{V}^*$ en un punto P de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) , si:

- (a). dadas dos bases de formas: $\{\langle \hat{e}^1|, \langle \hat{e}^2|, \dots, \langle \hat{e}^n|\}$ y $\{\langle \hat{e}^{1'}|, \langle \hat{e}^{2'}|, \dots, \langle \hat{e}^{n'}|\}$ se cumple que:

$$\langle b| = b_i \langle \hat{e}^i| = b_{i'} \langle \hat{e}^{i'}| \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle b| \hat{e}^i = b^i \\ \langle b| \hat{e}^{i'} = b^{i'} \end{array} \right\} \Rightarrow b^{i'} = b^j \langle \hat{e}^j | \hat{e}^{i'} \rangle;$$

- (b). o equivalentemente, bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i(x^{j'})$ (con $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ e $i', j' = 1, 2, 3, \dots, n$) estas cantidades transforman como:

$$b_{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} b_i \iff b_k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} b_{i'} \text{ con: } \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} = \delta_l^i, \quad (3.11)$$

Es bueno recalcar que cantidades $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}$ deben ser evaluadas en el punto P .

Podemos generalizar los conceptos anteriores:

1. Dado un conjunto de bases para las formas diferenciales $\{\langle x^m(1)|, \langle y^n(2)|\}$, hemos definido las

componentes *contravariantes* de un tensor:

$$T^{ij} = \mathcal{T} \left[\begin{array}{c|c} \langle x^i(1)| & \langle y^j(2)| \\ \bullet & \bullet \end{array} \right] \iff \{T^{ij}\} \equiv \{T^{11}, T^{12}, \dots, T^{1n}, T^{21}, T^{22}, \dots, T^{2n}, \dots, T^{nn}\},$$

Las componentes contravariantes en un punto P de coordenadas $(x^1, x^2, \dots, x^n) \Leftrightarrow x^i = x^i(x^{j'})$ (con $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ e $i', j' = 1, 2, 3, \dots, n$) transforman como:

$$T^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m} T^{km} \iff T^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} T^{k'm'}.$$

Esto nos permite construir el caso más general.

2. Si $\{|t_i(1)\rangle, |u_j(2)\rangle, \dots, |v_k(m)\rangle\}$ y $\{ \langle x^e(1)|, \langle y^f(2)|, \dots, \langle z^g(n)| \}$ son bases para los vectores y las formas, respectivamente, las componentes de un tensor:

$$T_{ijk}{}^{mn} = \mathcal{T} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} |t_i(1)\rangle & |u_j(2)\rangle & & |v_k(m)\rangle & \langle x^e(1)| & \langle y^f(2)| & & \langle z^g(n)| \\ \circ & \circ & & \circ & \bullet & \bullet & & \bullet \end{array} \right],$$

serán un conjunto de cantidades: $\{T_{ijk}{}^{mn}\}$ que se denominarán las componentes *contravariantes* y *covariantes* respectivamente, de un tensor mixto en un punto P de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) .

Bajo una transformación de coordenadas $x^i = x^i(x^{j'})$, estas cantidades transforman como:

$$T_{e' \dots g'}{}^{i' \dots k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^p} \dots \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^q} \frac{\partial x^a}{\partial x^{e'}} \dots \frac{\partial x^d}{\partial x^{g'}} T_{a \dots d}{}^{p \dots q} \iff T_{e' \dots g'}{}^{i' \dots k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{p'}} \dots \frac{\partial x^k}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^{e'}} \dots \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^{g'}} T_{a' \dots d'}{}^{p' \dots q'}. \quad (3.12)$$

Recordemos nuevamente que

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l} = \delta_l^i,$$

y las cantidades $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$ y $\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}$ deben ser evaluadas en el punto P .

Ejemplo 3.9 Un ejemplo detallado de transformación de tensores

Ilustremos ahora las transformaciones de tensores bajo cambios de la base del espacio tensorial. Esta vez, consideraremos que un tensor tendrá componentes T_j^i cuando se expresa como combinación lineal de la base $[\hat{e}_i(1); \hat{e}^j(2)] = |\hat{e}_i(1)\rangle \otimes \langle \hat{e}^j(2)|$ donde la base $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle\} \equiv \{|i\rangle, |j\rangle, |k\rangle\}$ son los vectores unitarios cartesianos para el espacio vectorial \mathbb{R}^3 . Esto es

$$|\hat{e}_1\rangle = |i\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; |\hat{e}_2\rangle = |j\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\hat{e}_3\rangle = |k\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y su base dual

$$\langle \hat{e}_1| = \langle i| = (1 \ 0 \ 0), \langle \hat{e}_2| = \langle j| = (0 \ 1 \ 0), \langle \hat{e}_3| = \langle k| = (0 \ 0 \ 1).$$

Consideremos un tensor en la base tensorial $[\hat{e}_i(1); \hat{e}^j(2)]$ se expresa como:

$$T_j^i = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Este ejemplo consiste en ver cómo calcular las expresiones de los siguientes tensores: $\tilde{T}_{j'}^{i'}$, $\tilde{T}_{i'j'}$ y $\tilde{T}^{i'j'}$,

si consideramos una nueva base:

$$\left\{ \begin{array}{l} |w_{1'}\rangle = |i\rangle \\ |w_{2'}\rangle = |i\rangle + |j\rangle \\ |w_{3'}\rangle = |i\rangle + |j\rangle + |k\rangle \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle w_{1'}| = \langle i| \\ \langle w_{2'}| = \langle i| + \langle j| \\ \langle w_{3'}| = \langle i| + \langle j| + \langle k| \end{array} \right\}$$

Nótese que la nueva base **no es ortogonal**, $\langle w^{k'}|w_{i'}\rangle \neq \delta_{i'}^{k'}$, es una base oblicua, con lo cual $|w_{k'}\rangle\langle w^{k'}|$ no representa un proyector como lo señalamos en la sección 4.1.4.

Observe que la base dual la hemos construido directamente a partir de la base dual, y es por eso que no es ortogonal. Si hubiéramos construido la base dual $\{\langle w^{k'}|\}$ como la base recíproca $\{|w_{k'}\rangle\}$ tal y como lo hicimos en el Ejemplo 3.8 la solución sería totalmente distinta. Dejamos este ejercicio al lector.

Pero sin duda para la base oblicua $\{|w_{k'}\rangle\} \leftrightarrow \{\langle w^{k'}|\}$ se cumple que, para transformar componentes de un tensor, podremos construir siempre la relación

$$T_{m'}^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} T_j^i.$$

Tenemos que identificar las matrices de transformación $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}$ y $\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}}$. Estas matrices de transformación son las mismas que transforman componentes (contravariantes) de vectores y las componentes (covariantes) de covectores o formas, i.e.

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} a^k \Leftrightarrow a_{k'} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{k'}} a_m,$$

y además son las mismas matrices que devuelven el cambio de un sistema de coordenadas a otro:

$$a^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} a^{k'} \Leftrightarrow a_k = \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^k} a_{m'}.$$

Adicionalmente, estas matrices son una la inversa de la otra $\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta_j^i$.

Para identificar esas matrices recordamos que un vector genérico transforma de la siguiente manera: $|a\rangle = a^j |\hat{e}_j\rangle = a^{j'} |w_{j'}\rangle$, por lo tanto:

$$|a\rangle = a^j |\hat{e}_j\rangle = a^{1'} |w_{1'}\rangle + a^{2'} |w_{2'}\rangle + a^{3'} |w_{3'}\rangle = a^{1'} |\hat{e}_1\rangle + a^{2'} (|\hat{e}_1\rangle + |\hat{e}_2\rangle) + a^{3'} (|\hat{e}_1\rangle + |\hat{e}_2\rangle + |\hat{e}_3\rangle),$$

donde hemos sustituido la expresión de la base $\{|w_{j'}\rangle\}$ en términos de la base $\{|\hat{e}_j\rangle\}$ con lo cual:

$$|a\rangle = a^1 |\hat{e}_1\rangle + a^2 |\hat{e}_2\rangle + a^3 |\hat{e}_3\rangle = (a^{1'} + a^{2'} + a^{3'}) |\hat{e}_1\rangle + (a^{2'} + a^{3'}) |\hat{e}_2\rangle + a^{3'} |\hat{e}_3\rangle.$$

Lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} a^1 = a^{1'} + a^{2'} + a^{3'} \\ a^2 = a^{2'} + a^{3'} \\ a^3 = a^{3'} \end{array} \right\} \Rightarrow a^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} a^{k'} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} = 1; \quad \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} = 1; \quad \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} = 1; \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} = 0; \quad \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} = 1; \quad \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} = 1; \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} = 0; \quad \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} = 0; \quad \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} = 1. \end{array} \right.$$

Es de hacer notar que dado que la base: $\{|\hat{e}_i\rangle\}$ es ortonormal, se tiene que:

$$|a\rangle = a^j |\hat{e}_j\rangle = a^{i'} |w_{i'}\rangle \Rightarrow \langle \hat{e}^i | a \rangle = a^j \langle \hat{e}^i | \hat{e}_j \rangle = a^j \delta_j^i = a^i = a^{k'} \langle \hat{e}^i | w_{k'} \rangle \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} = \langle \hat{e}^i | w_{k'} \rangle.$$

Este mismo procedimiento se puede aplicar para expresar el vector $|a\rangle$ como una combinación lineal de los vectores $|w_{j'}\rangle$:

$$|a\rangle = a^{j'} |\hat{e}_{j'}\rangle = a^j |\hat{e}_j\rangle = a^1 |\hat{e}_1\rangle + a^2 |\hat{e}_2\rangle + a^3 |\hat{e}_3\rangle = a^1 |w_{1'}\rangle + a^2 (|w_{2'}\rangle - |w_{1'}\rangle) + a^3 (|w_{3'}\rangle - |w_{2'}\rangle),$$

esto es:

$$\left. \begin{aligned} a^{1'} &= a^1 - a^2 \\ a^{2'} &= a^2 - a^3 \\ a^{3'} &= a^3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} a^i \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = 1; & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = -1; & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} = 0; \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} = 0; & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} = 1; & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} = -1; \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} = 0; & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} = 0; & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} = 1. \end{cases}$$

Nótese que, como era de esperarse:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \delta_j^i \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con las expresiones matriciales para las transformaciones, estamos en capacidad de calcular, componente a componente, las representación del tensor dado en la nueva base:

$$T_{m'}^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} T_j^i.$$

Veamos:

$$\begin{aligned} T_{1'}^{1'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{1'}} T_j^i \\ &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} T_1^1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} T_2^1 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} T_3^1 \right) + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} T_1^2 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} T_2^2 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} T_3^2 \right) \\ &\quad + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} T_1^3 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} T_2^3 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} T_3^3 \right), \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} T_{1'}^{1'} &= 1 \cdot (1 T_1^1 + 0 T_2^1 + 0 T_3^1) - 1 \cdot (1 T_1^2 + 0 T_2^2 + 0 T_3^2) + 0 (1 T_1^3 + 0 T_2^3 + 0 T_3^3) \\ &= T_1^1 - T_1^2 = 2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Del mismo modo para $T_{2'}^{1'}$:

$$\begin{aligned} T_{2'}^{1'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{2'}} T_j^i \\ &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} T_1^1 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} T_2^1 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} T_3^1 \right) + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} T_1^2 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} T_2^2 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} T_3^2 \right) \\ &\quad + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} T_1^3 + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} T_2^3 + \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} T_3^3 \right), \end{aligned}$$

resultando:

$$\begin{aligned} T_{2'}^{1'} &= 1 \cdot (1 T_1^1 + 1 T_2^1 + 0 T_3^1) - 1 \cdot (1 T_1^2 + 1 T_2^2 + 0 T_3^2) + 0 (1 T_1^3 + 1 T_2^3 + 0 T_3^3) \\ &= (T_1^1 + T_2^1) - (T_1^2 + T_2^2) = (2 + 1) - (2 + 3) = -2. \end{aligned}$$

Se puede continuar término a término (el lector debe terminar los cálculos) o realizar la multiplicación de las matrices provenientes de la transformación de componentes de tensores. Vale decir:

$$T_{m'}^{k'} = \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \right) (T_j^i) \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hay que resaltar el especial cuidado que se tuvo en la ubicación de las matrices para su multiplicación. Si bien en la expresión $T_{m'}^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} T_j^i$ las cantidades $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}$ son números y no importa el orden con el cual se multipliquen, cuando se escriben como matrices debe respetarse la “concatenación interna de

índices”. Esto es, cuando queremos expresar $T_{m'}^{k'}$ como una matriz, donde el índice contravariante k' indica filas y el índice covariante m' las columnas, fijamos primero estos índices y luego respetamos la “concatenación de índices” covariantes con los contravariantes. Esta es la convención para expresar la multiplicación de matrices en la notación de índices⁹. Esto es:

$$T_{m'}^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} T_j^i \Rightarrow (T_{m'}^{k'}) = \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \right) (T_j^i) \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} \right).$$

Los objetos $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}$, T_j^i y $\frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}}$ fueron sustituidos (en sus puestos correspondientes) por su representación matricial. Con lo cual hemos encontrado la representación matricial $T_{j'}^{i'}$ de las componentes del tensor \mathbf{T} en la base $\{|w_{1'}\rangle, |w_{2'}\rangle, |w_{3'}\rangle\}$

$$T_{j'}^{i'} = \begin{pmatrix} T_{1'}^{1'} & T_{2'}^{1'} & T_{3'}^{1'} \\ T_{1'}^{2'} & T_{2'}^{2'} & T_{3'}^{2'} \\ T_{1'}^{3'} & T_{2'}^{3'} & T_{3'}^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la expresión de $T_{i'j'}$ ($T_{i'j'} = g_{i'k'} T_{j'}^{k'}$), requeriremos las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico $g_{i'k'}$ que genera esta base. Para ello recordamos que para una base genérica, $\{|w_{j'}\rangle\}$, no necesariamente ortogonal, de un espacio vectorial con producto interno, podemos definir la expresión de un tensor que denominaremos tensor métrico como:

$$\text{un tensor del tipo } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{i'j'} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}} g_{mn} \equiv \langle \hat{e}^m | w_{i'} \rangle \langle \hat{e}^n | w_{j'} \rangle g_{mn}.$$

Recordemos que la métrica covariante g_{ij} generada por una base ortonormal $\{|\hat{e}_i\rangle\} \equiv \{|i_i\rangle\}$ es:

$$g_{11} = 1, g_{22} = 1, g_{33} = 1, g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0.$$

Es decir:

$$g_{ij} = g^{ij} = g_j^i \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con lo cual, para el caso de la base genérica no ortonormal $\{|w_{j'}\rangle\}$ tenemos dos formas de calcular las componentes covariantes y contravariantes del tensor métrico.

La primera es la forma directa: $g_{i'j'} = \langle \hat{e}^m | w_{i'} \rangle \langle \hat{e}^n | w_{j'} \rangle g_{mn}$. Esto es:

$$\begin{aligned} g_{1'1'} &= \langle \hat{e}^n | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^m | w_{1'} \rangle g_{nm} = \langle \hat{e}^1 | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{1'} \rangle + \langle \hat{e}^2 | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^2 | w_{1'} \rangle + \langle \hat{e}^3 | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^3 | w_{1'} \rangle \\ &= \langle \hat{e}^1 | w_{1'} \rangle^2 = 1, \\ g_{1'2'} &= \langle \hat{e}^n | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^m | w_{2'} \rangle g_{nm} = \langle \hat{e}^1 | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{2'} \rangle + \langle \hat{e}^2 | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^2 | w_{2'} \rangle + \langle \hat{e}^3 | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^3 | w_{2'} \rangle \\ &= \langle \hat{e}^1 | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{2'} \rangle = 1, \\ g_{1'3'} &= \langle \hat{e}^n | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^m | w_{3'} \rangle g_{nm} = \langle \hat{e}^1 | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{3'} \rangle + \langle \hat{e}^2 | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^2 | w_{3'} \rangle + \langle \hat{e}^3 | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^3 | w_{3'} \rangle \\ &= \langle \hat{e}^1 | w_{1'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{3'} \rangle = 1, \end{aligned}$$

⁹Quizá una forma de comprobar si los índices están bien concatenados se observa si se “bajan” los índices contravariantes pero se colocan antes que los covariantes. Esto es, $T_j^i \rightarrow T_{ij}$. Así, la multiplicación de matrices queda representada de la siguiente forma: $C_j^i = A_k^i B_j^k \rightarrow C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$ y aquí es claro que índices consecutivos están “concatenados” e indican multiplicación.

$$\begin{aligned}
g_{2'1'} &= \langle \hat{e}^n | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^m | w_{1'} \rangle g_{nm} = \langle \hat{e}^1 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{1'} \rangle + \langle \hat{e}^2 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^2 | w_{1'} \rangle + \langle \hat{e}^3 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^3 | w_{1'} \rangle \\
&= \langle \hat{e}^1 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{1'} \rangle = 1, \\
g_{2'2'} &= \langle \hat{e}^n | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^m | w_{2'} \rangle g_{nm} = \langle \hat{e}^1 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{2'} \rangle + \langle \hat{e}^2 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^2 | w_{2'} \rangle + \langle \hat{e}^3 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^3 | w_{2'} \rangle \\
&= \langle \hat{e}^1 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{2'} \rangle + \langle \hat{e}^2 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^2 | w_{2'} \rangle = 2, \\
g_{2'3'} &= \langle \hat{e}^n | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^m | w_{3'} \rangle g_{nm} = \langle \hat{e}^1 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{3'} \rangle + \langle \hat{e}^2 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^2 | w_{3'} \rangle + \langle \hat{e}^3 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^3 | w_{3'} \rangle \\
&= \langle \hat{e}^1 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{3'} \rangle + \langle \hat{e}^2 | w_{2'} \rangle \langle \hat{e}^2 | w_{3'} \rangle = 2, \\
g_{3'1'} &= \langle \hat{e}^n | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^m | w_{1'} \rangle g_{nm} = \langle \hat{e}^1 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{1'} \rangle + \langle \hat{e}^2 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^2 | w_{1'} \rangle + \langle \hat{e}^3 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^3 | w_{1'} \rangle \\
&= \langle \hat{e}^1 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{1'} \rangle = 1, \\
g_{3'2'} &= \langle \hat{e}^n | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^m | w_{2'} \rangle g_{nm} = \langle \hat{e}^1 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{2'} \rangle + \langle \hat{e}^2 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^2 | w_{2'} \rangle + \langle \hat{e}^3 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^3 | w_{2'} \rangle \\
&= \langle \hat{e}^1 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{2'} \rangle + \langle \hat{e}^2 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^2 | w_{2'} \rangle = 2, \\
g_{3'3'} &= \langle \hat{e}^n | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^m | w_{3'} \rangle g_{nm} = \langle \hat{e}^1 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{3'} \rangle + \langle \hat{e}^2 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^2 | w_{3'} \rangle + \langle \hat{e}^3 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^3 | w_{3'} \rangle \\
&= \langle \hat{e}^1 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^1 | w_{3'} \rangle + \langle \hat{e}^2 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^2 | w_{3'} \rangle + \langle \hat{e}^3 | w_{3'} \rangle \langle \hat{e}^3 | w_{3'} \rangle = 3.
\end{aligned}$$

De manera que:

$$g_{i'j'} \Rightarrow g_{1'1'} = 1, g_{1'2'} = 1, g_{1'3'} = 1, g_{2'1'} = 1, g_{2'2'} = 2, g_{2'3'} = 2, g_{3'1'} = 1, g_{3'2'} = 2, g_{3'3'} = 3.$$

Consecuentemente podemos “arreglarlo como una matriz”¹⁰ de la siguiente forma:

$$g_{i'j'} \equiv g_{j'i'} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow g^{i'j'} \equiv g^{j'i'} = (g_{i'j'})^{-1} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que también podríamos haber procedido, y en términos “matriciales”, de la siguiente forma:

$$g_{k'm'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nuevamente es bueno aclarar que para conservar la convención de índices y poder representar la multiplicación de matrices, los índices deben estar consecutivos, por lo tanto, hay que trasponer la representación matricial para multiplicarlas. Es por eso que en el cálculo anterior aparece como primera matriz la transpuesta de la última. El cálculo se debe hacer como se muestra a continuación:

$$g_{k'm'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} \longrightarrow g_{k'm'} = \Pi_{ik'} g_{ij} \Pi_{jm'} \longrightarrow g_{k'm'} = \bar{\Pi}_{k'i} g_{ij} \Pi_{jm'}.$$

Finalmente, estamos en capacidad de obtener las representaciones matriciales para los tensores:

$$T_{i'}^{j'}, T_{i'j'}, T^{i'j'}.$$

$$\begin{aligned}
T_{i'}^{j'} &= (T_{j'}^{i'})^T \iff T_{i'}^{j'} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \\
T_{k'm'} &= g_{k'n'} T_{m'}^{n'} \iff T_{k'm'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 15 \\ 5 & 11 & 20 \end{pmatrix}. \\
T^{k'n'} &= T_{m'}^{n'} g^{m'k'} \iff T^{k'n'} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

¹⁰Recordemos que hemos insistido en que las matrices representan tensores mixtos, tal y como lo comentamos en la página 191.

Quisiéramos ejemplificar una forma “rápida y furiosa” (pero sucia) de calcular la métrica generada por una determinada base genérica. La idea es que, violentando toda nuestra notación e idea de tensores, construimos la métrica a partir de los vectores base definiéndola como $g_{i'j'} = \langle w_{i'} | w_{j'} \rangle$, de esta manera:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= \begin{pmatrix} \langle w_{1'} | w_{1'} \rangle & \langle w_{1'} | w_{2'} \rangle & \langle w_{1'} | w_{3'} \rangle \\ \langle w_{2'} | w_{1'} \rangle & \langle w_{2'} | w_{2'} \rangle & \langle w_{2'} | w_{3'} \rangle \\ \langle w_{3'} | w_{1'} \rangle & \langle w_{3'} | w_{2'} \rangle & \langle w_{3'} | w_{3'} \rangle \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \langle i | i \rangle & \langle i | [i] + [j] \rangle & \langle i | [i] + [j] + [k] \rangle \\ [\langle i | + \langle j |] | i \rangle & [\langle i | + \langle j |] | [i] + [j] \rangle & [\langle i | + \langle j |] | [i] + [j] + [k] \rangle \\ [\langle i | + \langle j | + \langle k |] | i \rangle & [\langle i | + \langle j | + \langle k |] | [i] + [j] \rangle & [\langle i | + \langle j | + \langle k |] | [i] + [j] + [k] \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Resultado que coincide con la métrica que calculamos transformando el tensor métrico.

A continuación vamos a considerar otros ejemplos con tensores cartesianos.

Ejemplo 3.10 Dado los tensores:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad E^i = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La parte simétrica de T_{ij} es:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} [T_{ij} + T_{ji}] = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Para la parte antisimétrica de T_{ij} :

$$A_{ij} = \frac{1}{2} [T_{ij} - T_{ji}] = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para calcular $T_{ij}E^j$ hacemos lo siguiente:

$$C_i = T_{i1}E^1 + T_{i2}E^2 + T_{i3}E^3 = \begin{cases} C_1 = T_{11}E^1 + T_{12}E^2 + T_{13}E^3 = (1)(1) + (0)(4) + (2)(3) = 7, \\ C_2 = T_{21}E^1 + T_{22}E^2 + T_{23}E^3 = (3)(1) + (4)(4) + (1)(3) = 22, \\ C_3 = T_{31}E^1 + T_{32}E^2 + T_{33}E^3 = (1)(1) + (3)(4) + (4)(3) = 25. \end{cases}$$

Ejemplo 3.11 Dados T_j^i , a^i y $b^i \in \mathbb{R}^3$ con:

$$T_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad a^i = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b^i = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que T_j^i , a^i y b^i están expresados en coordenadas cartesianas. Calculemos $A_{ij}a^ib^j$, $S_{ij}a^ia^j$ y $A_{ij}b^ib^j$, donde S_{ij} y A_{kl} son, respectivamente, las partes simétrica y antisimétrica del tensor T_j^i .

La métrica en coordenadas cartesianas viene dada por:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tendremos que:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Nótese que la expresión matricial para $T_{ij} \equiv g_{ik}T_j^k$ es la misma que para T_j^i debido a la forma de la métrica en este espacio. Del mismo modo:

$$A_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto:

$$a^i A_{ij} b^j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{87}{2},$$

$$a^i S_{ij} a^j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 1,$$

$$b^i A_{ij} b^j = 0.$$

Ejemplo 3.12 Sistema de coordenadas genérico. Dado un sistema genérico de coordenadas oblicuas:

$$|w_1\rangle = a|i\rangle + b|j\rangle, \quad |w_2\rangle = c|i\rangle + d|j\rangle.$$

1. Para una base arbitraria, $\{|w_i\rangle\}$, la métrica viene definida por:

$$g_{ij} \equiv g_{ji} = \mathbf{g}[|w_i\rangle, |w_j\rangle] \equiv \langle w^i | w_j \rangle,$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \langle w^1 | w_1 \rangle & \langle w^1 | w_2 \rangle \\ \langle w^2 | w_1 \rangle & \langle w^2 | w_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

2. Un vector genérico: $|v\rangle = v_x|i\rangle + v_y|j\rangle$, en estas coordenadas se escribe como:

$$\left. \begin{array}{l} |w_1\rangle = a|i\rangle + b|j\rangle \\ |w_2\rangle = c|i\rangle + d|j\rangle \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |i\rangle = \frac{1}{\Delta} (d|w_1\rangle - b|w_2\rangle) \\ |j\rangle = \frac{1}{\Delta} (-c|w_1\rangle + a|w_2\rangle) \end{array} \right.,$$

con $\Delta = ad - bc$, por lo cual:

$$|v\rangle = v_x|i\rangle + v_y|j\rangle = \frac{v_x}{\Delta} (d|w_1\rangle - b|w_2\rangle) + \frac{v_y}{\Delta} (-c|w_1\rangle + a|w_2\rangle),$$

$$= \left(d \frac{v_x}{\Delta} - c \frac{v_y}{\Delta} \right) |w_1\rangle - \left(b \frac{v_x}{\Delta} - a \frac{v_y}{\Delta} \right) |w_2\rangle.$$

3. Consideremos ahora una base y un tensor de manera concreta.

$$|w_1\rangle = |i\rangle, \quad |w_2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|i\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|j\rangle, \quad T_j^i = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Encontremos primero la expresión matricial para el tensor \tilde{T}_{ij} ^u.

En general:

$$T_{i'j'} = g_{ik} T_j^{k'} = g_{ik} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^m} T_n^m \frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}},$$

identificando:

$$\begin{aligned} v_{x'} &= v^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^j} v^j = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} v^1 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} v^2 = \frac{d}{\Delta} v_x - \frac{c}{\Delta} v_y, \\ v_{y'} &= v^{2'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^j} v^j = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} v^1 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} v^2 = -\frac{b}{\Delta} v_x + \frac{a}{\Delta} v_y, \end{aligned}$$

donde:

$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = \frac{d}{\Delta}, \quad \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = -\frac{c}{\Delta}, \quad \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} = -\frac{b}{\Delta} \text{ y } \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} = \frac{a}{\Delta}.$$

Como $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces:

$$g_{ik} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^m} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}} = \left(\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^j} \right)^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Finalmente:

$$T_{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3\sqrt{2} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.13 **Cartesianas y polares, otra vez.** El ejemplo más simple, clásico y emblemático de cambio de coordenadas, lo constituye las expresiones de un mismo vector en dos sistemas de coordenadas en el plano: Cartesianas $\{|i\rangle, |j\rangle\}$ y polares $\{|u_r\rangle, |u_\theta\rangle\}$. Esto es, para un vector $|a\rangle$:

$$|a\rangle = a_x|i\rangle + a_y|j\rangle = a^1|\hat{e}_1\rangle + a^2|\hat{e}_2\rangle \quad \text{y} \quad |a\rangle = a_r|u_r\rangle + a_\theta|u_\theta\rangle = a^{1'}|\hat{e}_{1'}\rangle + a^{2'}|\hat{e}_{2'}\rangle.$$

Al expresar una base en términos de la otra obtenemos:

$$|u_r\rangle = \cos(\theta)|i\rangle + \sin(\theta)|j\rangle \quad \text{y} \quad |u_\theta\rangle = -\sin(\theta)|i\rangle + \cos(\theta)|j\rangle,$$

con lo cual:

$$\langle \hat{e}^{i'} | \hat{e}_j \rangle = A_j^{i'} \iff A_j^{i'} = \begin{pmatrix} \langle u_r | i \rangle & \langle u_r | j \rangle \\ \langle u_\theta | i \rangle & \langle u_\theta | j \rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Para la transformación inversa se tiene:

$$\langle \hat{e}^i | \hat{e}_{j'} \rangle = A_{j'}^i \iff A_{j'}^i = \begin{pmatrix} \langle i | u_r \rangle & \langle i | u_\theta \rangle \\ \langle j | u_r \rangle & \langle j | u_\theta \rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

y por lo tanto:

$$|i\rangle = \cos(\theta)|u_r\rangle - \sin(\theta)|u_\theta\rangle \quad \text{y} \quad |j\rangle = \sin(\theta)|u_r\rangle + \cos(\theta)|u_\theta\rangle.$$

Cumpliendo además con:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff A_{k'}^i A_j^{k'} = \delta_j^i.$$

^u**Ayuda:** dada una matriz genérica $A_j^i = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, su inversa será $\begin{pmatrix} \frac{D}{AD-BC} & -\frac{B}{AD-BC} \\ -\frac{C}{AD-BC} & \frac{A}{AD-BC} \end{pmatrix}$.

Por otro lado, si:

$$|a\rangle = a_r|u_r\rangle + a_\theta|u_\theta\rangle \equiv a^{1'}|\hat{e}_{1'}\rangle + a^{2'}|\hat{e}_{2'}\rangle = a_x|i\rangle + a_y|j\rangle \equiv a^1|e_1\rangle + a^2|e_2\rangle,$$

tendremos que:

$$a^{i'} = A_{j'}^i a^j \iff \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \cos(\theta) + a_y \sin(\theta) \\ -a_x \sin(\theta) + a_y \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

con lo cual:

$$a_r = a_x \cos(\theta) + a_y \sin(\theta) \quad \text{y} \quad a_\theta = -a_x \sin(\theta) + a_y \cos(\theta).$$

Del mismo modo:

$$a^i = A_{j'}^i a^{j'} \iff \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r \cos(\theta) - a_\theta \sin(\theta) \\ a_r \sin(\theta) + a_\theta \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

y

$$a_x = a_r \cos(\theta) - a_\theta \sin(\theta) \quad \text{y} \quad a_y = a_r \sin(\theta) + a_\theta \cos(\theta).$$

En el ejemplo anterior consideramos los cambios de base entre cartesianas y polares. A partir de cambios de la base construimos la matriz de transformación entre sus componentes. Ahora pondremos la atención en las componentes. En general, podemos pensar que las componentes de los vectores pueden ser funciones de las otras. Consideremos el ejemplo anterior con esta visión para estudiarlo con más detalle en dos y tres dimensiones.

Ejemplo 3.14 Caso bidimensional. Tendremos que un punto en el plano viene representado en coordenadas cartesianas por dos números (x, y) y en coordenadas polares por otros dos números (r, θ) . Siguiendo el ejemplo anterior un punto P , en el plano lo describimos como:

$$|P\rangle = r_P|u_r\rangle = x_P|i\rangle + y_P|j\rangle.$$

Veamos como están relacionadas estas dos descripciones, para este caso en el cual las ecuaciones de transformación son:

$$\left. \begin{aligned} x_P = x_P(r, \theta) = x^1 = x^1(x^{1'}, x^{2'}) \\ y_P = y_P(r, \theta) = x^2 = x^2(x^{1'}, x^{2'}) \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} r_P = r_P(x, y) = x^{1'} = x^{1'}(x^1, x^2), \\ \theta = \theta_P(x, y) = x^{2'} = x^{2'}(x^1, x^2), \end{aligned} \right.$$

y explícitamente:

$$\left. \begin{aligned} x_P = r_P \cos(\theta) &\Rightarrow x^1 = x^{1'} \cos(x^{2'}) \\ y_P = r_P \sin(\theta) &\Rightarrow x^2 = x^{1'} \sin(x^{2'}) \end{aligned} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{aligned} r_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} &\Rightarrow x^{1'} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \\ \theta = \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) &\Rightarrow x^{2'} = \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right). \end{aligned} \right.$$

Es claro que ambas coordenadas están relacionadas y que se puede invertir la relación.

$$\left. \begin{aligned} x^{1'} = x^{1'}(x^1, x^2) \\ x^{2'} = x^{2'}(x^1, x^2) \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} x^1 = x^1(x^{1'}, x^{2'}) \\ x^2 = x^2(x^{1'}, x^{2'}) \end{aligned} \right.$$

Se debe pedir, eso sí, dos cosas razonables:

1. que las funciones $x^i = x^i(x^{m'})$ y $x^{j'} = x^{j'}(x^m)$ sean al menos \mathcal{C}^2 (función y segunda derivada continua)
2. que el determinante de la matriz jacobiana sea finito,

$$\det \left| \frac{\partial x^i(x^{k'})}{\partial x^{j'}} \right| \neq 0.$$

Más aún, si: $x^i = x^i(x^{j'}(x^k)) \Rightarrow \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} = \delta_k^i \Rightarrow dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} dx^{j'}$, con lo cual

intuimos dos cosas:

1. que las componentes de un vector, $|P\rangle$, deben transformar bajo un cambio de coordenadas como:

$$p^i = \frac{\partial x^i(x^{k'})}{\partial x^{k'}} p^{j'}.$$

2. que las matrices jacobianas $\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}}$ y $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$ son una la inversa de la otra.

Veamos si es cierto para el caso de vectores en el plano. Para ello calculamos la matriz jacobiana:

$$\frac{\partial x^i(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{j'}} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{2'}} \\ \frac{\partial x^2(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{2'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x^{2'}) & -x^{1'} \sin(x^{2'}) \\ \sin(x^{2'}) & x^{1'} \cos(x^{2'}) \end{pmatrix},$$

y seguidamente, identificando $|P\rangle = x_P|i\rangle + y_P|j\rangle = r_P|u_r\rangle$

$$p^i = \frac{\partial x^i(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{j'}} p^{j'} \Rightarrow \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x^{2'}) & -x^{1'} \sin(x^{2'}) \\ \sin(x^{2'}) & x^{1'} \cos(x^{2'}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}^1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Igualmente, si calculamos la inversa de la matriz jacobiana:

$$\left(\frac{\partial x^i(x^{1'}, x^{2'})}{\partial x^{j'}} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(x^{2'}) & \sin(x^{2'}) \\ -\sin(x^{2'}) & \cos(x^{2'}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} & \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} \\ \frac{-x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} & \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \end{pmatrix},$$

tendremos:

$$\begin{pmatrix} p^{1'} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} & \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}} \\ \frac{-x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} & \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \end{pmatrix} \Rightarrow p^{i'} = \frac{\partial x^{i'}(x^1, x^2)}{\partial x^j} p^j.$$

Ejemplo 3.15 Caso tridimensional. Consideremos nuevamente dos sistemas de coordenadas: uno cartesiano ($x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$) y otro esférico ($x^{1'} = r, x^{2'} = \theta, x^{3'} = \phi$). Tal y como hemos supuesto anteriormente el punto P vendrá descrito por:

$$|P\rangle = r_P|u_r\rangle = x_P|i\rangle + y_P|j\rangle + z_P|k\rangle,$$

de nuevo

$$\left. \begin{aligned} x = x(r, \theta, \phi) &= x^1 = x^1(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \\ y = y(r, \theta, \phi) &= x^2 = x^2(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \\ z = z(r, \theta, \phi) &= x^3 = x^3(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r(x, y, z) = x^{1'} = x^{1'}(x^1, x^2, x^3), \\ \theta = \theta(x, y, z) = x^{2'} = x^{2'}(x^1, x^2, x^3), \\ \phi = \phi(x, y, z) = x^{3'} = x^{3'}(x^1, x^2, x^3). \end{cases}$$

Las ecuaciones de transformación serán:

$$\begin{cases} x_P = r_P \sin(\theta) \cos(\phi) \Rightarrow x^1 = x^{1'} \sin(x^{2'}) \cos(x^{3'}), \\ y_P = r_P \sin(\theta) \sin(\phi) \Rightarrow x^2 = x^{1'} \sin(x^{2'}) \sin(x^{3'}), \\ z_P = r_P \cos(\theta) \Rightarrow x^3 = x^{1'} \cos(x^{2'}), \end{cases}$$

y las transformaciones inversas:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2} \Rightarrow x^{1'} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}, \\ \phi = \arctan\left(\frac{y_P}{x_P}\right) \Rightarrow x^{2'} = \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right), \\ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}{z_P}\right) \Rightarrow x^{3'} = \arctan\left(\frac{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}{x^3}\right). \end{array} \right.$$

Con lo cual la matriz de las derivadas para esta transformación en particular será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}{\partial x^{j'}} &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) & 0 & -r \sin(\theta) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \sin(x^{2'}) \cos(x^{3'}) & -\tilde{x}^1 \sin(x^{2'}) \sin(x^{3'}) & \tilde{x}^1 \cos(x^{2'}) \cos(x^{3'}) \\ \sin(x^{2'}) \sin(x^{3'}) & x^{1'} \sin(x^{2'}) \cos(x^{3'}) & x^{1'} \cos(x^{2'}) \sin(x^{3'}) \\ \cos(x^{2'}) & 0 & -x^{1'} \sin(x^{2'}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mientras que la inversa es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{i'}(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^j} &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & \sin(\theta) \sin(\phi) & \cos(\theta) \\ -\frac{\sin(\phi)}{r \sin(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{r \sin(\theta)} & 0 \\ \frac{\cos(\theta) \cos(\phi)}{r} & \frac{\cos(\theta) \sin(\phi)}{r} & -\frac{\sin(\theta)}{r} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \\ \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{-\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dejaremos al lector comprobar que, efectivamente,

$$p^i = \frac{\partial x^i(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}{\partial x^{j'}} p^{j'} \iff p^{i'} = \frac{\partial x^{i'}(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^j} p^j.$$

◀

Practicando con SymPy

Transformación de tensores.

Podemos hacer la manipulación de tensores en función de sus componentes. La métrica se almacena en una matriz lg y la métrica inversa se obtiene y almacena en la matriz ug .

En un ejemplo visto con anterioridad se especificaba las componentes de un tensor en coordenadas cartesianas, esto es:

$$T_0 = T_j^i = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{en la base: } \{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle\} \equiv \{|i\rangle, |j\rangle, |k\rangle\}.$$

Para luego representarlo en la nueva base: $|w_{1'}\rangle = |i\rangle, |w_{2'}\rangle = |i\rangle + |j\rangle$ y $|w_{3'}\rangle = |i\rangle + |j\rangle + |k\rangle$. Entonces necesitamos calcular:

$$T_{m'}^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} T_j^i \Rightarrow T_n = \alpha \beta T_0 =$$

Como vimos cuando hacíamos los cálculos:

$$\alpha = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Respetando “la concatenación interna de índices” podemos realizar la multiplicación de matrices.

```
[24]: T0 = Matrix([[2,1,3], [2,3,4], [1,2,2]])
T0
```

```
[24]: 
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```

```
[25]: α = Matrix([[1,-1,0], [0,1,-1], [0,0,1]])
α
```

```
[25]: 
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

```
[26]: β = Matrix([[1,1,1], [0,1,1], [0,0,1]])
β
```

```
[26]: 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

```
[27]: Tn = α*(T0*β)
Tn
```

```
[27]: 
$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

```

Una vez que hemos calculado el nuevo tensor $T_n = \tilde{T}_j^i$ en la nueva base, podemos calcular: \tilde{T}^{ij} y \tilde{T}_{ij} . Pero podemos utilizar la métrica para las coordenadas nuevas y hacer las respectivas contracciones.

```
[28]: lg = Matrix([[1,1,1], [1,2,2], [1,2,3]])
lg
```

[28] :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Para tener la métrica inversa \tilde{g}^{ik} escribimos:

[29] :

```
ug=lg.inv()
ug
```

[29] :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular $\tilde{T}_{ij} = \tilde{g}_{ik} \tilde{T}_j^k$ hacemos lo siguiente:

[30] :

```
lg*Tn
```

[30] :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 15 \\ 5 & 11 & 20 \end{bmatrix}$$

Y para calcular $\tilde{T}^{ij} = \tilde{T}_k^i \tilde{g}^{kj}$ procedemos así:

[31] :

```
Tn*ug
```

[31] :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.3 Aplicaciones en física: esfuerzos, inercia y energía libre

En este punto vamos a ejemplificar la utilización de los tensores en varios ámbitos de la Física, en particular de la Mecánica. Para comenzar consideraremos el tensor de esfuerzos para describir las tensiones internas de cuerpos sometidos a fuerzas externas¹². Haremos el análisis tanto para el caso de dos como de tres dimensiones. Luego a continuación consideraremos el tensor de inercia y su impacto en la dinámica de cuerpos en movimiento.

3.3.1 El tensor de esfuerzos o tensor stress (caso 2D)

Supongamos un cuerpo que se encuentra en equilibrio y está sometido a un conjunto de fuerzas externas. Para facilitar las cosas consideremos el efecto de esas fuerzas sobre un plano que contiene a un determinado punto P (ver figura 3.2 cuadrante Ia). Es decir, vamos a considerar los efectos de las componentes de todas las fuerzas sobre ese plano y obviaremos el efecto del resto de las componentes.

Como observamos en la figura 3.2 Ib y Ic, si cortamos la superficie en dos líneas (AB y $A'B'$), podemos ver que el efecto del conjunto de fuerzas externas es distinto sobre P , en la dirección perpendicular a cada una de esas líneas. De hecho, al “cortar” la superficie las fuerzas que aparecen sobre las líneas AB (y $A'B'$) eran fuerzas internas y ahora son externas al nuevo cuerpo “cortado”. Así, estas

¹²Una presentación más contemporánea del tensor de esfuerzos la pueden encontrar en De Prunelé, E. (2007). “Linear strain tensor and differential geometry”, American Journal of Physics, 75(10), 881-887.

fuerzas por unidad de longitud¹³ sobre el punto P existen como un conjunto de fuerzas que generan esfuerzos (*stress*). Por lo tanto, es claro que los esfuerzos sobre un punto dependen del punto, de las fuerzas externas y de la dirección del efecto.

Para irnos aclarando consideremos un elemento de área infinitesimal ds sobre la cual actúa un conjunto de fuerzas externas, las cuales podemos descomponer como normales y tangenciales a la línea sobre la cual están aplicadas (ver figura 3.2 cuadrante II). Es costumbre denotar los esfuerzos normales y tangenciales por σ y τ respectivamente.

$$dA = dx dy \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \uparrow Y_2 = \sigma_2 dx \rightarrow X_2 = \tau_2 dx \\ Y_3 = \tau_3 dy \uparrow \\ X_3 = \sigma_3 dy \rightarrow \\ \uparrow Y_4 = \sigma_4 dx \rightarrow X_4 = \tau_4 dx \end{array} \right. \begin{array}{l} dx \\ dy \\ dx \\ dy \end{array} \begin{array}{l} ds \\ ds \\ ds \\ ds \end{array} \begin{array}{l} \uparrow Y_1 = \tau_1 dy \\ \rightarrow X_1 = \sigma_1 dy \end{array}$$

Consideramos la segunda ley de Newton aplicada a cada diferencial de masa dm y obtendremos:

$$\sum \mathbf{F}_i^{ext} = dm \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tau_1 dy + \sigma_2 dx + \tau_3 dy + \sigma_4 dx = 0 = (\sigma_2 + \sigma_4) dx + (\tau_1 + \tau_3) dy, \\ \sigma_1 dy + \tau_2 dx + \sigma_3 dy + \tau_4 dx = 0 = (\tau_2 + \tau_4) dx + (\sigma_1 + \sigma_3) dy, \end{array} \right.$$

con lo cual:

$$\sigma_2 = -\sigma_4, \quad \tau_1 = -\tau_3, \quad \tau_2 = -\tau_4, \quad \sigma_1 = -\sigma_3.$$

Como se trata de una situación en equilibrio, también la sumatoria de torques se tendrá que anular. Esto significa que:

$$\left. \begin{array}{l} (\tau_1 dy) \frac{dx}{2} - (\tau_2 dx) \frac{dy}{2} = 0 \\ (\tau_3 dy) \frac{dx}{2} - (\tau_4 dx) \frac{dy}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4,$$

entonces, nos damos cuenta que existen sólo tres cantidades independientes: dos esfuerzos normales σ_1 y σ_2 ; y un esfuerzo tangencial τ_1 . Adicionalmente, notamos que los esfuerzos tienen que ver con la dirección de la fuerza y la superficie sobre la cual va aplicada. Con ello podemos diseñar la siguiente notación para los esfuerzos: σ_{ij} . El primer índice indica la dirección de la fuerza y el segundo la dirección de la normal de la superficie donde está aplicada. Así, tal y como muestra la figura (ver figura 3.2 cuadrante II.)

$$\sigma_1 \equiv \sigma_{xx}, \quad -\sigma_4 \equiv \sigma_{yy}, \quad \tau_2 \equiv \sigma_{xy} \equiv \sigma_{yx}.$$

El cambio de signo se debe a lo incómodo de la notación: $\sigma_4 \equiv \sigma_{y-y}$ ya que la normal de lado 4 apunta en la dirección $-y$. Es importante también señalar que los esfuerzos en cualquier punto contenido en el diferencial de área $dA = dx dy$ deben ser considerados constantes, o lo que es lo mismo, que podemos hacer tender a cero el área del diferencial y con ello asociar los esfuerzos σ_{ij} a un punto P contenido en dA sobre la cual hemos calculado los esfuerzos.

En esta misma línea de razonamiento, nos podemos preguntar cuál es la expresión de los esfuerzos cuando se miden respecto a una superficie genérica, definida por un vector normal \mathbf{n} (ver figura 3.2 cuadrante III). Es decir, queremos conocer los esfuerzos medidos en el punto P y en la dirección \mathbf{n} , es decir, σ_{nn} .

¹³En el caso tridimensional, las fuerzas que generan los esfuerzos serán definidas como fuerzas por unidad de área. Ese caso lo veremos en la próxima sección.

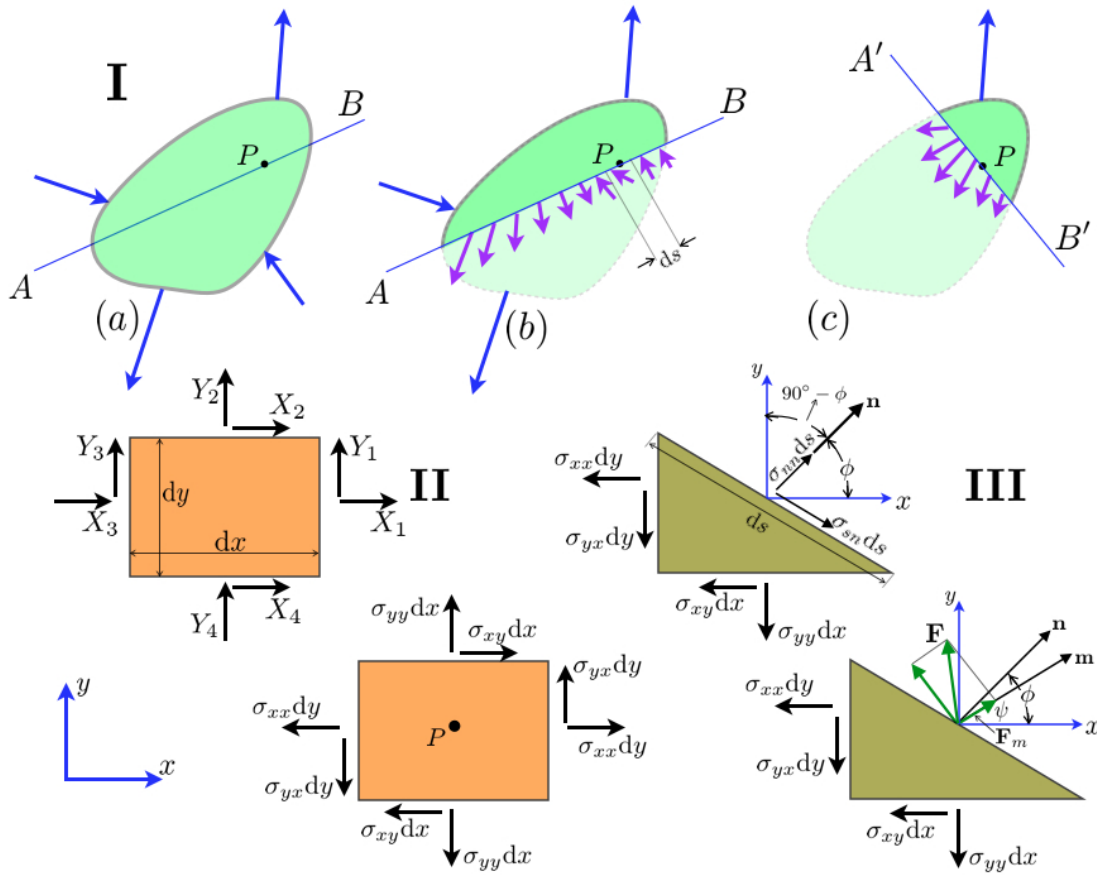


Figura 3.2: Tensor de Esfuerzos (*stress*) en 2 dimensiones. En la zona I mostramos la distribución de fuerzas sobre un cuerpo bidimensional y como se puede medir su efecto sobre un punto P . En II ilustramos la descomposición de la distribución de fuerzas en el entorno del punto P . Finalmente, en III hacemos esa descomposición de fuerzas en cualquier dirección.

Por lo tanto, tendremos que:

$$x \rightarrow \sigma_{xx}dy + \sigma_{xy}dx = \sigma_{nn}ds \cos(\phi) + \sigma_{sn}ds \sin(\phi),$$

$$y \rightarrow \sigma_{yy}dx + \sigma_{yx}dy = \sigma_{nn}ds \sin(\phi) - \sigma_{sn}ds \cos(\phi).$$

Ahora bien, dado que $dy = ds \cos(\phi)$ y $dx = ds \sin(\phi)$, entonces podemos expresar:

$$\sigma_{nn} = \sigma_{xx} \cos^2(\phi) + \sigma_{xy} \sin(\phi) \cos(\phi) + \sigma_{yx} \sin(\phi) \cos(\phi) + \sigma_{yy} \sin^2(\phi),$$

$$\sigma_{sn} = \sigma_{xx} \sin(\phi) \cos(\phi) + \sigma_{xy} \sin^2(\phi) - \sigma_{yx} \cos^2(\phi) - \sigma_{yy} \sin(\phi) \cos(\phi),$$

y si ahora nos damos cuenta de que si construimos una matriz:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} A_n^x & A_s^x \\ A_n^y & A_s^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix},$$

entonces:

$$\sigma_{nn} = A_n^x A_n^x \sigma_{xx} + A_n^x A_s^y \sigma_{xy} + A_s^y A_n^x \sigma_{yx} + A_s^y A_s^y \sigma_{yy} \Rightarrow \sigma_{nn} = A_n^i A_n^j \sigma_{ij} \quad \text{con } i, j = x, y,$$

$$\sigma_{sn} = A_s^x A_n^x \sigma_{xx} + A_s^x A_n^y \sigma_{xy} + A_n^y A_s^x \sigma_{yx} + A_n^y A_s^y \sigma_{yy} \Rightarrow \sigma_{sn} = A_s^i A_n^j \sigma_{ij} \quad \text{con } i, j = x, y,$$

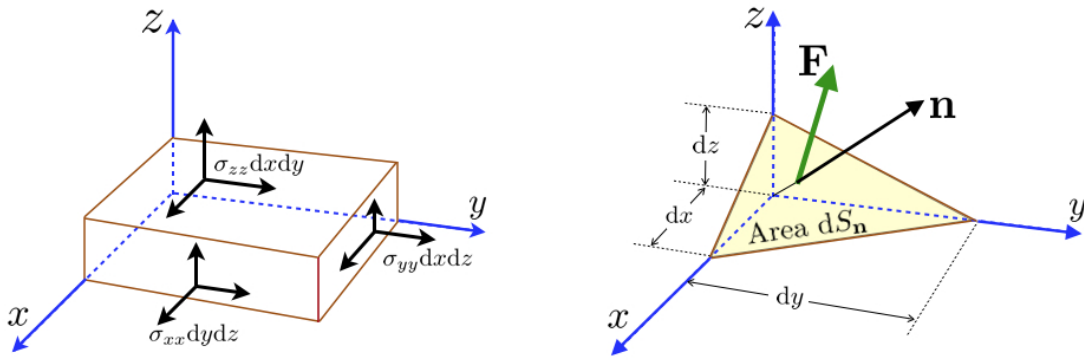


Figura 3.3: Tensor de Esfuerzos en 3 dimensiones. Repetimos el caso 2D ahora para tres dimensiones. A la izquierda las componentes cartesianas y a la derecha en cualquier dirección.

es decir:

$$\sigma_{kl} = A_k^i A_l^j \sigma_{ij}, \quad \text{con } i, j = x, y; k, l = n, s.$$

Como ya hemos mencionado, y veremos más adelante con más detalle, cualquier objeto que transforme como $\sigma_{kl} = A_k^i A_l^j \sigma_{ij}$ lo llamaremos tensor de segundo orden.

3.3.2 El tensor de esfuerzos o tensor stress (caso 3D)

Podemos proceder como en el caso anterior estableciendo las siguientes condiciones de equilibrio:

$$\sum \mathbf{F}_i^{ext} = 0 \quad \text{y} \quad \sum \boldsymbol{\tau}_i^{ext} = 0,$$

con ello construimos un volumen (cúbico) diferencial y construimos los esfuerzos normales y tangenciales, los cuales serán:

$$\sigma_{xx} dydz, \quad \sigma_{yy} dxdz, \quad \sigma_{zz} dxdy, \quad \sigma_{xz} dxdy, \quad \sigma_{yz} dxdy, \quad \sigma_{xy} dxdz.$$

Siguiendo el mismo proceso que involucra imponer el equilibrio, es fácil demostrar que al igual que el caso anterior, el tensor de esfuerzos σ_{ij} cumple con:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx}.$$

Tendremos seis componentes (tres normales y tres tangenciales) independientes. Es decir, si bien el tensor de esfuerzos σ_{ij} viene representado por una matriz 3×3 y por lo tanto tiene 9 elementos, sólo seis son independientes.

Vayamos ahora al caso general para un tensor de esfuerzos en un medio elástico. Para ello construimos un tetraedro regular tal y como muestra la figura 3.3, y sobre su cara genérica asociada a un vector normal \mathbf{n} una fuerza \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = F^i \hat{\mathbf{i}}_i = F_x \hat{\mathbf{i}} + F_y \hat{\mathbf{j}} + F_z \hat{\mathbf{k}} \Rightarrow \begin{cases} F_x = \sigma_{xn} dS_n \\ F_y = \sigma_{yn} dS_n \\ F_z = \sigma_{zn} dS_n \end{cases} \Rightarrow F^i = \sigma_j^i n^j dS \Rightarrow \mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}.$$

De esta manera se especifica como la fuerza actúa sobre un determinado elemento de superficie. Es

claro que la condición de equilibrio se traduce en:

$$\begin{aligned} \sum F_{xi} = 0 &\Rightarrow \sigma_{xn} dS_n - \frac{1}{2} \sigma_{xx} dy dz - \frac{1}{2} \sigma_{xy} dx dz - \frac{1}{2} \sigma_{xz} dx dy = 0, \\ \sum F_{yi} = 0 &\Rightarrow \sigma_{yn} dS_n - \frac{1}{2} \sigma_{yx} dy dz - \frac{1}{2} \sigma_{yy} dx dz - \frac{1}{2} \sigma_{yz} dx dy = 0, \\ \sum F_{zi} = 0 &\Rightarrow \sigma_{zn} dS_n - \frac{1}{2} \sigma_{zx} dy dz - \frac{1}{2} \sigma_{zy} dx dz - \frac{1}{2} \sigma_{zz} dx dy = 0. \end{aligned}$$

Si consideramos la proyección de dS_n sobre cada uno de los planos del sistema cartesiano tendremos:

$$\left. \begin{aligned} dS^n \cos(\mathbf{i}; \mathbf{n}) &= \frac{1}{2} dy dz = dS^n A_n^x \\ dS^n \cos(\mathbf{j}; \mathbf{n}) &= \frac{1}{2} dx dz = dS^n A_n^y \\ dS^n \cos(\mathbf{k}; \mathbf{n}) &= \frac{1}{2} dx dy = dS^n A_n^z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_{xn} = \sigma_{xx} A_n^x + \sigma_{xy} A_n^y + \sigma_{xz} A_n^z,$$

y equivalentemente:

$$\sigma_{yn} = \sigma_{yx} A_n^x + \sigma_{yy} A_n^y + \sigma_{yz} A_n^z \quad \text{y} \quad \sigma_{zn} = \sigma_{zx} A_n^x + \sigma_{zy} A_n^y + \sigma_{zz} A_n^z,$$

las cuales se conocen como las relaciones de Cauchy. Estas relaciones representan los esfuerzos sobre la superficie con normal \mathbf{n} .

Ahora bien, dado que: $\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} dS$ es una relación vectorial podemos proyectar en la dirección $\hat{\mathbf{u}}_m$:

$$\hat{\mathbf{u}}_m \cdot \mathbf{F} = \hat{\mathbf{u}}_m \cdot (\boldsymbol{\sigma} dS) \Rightarrow F^m = \sigma_n^m dS^n = (\sigma_i^m A_n^i) dS^n = (\sigma_i^m A_n^i) dS^n,$$

por lo tanto:

$$\sigma_{mn} dS^n = (\sigma_{mi} A_n^i) dS^n \Rightarrow \sigma_{mn} dS^n = (\sigma_{ki} A_m^k A_n^i) dS^n, \quad \text{con } i, j = x, y, z.$$

Una vez más, podemos ver que transforma como un tensor.

3.3.3 El Tensor de inercia

Consideremos el caso de un sistema de n partículas. La cantidad de movimiento angular para este sistema vendrá dada por:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_{(i)} (\mathbf{r}_{(i)} \times \mathbf{v}_{(i)}),$$

donde hemos indicado que la i -ésima partícula que está en la posición $\mathbf{r}_{(i)}$ tiene una velocidad $\mathbf{v}_{(i)}$.

Si las distancias entre las partículas, y entre las partículas con el origen de coordenadas, son constantes, podremos expresar la velocidad de cada una de ellas como:

$$\mathbf{v}_{(i)} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(i)}, \quad \text{¿Por qué?},$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular instantánea del sistema. Entonces tendremos que:

$$\mathbf{L} = \sum_i m_{(i)} [\mathbf{r}_{(i)} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(i)})] = \sum_i m_{(i)} [\boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}_{(i)} \cdot \mathbf{r}_{(i)}) - \mathbf{r}_{(i)} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{(i)})],$$

y para cada partícula se cumple que las componentes de la cantidad de movimiento angular serán:

$$L^k = \sum_i m_{(i)} \left[\omega^k (r_{(i)}^m r_{(i)m}) - r_{(i)}^k (\omega^m r_{(i)m}) \right].$$

Si vemos que $\omega_{(i)}^k = \delta_l^k \omega_{(i)}^l$ entonces:

$$L^k = \sum_i m_{(i)} \left[\delta_l^k \omega_{(i)}^l (r_{(i)}^m r_{(i)m}) - r_{(i)}^k (\omega_{(i)}^m r_{(i)m}) \right] = \omega_{(i)}^l \underbrace{\left[\sum_i m_{(i)} (\delta_l^k (r_{(i)}^m r_{(i)m}) - r_{(i)}^k (r_{(i)l})) \right]}_{I_l^k}$$

es decir:

$$L^k = \omega_{(i)}^l I_l^k, \quad \text{donde:} \quad I_l^k = \sum_i m_{(i)} \left(\delta_l^k \left(r_{(i)}^m r_{(i)m} \right) - r_{(i)}^k \left(r_{(i)l} \right) \right).$$

El objeto I_l^k se conoce como el tensor de inercia y corresponde a nueve cantidades (sólo seis son independientes porque es un tensor simétrico). En coordenadas cartesianas se verá de la siguiente forma:

$$I_l^k = \begin{pmatrix} I_x^x & I_x^y & I_x^z \\ I_y^x & I_y^y & I_y^z \\ I_z^x & I_z^y & I_z^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_{(i)} (y_{(i)}^2 + z_{(i)}^2) & -\sum_i m_{(i)} (x_{(i)} y_{(i)}) & -\sum_i m_{(i)} (x_{(i)} z_{(i)}) \\ -\sum_i m_{(i)} (x_{(i)} y_{(i)}) & \sum_i m_{(i)} (x_{(i)}^2 + z_{(i)}^2) & -\sum_i m_{(i)} (y_{(i)} z_{(i)}) \\ -\sum_i m_{(i)} (x_{(i)} z_{(i)}) & -\sum_i m_{(i)} (y_{(i)} z_{(i)}) & \sum_i m_{(i)} (x_{(i)}^2 + y_{(i)}^2) \end{pmatrix}.$$

Por ahora, nos contentaremos con esta construcción y en los ejercicios le propondremos que muestre que es un tensor.

3.3.4 Energía libre para un medio elástico

Consideremos el siguiente par de tensores provenientes de la teoría de elasticidad:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} (\partial_k u_i + \partial_i u_k) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} \right), \quad (u_k^i)^0 = u_k^i - \frac{1}{3} u_m^m \delta_k^i,$$

y construyamos el tensor de esfuerzos como: $p_j^i = 2\lambda (u_j^i)^0 + K u_l^l \delta_j^i$.

Calculemos la energía libre para el medio elástico, definida como: $F = \frac{1}{2} p_j^i u_i^j$ y tenemos que:

$$p_j^i = 2\lambda (u_j^i)^0 + K u_l^l \delta_j^i = 2\lambda \left(u_j^i - \frac{1}{3} u_m^m \delta_j^i \right) + K u_l^l \delta_j^i = 2\lambda u_j^i + u_l^l \delta_j^i \left(K - \frac{2\lambda}{3} \right),$$

donde: $u_m^m = \frac{1}{2} (\partial^m u_m + \partial_m u^m) = \partial^m u_m$, con lo cual:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} p_j^i u_i^j = \frac{1}{2} \left(2\lambda u_j^i + u_l^l \delta_j^i \left(K - \frac{2\lambda}{3} \right) \right) u_i^j = \left(\lambda u_j^i u_i^j + u_l^l \delta_j^i u_i^j \left(\frac{1}{2} K - \frac{\lambda}{3} \right) \right) \\ &= \lambda (u_1^1 u_1^1 + u_2^1 u_1^2 + u_3^1 u_1^3) + \left(\frac{1}{2} K - \frac{\lambda}{3} \right) (u_l^l)^2, \\ &= \lambda ((u_1^1 u_1^1 + u_2^1 u_1^2 + u_3^1 u_1^3) + (u_2^1 u_1^2 + u_2^2 u_2^2 + u_3^2 u_2^3) + (u_3^1 u_1^3 + u_3^2 u_2^3 + u_3^3 u_3^3)) + \left(\frac{1}{2} K - \frac{\lambda}{3} \right) (u_l^l)^2, \\ &= \lambda ((u_1^1)^2 + (u_2^1)^2 + (u_3^1)^2 + 2(u_2^1 u_1^2 + u_3^2 u_2^3 + u_1^3 u_3^1)) + \left(\frac{1}{2} K - \frac{\lambda}{3} \right) (u_l^l)^2, \\ &= \left(\frac{1}{2} K + \frac{2\lambda}{3} \right) (u_l^l)^2 + 2\lambda (u_2^1 u_1^2 + u_3^2 u_2^3 + u_1^3 u_3^1), \\ &= \left(\frac{1}{2} K + \frac{2\lambda}{3} \right) (\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z)^2 + 2\lambda (\partial_x u_y \partial_y u_x + \partial_y u_z \partial_z u_y + \partial_z u_x \partial_x u_z). \end{aligned}$$

Practicando con SymPy

1. Tensores y SymPy

SymPy contiene un módulo para hacer manipulación simbólica con objetos con índices y se llama "sympy.tensor.tensor".

Para más información: <https://docs.sympy.org/latest/modules/tensor/tensor.html>

```
[1]: import sympy
      from sympy import *
```

```
from sympy.tensor.tensor import *
init_printing()
```

Empezamos definiendo un tensor métrico abstracto

```
[2]: gij = TensorIndexType('gij',dim=3,metric_name='g',metric_symmetry = 1,
    ↪ dummy_name='g')
gij.metric
i, j,k,l = tensor_indices('i,j,k,l', gij)
g = gij.metric
```

```
[3]: g(i,j)
```

[3]: g^{ij}
La δ de Kronecker δ_i^j

```
[4]: i, j = tensor_indices('i,j', gij)
       $\delta$  = gij.delta
```

```
[5]:  $\delta(i,j)$ 
```

[5]: KD^{ij}

```
[6]: t =  $\delta(i,-j)*\delta(-i,j)*g(k, l)$ 
t.canon_bp()
t.contract_metric(g).canon_bp()
```

[6]: $KD^{g_0 g_1} KD_{g_0 g_1} g^{kl}$

Para el símbolo de Levi-Civita:

```
[7]: i, j, k = tensor_indices('i,j,k', gij)
       $\epsilon$  = gij.epsilon
```

```
[8]:  $\epsilon(i,j,k)$ 
```

[8]: Eps^{ijk}

Un tensor T de dos índices

```
[9]: i = TensorIndex('i', gij, is_up=True)
j, k = tensor_indices('j, k', gij)
T = TensorHead('T', [gij, gij])
T(i, j), T(-i, -j), T(i, -j)
```

[9]: (T^{ij}, T_{ij}, T^i_j)

```
[10]:  $\delta(-i,-j)*T(j, k)$ 
```

[10]: $KD_{ig_0} T^{g_0 k}$

```
[11]:  $\delta(-i,-j)*g(j, k)$ 
```

[11]: $KD_{ig_0} g^{g_0 k}$

[12]: `g(-i,-j)*T(j, k)`

[12]: $g_{ig_0} T^{g_0 k}$

Un tensor totalmente antisimétrico de rango 2

[13]: `asym2 = TensorSymmetry.fully_symmetric(-2)`

Lo que viene a continuación es definir un diccionario de reemplazos para llevar la cuenta de las matrices a utilizar para los reemplazos en la expresión tensorial.

El “TensorIndexType” está asociado a la métrica utilizada para las contracciones (en forma totalmente covariante):

[14]: `repl = {gij: diag(1, 1, 1,)} }`

Veamos un ejemplos con componentes con el tensor F antisimétrico de rango 2:

[15]: `Ax, Ay, Bx, By = symbols('A_x A_y B_x B_y')
F = TensorHead('F', [gij, gij], asym2)
repl.update({F(-i, -j): [
[0, Ax, Ay],
[-Ax, 0, -By],
[-Ay, By, 0]]})`

Ahora es posible recuperar la forma contravariante del tensor F :

[16]: `F(i, j).replace_with_arrays(repl, [i,j])`

[16]:
$$\begin{bmatrix} 0 & A_x & A_y \\ -A_x & 0 & -B_y \\ -A_y & B_y & 0 \end{bmatrix}$$

O el tensor mixto

[17]: `F(i, -j).replace_with_arrays(repl, [i,-j])`

[17]:
$$\begin{bmatrix} 0 & A_x & A_y \\ -A_x & 0 & -B_y \\ -A_y & B_y & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular $F_{ij} F^{ij}$

[18]: `(F(i,j)*F(-i,-j)).replace_with_arrays(repl, [])`

[18]: $2A_x^2 + 2A_y^2 + 2B_y^2$

O para calcular $F_j^i F_k^j$

[19]: `(F(i,-j)*F(j, -k)).replace_with_arrays(repl, [])`

[19]:
$$\begin{bmatrix} -A_x^2 - A_y^2 & A_y B_y & -A_x B_y \\ A_y B_y & -A_x^2 - B_y^2 & -A_x A_y \\ -A_x B_y & -A_x A_y & -A_y^2 - B_y^2 \end{bmatrix}$$

Definimos las componentes de la δ de Kronecker

```
[20]: D = TensorHead('D', [gij, gij])
      repl.update({D(i, j): [
          [1, 0, 0],
          [0, 1, 0],
          [0, 0, 1]]})
```

```
[21]: D(i, -j).replace_with_arrays(repl, [i, -j])
      D(-i, -j).replace_with_arrays(repl, [-i, -j])
```

[21]:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular $F^{ij}\delta_{ik}$

```
[22]: (F(i,j)*D(-i,-k)).replace_with_arrays(repl, [])
```

[22]:
$$\begin{bmatrix} 0 & -A_x & -A_y \\ A_x & 0 & B_y \\ A_y & -B_y & 0 \end{bmatrix}$$

La identidad $\delta^{ij}\delta_{ij}$

```
[23]: (D(i,j)*D(-i,-j)).replace_with_arrays(repl, [])
```

[23]: 3

3.3.5 Ejercicios

1. Considere dos espacios vectoriales de polinomios de grado ≤ 2 , $\mathcal{P}_2(x)$ y $\mathcal{G}_2(y)$. Se puede construir un espacio tensorial a partir de estos espacios vectoriales mediante el producto exterior $\mathcal{T}_2(xy) = \mathcal{P}_2(x) \otimes \mathcal{G}_2(y)$ de tal manera que cualquier polinomio en dos variables puede ser escrito como $\mathcal{T}_2(xy) = c^{ij} |e_i^{\mathcal{P}}, e_j^{\mathcal{G}}\rangle$. Donde $\{|e_i^{\mathcal{P}}\rangle\}$ y $\{|e_j^{\mathcal{G}}\rangle\}$ corresponden a bases ortogonales para los espacios vectoriales $\mathcal{P}_2(x)$ y $\mathcal{G}_2(y)$, respectivamente.
 - (a). Considere el polinomio $p^{\mathcal{P}}(x) = x^2 + x + 3$ y expréselo en término de la base de polinomios de Legendre $\{|e_i^{\mathcal{P}}\rangle\} \leftrightarrow \{|P_i(x)\rangle\}$
 - (b). Seleccione ahora dos polinomios $p^{\mathcal{P}}(x) = x^2 + x + 3$ y $p^{\mathcal{G}}(y) = y + 1$. Construya el tensor, $p^{\mathcal{P} \otimes \mathcal{G}}(x, y) = p^{\mathcal{P}}(x) \otimes p^{\mathcal{G}}(y)$, mediante el producto exterior de esos polinomios.
 - (c). Elija las bases de monomios $\{1, x, x^2\}$ y $\{1, y, y^2\}$ e identifique las componentes c^{ij} del tensor $p^{\mathcal{P} \otimes \mathcal{G}}(x, y)$ al expandir ese tensor respecto a estas bases en el espacio tensorial $\mathcal{T}_2(xy) = \mathcal{P}_2(x) \otimes \mathcal{G}_2(y)$.
 - (d). Ahora suponga las bases de polinomios de Legendre, $\{|e_i^{\mathcal{P}}\rangle\} \leftrightarrow \{|P_i(x)\rangle\}$ y $\{|e_j^{\mathcal{G}}\rangle\} \leftrightarrow \{|P_j(y)\rangle\}$, para $\mathcal{P}_2(x)$ y $\mathcal{G}_2(y)$. Calcule las componentes \tilde{c}^{ij} del tensor $p^{\mathcal{P} \otimes \mathcal{G}}(x, y)$ respecto a estas bases en el espacio tensorial $\mathcal{T}_2(xy) = \mathcal{P}_2(x) \otimes \mathcal{G}_2(y)$.

2. Si A_{ijk} son las componentes de un tensor covariante de orden 3 y B^{lmnp} las componentes de uno contravariante de orden 4, pruebe que $A_{ijk}B^{jkn}$ corresponden a las componentes de un tensor mixto de orden 3.

3. Dadas las componentes de tensores:

$$R_j^i = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix}, \quad T^i = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre:

- La parte simétrica S_j^i y antisimétrica A_j^i de R_j^i .
 - $R_{kj} = g_{ik}R_j^i$, $R^{ki} = g^{jk}R_j^i$, $T_j = g_{ij}T^i$ ¿Qué se concluye de estos cálculos?
 - $R_j^iT_i$, $R_j^iT^j$, $R_j^iT_iT^j$.
 - $R_j^iS_i^j$, $R_j^iA_i^j$, $A_i^jT^i$, $A_i^jT^iT_j$.
 - $R_j^i - 2\delta_j^i R_l^l$, $(R_j^i - 2\delta_j^i R_l^l)T_i$, $(R_j^i - 2\delta_j^i R_l^l)T_iT^j$.
4. Demuestre que si S_j^i representa las componentes de un tensor simétrico y A_j^i de uno antisimétrico, entonces, $S_j^iA_i^j = 0$.
5. Dadas las F_{ijk} componentes de un tensor totalmente antisimétrico respecto a sus índices ijk , demuestre que el rotacional de F_{ijk} definido como sigue, también serán componentes de un tensor.
- $$\text{rot}[F_{ijk}] = \partial_m F_{ijk} - \partial_i F_{jkm} + \partial_j F_{kmi} - \partial_k F_{mij} \equiv \frac{\partial F_{ijk}}{\partial x^m} - \frac{\partial F_{jkm}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{kmi}}{\partial x^j} - \frac{\partial F_{mij}}{\partial x^k}.$$
6. Consideremos un tensor \mathcal{B} con componentes B_i^j , un tensor \mathcal{A} con componentes a_i y el producto:
- $$B_i^j a_j = c_i.$$

Esta última expresión se puede interpretar como la acción de \mathcal{B} sobre \mathcal{A} que consiste en producir un nuevo tensor \mathcal{C} que tendrá una magnitud y una dirección diferente a \mathcal{A} . Podremos estar interesados en encontrar todos los vectores que NO son rotados por \mathcal{B} , es decir, que estaríamos interesados en resolver la ecuación:

$$B_i^j a_j = \lambda a_i, \text{ donde } \lambda \text{ es un escalar.}$$

Si estos vectores existen se denominan vectores característicos o “autovectores” de \mathcal{B} y sus direcciones: direcciones principales o característicos¹⁴. Más aún, los ejes determinados por las direcciones principales se denominan ejes principales de \mathcal{B} . Los valores de las componentes B_i^j en el sistema de coordenadas determinado por los ejes principales se denominan valores característicos o “autovalores” de \mathcal{B} .

Ahora, como lo ilustramos en los ejemplos, consideremos un sistema conformado por n partículas de masas iguales: $m_1, m_2, \dots, m_n = m$, distribuidas en el plano xy , y sea I_{ij} el tensor de inercia con respecto a un sistema rectangular de coordenadas. Por ser un caso en 2D, el tensor de inercia tendrá solamente cuatro componentes.

- (a). Encuentre: $I_{11} = I_{xx}$, $I_{22} = I_{yy}$ y $I_{12} = I_{xy} = I_{21} = I_{yx}$.

¹⁴Para detalles de como calcular autovalores y autovectores puede ver el ejemplo 4.28.

- (b). Si un vector \mathbf{a} coincide con el eje principal de I_i^j entonces debe satisfacer la ecuación:

$$I_i^j a_j = \lambda a_i \Rightarrow (I_i^j - \lambda \delta_i^j) a_j = 0 \Rightarrow \begin{cases} (I_{11} - \lambda) a_1 + I_{12} a_2 = 0 \\ I_{12} a_1 + (I_{22} - \lambda) a_2 = 0. \end{cases}$$

Encuentre la solución (no trivial) para λ , es decir, resuelva:

$$\lambda^2 - \lambda(I_{11} + I_{22}) + I_{11}I_{22} - (I_{12})^2 = 0.$$

- (c). ¿Cómo se interpreta el hecho de que $I_{12} = 0$?
- (d). Si $I_{12} \neq 0$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces, para cada valor de λ se puede encontrar un vector (autovector) $\mathbf{A}^{(\lambda_1)}$ y $\mathbf{A}^{(\lambda_2)}$ resolviendo el sistema de dos ecuaciones. Demuestre que las direcciones de estos vectores tienen pendientes, respecto al sistema de coordenada, dadas por:

$$\tan(\theta_1) = \frac{\lambda_1 - I_{11}}{I_{12}}, \quad \tan(\theta_2) = \frac{\lambda_2 - I_{11}}{I_{12}}.$$

- (e). Demuestre que:

$$\tan(2\theta_1) = \tan(2\theta_2) = \frac{2I_{12}}{I_{11} - I_{22}}, \quad \text{donde } \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2},$$

es decir: $\mathbf{a}^{(\lambda_1)} \perp \mathbf{a}^{(\lambda_2)}$.

- (f). ¿Cuáles son las componentes del tensor de inercia en el sistema de coordenadas determinado por los ejes principales?

7. En este ejercicio generalizamos la definición del momento de inercia para cuerpos continuos, el cual se define como:

$$I_j^i = \int_V dv \rho(\mathbf{r}) \left(\delta_j^i (x^k x_k) - x^i x_j \right), \quad \text{con } x^i = \{x, y, z\} \text{ y } dv = dx dy dz.$$

- (a). Muestre que I_j^i es un tensor.
- (b). Considere un cubo de lado l y masa total M tal que tres de sus aristas coinciden con un sistema de coordenadas cartesiano. Encuentre el tensor momento de inercia, I_j^i .
8. Dados dos sistemas de coordenadas ortogonales $O \Rightarrow (x, y, z)$ y $O' \Rightarrow (x', y', z')$, donde el sistema de coordenadas O' se obtiene rotando a O , $\pi/6$ alrededor del eje z y $\pi/2$ alrededor del eje x' , con lo cual los ejes y' y z coinciden.

- (a). Si tenemos los vectores:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}.$$

Expréselos en el sistema de coordenadas $O' \Rightarrow (x', y', z')$.

- (b). El tensor de esfuerzos (tensiones normales y tangenciales a una determinada superficie) se expresa en el sistema $O \Rightarrow (x, y, z)$ como:

$$P_j^i = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & P_4 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix}.$$

¿Cuál será su expresión en el sistema de coordenadas $O' \Rightarrow (x', y', z')$?

9. Suponga un sistema de coordenadas ortogonales generalizadas (q^1, q^2, q^3) las cuales tienen la siguiente relación funcional con las coordenadas cartesianas ¹⁵:

$$q^1 = x + y; \quad q^2 = x - y; \quad q^3 = 2z.$$

- (a). Compruebe que el sistema (q^1, q^2, q^3) conforma un sistema de coordenadas ortogonales

¹⁵Estos tipo de transformaciones a coordenadas generalizadas será analizado, con todo detalle, en la sección 5.1 de la página 364.

- (b). Encuentre los vectores base para este sistema de coordenadas.
 (c). Encuentre el tensor métrico y el elemento de volumen en estas coordenadas.
 (d). Encuentre las expresiones en el sistema (q^1, q^2, q^3) para los vectores:

$$\mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{b} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{c} = \hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}.$$

- (e). Encuentre en el sistema (q^1, q^2, q^3) las expresiones para las siguientes relaciones vectoriales:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

¿Qué puede decir si compara esas expresiones en ambos sistemas de coordenadas?

- (f). Considere los siguientes tensores y vectores en coordenadas cartesianas :

$$R_j^i = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix}, \quad T^i = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre sus expresiones para el nuevo sistema de coordenadas (q^1, q^2, q^3) .

3.4 Vectores, tensores y espacios pseudoeuclidianos

Hasta este punto la descripción de formas representadas por un *bra*: $\langle a| \equiv a_k \langle e^k|$ ha sido casi estética. Hemos insistido que las componentes de las formas tienen subíndices, mientras que sus vectores bases, $\langle e^k|$, deben tener superíndices, pero no hemos visto clara la necesidad de esa definición. Un ejemplo, un tanto tímido lo desarrollamos en la sección 3.1.2, en la página 166, donde mencionamos que las bases recíprocas de vectores podrían jugar el papel de bases para el espacio dual. Quizá el ejemplo más significativo y simple, donde se observa la diferencia entre formas (*bras*) y vectores (*kets*) es el caso de los espacios minkowskianos. Estos espacios, también llamados pseudoeuclidianos, presentan una variante en la definición de producto interno, de tal forma que: $\langle x|x \rangle$ no es necesariamente positivo, y si $\langle x|x \rangle = 0$ no necesariamente implica que $|x \rangle \equiv |0 \rangle$.

La consecuencia inmediata es que la definición de norma $\mathcal{N}(|v_i \rangle) \equiv ||v_i \rangle||$, que vimos anteriormente, no es necesariamente positiva. Vale decir que tendremos vectores con norma positiva, $||v_i \rangle|| > 0$, pero también vectores con norma negativa o cero: $||v_i \rangle|| \leq 0$. Con lo cual la definición de distancia, entendida como la norma de la resta de vectores, $d(|x \rangle, |y \rangle) \equiv ||x \rangle - |y \rangle||$, tampoco será necesariamente positiva. Esto es, que las distancias serán negativas, positivas o nulas: $d(|x \rangle, |y \rangle) < 0$, $d(|x \rangle, |y \rangle) = 0$ y $d(|x \rangle, |y \rangle) > 0$.

Si extendemos la noción de distancia para que albergue las posibilidades de distancias nula y negativas, entonces la definición del tensor métrico para espacios pseudoeuclidianos también debe cambiar.

$$\mathbf{g}[|x_i \rangle, |x_j \rangle] = g_{ij} \equiv g_{ji} \begin{cases} < 0, \\ = 0, \\ > 0. \end{cases}$$

En resumen,

$$\langle x|x \rangle = \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Rightarrow d(|x \rangle, |y \rangle) = \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{g}[|x_i \rangle, |x_j \rangle] = \begin{cases} < 0, \\ = 0, \\ > 0. \end{cases}$$

Este tipo de espacios luce como un excentricidad más de los matemáticos y una curiosidad de

estudio es ver como organizar los conceptos que aprendimos de los espacios euclidianos y extenderlos a otros espacios. Quizá se hubiera quedado así, como una curiosidad matemática si los físicos no hubieran sacado partido de estas particularidades para describir el comportamiento de la naturaleza. En la próxima sección analizaremos el caso de espacios minkowskianos de dimensión 4, que denominaremos M^4 .

3.4.1 Espacios minkowskianos

Consideremos un espacio tetradimensional expandido por una base ortonormal: $\{|\hat{e}_0\rangle, |\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle\}$. Los vectores $\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle\}$ corresponden con la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Este espacio vectorial M^4 tendrá asociado un espacio dual: $\{\langle\hat{e}^0|, \langle\hat{e}^1|, \langle\hat{e}^2|, \langle\hat{e}^3|\}$ a través de una métrica:

$$\eta_{\alpha\beta}\langle\hat{e}^\alpha| \otimes \langle\hat{e}^\beta| \equiv \eta_{\beta\alpha}\langle\hat{e}^\beta| \otimes \langle\hat{e}^\alpha| \quad \text{y} \quad \eta^{\alpha\beta}|\hat{e}_\alpha\rangle \otimes |\hat{e}_\beta\rangle \equiv \eta^{\beta\alpha}|\hat{e}_\beta\rangle \otimes |\hat{e}_\alpha\rangle,$$

con $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, y donde: $\eta_{00} = \eta^{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta^{11} = -1$, $\eta_{22} = \eta^{22} = -1$, $\eta_{33} = \eta^{33} = -1$ (con $\eta_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$). Se dice que η tiene signo -2 .¹⁶

Tal y lo como presentamos en la sección 3.5, podemos asociar componentes covariantes y contravariantes a través de la métrica $|a\rangle = a^\sigma|\hat{e}_\sigma\rangle$, entonces:

$$\begin{aligned} \left(\eta_{\alpha\beta}\langle\hat{e}^\alpha| \otimes \langle\hat{e}^\beta|\right) |a\rangle &= a^\sigma \left(\eta_{\alpha\beta}\langle\hat{e}^\alpha| \otimes \langle\hat{e}^\beta|\right) |\hat{e}_\sigma\rangle = a^\sigma \eta_{\alpha\beta} \langle\hat{e}^\beta|\hat{e}_\sigma\rangle \langle\hat{e}^\alpha| \\ &= a^\sigma \eta_{\alpha\beta} \delta_\sigma^\beta \langle\hat{e}^\alpha| = a^\sigma \eta_{\alpha\sigma} \langle\hat{e}^\alpha| \equiv a_\alpha \langle\hat{e}^\alpha|. \end{aligned}$$

Lo interesante del caso es que:

$$a_\alpha = a^\sigma \eta_{\sigma\alpha} \Rightarrow a^0 = a_0, \quad a^1 = -a_1, \quad a^2 = -a_2, \quad a^3 = -a_3.$$

Es decir, en este caso, porque la métrica tiene signo -2 , bajar los índices espaciales ($\mu = i = 1, 2, 3$) es cambiar el signo a las componentes¹⁷. Dicho con más propiedad, las componentes espaciales contravariantes ($\mu = i = 1, 2, 3$) tienen signos contrarios a las componentes covariantes.

De la misma manera que se expuso anteriormente en la sección 3.5:

$$\begin{aligned} \langle a | \left(\eta^{\alpha\beta} |\hat{e}_\alpha\rangle \otimes |\hat{e}_\beta\rangle \right) &= a_\sigma \langle \hat{e}^\sigma | \left(\eta^{\alpha\beta} |\hat{e}_\alpha\rangle \otimes |\hat{e}_\beta\rangle \right) = a_\sigma \eta^{\alpha\beta} \langle \hat{e}^\sigma | \hat{e}_\alpha\rangle |\hat{e}_\beta\rangle \\ &= a_\sigma \eta^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\sigma |\hat{e}_\beta\rangle = a_\sigma \eta^{\sigma\beta} |\hat{e}_\beta\rangle \equiv a^\beta |\hat{e}_\beta\rangle. \end{aligned}$$

y otra vez, $a^\sigma = \eta^{\sigma\alpha} a_\alpha$, y habría cambio de signo cuando se bajan los índices 1, 2, 3 para la métrica con signo -2 que hemos considerado anteriormente.

Del mismo modo se “suben” y se “bajan” índices para componentes de tensores:

$$\eta^{\alpha\beta} P_\alpha^{\gamma\sigma\epsilon} \equiv P^{\beta\gamma\sigma\epsilon}.$$

Por su parte, el producto interno de dos vectores en un espacio de Minkowski involucra, de manera natural, la métrica del espacio. Esto es: $\langle a | b \rangle = \langle b | a \rangle = a^\alpha b_\alpha = b^\alpha a_\alpha$, es decir:

$$\langle a | b \rangle = \langle b | a \rangle = a^\alpha b^\beta \eta_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\beta \eta^{\alpha\beta} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3.$$

Una vez más, la norma de un vector, también incluirá al tensor métrico:

$$\| |a\rangle \|^2 = \langle a | a \rangle = a_\alpha a^\beta \langle \hat{e}^\alpha | \hat{e}^\beta \rangle = a_\alpha a^\alpha = a_\alpha a_\beta \eta^{\alpha\beta} = a^\alpha a^\beta \eta_{\alpha\beta} = a^0 a^0 - a^1 a^1 - a^2 a^2 - a^3 a^3.$$

El caso más conocido lo constituye la norma de un desplazamiento infinitesimal, en un espacio

¹⁶Realmente el signo -2 es una convención, se puede también considerar $\eta_{\mu\nu}$ de signo $+2$, con $\eta_{00} = -1$, $\eta_{11} = +1$, $\eta_{22} = +1$, $\eta_{33} = +1$.

¹⁷Otra vez, para la métrica con signo -2 , el cambio de signo entre componentes covariantes y contravariantes se da para la componente, $\mu = 0$

tetradimensional, el cual puede expresarse como:

$$ds^2 \equiv \langle dr | dr \rangle = (dx_\alpha \langle w^\alpha |) (dx^\beta | w_\beta \rangle) = dx_\beta dx^\beta = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dt^2 - dx^2,$$

$$\text{con: } dx^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

3.4.2 Un toque de Relatividad Especial

La genialidad de Albert Einstein fue haber entendido que tenía que incorporar el tiempo como otra coordenada más, vale decir, que los eventos que ocurren en la naturaleza están etiquetados por cuatro números: $(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$ ¹⁸. El rápido desarrollo de la comprensión de las ideas relativistas muestra que estaban en el ambiente de la época de comienzos de 1900, y una vez más la simplicidad como prejuicio se impuso.

Sólo dos suposiciones están en el corazón de la Relatividad Especial:

1. *El principio de la Relatividad:* Las leyes de la Física son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.
2. *La universalidad de la velocidad de la luz en el vacío:* La velocidad de la luz en el vacío es siempre la misma, y es independiente de la velocidad de la fuente de luz respecto a un observador en particular.

En términos matemáticos estas dos audaces suposiciones se concretan en una simple propuesta matemática: el producto interno entre dos elementos de este espacio tetradimensional, debe conservarse para una familia de vectores base. Luego vendrá la asociación de observadores físicos –o sistemas de coordenadas– con los miembros de la familia de vectores base, pero la idea es la misma que planteamos para los espacios euclidianos en 2.2.3.1: el producto interno –y consecuentemente, la norma de los elementos del espacio vectorial y la distancia entre éstos– es el mismo independientemente de la base en la cual expanda el espacio vectorial.

La primera de las interpretaciones es el cómo representamos los eventos en el espacio-tiempo. Supongamos el caso unidimensional en el espacio, vale decir los eventos ocurren en un punto de la recta real $x = x^1$, y en un tiempo determinado, por lo tanto podremos asociar al evento un vector evento: (x^0, x^1) .

A continuación nos preguntamos que representan las distancias (espacio-temporales) entre estos dos eventos. Tal y como vimos, las distancias entre dos elementos de un espacio vectorial puede ser construida a partir de la norma (de la resta de coordenadas) y la norma a partir del producto interno:

$$||y-x||^2 \equiv \langle y-x | y-x \rangle \begin{cases} < 0 & \text{conexión tipo espacio: eventos desconectados causalmente.} \\ = 0 & \text{conexión tipo luz: posible conexión causal a través de rayos de luz.} \\ > 0 & \text{conexión tipo tiempo: posible conexión causal.} \end{cases}$$

La preservación del producto interno para todos los observadores era intuitiva en los espacios euclidianos y, al mantenerla para los pseudoeuclidianos nos traerá consecuencias nada intuitivas en nuestra idea intuitiva de “realidad”.

Para el caso de la formulación de la Relatividad Especial, añadimos un supuesto más: las componentes del tensor métrico son invariantes bajo transformaciones de coordenadas, esto es:

$$\mathbf{g} [|\hat{e}_\mu\rangle, |\hat{e}_\nu\rangle] \equiv \mathbf{g}' [|\hat{e}_{\mu'}\rangle, |\hat{e}_{\nu'}\rangle] \Leftrightarrow \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha'\beta'},$$

¹⁸Una discusión sobre la necesidad de incorporar los conceptos de relatividad especial en los programas de estudio de Física mediante la utilización del álgebra geométrica la pueden encontrar en Baylis, W. E. (2004). “Relativity in introductory physics”, Canadian journal of physics, 82(11), 853-873.

con: $\{|e_\mu\rangle\}$ y $\{|\hat{e}_{\mu'}\rangle\}$ dos bases que se conectan a través de una transformación de coordenadas:

$$x^\mu = x^\mu(x^{\alpha'}) \Leftrightarrow x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\alpha) .$$

Con esta primera interpretación de los valores de la norma y la visión tetradimensional, el espacio-tiempo, dividido en pasado, presente y futuro, se puebla de eventos que pueden estar o no relacionados causalmente tal y como muestra la figura 3.4. Construyamos ahora el tipo de transformación de coordenadas que mantiene estos dos supuestos (Estamos suponiendo que observadores, sistemas de coordenadas y sistemas de referencia son conceptos equivalentes):

1. El producto interno de dos vectores es independiente de la base que expande el espacio vectorial.
2. Las componentes del tensor métricos son invariantes bajo transformaciones de coordenadas.

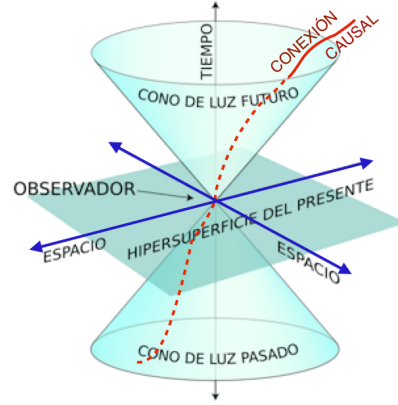


Figura 3.4: Cono de luz, espacio-tiempo y eventos. Se ilustra la relación de los eventos desde el origen de coordenadas con el cono del futuro, del pasado, la hipersuperficie del presente y la línea de causalidad dentro de los conos de futuro y pasado.

Si el producto interno de dos vectores es independiente de la base que expanda el espacio vectorial, tendremos:

$$\langle x|y \rangle = (x_\alpha \langle \hat{e}^\alpha |) (y^\beta | \hat{e}_\beta \rangle) \equiv (x_{\sigma'} \langle \hat{e}^{\sigma'} |) (y^{\alpha'} | \hat{e}_{\alpha'} \rangle) \Leftrightarrow x^\alpha y_\alpha \equiv x^{\beta'} y_{\beta'} \Leftrightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv x^{\alpha'} y^{\beta'} \eta_{\alpha'\beta'} ,$$

y como lo vimos en 3.2.8 las componentes de vectores, bajo cambio de coordenadas, transforman como:

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} a^k \Rightarrow x^\alpha y_\alpha = x^{\alpha'} y_{\alpha'} \Leftrightarrow x^\alpha y^\beta \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} x^\alpha \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} y^{\beta'} \eta_{\nu'\mu'} = x^\alpha y^\beta \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} \eta_{\nu'\mu'} ,$$

con lo cual concluimos que:

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} \eta_{\nu'\mu'} \equiv \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} \eta_{\nu\mu} . \quad (3.13)$$

Ahora bien, si derivamos (3.13) respecto a x^γ tendremos que:

$$\eta_{\nu'\mu'} \left[\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right] = 0 .$$

Como la cantidad dentro del paréntesis se anula podemos jugar con ésta para descubrir algunas consecuencias ocultas. Es de hacer notar que esa cantidad tiene tres índices libres y por lo tanto son 64 ecuaciones que se anulan. Eso significa que le podemos añadir y sustraer cualesquiera otras con los índices intercambiados.

Supongamos que al paréntesis anulado le añadimos una con los índices α y γ intercambiados y, adicionalmente, le sustraemos una con los índices γ y β intercambiados. Claramente, estamos añadiendo y sustrayendo ceros.

$$\eta_{\nu'\mu'} \left[\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \right] = 0 .$$

Con este “truco”, vemos que el último término anula el segundo y el penúltimo el cuarto, de forma que nos queda:

$$2\eta_{\nu'\mu'} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} = 0 ,$$

con lo cual la única posibilidad que resulta es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} = 0 \Rightarrow x^{\nu'} = \Lambda_{\mu}^{\nu'} x^\mu + a^{\nu'}, \quad (3.14)$$

con: $\Lambda_{\mu}^{\nu'}$ y $a^{\nu'}$ constantes.

Las transformaciones lineales (3.14) se conocen como *las transformaciones, inhomogéneas, de Lorentz* o también las transformaciones de Poincaré. Estas transformaciones forman un grupo y, uno de los posibles subgrupos lo constituye el conjunto de transformaciones propias de Lorentz de la forma:

$$\Lambda_0^{0'} = 1, \quad \Lambda_0^{i'} = \Lambda_j^{0'} = 0, \quad \text{y} \quad \Lambda_j^{i'} = R_j^{i'},$$

con: $i, j = 1, 2, 3$, y donde $R_j^{i'}$ es una matriz de rotación.

Supongamos el caso más sencillo de este grupo de transformaciones: $a^{\nu'} = 0$, en la ecuación (3.14). Explícitamente hemos identificado una transformación de la forma:

$$x^{\alpha'} = \Lambda_0^{\alpha'} x^0 + \Lambda_1^{\alpha'} x^1 + \Lambda_2^{\alpha'} x^2 + \Lambda_3^{\alpha'} x^3,$$

la cual, por construcción, deja invariante el intervalo tetradimensional:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^1 - dx^2 - dx^3 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

con $\eta_{\mu\nu}$ el tensor métrico. Aquí c es la constante que representa la velocidad de la luz en el vacío. Por razones de conveniencia se escoge un sistema de unidades donde $c = 1$ ¹⁹.

Es inmediato demostrar que este tipo de transformaciones deja invariante el intervalo. Primero, notemos que:

$$\eta^{\mu'\nu'} = \Lambda_{\alpha}^{\mu'} \Lambda_{\beta}^{\nu'} \eta^{\alpha\beta} \Rightarrow \eta^{\mu'\nu'} \eta_{\nu'\gamma'} = \delta_{\gamma'}^{\mu'} = \Lambda_{\alpha}^{\mu'} \Lambda_{\beta}^{\nu'} \eta^{\alpha\beta} \eta_{\nu'\gamma'} \Rightarrow \Lambda_{\alpha}^{\mu'} \Lambda_{\gamma'}^{\alpha} = \delta_{\gamma'}^{\mu'},$$

y como $dx^{\mu'} = \Lambda_{\alpha}^{\mu'} dx^{\alpha}$, entonces:

$$ds'^2 = \eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} \equiv \eta_{\mu'\nu'} \Lambda_{\alpha}^{\mu'} dx^{\alpha} \Lambda_{\beta}^{\nu'} dx^{\beta} = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = ds^2.$$

Para construir una de las expresiones más utilizadas del grupo de Lorentz consideramos la siguiente situación: un observador, $x^{\mu'}$, ve moverse una partícula con una velocidad \mathbf{v} , mientras que un segundo observador, x^{μ} , la percibe en reposo. Entonces, para el observador, que registra la partícula en reposo, resulta que $dx^i = 0$, y:

$$dx^{\mu'} = \Lambda_{\alpha}^{\mu'} dx^{\alpha} \Rightarrow \begin{cases} dt' &= \Lambda_0^{0'} dt \\ dx^{i'} &= \Lambda_{\alpha}^{i'} dx^{\alpha} = \Lambda_0^{i'} dt \end{cases} \quad \text{con } i' = 1, 2, 3.$$

Ahora bien, las ecuaciones anteriores nos imponen:

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} \Rightarrow v^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dt'} \Rightarrow \Lambda_0^{i'} = v^{i'} \Lambda_0^{0'}.$$

Además, tenemos que:

$$\eta_{\alpha'\beta'} = \Lambda_{\alpha}^{\mu'} \Lambda_{\beta}^{\nu'} \eta_{\mu\nu} \Rightarrow 1 = \Lambda_0^{\mu} \Lambda_0^{\nu} \eta_{\mu\nu} = (\Lambda_0^0)^2 - (\Lambda_0^1)^2 - (\Lambda_0^2)^2 - (\Lambda_0^3)^2,$$

con una solución de la forma:

$$\Lambda_0^0 = \gamma, \quad \Lambda_0^{i'} = \gamma v^i,$$

¹⁹Un sistema de unidades denominado *sistema de unidades geometrizado* en el cual la velocidad de la luz y la constante de gravitación universal se toman como la unidad: $c = G = 1$.

donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^i v_i}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - [(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2]}} ,$$

los otros términos $\Lambda_{j'}^i$ no quedan unívocamente determinados porque está de por medio la arbitrariedad de una rotación $R_{j'}^i$. Por ello, una selección arbitraria pero razonable de todos los términos $\Lambda_{j'}^i$ es:

$$\Lambda_{j'}^i = \delta_{j'}^i + v^i v_{j'} \frac{\gamma - 1}{\mathbf{v}^2} \equiv \delta_{j'}^i + v^i v_{j'} \frac{\gamma - 1}{v^k v_k} .$$

De esta forma quedan determinados todos los elementos de las transformaciones de Lorentz.

Los observadores lorentzianos son los equivalentes a los observadores galileanos en las teorías newtonianas: son observadores que se mueven uno respecto al otro con una velocidad constante y, desempeñan el mismo papel que los observadores inerciales. Quizá la consecuencia más impactante de la necesidad de vincular mediciones de distintos observadores lorentzianos a través de transformaciones de Lorentz, lo ilustra la evolución distinta del tiempo medido por los diferentes observadores. Un observador en reposo respecto a un reloj, ve avanzar el tiempo con *tic* separados por $dt = \Delta t$, ya que su reposo respecto al reloj implica: $dx^i = 0$, por lo tanto la separación espacio temporal será:

$$ds^2 = dt^2 - (dx^i)^2 = (\Delta t)^2 \Rightarrow dt = \Delta t ,$$

mientras que un segundo observador, en movimiento, tendrá el mismo elemento de línea pero expresado como:

$$ds'^2 = dt'^2 - (dx'^i)^2 = (1 - \mathbf{v}^2) dt'^2 \Rightarrow dt' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} ,$$

y ésta última ecuación claramente indica que el tiempo evoluciona más lento para relojes en movimiento.

Ejemplo 3.16 En este ejemplo vamos a repetir, para el caso bidimensional, lo expuesto de manera general en la sección anterior. Como vimos, las transformaciones de Lorentz relacionan las coordenadas del espacio-tiempo medidas por un observador O de un evento, con las coordenadas medidas por otro observador O' del mismo evento. El observador O lo representaremos por las coordenadas $\{t, x, y, z\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$, mientras que el observador O' por $\{t', x', y', z'\} = \{x'^0, x'^1, x'^2, x'^3\}$. Para lo que sigue, supondremos que cuando los observadores coincidan los relojes de ambos marcarán $t = t' = 0$.

La ecuación (3.14),

$$x'^{\nu'} = \Lambda_{\mu}^{\nu'} x^{\mu} ,$$

la podemos expandir en lo que realmente es:

$$\begin{aligned} t' = x'^0 &= \Lambda_0^{0'} x^0 + \Lambda_1^{0'} x^1 + \Lambda_2^{0'} x^2 + \Lambda_3^{0'} x^3 , \\ x' = x'^1 &= \Lambda_0^{1'} x^0 + \Lambda_1^{1'} x^1 + \Lambda_2^{1'} x^2 + \Lambda_3^{1'} x^3 , \\ y' = x'^2 &= \Lambda_0^{2'} x^0 + \Lambda_1^{2'} x^1 + \Lambda_2^{2'} x^2 + \Lambda_3^{2'} x^3 , \\ z' = x'^3 &= \Lambda_0^{3'} x^0 + \Lambda_1^{3'} x^1 + \Lambda_2^{3'} x^2 + \Lambda_3^{3'} x^3 . \end{aligned}$$

Vamos a suponer que O' se mueve respecto a O , con velocidad v , únicamente en la dirección x , es decir, $y' = y$ y $z' = z$. Se supone entonces que t' no dependerá ni de y ni de z y que cuando $x' = 0$ entonces $x = vt$.

Todo esto hace que el sistema de ecuaciones anterior se simplifique de manera significativa:

$$\begin{aligned} t' = x^{0'} &= \Lambda_0^{0'} x^0 + \Lambda_1^{0'} x^1 = \Lambda_0^{0'} t + \Lambda_1^{0'} x, \\ x' = x^{1'} &= \Lambda_1^{1'} (x^1 - vt) = \Lambda_1^{1'} (x - vt), \\ y' = x^{2'} &= x^2 = y, \\ z' = x^{3'} &= x^3 = z. \end{aligned}$$

Debemos determinar los coeficientes $\Lambda_0^{0'}$, $\Lambda_1^{0'}$ y $\Lambda_1^{1'}$. Para tal fin vamos a suponer que cuando $t' = t = 0$ un pulso de luz es emitido desde el origen de coordenadas. Recordemos que en ese instante ambos observadores coinciden. Como suponemos además que la velocidad de la luz es constante, la onda de luz se propagará en todas las direcciones de manera que cada observador podrá describirla mediante la ecuación de una esfera cuyo radio aumenta con el tiempo a velocidad c . Esto es:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

Por lo tanto:

$$[\Lambda_1^{1'} (x - vt)]^2 + y^2 + z^2 = c^2 [\Lambda_0^{0'} t + \Lambda_1^{0'} x]^2.$$

Al desarrollar esta última ecuación obtenemos:

$$\left(\Lambda_1^{1'}\right)^2 (x^2 - 2xvt + v^2 t^2) + y^2 + z^2 = c^2 \left[\left(\Lambda_0^{0'}\right)^2 t^2 + 2\Lambda_0^{0'} \Lambda_1^{0'} xt + \left(\Lambda_1^{0'}\right)^2 x^2 \right],$$

por lo tanto:

$$\left[\left(\Lambda_1^{1'}\right)^2 - c^2 \left(\Lambda_1^{0'}\right)^2 \right] x^2 + y^2 + z^2 - 2xt \left[\left(\Lambda_1^{1'}\right)^2 v + c^2 \Lambda_0^{0'} \Lambda_1^{0'} \right] = \left[c^2 \left(\Lambda_0^{0'}\right)^2 - v^2 \left(\Lambda_1^{1'}\right)^2 \right] t^2.$$

Como ambos observadores registran la misma onda de luz, entonces:

$$\begin{aligned} \left(\Lambda_1^{1'}\right)^2 - c^2 \left(\Lambda_1^{0'}\right)^2 &= 1, \\ \left(\Lambda_1^{1'}\right)^2 v + c^2 \Lambda_0^{0'} \Lambda_1^{0'} &= 0, \\ c^2 \left(\Lambda_0^{0'}\right)^2 - v^2 \left(\Lambda_1^{1'}\right)^2 &= c^2. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas resulta:

$$\Lambda_1^{1'} = \Lambda_0^{0'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Lambda_1^{0'} = \frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Si definimos $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, las transformaciones de Lorentz quedan entonces de la forma:

$$t' = \left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \gamma, \quad x' = (x - vt) \gamma, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Existen las transformaciones inversas que se pueden obtener de la misma manera que las anteriores.

$$t = \left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right) \gamma, \quad x = (x' + vt') \gamma, \quad y = y', \quad z = z'.$$

Notemos que cuando el observador O' se mueve a velocidades muy pequeñas en comparación a c , entonces el factor γ tiende a la unidad:

$$v \ll c \Rightarrow \gamma \rightarrow 1,$$

por lo tanto:

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

que no es más que la transformación de Galileo.

Ejemplo 3.17 Si un observador O' determina que dos eventos ocurren en el mismo lugar, pero separados en el tiempo; entonces, un observador O ¿cómo los apreciaría? Veamos dos situaciones diferentes.

- Consideremos a una persona sentada en un tren en movimiento, observador O' , esta persona enciende y apaga rápidamente una linterna dos veces, con una diferencia de 15 minutos entre un evento y el otro. Entonces para O' será dos eventos que ocurren en el mismo lugar. Pero para el observador O que se encuentra en tierra los eventos habrán ocurrido en lugares diferentes, y esto no parece tener ningún conflicto con nuestra experiencia e intuición.
- Si O' sigue en su asiento del tren y observa que dos personas, uno a cada extremo del vagón (a unos 30 m), encienden las linternas al mismo tiempo, entonces para O' será un evento simultáneo, pero para el observador en tierra O que ve al tren alejarse determinará que la persona de la parte trasera encendió la linterna un poco antes que la persona apostada en la parte delantera. Esto tal vez si nos resulte algo extraño.

Consideremos que el tren viaja a 36 m/s (≈ 130 Km/h) entonces, esta pequeña velocidad se refleja en el factor γ de la manera siguiente:

$$\frac{v}{c} = 1.2 \times 10^{-7} \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1.44 \times 10^{-14} \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 1.44 \times 10^{-14}}} \approx 1.0000000000000007.$$

Cuando consideramos la primera situación, la diferencia entre un evento y el otro era de 15 minutos (900 seg), y para el observador en tierra ambos eventos ocurren en dos lugares diferentes: x_1 y x_2 ,

$$x_1 = (x'_1 + vt'_1) \gamma, \quad x_2 = (x'_2 + vt'_2) \gamma,$$

de manera que:

$$x_2 - x_1 = (x'_2 + vt'_2) \gamma - (x'_1 + vt'_1) \gamma = (x'_2 - x'_1) \gamma + (t'_2 - t'_1) v \gamma.$$

Pero: $x'_2 = x'_1$ y $t'_2 - t'_1 = 15$ min. Por lo tanto:

$$x_2 - x_1 = (900 \text{ s})(36 \text{ m.s}^{-1})\gamma = 32400 \text{ m} = 32.4 \text{ Km}.$$

Para la segunda situación, el observador en tierra puede dar fe que los dos eventos ocurren en tiempos diferentes: t_1 y t_2 ,

$$t_1 = \left(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1\right) \gamma, \quad t_2 = \left(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2\right) \gamma,$$

de manera que:

$$t_2 - t_1 = \left(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2\right) \gamma - \left(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1\right) \gamma = (t'_2 - t'_1) \gamma + (x'_2 - x'_1) \frac{v}{c^2} \gamma,$$

con: $t'_2 = t'_1$ y $x'_2 - x'_1 = 30$ metros, resulta:

$$t_2 - t_1 = (30 \text{ m}) \left[\frac{36 \text{ m.s}^{-1}}{(3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1})^2} \right] \gamma = 1.2 \times 10^{-14} \text{ s}.$$

Intervalo de tiempo muy pequeño pero diferente de cero: el observador en tierra no aprecia que los eventos fueron simultáneos.

Este valor tan pequeño, obviamente, es debido a que el factor γ es casi la unidad. Notemos que si el tren viajara a una velocidad cercana a c , digamos $v = 0.99999999 c$, entonces:

$$\frac{v}{c} = 0.99999999 \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 0.99999998 \rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.99999998}} \approx 7071.06780.$$

por lo que:

$$t_2 - t_1 = (30 \text{ m}) \left[\frac{36 \text{ m.s}^{-1}}{(3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1})^2} \right] \gamma = 8.49 \times 10^{-11} \text{ s}.$$

En vista de lo anterior, se podría esperar que ocurran cosas curiosas con las longitud de los objetos.

Supongamos que el observador que viaja en el tren coloca su laptop en el piso y mide su longitud. Esto significa que la computadora está en reposo para O' y, en la dirección del eje x , la laptop mide $x'_2 - x'_1$ según O' . Para el observador que está en tierra la laptop viaja a una velocidad vt , de manera que:

$$x'_2 - x'_1 = [(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)] \gamma,$$

Para el observador que se encuentra en reposo la laptop mide $x_2 - x_1$, medida en el instante $t_2 = t_1$. Por lo tanto:

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1}{\gamma}.$$

¡La laptop se contrae por el factor γ !

Practicando con SymPy

1. En los grandes aceleradores de partículas se puede producir piones cargados cuando se hace colisionar protones de gran energía con algún blanco preparado para este fin. Se conoce que los piones tienen una vida media muy corta: 1.77×10^{-8} s. Lo que esto significa es, que una vez que se producen los piones, la mitad de ellos se habrían desintegrado en un tiempo de 1.77×10^{-8} s. Los experimentos en el acelerador reflejan el hecho de que la intensidad del haz de piones que emerge del blanco, y que viaja a $0.99c$, se reduce a la mitad una vez que recorren 37.2 m. Pero sucede que si los piones viajan a $0.99c = 2.968 \times 10^8$ m/s cuando estos hayan decaído a la mitad la distancia que habrán recorrido es $d = vt$:

```
[2]: import sympy
      from sympy import *
      #from sympy.tensor.tensor import *
      init_printing()
```

Empezamos definiendo un tensor métrico abstracto

```
[3]: m, s = symbols('m s')
      c = 2.99792458 * 10**(8)
      d = (0.99*c*(m/s))*(1.77*10**(-8)*s)
      d
```

[3]: 5.253263241534m

¿Y entonces por qué el experimento mide que viajaron 37.2 m? Bueno, no estamos considerando los efectos relativistas que están contenidas en las transformaciones de Lorentz:

$$t_2 - t_1 = (t'_2 - t'_1)\gamma \Rightarrow \Delta t = \Delta t' \gamma,$$

donde $\Delta t'$ es el tiempo propio, el tiempo medido por un reloj respecto a la partícula en movimiento, es decir, el sistema de referencia donde el pion se encuentra en reposo.

Calculemos, primeramente el factor γ :

```
[4]: gamma = 1/sqrt(1-(0.99)**2)
      gamma
```

[4]: 7.08881205008335

Por lo tanto, la vida media de los piones medida desde el laboratorio es:


```
[5]: Δ t = (1.77*10**(-8)*s)*γ
      Δ t.evalf(3)
```

[5]: $1.25 \cdot 10^{-7} s$

Según las personas que miden el experimento, y que están en el sistema en reposo, los piones viven $\approx 1.255 \times 10^{-7} s$, y por lo tanto viajan una distancia: $x = (0.99c)\Delta t$

```
[6]: N(0.99*c*(m/s)*Δ t,3)
```

[6]: $37.2m$

2. Procederemos ahora a resolver el sistema que nos condujo a las transformaciones impropias de Lorentz.

Primero, escribamos una lista que contiene el sistema de ecuaciones:

```
[7]: L11, L01, L00 = symbols('L11 L01 L00')
      v, c = symbols('v c', positive=True)
      assuming(c > v)
      sis = [Eq(L11**2-c**2*L01**2,1), Eq(L11**2*v+c**2*L01*L00,0),
             Eq(c**2*L00**2-v**2*L11**2,c**2)]
      sis
```

[7]: $[-L_{01}^2 c^2 + L_{11}^2 = 1, L_{00} L_{01} c^2 + L_{11}^2 v = 0, L_{00}^2 c^2 - L_{11}^2 v^2 = c^2]$

Es importante definir $v > 0$, y $v < c$, para evitar soluciones complejas.

```
[8]: sols = list(solve(sis,(L00, L01, L11)))
      sols
```

[8]:
$$\left[\left(-\frac{c\sqrt{\frac{1}{c-v}}}{\sqrt{c+v}}, \frac{v\sqrt{\frac{1}{c-v}}}{c\sqrt{c+v}}, -\frac{c\sqrt{\frac{1}{c-v}}}{\sqrt{c+v}} \right), \left(-\frac{c\sqrt{\frac{1}{c-v}}}{\sqrt{c+v}}, \frac{v\sqrt{\frac{1}{c-v}}}{c\sqrt{c+v}}, \frac{c\sqrt{\frac{1}{c-v}}}{\sqrt{c+v}} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{c\sqrt{\frac{1}{c-v}}}{\sqrt{c+v}}, -\frac{v\sqrt{\frac{1}{c-v}}}{c\sqrt{c+v}}, -\frac{c\sqrt{\frac{1}{c-v}}}{\sqrt{c+v}} \right), \left(\frac{c\sqrt{\frac{1}{c-v}}}{\sqrt{c+v}}, -\frac{v\sqrt{\frac{1}{c-v}}}{c\sqrt{c+v}}, \frac{c\sqrt{\frac{1}{c-v}}}{\sqrt{c+v}} \right) \right]$$

3. Existe una librería llamada “pytearcat” creada para trabajar con operaciones tensoriales generales, tanto en el campo de la Relatividad General (GR) como en otros que necesitan usar cálculo tensorial. Para mayor información se puede consultar <https://github.com/pytearcat/pytearcat>

```
[9]: import pytearcat as pt
```

```
[10]: # Se definen las coordenadas
      t,x,y,z = pt.coords('t,x,y,z')
      # Se definen las funciones y constantes
      c = pt.con('c')
      Ax = pt.fun('Ax','t,x,y,z')
      Ay = pt.fun('Ay','t,x,y,z')
      Az = pt.fun('Az','t,x,y,z')
      phi = pt.fun('phi','t,x,y,z')
```

```
g = pt.metric('ds2 = -dt**2 + (dx**2 + dy**2 + dz**2)')
```

Remember that the time coordinate must be the first coordinate.

```
Dimension = 4
```

```
Coordinates = t,x,y,z
```

Metric defined successfully:

$$ds^2 = -1 \cdot dt^2 + 1 \cdot dx^2 + 1 \cdot dy^2 + 1 \cdot dz^2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Construyamos el tensor de Maxwell

```
[11]: Ex = pt.fun('Ex', 't,x,y,z')
      Ey = pt.fun('Ey', 't,x,y,z')
      Ez = pt.fun('Ez', 't,x,y,z')
      Bx = pt.fun('Bx', 't,x,y,z')
      By = pt.fun('By', 't,x,y,z')
      Bz = pt.fun('Bz', 't,x,y,z')
```

```
[12]: F_simplified =  $\begin{bmatrix} 0 & -Ex & -Ey & -Ez \\ Ex & 0 & -Bz & By \\ Ey & Bz & 0 & -Bx \\ Ez & -By & Bx & 0 \end{bmatrix}$ 
      F_simplified
```

```
[12]: [[0, -Ex(t,x,y,z), -Ey(t,x,y,z), -Ez(t,x,y,z)], [Ex(t,x,y,z), 0, -Bz(t,x,y,z), By(t,x,y,z)]]
      [[Ey(t,x,y,z), Bz(t,x,y,z), 0, -Bx(t,x,y,z)], [Ez(t,x,y,z), -By(t,x,y,z), Bx(t,x,y,z), 0]]
```

```
[13]: F = pt.ten('F', 2)
      F.assign(F_simplified, '^', '^')
      F.display('^', '^')
```

Elements assigned correctly to the $^{\wedge},^{\wedge}$ components

$$\begin{bmatrix} 0 & -Ex(t,x,y,z) & -Ey(t,x,y,z) & -Ez(t,x,y,z) \\ Ex(t,x,y,z) & 0 & -Bz(t,x,y,z) & By(t,x,y,z) \\ Ey(t,x,y,z) & Bz(t,x,y,z) & 0 & -Bx(t,x,y,z) \\ Ez(t,x,y,z) & -By(t,x,y,z) & Bx(t,x,y,z) & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular $F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^{\mu}$

```
[14]: DF = pt.ten('J', 1)
      DF_dat = pt.D(F('^mu', '^nu'), '_mu')
      DF.assign(DF_dat, '^nu')
      DF.display('^')
```

Elements assigned correctly to the $\hat{\nu}$ components

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} E_x(t, x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} E_y(t, x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} E_z(t, x, y, z) \\ -\frac{\partial}{\partial z} B_y(t, x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} B_z(t, x, y, z) - \frac{\partial}{\partial t} E_x(t, x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} B_x(t, x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} B_z(t, x, y, z) - \frac{\partial}{\partial t} E_y(t, x, y, z) \\ -\frac{\partial}{\partial y} B_x(t, x, y, z) + \frac{\partial}{\partial x} B_y(t, x, y, z) - \frac{\partial}{\partial t} E_z(t, x, y, z) \end{bmatrix}$$

Podemos definir un tensor de un solo índice J

```
[15]: rho = pt.fun('rho', 't,x,y,z')
      Jx = pt.fun('Jx', 't,x,y,z')
      Jy = pt.fun('Jy', 't,x,y,z')
      Jz = pt.fun('Jz', 't,x,y,z')
```

```
[16]: J = pt.ten('J', 1)
      J_dat = [rho, Jx, Jy, Jz]
      J.assign(J_dat, '^')
      J.display('^')
```

Elements assigned correctly to the $\hat{}$ components

$$\begin{bmatrix} \rho(t, x, y, z) \\ J_x(t, x, y, z) \\ J_y(t, x, y, z) \\ J_z(t, x, y, z) \end{bmatrix}$$

Las identidades de Bianchi

$$\partial_\gamma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\gamma} + \partial_\nu F_{\gamma\mu} \equiv F_{\mu\nu,\gamma} + F_{\nu\gamma,\mu} + F_{\gamma\mu,\nu} = 0$$

```
[17]: IB = pt.ten('IB', 3)
      IB_dat = pt.D(F('_a,_b'), '_c') + pt.D(F('_b,_c'), '_a') + pt.
      ↪D(F('_c,_a'), '_b')
      IB.assign(IB_dat, '_a,_b,_c')
      IB.factor()
      IB.display()
```

Elements assigned correctly to the $_a,_b,_c$ components

All components are zero

La δ de Kronecker δ_i^j

```
[18]: KD = pt.kdelta()
      KD.display()
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
[19]: KD("_0,_0")
```

```
[19]: 1
```

El símbolo de Levi-Civita

```
[20]: LC = pt.lcivita(convention=-1)
LC("_0,_1,_2,_3")
```

```
[20]: -1
```

Con el símbolo de Levi-Civita haremos la siguiente operación

$$\epsilon_{abcd}F^{cd}$$

```
[21]: val = pt.ten('val',2)
val_dat= LC('_a,_b,_mu,_nu')*F('^mu,^nu')
val.assign(val_dat,'_a,_b')
val.factor()
val.display('_,_')
```

Elements assigned correctly to the _a,_b components

$$\begin{bmatrix} 0 & 2B_x(t,x,y,z) & 2B_y(t,x,y,z) & 2B_z(t,x,y,z) \\ -2B_x(t,x,y,z) & 0 & 2E_z(t,x,y,z) & -2E_y(t,x,y,z) \\ -2B_y(t,x,y,z) & -2E_z(t,x,y,z) & 0 & 2E_x(t,x,y,z) \\ -2B_z(t,x,y,z) & 2E_y(t,x,y,z) & -2E_x(t,x,y,z) & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.3 Ejercicios

1. En el espacio euclidiano 3D, y en coordenadas cartesianas, no distinguimos entre vectores y 1-formas debido a que sus componentes transforman de la misma manera. Demuestre que:

- (a). $a^{i'} = \Lambda_j^{i'} a^j \wedge b_{j'} = \Lambda_j^{i'} b_i$, son la misma transformación si la matriz $\Lambda_j^{i'}$ es igual a la transpuesta de su inversa, es decir, si es ortogonal.
- (b). Considere dos observadores $O : x, y \leftrightarrow x^1, x^2$ y $O' : x', y' \leftrightarrow x^{1'}, x^{2'}$ y sus sistemas de coordenadas asociados.

- I. Considere la siguiente transformación de coordenadas de Galileo:

$$x^{1'} = v^1 t + \frac{\sqrt{2}}{2} x^1 - \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 \quad \text{y} \quad x^{2'} = \frac{\sqrt{2}}{2} x^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x^2,$$

con v^1 una constante que representa la velocidad relativa entre $O - O'$, y t al tiempo (parámetro de esta transformación).

A continuación suponga una partícula que describe un movimiento respecto a O siguiendo una trayectoria recta, esto es $x^2 = \alpha x^1$, donde α es una constante. Encuentre cómo lo describiría el observador O' respecto a sus coordenadas $(x^{1'}, x^{2'})$.

- II. Considere ahora la generalización de la transformación de coordenadas anterior:

$$x^{1'} = v^1 t + \frac{\sqrt{2}}{2} x^1 - \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 \quad \text{y} \quad x^{2'} = v^2 t + \frac{\sqrt{2}}{2} x^1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x^2,$$

con v^1 y v^2 las componentes de una velocidad relativa entre $O - O'$, y t al tiempo. Muestre que la norma de cualquier vector queda invariante respecto a una transformación de coordenadas como la anterior y encuentre la matriz de transformación.

2. Un acelerador produce partículas que tienen una vida promedio de $5\mu s$. Estas logran alcanzar una velocidad de $0.6c$.
 - (a). Un observador que se encuentra en reposo en el laboratorio ¿qué tiempo de vida media le atribuirá a las partículas?
 - (b). ¿Qué distancia promedio viajan las partículas en el acelerador?
 - (c). Si suponemos que existe un observador en reposo con respecto a la partícula ¿Qué distancia se desplazará éste observador antes de que la partícula se desintegre?

3. Un elemento de área cuadrada se encuentra en reposo para un observador O . Encuentre el área medida por un observador en movimiento O' si éste lleva una velocidad de $0.85c$ a lo largo de la diagonal del cuadrado.
4. Consideremos un vehículo se mueve con una velocidad V con respecto a un observador fijo en tierra O , y un pasajero dentro del vehículo que se mueve con una velocidad v' con respecto al vehículo. Sabemos de los cursos básicos que la velocidad del pasajero respecto al observador fijo en tierra es simplemente la suma: $v = v' + V$. Nos podemos preguntar sobre la forma en que se suman las velocidades en la teoría especial de la relatividad, es decir, ¿Cómo se suman las velocidades si consideramos las transformaciones de Lorentz? Demuestre que se suman como:

$$v = \frac{v' + V}{1 + v' \frac{V}{c^2}}.$$

5. Dado un espacio minkowskiano y un observador O que describe los eventos en el espacio-tiempo respecto a un sistema de coordenadas $\{x^\alpha\}$, donde $\alpha = 0, 1, 2$, y $\eta = \text{diag}[-1, 1, 1]$ el tensor métrico. Considere entonces la siguiente transformación de coordenadas:

$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad \text{y} \quad x^{2'} = x^2, \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Donde $\beta = v/c$ es la velocidad relativa entre O y O' .

- (a). Otra vez, suponga que una partícula describe una línea recta respecto a O : $x^2 = \alpha x^1$, con α igual a una constante. Encuentre cómo lo describiría el otro observador O' respecto a sus coordenadas $(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'})$.
- (b). Encuentre la expresión para la transformación de coordenadas, $\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \Lambda_\beta^{\alpha'}$ (transformación de Lorentz) entre estos sistemas relativistas y muestre como la norma: $x^\alpha x_\alpha = x^\alpha x^\beta \eta_{\alpha\beta}$, de cualquier vector se conserva.
6. Considere el tensor de Maxwell definido como:

$$F_{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -cB^z & cB^y \\ -E^y & cB^z & 0 & -cB^x \\ -E^z & -cB^y & cB^x & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{otra vez con:} \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

donde $\mathbf{E} = (E^x, E^y, E^z)$ y $\mathbf{B} = (B^x, B^y, B^z)$ son los campos eléctricos y magnéticos, respectivamente, medidos por un observador O en coordenadas cartesianas.

- (a). Si un observador mide un campo eléctrico $\mathbf{E} = E^x \hat{\mathbf{i}}$ y ningún campo magnético ¿Cuáles campos, $F_{\mu\alpha}$, medirá otro observador que viaja con una velocidad respecto al primero de $\beta = v\hat{\mathbf{i}}$?
- (b). Muestre que las ecuaciones de Maxwell: $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{J}$, y $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho$ se pueden

expresar como:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu} \equiv F^{\mu\nu},_{\nu} = 4\pi J^\mu, \quad \text{donde } J^\mu = (c\rho, J^1, J^2, J^3) \quad \text{y } \mathbf{J} = (J^1, J^2, J^3),$$

(c). Considere la identidad de Bianchi de la forma:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\nu\gamma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\gamma\mu}}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\gamma F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\gamma} + \partial_\nu F_{\gamma\mu} \equiv F_{\mu\nu,\gamma} + F_{\nu\gamma,\mu} + F_{\gamma\mu,\nu} = 0,$$

y demuestre que las otras dos ecuaciones $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0$, también están contenidas en las expresiones $F^{\mu\nu},_{\nu} = 4\pi J^\mu$

(d). Demuestre que $c^2 \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$ es un escalar de Lorentz.

7. El dual de un tensor \mathcal{B} de rango 2, cuatridimensional, puede ser definido de manera que sus componentes vienen dadas por:

$$B_D^{ij} = \frac{1}{2!} \epsilon^{ijkl} B_{kl}.$$

Muestre que B_D^{ij} transforma como:

(a). Un tensor de rango 2 bajo rotaciones.

(b). Un pseudotensor bajo inversiones.

(c). Construya $\mathcal{F}^{\mu\alpha}$, el dual del tensor de Maxwell $F^{\mu\alpha}$.

8. En un espacio vectorial minkowskiano, \mathbb{M}^4 construimos dos bases ortonormales que llamaremos tétrada.

Primero consideraremos una base de vectores “cartesianos” $\{|e_t\rangle, |e_x\rangle, |e_y\rangle, |e_z\rangle\}$ y construimos una tétrada de vectores $\{\mathbf{v} = v^\alpha |e_\alpha\rangle, \mathbf{k} = k^\alpha |e_\alpha\rangle, \mathbf{l} = l^\alpha |e_\alpha\rangle, \mathbf{s} = s^\alpha |e_\alpha\rangle\}$ con componentes

$$v^\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad s^\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En estas coordenadas cartesianas $(t, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$, suponemos ahora un sistema de unidades simplificadas con la velocidad de la luz $c = 1$, y podemos representar el elemento de línea como

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Las componentes del tensor métrico puede ser escritas en términos de la tétrada como

$$\eta_{\alpha\beta} = -v_\alpha v_\beta + k_\alpha k_\beta + l_\alpha l_\beta + s_\alpha s_\beta.$$

En general, las componentes de los vectores de la tétrada “cartesiana” unitaria satisfacen las condiciones de ortonormalidad:

$$-v_\alpha v^\alpha = k_\alpha k^\alpha = l_\alpha l^\alpha = s_\alpha s^\alpha = 1; \quad v_\alpha k^\alpha = v_\alpha l^\alpha = v_\alpha s^\alpha = k_\alpha l^\alpha = k_\alpha s^\alpha = l_\alpha s^\alpha = 0.$$

Igualmente podemos construir una tétrada dual

$$\{\tilde{\mathbf{v}}^* = \tilde{v}_\alpha \langle \tilde{e}^\alpha|, \tilde{\mathbf{k}}^* = \tilde{k}_\alpha \langle \tilde{e}^\alpha|, \tilde{\mathbf{l}}^* = \tilde{l}_\alpha \langle \tilde{e}^\alpha|, \tilde{\mathbf{s}}^* = \tilde{s}_\alpha \langle \tilde{e}^\alpha|\}$$

para las coordenadas esféricas, $(t, r, \theta, \phi) \equiv (\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$, a partir de una base $\{\langle e^t|, \langle e^r|, \langle e^\theta|, \langle e^\phi|\}$, con componentes $\tilde{v}_\alpha = (-1, 0, 0, 0)$, $\tilde{k}_\alpha = (0, 1, 0, 0)$, $\tilde{l}_\alpha = (0, 0, r, 0)$ y $\tilde{s}_\alpha = (0, 0, 0, r \sin\theta)$, de tal forma que en estas coordenadas representamos el elemento de línea como

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \equiv d\tilde{s}^2 = \tilde{\eta}_{\alpha\beta} d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2.$$

Obviamente

$$\tilde{\eta}_{\alpha\beta} = -\tilde{v}_\alpha \tilde{v}_\beta + \tilde{k}_\alpha \tilde{k}_\beta + \tilde{l}_\alpha \tilde{l}_\beta + \tilde{s}_\alpha \tilde{s}_\beta.$$

y esta tétrada también cumple con las relaciones de ortogonalidad antes mencionadas.

Las componentes de cualquier vector puede ser escritas en término de combinaciones lineales del la tétrada de la forma

$$a^\alpha = a_v v^\alpha + a_k k^\alpha + a_l l^\alpha + a_s s^\alpha = \tilde{a}_v \tilde{v}^\alpha + \tilde{a}_k \tilde{k}^\alpha + \tilde{a}_l \tilde{l}^\alpha + \tilde{a}_s \tilde{s}^\alpha.$$

Con todo lo anterior, considere una vez mas el tensor de Maxwell en coordenadas cartesianas definido como:

$$F_{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & -B^z & B^y \\ -E^y & B^z & 0 & -B^x \\ -E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y otra vez con:} \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

donde $\mathbf{E} = (E^x, E^y, E^z)$ y $\mathbf{B} = (B^x, B^y, B^z)$ son los campos eléctricos y magnéticos respectivamente, medidos en coordenadas cartesianas por un observador O .

- A partir de las condiciones de ortogonalidad para la tétrada $\{\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{l}}, \tilde{\mathbf{s}}\}$ en coordenadas esféricas, $(t, r, \theta, \phi) \equiv (\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ encontrar sus componentes contravariantes.
- Suponga las siguientes componentes cartesianas para un cuadrivector $a^\alpha = (5, 3, 2, 1)$ y encuentre las componentes $(\tilde{a}^0, \tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \tilde{a}^3)$, en coordenadas esféricas.
- Compruebe que, en coordenadas cartesianas, se cumplen las siguientes proyecciones

$$F_{\mu\alpha} v^\mu v^\alpha = F_{\mu\alpha} k^\mu k^\alpha = F_{\mu\alpha} l^\mu l^\alpha = F_{\mu\alpha} s^\mu s^\alpha = 0;$$

$$F_{\mu\alpha} v^\mu k^\alpha = E^x; \quad F_{\mu\alpha} v^\mu l^\alpha = E^y; \quad F_{\mu\alpha} v^\mu s^\alpha = E^z.$$

Además complete las proyecciones faltantes.

- Encuentre la expresión del tensor **mixto** de Maxwell, \tilde{F}^μ_α , en coordenadas esféricas.
- Compruebe que, en coordenadas esféricas, se cumplen proyecciones del $\tilde{F}^{\mu\alpha}$ equivalentes a las cartesianas, pero en este caso con las componentes contravariantes.

3.5 Funcionales lineales y distribuciones

En esta sección discutiremos el concepto de distribución utilizando el lenguaje de formas lineales que hemos expuesto en la sección 3.1 y luego haremos una extensión de las bases discretas a bases continuas. Las distribuciones son objetos que generalizan la noción convencional de funciones en el análisis matemático y permiten diferenciar funciones cuyas derivadas no existen en el sentido tradicional del cálculo diferencial.

Las distribuciones también son importantes en Física e Ingeniería, donde muchos problemas conducen a ecuaciones diferenciales cuyas soluciones (con condiciones iniciales o de frontera) son distribuciones. Considere, por ejemplo el concepto de impulso

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{t_0+\tau} - \vec{p}_{t_0} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \vec{F}(t) dt \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{I}} = \vec{p}_\tau = \int_0^\tau \vec{F}(t) dt,$$

donde una fuerza $\vec{F}(t)$ actúa sobre un cuerpo durante un intervalo muy corto de tiempo y cambia su cantidad de movimiento $\vec{p}_{t_0} \rightarrow \vec{p}_{t_0+\tau}$. La cantidad físicamente importante es el valor de la integral y puede asociarse al impulso que se le provee al cuerpo para sacarlo del reposo. Otra de las aplicaciones

naturales e intuitiva corresponde a la descripción de la densidad de carga para cargas puntuales, tanto individuales como en arreglos, de una, dos y tres dimensiones.

El caso más emblemático de las distribuciones lo constituye la función delta de Dirac, una “función” que es cero en todo punto menos en uno que es infinita. Si bien ese tipo de funciones toma el nombre de Dirac, fueron propuestas a finales del siglo XIX por Fourier y Cauchy. La función delta de Dirac ejemplifica la relación dinámica entre la Física y las Matemáticas. Nacida de una necesidad física, pasó de ser una herramienta heurística informal a un objeto matemático rigurosamente definido gracias a los esfuerzos de Dirac, Schwartz, Sóbólev y otros matemáticos ²⁰.

A continuación las presentamos siguiendo el esquema de Sóbólev haciendo uso del concepto de funcional lineal que discutimos en la sección 3.1.

3.5.1 Funciones de prueba

Como hemos dicho las distribuciones de Schwartz, funciones generalizadas o, simplemente distribuciones, son objetos que generalizan la noción clásica de funciones en el análisis matemático. Se utilizan ampliamente en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, donde puede ser más fácil establecer la existencia de soluciones distribucionales que de soluciones clásicas. Comenzaremos con definir funciones de prueba y el soporte para estas funciones.

Consideremos la siguiente función

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1, \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

Diremos que una función (o campo escalar), $\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, es de prueba con soporte $|x| \leq 1$ en \mathbb{R}^n cuando: sea infinitamente derivable en un subconjunto cerrado K de \mathbb{R}^n e idénticamente nula fuera éste. Mas aún, hay funciones cuyo soporte puede ser un solo punto en el dominio. Además, nos podemos convencer fácilmente que estas funciones $\psi = c^1\phi_1 + c^2\phi_2$, forman un espacio vectorial sobre \mathbb{R}^n lo representaremos como \mathbf{V} y a K se le denomina el soporte de ϕ .

3.5.2 Distribuciones y deltas de Dirac

Utilizaremos el concepto de funcional que discutimos en la sección 3.1 para definir una distribución de la forma

$$\mathcal{F}[\phi] \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}_f[\phi] \equiv \langle f | \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d^n\mathbf{x},$$

donde $\phi(\mathbf{x})$ es una función de prueba.

Siguiendo este esquema podemos definir la distribución $\delta_{(0)}$ definida en \mathbb{R} , como

$$\mathcal{F}_{\delta_{(0)}}[\phi] \equiv \langle \delta_{(0)} | \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta_{(0)}\phi(x)dx \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0), \quad \forall \phi(x_0) \in \mathbb{R}.$$

El soporte de $\delta_{(0)}$ es el punto $x = 0$ de \mathbb{R} . Esto significa que **únicamente** en ese punto la función es distinta de cero. En Física este tipo de objetos se conoce como **deltas de Dirac** y los encontramos frecuentemente, cuando consideramos una masa (o una carga) puntual su función densidad de masa (o de carga) asociada: es infinita en un punto y cero en el resto del espacio.

La **delta de Dirac** “generaliza” la delta de Kronecker δ_{ij} que definimos en la sección 1.4.1 como

²⁰Para detalles pueden consultar https://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function

una cantidad que toma valores discretos: $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. La delta de Dirac, $\delta(x - x_0) \equiv \delta(x, x_0)$, es la extensión de este objeto matemático cuando los índices toman valores continuos. En la próxima sección 3.6.1, haremos uso de esta propiedad para construir bases continuas de un espacio vectorial.

Esto nos permite definir la “función” delta de Dirac como el límite de una sucesión de la forma

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} \Rightarrow \begin{cases} \delta_{(0)} \equiv \delta(x) \rightarrow \infty & \text{si } x \rightarrow 0, \\ \delta(x) = 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

En el límite ($n \rightarrow \infty$) tendremos una “función” que se anula en todos los puntos $x \neq 0$ e infinitamente derivable. Nótese que, siguiendo la costumbre en Física, aquí estamos escribiendo $\delta_{(0)} = \delta(x)$ ²¹.

Para convencernos de la existencia de este tipo de funciones en Matemáticas podemos considerar una sucesión de funciones gaussianas:

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2},$$

tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1, \quad n > 0.$$

A medida que el parámetro n aumenta su valor, la curva gaussiana $\delta_n(x)$ será cada vez más alta y más angosta, y si $n \rightarrow \infty$ la curva será entonces infinitamente más alta e infinitamente más angosta, pero siempre conservando que el área bajo la curva será igual a la unidad. Cada una de las funciones $\delta_n(x)$ es infinitamente derivable.

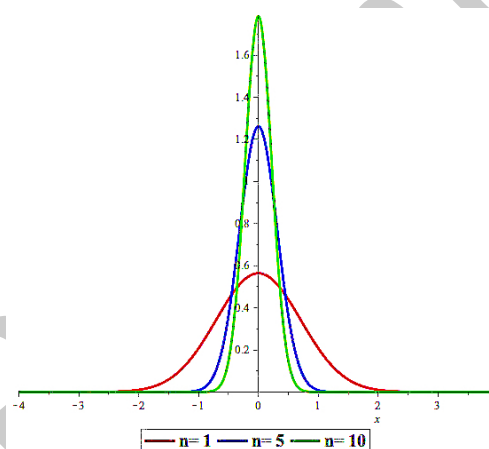


Figura 3.5: Ilustramos las formas que toma la función $\delta_n(x)$ para tres valores diferentes de n .

3.5.3 Distribuciones y sucesiones

La forma que le dimos a la sucesión δ_j es muy particular. En general uno podría definir las distribuciones como el límite de una familia, $\{f_j(x)\}$, de funciones localmente integrables en \mathbb{R}^n de la forma

$$f(x) = \lim_{j \rightarrow j_0} f_j \Rightarrow \lim_{j \rightarrow j_0} \mathcal{F}_{f_j} [|\phi\rangle] \equiv \lim_{j \rightarrow j_0} \langle f_j | \phi \rangle = \lim_{j \rightarrow j_0} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x}.$$

Así, una expresión equivalente a la que ensayamos anteriormente

$$f_j(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4j}}}{\sqrt{4\pi j}} \quad \text{para } j \rightarrow 0,$$

se conoce con el nombre de kernel de Gauss. Mientras que la familia

$$\{f_r(\theta)\} \Rightarrow f_r(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \theta} \right) & \text{si } |\theta| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |\theta| > \pi \end{cases} \quad \text{para } r \rightarrow 1,$$

²¹ Algunas reflexiones sobre la importancia de la delta de Dirac en Mecánica Cuántica y en Matemáticas la pueden encontrar en Bueno, O. (2005). “Dirac and the dispensability of mathematics”. Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 36(3), 465-490.

se le conoce como el kernel de Poisson. Finalmente la familia $\{f_k(x)\}$

$$f_k(x) = \begin{cases} \sum_{m=-k}^k \frac{1}{2\pi} e^{imx} & \text{si } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{si } |x| > \pi \end{cases}, \quad \text{para } k \rightarrow \infty,$$

constituirá el kernel de Dirichlet:

De igual forma podremos construir la distribución $\delta_{(x_0)}$ con soporte en el punto x_0 de \mathbb{R} , definida por

$$\mathcal{F}_{\delta_{(x_0)}}[|\phi\rangle] \equiv \langle \delta_{(x_0)} | \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta_{(x_0)} \phi(x) dx \equiv \int_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0) \phi(x) dx = \phi(x_0), \quad \forall \phi(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Igual que en caso anterior, en este caso podemos imaginar una sucesión de funciones gaussianas donde x_0 es el punto donde alcanza su valor máximo. Entonces

$$\delta_n(x - x_0) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-x_0)^2} \Rightarrow \delta(x - x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(x-x_0)^2}.$$

3.5.4 Algunas propiedades de las distribuciones

Como construimos las distribuciones como funcionales y demostramos en la sección 3.1.1, las distribuciones formarán un espacio vectorial dual. De esta forma

$$\mathcal{F}_f[|\phi\rangle] + \mathcal{F}_g[|\phi\rangle] = \mathcal{F}_{f+g}[|\phi\rangle] \Leftrightarrow \mathcal{F}_f[|\phi\rangle] + \mathcal{F}_f[|\xi\rangle] = \mathcal{F}_f[|\phi + \xi\rangle].$$

En el primer caso mostramos que la suma de distribuciones es una distribución y en el segundo caso que la suma de dos funciones de prueba es también una función de prueba.

Si consideramos una distribución $\mathcal{F}_f[\phi(x)]$ y su derivada $\mathcal{F}_{f'}[\phi(x)]$, entonces se cumple que

$$\mathcal{F}_{f'}[\phi(x)] = -\mathcal{F}_f[\phi'(x)] \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} f'(x) \phi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi'(x) dx.$$

La demostración es clara cuando utilizamos en la integración por partes el hecho de que las funciones de prueba tienen soporte acotado. De esta manera

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) \phi(x) dx = \underbrace{f(x) \phi(x)}_{=0} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi'(x) dx \Rightarrow \mathcal{F}_{f'}[\phi(x)] = -\mathcal{F}_f[\phi'(x)],$$

es decir,

$$\mathcal{F}_{f'}[\phi(x)] = -\mathcal{F}_f[\phi'(x)] \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta'(x - x_0) = -f'(x_0),$$

y en general

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) = (-1)^n f^{(n)}(x_0).$$

El caso mas representativo de esta propiedad es cuando nos planteamos calcular la derivada para la función escalón, $\Theta(x)$ de *Heaviside* en \mathbb{R} . Una función localmente integrable, tal que $\Theta(x) = 0$ cuando $x < 0$ y $\Theta(x) = 1$ cuando $x > 0$, entonces

$$\mathcal{F}_{\Theta(x)'}[\phi(x)] = -\mathcal{F}_{\Theta(x)}[\phi'(x)] = - \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x) \frac{d\phi(x)}{dx} dx = - \int_0^{\infty} \frac{d\phi(x)}{dx} dx = \phi(0) \Leftrightarrow \frac{d\Theta(x)}{dx} = \delta(x),$$

en el sentido de las distribuciones, porque $\phi(x)$ es una función de prueba con soporte compacto: $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$.

Hay algunas propiedades de escalamiento para las distribuciones que se pueden derivar de manera inmediata, y las mostraremos para el caso particular la Delta de Dirac en \mathbb{R} . Así tendremos

$$\langle \delta(x/\alpha) | \phi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta(x/\alpha) \phi(x) dx = |\alpha| \int_{\mathbb{R}} \delta(y) \phi(\alpha y) dy = |\alpha| \langle \delta(x) | \phi(x) \rangle,$$

que se puede escribir como $\delta(x/\alpha) = |\alpha|\delta(x/\alpha)$ en el sentido distribucional.

Claramente, una de las relaciones mas útiles es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0),$$

es decir: la $\delta(x-x_0)$ obliga a la función de prueba a evaluarse en el punto $x = x_0$. Nos podemos convencer rápidamente de esta importante relación, si utilizamos cualquier de las sucesiones δ_n las cuales, en el límite con $n \rightarrow \infty$, representan una distribución. Recordemos que cada una de las sucesiones son funciones continuas y continuamente diferenciables. Entonces es fácil convencernos que para cada n se cumple

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta_n(x-x_0)dx &\approx \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f(x)\delta_n(x-x_0)dx \\ &\approx f(x_0) \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta_n(x-x_0)dx \\ &\approx f(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x-x_0)dx = f(x_0). \end{aligned}$$

La aproximación de la segunda línea se entiende porque $f(x)$ es casi constante en intervalo infinitesimal $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. La tercera aproximación es un resultado del valor despreciable de δ_n fuera de ese intervalo, y la igualdad se logra porque δ_n es una función de densidad lineal. Al tomar el límite de $n \rightarrow \infty$ tendremos que δ_n se convierte en la función delta de Dirac. Es inmediato convencerse también que estas relaciones se cumplen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos y \delta(y - \pi) dy = -1, \quad y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin z \delta(z) dz = 0.$$

Ahora bien, si el argumento de la función delta de Dirac cambia de escala tendremos:

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Para demostrarlo podemos hacer el siguiente cambio de variable: $y = \alpha x$, con lo cual

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\alpha x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{\alpha}\right)\delta(y)\frac{1}{\alpha}dy = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{\alpha}\right)\delta(y)dy = \frac{f(0)}{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\delta(x)}{\alpha}dx,$$

por lo tanto: $\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{\alpha}$. La condición $\alpha > 0$ se debe tener en cuenta porque la función delta de Dirac es par, es decir, $\delta(\alpha x) = \delta(-\alpha x)$. De manera que resulta más apropiado escribir:

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}.$$

Si una distribución tiene como argumento una función tendremos que:

$$\delta(g(x)) = \sum_{\alpha} \frac{\delta(x - \alpha)}{|g'(\alpha)|}, \quad g(\alpha) = 0 \wedge g'(\alpha) \neq 0.$$

Podemos ver que para la función $g(x)$, en los intervalos donde se hace cero, se tiene:

$$g(x) \approx g(\alpha) + (x - \alpha)g'(\alpha), \quad -\epsilon < \alpha < \epsilon.$$

Otra vez, cambiamos de variable y sumamos para todos esos intervalos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x))dx = \sum_{\alpha} \int_{\alpha-\epsilon}^{\alpha+\epsilon} f(x)\delta((x - \alpha)g'(\alpha))dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sum_{\alpha} \frac{\delta(x - \alpha)}{|g'(\alpha)|}dx,$$

donde hemos utilizado el resultado del ejemplo anterior. Por lo tanto:

$$\delta(g(x)) = \sum_{\alpha} \frac{\delta(x - \alpha)}{|g'(\alpha)|} \quad \text{con } g'(\alpha) \neq 0.$$

Ejemplo 3.18 Evaluemos la siguiente integral

$$\int_0^{\infty} dx \sin x \delta \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right).$$

Siguiendo el desarrollo anterior tendremos $g(x) = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$ con dos raíces $\alpha_{\pm} = \pm \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto en el segmento positivo tiene una raíz y la integral nos queda

$$\int_0^{\infty} dx \sin x \delta \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4} \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \right)}{\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

En el sentido distribucional podemos afirmar que en general se cumple que

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)].$$

Por otro lado, es inmediato constatar que $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x^2 + a^2) = 0$, para cualquier función $f(x)$ dado que $g(x) = x^2 + a^2$ no tiene raíz real.

Ejemplo 3.19 Podemos representar una cadena de cargas (positivas y negativas) equiespaciadas como

$$\rho(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q \delta(x - na),$$

donde a representa la distancia entre las cargas, y nuestra cadena está constituida por una carga positiva seguida de una negativa.

3.5.5 Distribuciones en varias dimensiones

Como hemos construido la noción de distribución a partir del concepto de funcionales lineales, podemos también utilizar el producto tensorial definido en la sección 3.2.2 para extender las distribuciones a varias dimensiones. Así, en coordenadas cartesianas

$$\mathcal{F}_{\delta(x_0)}[|\phi\rangle] \otimes \mathcal{F}_{\delta(y_0)}[|\phi\rangle] \otimes \mathcal{F}_{\delta(z_0)}[|\phi\rangle] = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\phi(x,y,z) dx dy dz = \phi(x_0, y_0, z_0),$$

Del mismo modo, la generalización de las distribuciones a varias dimensiones es intuitiva a partir de la idea de sucesiones. En este caso podemos imaginar una sucesión de funciones gaussianas bidimensionales donde en el punto (x_0, y_0) la función alcanza su valor máximo. Al igual que en el caso unidimensional la distribución se alcanza en el límite de la sucesión, $\delta(x - x_0, y - y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x - x_0, y - y_0)$, es decir

$$\delta_n(x - x_0, y - y_0) = C e^{-n(x-x_0)^2} e^{-n(y-y_0)^2} \Rightarrow \delta(x - x_0, y - y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} C e^{-n(x-x_0)^2} e^{-n(y-y_0)^2},$$

donde C corresponde a la normalización que dependerá de las coordenadas en las cuales se exprese la función delta de Dirac. Para este caso de una delta bidimensional en coordenadas cartesianas $C = 1$.

En nuestra definición general inicial

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \lim_{j \rightarrow j_0} \delta_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \Rightarrow \lim_{j \rightarrow j_0} \mathcal{F}_{f_j}[|\phi\rangle] \equiv \lim_{j \rightarrow j_0} \langle f_j | \phi \rangle = \lim_{j \rightarrow j_0} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x},$$

ahora se concreta en la integración en una región Ω descrita en coordenadas cartesianas y polares respectivamente

$$\int \int_{\Omega} dA \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \equiv \int \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \underbrace{dx dy}_{dA} \equiv \int \underbrace{\frac{1}{\rho}}_C \delta(\rho - \rho_0) \delta(\phi - \phi_0) \underbrace{\rho d\rho d\phi}_{dA} = 1.$$

En general, en el sentido distribucional tendremos

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \equiv \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_2} \delta(q - q_1) \delta(q - q_2),$$

donde las q_1 y q_2 son las coordenadas generalizadas, mientras que los h_1 y h_2 son los factores de escala. Tal y como discutiremos en detalle en la sección 5.1, el diferencial de área en coordenadas generalizadas viene representado por $dA = h_1 dq_1 h_2 dq_2$.

Ejemplo 3.20 Una distribución superficial de carga eléctrica puede escribirse de manera sencilla utilizando la delta de Dirac a través de la siguiente integral de área:

$$q = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) dA,$$

de manera que para una carga puntual localizada en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ se tiene que:

$$q = q \underbrace{\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dA}_{=1} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) dA \Rightarrow \rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\phi - \phi_0).$$

Ejemplo 3.21 Podemos generalizar el ejemplo 3.19 para el caso bidimensional, de tal manera que la densidad superficial de carga, para un arreglo rectangular de cargas positivas y negativas alternadas por filas y columnas las podemos representar como

$$\sigma_q(x, y) = q \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{i+j} \delta(x - ia) \delta(y - bj).$$

Claramente las celda primitiva es un rectángulo de área $a \times b$, espaciadas por una distancia a en x y b en y . Si ahora la misma cadena lineal del ejemplo 3.19 describe una función $y = g(x)$ tendremos

$$\sigma_q(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \delta(x - x_k) \delta(y - g(x_k)).$$

Supongamos una cadena de cinco cargas positivas equiespaciadas, dispuestas una semicircunferencia de radio R , con $y \geq 0$, la densidad lineal de carga será

$$\sigma_q(x, y) = q \left\{ \delta(x - R) \delta(y) + \delta\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right) \delta\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right) + \delta(x) \delta(y - R) + \delta\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} R\right) \delta\left(y - \frac{\sqrt{2}}{2} R\right) + \delta(x + R) \delta(y) \right\},$$

y equivalentemente en coordenadas polares como

$$\sigma_q(\rho, \phi) = \frac{q \delta(\rho - R)}{R} \left\{ \delta(\phi) + \delta\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right) + \delta\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\phi + \frac{3\pi}{4}\right) + \delta(\phi - \pi) \right\}.$$

La generalización al caso tridimensional es inmediata y siguiendo el sentido distribucional podemos escribir

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \equiv \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_2} \frac{1}{h_3} \delta(q - q_1) \delta(q - q_2) \delta(q - q_3),$$

con lo cual lo podremos escribir en coordenadas, cartesianas, cilíndricas y esféricas como

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) = \frac{1}{\rho_0} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_1) = \frac{1}{r_0^2 \sin \theta_0} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\phi - \phi_0) \delta(\theta - \theta_0),$$

respectivamente.

Ejemplo 3.22 Consideremos la misma cadena de cargas (positivas y negativas), equiespaciadas y las supondremos dispuesta a lo largo del eje z . El potencial electrostático para una distribución discreta y

para una distribución continua de cargas se escriben

$$V_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad \Leftrightarrow \quad V_{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_R \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r',$$

respectivamente.

En coordenadas cartesianas

$$V_{\mathbf{E}}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}},$$

incorporando la densidad de carga en término de las deltas, obtendremos

$$V_{\mathbf{E}}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \frac{\delta(x')\delta(y')\delta(z' - ka) dx' dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}},$$

y finalmente el potencial

$$V_{\mathbf{E}}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - ka)^2}}.$$

Practicando con SymPy

La función delta de Dirac

En SymPy dispones de algunas funciones propias como las funciones “DiracDelta()” y la función “Heaviside()”

```
[1]: import sympy
from sympy import *
init_printing()
```

```
[2]: x, y = symbols('x y')
DiracDelta(x), DiracDelta(1), DiracDelta(-1), DiracDelta(0)
```

```
[2]: (delta(x), 0, 0, delta(0))
```

```
[3]: diff(DiracDelta(x - 1), x, 2)
```

```
[3]: delta(2)(x - 1)
```

```
[4]: DiracDelta((x**2 - 1)*y).expand(diracdelta=True, wrt=x)
```

```
[4]: (delta(x - 1) / (2 * |y|) + delta(x + 1) / (2 * |y|))
Dada la función:
```

```
[5]: f=sin(x)*DiracDelta(x**2 - pi**2/4)
f
```

```
[5]: sin(x)delta(x^2 - pi^2/4)
```

Calculemos la siguiente integral

$$\int_0^{\infty} dx \sin x \delta\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)$$

[6]: `integrate(f, (x, 0, oo))`

[6]: $\frac{1}{\pi}$

La función de Heaviside

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{for } x = 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

[7]: `Heaviside(pi), Heaviside(-pi), Heaviside(0)`

[7]: $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$

[8]: `(Heaviside(x) + 1).replace(Heaviside(x), Heaviside(x, 1))`

[8]: $\theta(x, 1) + 1$

[9]: `g=Heaviside(x)`
`g`

[9]: $\theta(x)$

[10]: `integrate(g, (x, 0, oo))`

[10]: ∞

3.5.6 Ejercicios

1. Demuestre algunas de las propiedades de las distribuciones a partir de las siguientes sucesiones

(a). Si

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{1}{2n} \\ n & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0 & x > \frac{1}{2n} \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta_n(x) dx,$$

(b). Si:

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \Rightarrow x \frac{d\delta(x)}{dx} = -\delta(x).$$

2. Compruebe las siguientes relaciones

(a). Para argumentos simples de la función $\delta(x - x_0)$ demuestre

I. $\int_0^{+\infty} \cos y \delta(y + \pi) dy = 0, \quad y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{y}{2} \delta(y - \pi) dy = 0;$

II. $\int_{-1}^1 e^t \delta(t) dt = 1, \quad y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \delta(x) dx = 0;$

III. $\int_{-\infty}^{3.7} \ln t \delta(t - e) dt = 0, \quad y \quad \int_{-\infty}^{3.8} \ln t \delta(t - e) dt = 1.$

(b). Para argumentos funcionales $\delta(g(x))$ demuestre

I. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin |t| \delta(t^2 - \pi^2/4) dt = 2/\pi, \quad y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \delta(x^2 - \pi^2) dx = -\frac{1}{\pi};$

II. $\int_0^{\infty} \ln z \delta(z^2 - 1) dz = 0, \quad y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos y \delta(y^2 + \pi^2) dy = 0;$

$$\text{III. } \int_{-\pi}^{+\pi} (t+1)^2 \delta(\sin \pi t) dt = 35/\pi, \quad y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(e^t - 1) dt = f(0);$$

$$\text{IV. } \int_0^{\infty} \ln x \delta(10x^2 + 3x - 1) dx = -0.23, \quad y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(e^t) dt = 0.$$

3. Evalúe las siguientes integrales

- $\int_0^{\infty} e^x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \delta(x^2 - 1) dx \quad y \quad \int_{-2}^2 e^x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \delta(x^2 - 1) dx$.
- $\int_0^{\infty} e^x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \delta(x^3 + 1) dx \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi e^x}{2}\right) \delta(x^4 + 1) dx$.
- $\int_0^{\infty} \sin^{-1}(1/x) \delta(x^4 - 1) dx \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x) \delta(6x^2 - x - 1) dx$.
- $\int_{-0.1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi e^x}{2}\right) \delta(x^2 + x) dx \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \delta(e^x \sin \frac{\pi x}{2}) dx$.
- $\int_0^{\infty} e^x \sin \frac{\pi x}{2} \delta'(x^2 - 1) dx \quad y \quad \int_{-2}^2 e^x \sin \frac{\pi x}{2} \delta'(x^2 - 1) dx$.
- $\int_0^{\infty} e^x \sin \frac{\pi x}{2} \delta'(x^3 + 1) dx \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi e^x}{2}\right) \delta'(x^4 + 1) dx$.
- $\int_0^{\infty} e^x \sin \frac{\pi x}{2} \delta'(x^3 + 1) dx \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi e^x}{2}\right) \delta'(x^4 + 1) dx$.
- $\int_0^{\infty} e^x \sin \frac{\pi x}{2} \delta'(x^3 + 1) dx \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi e^x}{2}\right) \delta'(x^4 + 1) dx$.
- $\int_0^{\infty} \sin^{-1}(1/x) \delta'(x^4 - 1) dx \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\pi x) \delta'(6x^2 - x - 1) dx$.

4. Grafique o describa las siguientes distribuciones de carga

- $\rho_q(x, y, z) = \delta(x) \delta(y) \{2\delta(z) - 3\delta(z+3)\}$.
- $\rho_q(x, y, z) = 5\delta(x+1) \delta(y-1) \{\delta(z-1) - \delta(z+1)\}$.
- $\rho_q(\rho, \varphi, z) = -2\delta(\rho-3) \delta(\varphi-\pi) \delta(z)$.
- $\rho_q(\rho, \varphi, z) = 2\delta\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \delta(z) \left\{ \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \delta(\rho - 0.5k) \right\}$.
- $\rho_q(r, \theta, \varphi) = 2\delta\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \delta(r-2) \left\{ \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{20}k\right) \right\}$.

5. Dado un arreglo de cargas bidimensional rectangular descrito por

$$\sigma_q(x, y) = q \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^{i+j} \delta(x - ia) \delta(y - bj),$$

el cual se encuentra dispuesto en el plano $z = 0$.

- Escriba la expresión para la densidad de carga espacial $\rho_q(x, y, z)$;
 - Calcule el potencial electrostático en los puntos $(0, 0, a)$ y $(0, a, 2a)$;
 - Calcule también el campo eléctrico para un punto genérico (x_0, y_0, z_0) .
6. Considere N cargas de igual signo y magnitud q_i dispuestas, a igual distancia, en un círculo de radio R sobre el plano $x - y$. Suponga que la carga q_1 está la posición $(R, 0, 0)$.
- Escriba la expresión para la densidad de carga espacial ρ_q en coordenadas cilíndricas ;
 - Calcule el potencial electrostático en los puntos $(0, 0, R)$, $(0, R, 2R)$ y $(3R, 0, 0)$;
 - Calcule también el campo eléctrico para un punto genérico (ρ_0, ϕ_0, z_0) ;
 - Si el arreglo es de seis cargas, $N = 6$ y calcule el potencial electrostático en el punto $(3R, 0, 0)$.

3.6 Bases continuas y de ondas planas

En esta sección aprovechamos una generalización del concepto de base para el espacio de funciones continuas para presentar, de forma operativa, la transformada de Fourier y explorar algunas de sus consecuencias. En particular construiremos la base de ondas planas que nos permitirá transitar entre la representación de una función entre el espacio de tiempos y su transformada al espacio frecuencia. Finalmente, desarrollaremos el concepto de las representaciones de coordenadas $|r\rangle$ y de momentos $|p\rangle$, usuales en las descripciones de funciones de onda en Mecánica Cuántica.

3.6.1 Bases continuas

Tal y como vimos anteriormente, la representación de un vector $|a\rangle$ en un espacio vectorial abstracto V puede darse en término de una base ortonormal de vectores (discreta y finita $B_{DF} = \{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle, \dots, |\hat{e}_n\rangle\}$ o discreta e infinita $B_{DI} = \{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle \dots |\hat{e}_n\rangle \dots\}$) de la forma:

$$|a\rangle = \begin{cases} c^i |\hat{e}_i\rangle = \langle \hat{e}^i | a \rangle |\hat{e}_i\rangle \Leftarrow B_{DF} = \{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle \dots |\hat{e}_n\rangle\}, \\ c^i |\hat{e}_i\rangle = \langle \hat{e}^i | a \rangle |\hat{e}_i\rangle \Leftarrow B_{DI} = \{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle \dots |\hat{e}_n\rangle \dots\}, \end{cases}$$

donde, en ambos casos:

$$c^i = \langle \hat{e}^i | a \rangle = c^j \langle \hat{e}^i | \hat{e}_j \rangle = c^j \delta_j^i.$$

Recapitulemos ahora algunos puntos que hemos tratado con anterioridad, con el fin de aclarar conceptos, para el caso de bases discretas de funciones $\{e_i(x)\}$. Hemos considerado varios de estos casos, como lo son polinomios de Legendre –que consideramos en el ejemplo 3, cuando ortogonalizamos la base de monomios $\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$ – y las series de Fourier que discutimos en el ejemplo 2.18.

Es claro que la relación de ortogonalidad viene dada, como hemos mencionado en 2.2.3.1, a partir de la definición del producto interno:

$$\langle e^n(x) | e_m(x) \rangle = \int_a^b e_n^*(x) e_m(x) dx = \Theta_n \delta_m^n,$$

y que implica una norma definida como:

$$\|e_i(x)\|^2 = \langle e_i(x) | e_i(x) \rangle = \int_a^b |e_i(x)|^2 dx = \Theta_n.$$

En esta notación la base será ortonormal si $\Theta_n = 1$.

Entonces, cualquier función cuadrado integrable,

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \neq \infty,$$

puede ser expresada como una combinación lineal de la base $\{e_i(x)\}$ de la forma

$$|f(x)\rangle = C^i |e_i(x)\rangle.$$

Donde las cantidades C^i , son las componentes de $|f(x)\rangle$ y se obtienen como siempre

$$\langle e^i(x) | f(x) \rangle = C^j \langle e^i(x) | e_j(x) \rangle = C^j \delta_j^i = C^i = \int_a^b f(x) e_i^*(x) dx,$$

Podemos cambiar $i \rightarrow n$ y $x \rightarrow x'$, sin que nada se altere, y obtenemos

$$C^n = \int_a^b f(x') e_n^*(x') dx'.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} |f(x)\rangle = C^n |e_n(x)\rangle &\Rightarrow |f(x)\rangle = \sum_n \left[\int_a^b f(x') e_n^*(x') dx' \right] |e_n(x)\rangle = \sum_n \int_a^b f(x') e_n^*(x') e_n(x) dx', \\ &= \int_a^b f(x') \sum_n e_n^*(x') e_n(x) dx'. \end{aligned}$$

Ahora, identificando la distribución delta de Dirac tendremos

$$f(x) = \int_a^b f(x') \delta(x - x') dx' = \int_a^b f(x') \left[\sum_n e_n^*(x') e_n(x) \right] dx' \Rightarrow \delta(x - x') = \sum_n e_n^*(x') e_n(x).$$

Esta última relación viene a ser una generalización de la relación de cierre de las bases discretas e infinitas

$\{|\hat{e}_1\rangle, |\hat{e}_2\rangle, |\hat{e}_3\rangle \cdots |\hat{e}_n\rangle \cdots\}$, mencionada en la sección 2.3.4. Se conoce como *condición de completitud* para la base $\{|e_i(x)\rangle\}$. Además, también resulta ser una representación en serie para la delta de Dirac. De todo esto surgen algunas propiedades fundamentales:

- Se dice que el conjunto $\{|e_i(x)\rangle\}$ es *completo* si para $|f(x)\rangle = C^i |e_i(x)\rangle$, entonces se tiene que:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_n |C^n|^2.$$

- Si $|f(x)\rangle = C^i |e_i(x)\rangle$ y $|g(x)\rangle = E^i |e_i(x)\rangle$, entonces $\langle f(x)|g(x)\rangle = C_n^* E^n$.

Es posible pasar de estos espacios vectoriales discretos, donde las bases son un conjunto numerable de elementos $\{e_n(x)\}$, a espacios vectoriales de funciones con las bases donde el índice n , se convierten en una variable continua.

Recordemos que en la sección 2.3.4 hablábamos de un conjunto de funciones $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle \cdots\}$ definidas por:

$$|e_0\rangle = 1, \quad |e_{2n-1}\rangle = \cos(nx) \quad \text{y} \quad |e_{2n}\rangle = \sin(nx), \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots,$$

que denominamos la base discreta de Fourier. Base que también podemos escribir de la forma compleja, como:

$$|\hat{e}_n(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i \frac{n\pi}{L} x} = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{ikx}, \quad \text{con } n = -\infty \dots \infty \text{ y } -L \leq x \leq L.$$

Cuando n aumenta indefinidamente, también lo hará la cantidad $k = \frac{n\pi}{L}$, convirtiéndose entonces en una variable continua: $\Delta k = \frac{\Delta n\pi}{L} \rightarrow 0$.

Notemos que los índices de la delta de Kronecker $\delta_{nm} = \delta_{nn'}$ pueden tomar los valores: $n = \frac{Lk}{\pi}$, $n' = \frac{Lk'}{\pi}$, y en el proceso de $L \rightarrow \infty$, tendremos

$$\delta_{nn'} \rightarrow \delta\left(\frac{Lk}{\pi} - \frac{Lk'}{\pi}\right) = \delta\left(\frac{L}{\pi}(k - k')\right) = \frac{\pi}{L} \delta(k - k').$$

De esta manera, la base ortonormal quedará escrita en función de las variables continuas k y x , de la forma

$$|\hat{e}(k, x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}.$$

El hecho de que sean ortonormales se refleja en la siguiente condición (que es una extensión de la expresión para el producto interno de bases discretas)

$$\langle \hat{e}(k, x) | \hat{e}(k', x) \rangle = \int_a^b \hat{e}(k, x)^* \hat{e}(k', x) dx = \delta(k - k'), \quad \text{con } \alpha \leq k \leq \beta, \quad a \leq x \leq b.$$

Al ser el conjunto de funciones $\{|\hat{e}(k, x)\rangle\}$ una base, toda función del mismo espacio vectorial se puede expandir en esa base como:

$$|f(x)\rangle = \int_{\alpha}^{\beta} C(k) \hat{e}(k, x) dk,$$

donde la función $\hat{e}(k, x)$ se presenta como el núcleo de una transformación lineal, que consideraremos en detalle en la sección 4.1 del próximo capítulo.

Como en el caso de las bases discretas, los coeficientes $C(k)$ vienen a ser las componentes de $|f(x)\rangle$ y para calcularlos se procede en forma análoga a como lo hemos hecho con anterioridad

$$\begin{aligned} \langle \hat{e}(k', x) | f(x) \rangle &= \int_a^b \hat{e}(k', x)^* f(x) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} C(k) \left[\int_a^b \hat{e}(k', x)^* \hat{e}(k, x) dx \right] dk = \int_{\alpha}^{\beta} C(k) \delta(k - k') dk = C(k'). \end{aligned}$$

Volvamos a cambiar la notación para los índices: $k' \rightarrow k$, $x \rightarrow x'$ en la última ecuación, de tal forma que

$$C(k) = \int_a^b \hat{e}(k, x')^* f(x') dx',$$

por lo tanto,

$$|f(x)\rangle = \int_a^\beta C(k) |\hat{e}(k, x)\rangle dk = \int_a^b f(x') \left[\int_a^\beta \hat{e}(k, x')^* \hat{e}(k, x) dk \right] dx' = \int_a^b f(x') \delta(x - x') dx',$$

y

$$\int_a^\beta \hat{e}(k, x')^* \hat{e}(k, x) dk = \delta(x - x'),$$

será la relación de cierre para el conjunto no numerable de funciones ortonormales.

Una integral como la que nos permitió definir $C(k)$, es

$$F(k) = \int_a^b f(x') \hat{e}(k, x')^* dx' \Rightarrow |f(x)\rangle = \int_a^\beta F(k) \hat{e}(k, x) dk,$$

es lo que se denomina una transformada de $f(x)$ y la presentaremos en la sección 4.1 en el contexto de las transformaciones lineales.

En el espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable \mathcal{L}^2 , definidas en \mathbb{R}^3 , tendremos que

$$|F\rangle = c^i |e_i\rangle \equiv \langle e^i | F \rangle |e_i\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d^3 r' \xi_i^*(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') \right) |e_i\rangle,$$

y cambiando un poco la notación se reescribe en términos de funciones como

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d^3 r' \xi_i^*(\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') \right) \xi_i(\mathbf{r}).$$

Es claro que se pueden intercambiar los símbolos de \int y \sum , por lo cual tendremos

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 r' f(\mathbf{r}') \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i^*(\mathbf{r}') \xi_i(\mathbf{r}) \right]}_{\mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})},$$

la función $\mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, que depende de los argumentos \mathbf{r}' y \mathbf{r} , “vive” dentro de las integrales y representa el núcleo de una transformación lineal,

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 r' f(\mathbf{r}') \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}),$$

de forma que, puede representar a las distribuciones que de la forma

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 r' f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}).$$

En resumen, la generalización de bases discretas a continuas se hace transformando el índice de la sumatoria en la variable de una integral, vale decir:

$$|\Psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha) |w_\alpha\rangle \Rightarrow c(\beta) = \langle w^\beta | \Psi \rangle = \int d\alpha c(\alpha) \langle w^\beta | w_\alpha \rangle = \int d\alpha c(\alpha) \delta(\alpha - \beta).$$

Así, para los conceptos expresados hasta ahora se tiene la siguiente tabla resumen:

Propiedad \ Base	Discreta	Continua
Ortogonalidad	$\langle u^i u_j \rangle = \delta_j^i$	$\langle w^\beta w_\alpha \rangle = \delta(\alpha - \beta)$
Cierre	$1 = \sum_{j=0}^{\infty} u_j\rangle \langle u_j $	$1 = \int d\alpha w_\alpha\rangle \langle w_\alpha $
Expansión	$ F\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c^i u_i\rangle$	$ \Psi\rangle = \int d\alpha c(\alpha) w_\alpha\rangle$
Componentes	$c^i = \langle u^i F \rangle$	$c(\beta) = \langle w^\beta \Psi \rangle$
Producto Interno	$\langle G F \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} g^{i*} f_i$	$\langle G F \rangle = \int d\alpha g^*(\alpha) f(\alpha)$
Norma	$\langle F F \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} f_i ^2$	$\langle F F \rangle = \int d\alpha f(\alpha) ^2$

3.6.2 Bases de ondas planas y la transformada de Fourier

En esta sección consideraremos un tipo muy particular de base continua: la base de ondas planas. En las teorías de oscilaciones es de gran importancia considerar el problema de la transformada de Fourier y vimos que una función $f(x)$ puede representarse de la forma:

$$|f(x)\rangle = \int_{\alpha}^{\beta} C(k) e(k, x) dk.$$

Si la función $f(x)$ está definida en $(-\infty, \infty)$ y si tomamos al conjunto de vectores base a las funciones continuas ortonormales $\{\hat{e}(k, x)\}$ como $\{e^{ikx}/\sqrt{2\pi}\}$, entonces la integral anterior la podemos escribir de la forma,

$$|f(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk. \quad (3.15)$$

Si ahora utilizamos la relación de ortogonalidad: $\langle e(k, x) | e(k', x) \rangle = \int e(k, x) e(k', x)^* dx = \delta(k - k')$, resulta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = 2\pi \delta(k - k'),$$

donde

$$|F(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

A las variables x y k se les denominan variables conjugadas de Fourier (no conjugadas como en variable compleja) y a $F(k)$ la transformada de Fourier de $f(x)$ (y viceversa).

Notemos que si sustituimos $F(k)$ en la otra integral, ecuación (3.15), entonces tendremos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ik(x-x')} dk dx' \Rightarrow |f(x')\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x') dx'.$$

Por otra parte, podemos ver que la integral para $F(k)$ se puede hacer en dos partes:

$$|F(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ikx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Si sustituimos $x \rightarrow -x$, en la primera integral de la ecuación anterior resulta:

$$|F(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(-x) e^{ikx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Podemos considerar entonces dos casos:

- Si la función es par, $f(x) = f(-x)$:

$$|F(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{\infty} f(x) e^{ikx} dx + \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx,$$

entonces, al hacer $F(k) = F(-k)$ se tiene:

$$|f(x)\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F(k) \cos(kx) dk.$$

Estas dos funciones se conocen como las transformadas coseno de Fourier.

- Si la función es impar, $f(x) = -f(-x)$:

$$|F(k)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^\infty f(-x) e^{ikx} dx - \int_0^\infty f(-x) e^{-ikx} dx \right] = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(kx) dx.$$

Ahora al hacer $F(k) = -F(-k)$ se tiene:

$$|f(x)\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{F}(k) \sin(kx) dk,$$

donde $\tilde{F}(k) = iF(k)$ y tendremos las transformadas seno de Fourier.

La generalización a \mathbb{R}^n es directa, si $f = f(\mathbf{r})$, entonces:

$$|f(\mathbf{r})\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^{\frac{1}{n}} \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty F(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{k},$$

donde $d\mathbf{k} = dk_1 dk_2 dk_3 \dots dk_n$. Para la transformada:

$$|F(\mathbf{k})\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^{\frac{1}{n}} \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty f(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\mathbf{r},$$

con $d\mathbf{r} = dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n$, representa el elemento de volumen en \mathbb{R}^n .

3.6.2.1 Ondas planas

Como un ejemplo de lo anterior, consideraremos la base de las ondas planas. Si a k la llamaremos s y a la variable x el tiempo t , vale decir:

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty dt e^{ist} f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty ds e^{-ist} F(s).$$

A la función $F(s)$ se le denomina la distribución espectral de $f(t)$ y a $|F(s)|^2$ la densidad espectral de la onda en el intervalo $[s, s + \Delta s]$. Por su parte la energía total es

$$E = \int_{-\infty}^\infty |F(s)|^2 ds = \int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2 dt.$$

Es más común en Física expresar las transformadas en términos de la posición x y el momento p de la forma

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^\infty dp e^{i(px/\hbar)} \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^\infty dx e^{-i(px/\hbar)} \psi(x).$$

Hemos tenido cuidado de incluir los factores de normalización adecuados para el caso de las descripciones en Mecánica Cuántica.

Estas relaciones pueden ser reinterpretadas en función de los conceptos anteriormente expuestos y podemos definir una base continua, $v_p(x)$, de la forma:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^\infty dp \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i(px/\hbar)} \right)}_{v_p(x)} \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^\infty dx \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i(px/\hbar)} \right)}_{v_p^*(x)} \psi(x),$$

por lo cual:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^\infty dp v_p(x) \bar{\psi}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{\psi}(p) = \int_{-\infty}^\infty dx v_p^*(x) \psi(x).$$

Diremos que la función $\psi(x)$ está expresada en la base de ondas planas $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i(px/\hbar)}$.

Entonces

- El índice p de $v_p(x)$ varía de forma continua entre $-\infty$ a ∞ .
- Que $v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i(px/\hbar)} \notin \mathcal{L}^2$, es decir, no pertenece al espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable ya que su norma diverge:

$$\langle v_p | v_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx |v_p(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\pi\hbar} \rightarrow \infty.$$

- Que las proyecciones de $\psi(x)$ sobre la base de ondas planas son $\bar{\psi}(p) = \langle v_p | \psi \rangle$.
- La relación de cierre para esta base se expresa como:

$$1 = \int d\alpha |v_\alpha\rangle \langle v_\alpha| \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dp v_p^*(x') v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i[p(x'-x)/\hbar]} = \delta(x' - x),$$

mientras que de la definición de producto interno se obtiene:

$$\langle v_{p'} | v_p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx v_{p'}^*(x) v_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i[x(p'-p)/\hbar]} = \delta(p' - p).$$

En este mismo orden de ideas, podemos construir otra base continua $\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})$ a partir de las propiedades de la delta de Dirac. Esto es:

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r_0 \psi(\mathbf{r}_0) \underbrace{\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}_{\xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})} \Leftrightarrow \psi(\mathbf{r}_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \psi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

por lo cual la reinterpretación es inmediata:

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r_0 \psi(\mathbf{r}_0) \xi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}), \quad \text{con} \quad \psi(\mathbf{r}_0) = \langle \xi_{\mathbf{r}_0} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \xi_{\mathbf{r}_0}^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}),$$

más aún, la ortogonalidad queda garantizada por la relación de cierre,

$$\langle \xi_{\mathbf{r}_0} | \xi_{\mathbf{r}_0'} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \xi_{\mathbf{r}_0}^*(\mathbf{r}) \xi_{\mathbf{r}_0'}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0') = \delta(\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_0),$$

al igual que

$$\langle \xi_{\mathbf{r}_0} | \xi_{\mathbf{r}_0'} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \xi_{\mathbf{r}_0}^*(\mathbf{r}) \xi_{\mathbf{r}_0'}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0') = \delta(\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}_0).$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.23 Encontremos la transformada de Fourier de la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & -\frac{n\pi}{\omega_0} < t < \frac{n\pi}{\omega_0} \\ 0 & t < -\frac{n\pi}{\omega_0} \wedge t > \frac{n\pi}{\omega_0} \end{cases}.$$

La función $f(t)$ representa un tren de ondas finito con n ciclos en el intervalo dado, como se aprecia en la figura 3.6.

Por el hecho de ser $f(t)$ una función impar, podemos utilizar la transformada seno de Fourier:

$$\begin{aligned} |F(\omega)\rangle &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{n\pi}{\omega_0}} f(t) \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{n\pi}{\omega_0}} \sin(\omega_0 t) \sin(\omega t) dt. \end{aligned}$$

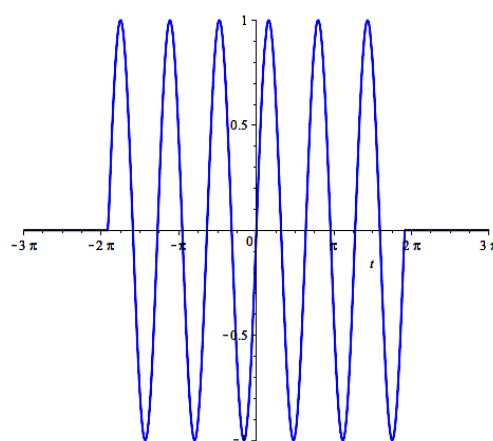


Figura 3.6: Ilustración de la señal $f(t)$ con $n = 6$ y $\omega_0 = \pi$.

Resolviendo la integral obtenemos la distribución espectral:

$$|F(\omega)\rangle = \frac{2 [\omega_0 \sin(\tau \omega) \cos(n\pi) - \omega \cos(\tau \omega) \sin(n\pi)]}{\sqrt{2\pi} (\omega^2 - \omega_0^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin[\tau(\omega_0 - \omega)]}{2(\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin[\tau(\omega_0 + \omega)]}{2(\omega_0 + \omega)} \right],$$

donde $\tau = \frac{n\pi}{\omega_0}$.

Se puede demostrar que los límites:

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} |F(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |F(\omega)| = 0.$$

Se puede apreciar también que el primer término, de la expresión entre corchetes, es el de mayor relevancia debido a que en el denominador aparece la diferencia: $\omega_0 - \omega$.

En la Figura 3.7 se muestra la función de distribución y en ella podemos notar que a medida que n crece la función $|F(\omega)|$ es una delta de Dirac en $\omega = \omega_0 = \pi$.

Por otro lado, es fácil ver que los ceros ocurren cuando:

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \pm \frac{1}{n}, \pm \frac{2}{n}, \pm \frac{3}{n} \dots$$

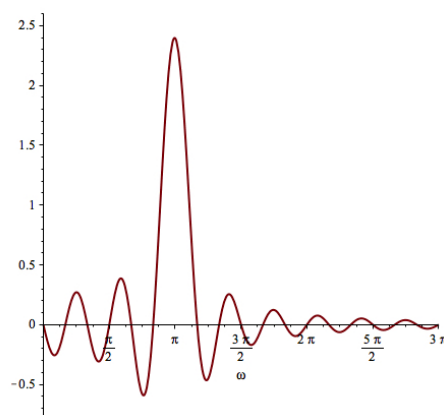


Figura 3.7: Ilustración de la transformada de Fourier $F(\omega)$ de $f(t)$ también con: $n = 6$ y $\omega_0 = \pi$.

Ejemplo 3.24 Podemos ver cómo es la transformada de Fourier de la derivada de una función. Si

$$|f(x)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \Rightarrow \frac{d}{dx} |f(x)\rangle = \frac{(ik)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk.$$

3.6.2.2 Las representaciones $|r\rangle$ y $|p\rangle$

A partir de las bases de ondas planas $v_{p_0}(x)$, y de distribuciones, $\xi_{r_0}(\mathbf{r})$, construimos las llamadas representaciones de coordenadas $|r\rangle$ y de momentos $|p\rangle$ de la forma siguiente.

Primero asociamos

$$\xi_{r_0}(\mathbf{r}) \rightleftharpoons |r_0\rangle \wedge v_{p_0}(x) \rightleftharpoons |p_0\rangle.$$

De esta forma, dada las bases $\{\xi_{r_0}(\mathbf{r})\}$ y $\{v_{p_0}(x)\}$ para el espacio vectorial \mathbf{V} definiremos dos “representaciones”: la de coordenadas, $|r_0\rangle$, y la de momentos $|p_0\rangle$ de \mathbf{V} , respectivamente. De tal modo que,

$$\langle r_0 | r'_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \xi_{r_0}^*(\mathbf{r}) \xi_{r'_0}(\mathbf{r}) = \delta(r'_0 - r_0) \Rightarrow 1 = \int d^3r_0 |r_0\rangle \langle r_0|,$$

$$\langle p_0 | p'_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r v_{p'_0}^*(\mathbf{r}) v_{p_0}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-i(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{p}_0 / \hbar)} = \delta(\mathbf{p}'_0 - \mathbf{p}_0) \Rightarrow 1 = \int d^3p_0 |p_0\rangle \langle p_0|.$$

Podemos entonces expresar el producto interno para la representación de coordenadas como

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | \underbrace{\left(\int d^3r_0 |r_0\rangle \langle r_0| \right)}_1 | \Psi \rangle = \int d^3r_0 \phi^*(\mathbf{r}_0) \psi(\mathbf{r}_0),$$

y equivalentemente para la representación de momentos

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | \underbrace{\left(\int d^3p_0 |p_0\rangle \langle p_0| \right)}_1 | \Psi \rangle = \int d^3p_0 \phi^*(\mathbf{p}_0) \psi(\mathbf{p}_0),$$

por lo cual hemos encontrado que

$$|\Psi\rangle = \int d^3r_0 |r_0\rangle \langle r_0|\Psi\rangle = \int d^3p_0 |p_0\rangle \langle p_0|\Psi\rangle ,$$

$$\psi(\mathbf{r}_0) = \langle r_0|\Psi\rangle \quad \text{y} \quad \psi(\mathbf{p}_0) = \langle p_0|\Psi\rangle ,$$

que es la representación de $|\Psi\rangle$ en coordenadas, $\psi(r_0)$, y en momentos, $\psi(p_0)$.

Adicionalmente cuando $|\Psi\rangle = |p\rangle$ tendremos que,

$$\langle r_0|p_0\rangle = \langle r_0|\underbrace{\left(\int d^3r'_0 |r'_0\rangle \langle r'_0|\right)}_1|p_0\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3r'_0 \delta(\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0) e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}_0)} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}_0)} ,$$

con lo cual $\psi(p_0)$ puede considerarse la transformada de Fourier de $\psi(r_0)$, y denotaremos de ahora en adelante las bases $|r_0\rangle \equiv |r\rangle$ y $|p_0\rangle \equiv |p\rangle$.

Estos índices continuos, \mathbf{r}_0 y \mathbf{p}_0 , representan tres índices continuos $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ y $\mathbf{p} \equiv (p_x, p_y, p_z)$. La proyección de un vector abstracto $|\Psi\rangle$ en la representación $|r\rangle$ será considerada como su expresión en el espacio de coordenadas, igualmente su proyección $\langle p|\Psi\rangle$ será su expresión en el espacio de los momentos. Eso nos permitirá hacer corresponder los elementos de espacios vectoriales abstractos con elementos de un espacio vectorial de funciones. Por lo tanto, todas las fórmulas de proyección quedan como:

$$\langle r|\Psi\rangle = \psi(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \langle p|\Psi\rangle = \psi(\mathbf{p}) ,$$

mientras que las relaciones de cierre y ortonormalización son:

$$\langle r|r'\rangle = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad \text{y} \quad 1 = \int d^3r |r\rangle \langle r| ,$$

$$\langle p|p'\rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \quad \text{y} \quad 1 = \int d^3p |p\rangle \langle p| .$$

Por su parte, la relación de cierre hará corresponder a la expresión del producto interno de dos vectores, tanto en la representación de las coordenadas como en la representación de momentos, en una de la forma:

$$\langle \Phi | \left(\int d^3r |r\rangle \langle r| \right) | \Psi \rangle = \int d^3r \phi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \quad \wedge \quad \langle \Phi | \left(\int d^3p |p\rangle \langle p| \right) | \Psi \rangle = \int d^3p \bar{\phi}^*(\mathbf{p}) \bar{\psi}(\mathbf{p}) ,$$

donde $\bar{\phi}^*(\mathbf{p})$ y $\bar{\psi}(\mathbf{p})$ son las transformadas de Fourier de $\phi^*(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$, respectivamente. La afirmación anterior queda evidentemente demostrada del cambio entre las bases $|r\rangle$ y $|p\rangle$. Esto es:

$$\langle r|p\rangle = \langle p|r\rangle^* = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} ,$$

por lo cual:

$$\psi(\mathbf{r}) = \langle r|\Psi\rangle = \langle r| \left(\int d^3p |p\rangle \langle p| \right) | \Psi \rangle = \int d^3p \langle r|p\rangle \langle p|\Psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3p e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \bar{\psi}(\mathbf{p}) ,$$

e inversamente:

$$\psi(\mathbf{p}) = \langle p|\Psi\rangle = \langle p| \left(\int d^3r |r\rangle \langle r| \right) | \Psi \rangle = \int d^3r \langle p|r\rangle \langle r|\Psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3r e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \psi(\mathbf{r}) .$$

Practicando con SymPy

Estudiaremos en este módulo como calcular transformadas integrales de Fourier.

Si $f(x)$ es una función definida en $(-\infty, \infty)$ la transformada de Fourier exponencial es:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk .$$

Veamos algunos ejemplos:

```
[1]: import sympy
from sympy import *
init_printing()
```

1. Consideremos la siguiente función:

$$f = xe^{-x^2}, \quad \text{con } x \in (-\infty, \infty).$$

```
[2]: x,k = symbols('x k', positive=True)
f = x*exp(-x**2)
f
```

[2]: xe^{-x^2}

Podemos intentar resolver la integral que define la transformada de Fourier de manera “manual” o directa:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

```
[3]: F1=(1/(sqrt(2*pi))*integrate(exp(-I*k*x)*f,(x,-oo,oo))).factor()
F1
```

[3]:
$$-\frac{\sqrt{2}ike^{-\frac{k^2}{4}}}{4}$$

O utilizar la función de SymPy “fourier_transform”

```
[4]: F1s = fourier_transform(f, x, k,simplify=True)
F1s
```

[4]:
$$-i\pi^{\frac{3}{2}}ke^{-\pi^2k^2}$$

La transformada inversa

```
[5]: inverse_fourier_transform(F1s, k, x)
```

[5]: xe^{-x^2}

2. Consideremos ahora la siguiente función par:

$$g(x) = x^2e^{-|x|}, \quad \text{con } x \in (-\infty, \infty).$$

```
[6]: g= x**2*exp(-abs(x))
g
```

[6]: x^2e^{-x}

```
[7]: 1/(sqrt(2*pi))*integrate(exp(-I*k*x)*g,(x,-oo,oo))
```

[7]:
$$\frac{\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x} e^{-ikx} dx}{2\sqrt{\pi}}$$

SymPy no pudo hallar la integral

```
[8]: fourier_transform(g, x, k)
```

[8]: $\mathcal{F}_x[x^2e^{-x}](k)$

Y tampoco funciona “fourier_transform”

Pero notemos que se puede encontrar la transformada coseno de Fourier:

```
[9]: H=cosine_transform(g, x, k,simplify=True )
      H.factor()
```

$$[9]: \quad -\frac{2\sqrt{2} \cdot (3k^2 - 1)}{\sqrt{\pi} (k^2 + 1)^3}$$

Salvo constantes, la transformada inversa de esta función es $g(x)$

```
[10]: inverse_fourier_transform(H, k, x)
```

$$[10]: \quad 4\sqrt{2}\pi^{\frac{5}{2}}x^2e^{-2\pi x}$$

3. Consideremos la siguiente función impar:

$$f = xe^{-|x|}.$$

```
[11]: f=x*exp(-abs(x))
```

```
[12]: 1/(sqrt(2*pi))*integrate(exp(-I*k*x)*f,(x,-oo,oo))
```

$$[12]: \quad \frac{\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x} e^{-ikx} dx}{2\sqrt{\pi}}$$

```
[13]: fourier_transform(f, x, k)
```

$$[13]: \quad \mathcal{F}_x [xe^{-x}] (k)$$

```
[14]: G=sine_transform(f, x, k,simplify=True )
      G.factor()
```

$$[14]: \quad \frac{2\sqrt{2}k}{\sqrt{\pi} (k^2 + 1)^2}$$

```
[15]: inverse_fourier_transform(G, k, x)
```

$$[15]: \quad 2\sqrt{2}i\pi^{\frac{3}{2}}xe^{-2\pi x}$$

De nuevo, la transformada inversa de esta función es la función original.

4. Resolvamos ahora el ejemplo 3.23 donde la función era:

$$f(t) = \sin(\omega_0 t).$$

```
[16]: ω0,t,n,ω = symbols('ω0 t n ω', real=True)
      f = sin(ω0*t)
```

```
[17]: sine_transform(f, t, k,simplify=True )
```

$$[17]: \quad \mathcal{SIN}_t [\sin (t\omega_0)] (k)$$

```
[18]: τ = n*pi/ω0
      τ
```

$$[18]: \quad \frac{\pi n}{\omega_0}$$

Podemos intentar hacer la integral:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\tau \sin(t\omega) f(t) dt$$

```
[19]: res=sqrt(2/pi)*(integrate(sin(t*ω)*f,(t,0,τ)))
# res
```

La salida en pantalla que se obtiene es difícil de leer, pero podemos tener una mayor claridad si escribimos lo siguiente

```
[20]: partes=piecewise_fold(res)
print(partes)
```

```
Piecewise((0, (Eq(ω, 0) & Eq(ω0, 0)) | (Eq(ω, 0) & Eq(ω, ω0) & Eq(ω0, 0)) |
(Eq(ω, 0) & Eq(ω0, 0) & Eq(ω, -ω0)) | (Eq(ω, 0) & Eq(ω, ω0) & Eq(ω0, 0) &
↪Eq(ω,
-ω0))), (sqrt(2)*(-pi*n*sin(pi*n)**2/(2*ω0) - pi*n*cos(pi*n)**2/(2*ω0) +
sin(pi*n)*cos(pi*n)/(2*ω0))/sqrt(pi), Eq(ω, -ω0) | (Eq(ω, 0) & Eq(ω, -ω0))
↪|
(Eq(ω, ω0) & Eq(ω, -ω0)) | (Eq(ω0, 0) & Eq(ω, -ω0)) | (Eq(ω, 0) & Eq(ω,
↪ω0) &
Eq(ω, -ω0)) | (Eq(ω, ω0) & Eq(ω0, 0) & Eq(ω, -ω0))),
(sqrt(2)*(pi*n*sin(pi*n)**2/(2*ω0) + pi*n*cos(pi*n)**2/(2*ω0) -
sin(pi*n)*cos(pi*n)/(2*ω0))/sqrt(pi), Eq(ω, ω0) | (Eq(ω, 0) & Eq(ω, ω0)) |
(Eq(ω, ω0) & Eq(ω0, 0))), (sqrt(2)*(ω*sin(pi*n)*cos(pi*n*ω/ω0)/(-ω**2 +
↪ω0**2) -
ω0*sin(pi*n*ω/ω0)*cos(pi*n)/(-ω**2 + ω0**2))/sqrt(pi), True))
```

Escogemos la función que nos interesa

```
[21]: F=(sqrt(2)*(-ω*sin(pi*n)*cos(pi*n*ω/ω0)/(ω**2 - ω0**2) + ω0*sin(pi*n*ω/
↪ω0)*cos(pi*n)/(ω**2 - ω0**2))/sqrt(pi))
F
```

[21]:

$$\frac{\sqrt{2} \left(-\frac{\omega \sin(\pi n) \cos\left(\frac{\pi n \omega}{\omega_0}\right)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{\omega_0 \sin\left(\frac{\pi n \omega}{\omega_0}\right) \cos(\pi n)}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)}{\sqrt{\pi}}$$

Los parámetros son:

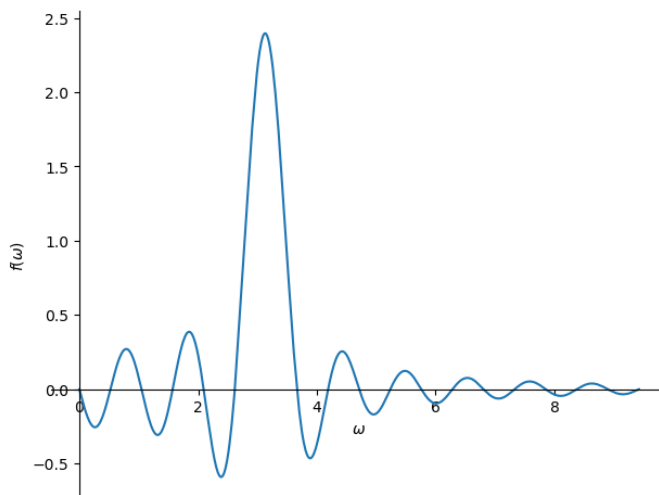
```
[22]: n=6
ω0=pi
```

```
[23]: F=(sqrt(2)*(-ω*sin(pi*n)*cos(pi*n*ω/ω0)/(ω**2 - ω0**2) + ω0*sin(pi*n*ω/
↪ω0)*cos(pi*n)/(ω**2 - ω0**2))/sqrt(pi))
F
```

[23]:
$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi} \sin(6\omega)}{\omega^2 - \pi^2}$$

Ahora podemos hacer la gráfica

[24]: `plot(F, (ω, 0, 3*pi))`



3.6.3 Ejercicios

1. Dadas las siguientes funciones ortonormales:

a) $|\hat{e}(k, x)\rangle = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \right\}$, con: $0 \leq k < \infty, -\infty \leq x < \infty$.

b) $|\hat{e}(k, x)\rangle = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}$, con: $-\infty \leq k < \infty, -\infty \leq x < \infty$.

(a). Escriba las condiciones de ortogonalidad y cierre.

(b). Demuestre:

I. $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \sin(k'x) dx = \pi \delta(k - k')$.

II. $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) \cos(k'x) dx = \pi \delta(k - k')$.

III. $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \cos(k'x) dx = 0$.

2. Encuentre las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} h(1 - a|x|), & |x| < \frac{1}{a}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{a}. \end{cases}$

3. Dada $F(\mathbf{k})$ como la transformada de Fourier, en tres dimensiones, de $f(\mathbf{r})$ y $F_d(\mathbf{k})$ la transformada de Fourier, tridimensional, de $\nabla f(\mathbf{r})$. Demuestre que:

$$F_d(\mathbf{k}) = -i\mathbf{k}(\mathbf{k}).$$

Bibliografía

- [1] Arfken, G. B., Weber, H., y Weber, H.J. (2000) *Mathematical Methods for Physicists* 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)
- [2] Borisenko, A.I, y Tarapov I.E. (1968) *Vector and Tensor Analysis* (Dover Publications Inc, Nueva York)
- [3] Cushing, J. T. (1975). *Applied analytical mathematics for physical scientists*. (Jhon Wiley & Sons, Nueva York).
- [4] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. y Laloë, F., (1977) *Quantum Mechanics vol I* Hermann, Paris.
- [5] Denner, P. y Krzywicki, A. (1995) *Mathematics for Physicists* (Dover Publications Inc, Nueva York)
- [6] Harper, C. (1971) *Introduction to Mathematical Physics* (Prentice Hall, Englewood Cliff)
- [7] Hassani, S. (1991) *Foundations of Mathematical Physics* (Prentice Hall, International Edition, London)
- [8] Jordan, T. F. (1997). *Linear operators for quantum mechanics*, (Dover Publications Inc, Nueva York).
- [9] Misner, C. W., Thorne, K. S. y Wheeler, J. A. (2017). *Gravitation*, Princeton University Press, Princeton.
- [10] Nguyen-Schäfer, H. y Schmidt, J.-P. (2017) *Tensor Analysis and Elementary Differential Geometry for Physicists and Engineers*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg) [doi:10.1007/978-3-662-48497-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-48497-5).
- [11] Pantoja-Vásquez, N. (2002) *Ecuaciones Diferenciales Parciales* Universidad de Los Andes, Mérida.
- [12] Reula, O. (2009) *Métodos Matemáticos de la Física* Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba
- [13] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) *Mathematical Methods for Physics and Engineering* (Cambridge University Press, Cambridge)
- [14] Roman, P. (1975). *Some modern mathematics for physicists and other outsiders: an introduction to algebra, topology, and functional analysis. Vol 2.* (Pergamon Press, Nueva York).
<https://doi.org/10.1016/C2013-0-05671-X>.

- [15] Schutz, B. (1980) *Geometrical Methods in Mathematical Physics* (Cambridge University Press, Londres)
- [16] Svozil, K. (2020) *Mathematical methods of theoretical physics*, (World Scientific, Singapur) y también Arxiv <https://arxiv.org/abs/1203.4558>.
- [17] Thorne, K. S. (2021). *Modern Classical Physics, optics, fluids, plasmas, elasticity, relativity, and statistical physics*. (Princeton University Press).
- [18] Tsukada, M., Kobayashi, Y. Kaneko, H., Takahasi, S.E. Shirayanagi, S-E., Noguchi, M. (2023) *Linear Algebra with Python, Theory and Applications* (Springer Undergraduate Texts Math. Technol.) <https://doi.org/10.1007/978-981-99-2951-1>.
- [19] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, (Jhon Wiley & Sons, Nueva York).