

Operadores lineales

La ruta de este capítulo

En el capítulo anterior definimos los funcionales lineales como un *morfismo* de un espacio vectorial lineal \mathbf{V} a un espacio unidimensional \mathbf{K} . Esta misma idea se puede extender a morfismos de un espacio vectorial \mathbf{V}_1 a un espacio vectorial \mathbf{V}_2 , sobre el mismo campo \mathbf{K} . Desarrollaremos estos conceptos a través de los operadores lineales en la sección 4.1, y en la sección 4.2 señalaremos algunos de los operadores lineales de mayor relevancia. En la sección 4.3 estableceremos una correspondencia uno-a-uno entre operadores lineales y matrices y la dependencia de ésta correspondencia con las bases del espacio vectorial. Luego, en la sección 4.4, veremos algunos de los métodos más comunes para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y haremos ejemplos en SymPy para resolver esos sistemas. Para finalizar, las secciones 4.5 y 4.6 estarán dedicadas al importante tema de la representación espectral de un operador: el problema de autovalores y autovectores. Los códigos de SymPy se encuentran en <https://github.com/nunezluis/CodigosLibroMatematicas/tree/main/Capitulo04>.

4.1 Operadores lineales

El primer paso es definir lo que en matemáticas se denomina una aplicación lineal, operador lineal o transformación lineal. Esto no es más que una aplicación que preservará la suma de vectores y la multiplicación por escalares.

Definición 4.1 (Operador Lineal)

Un operador lineal es una aplicación $\mathbb{T} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ entre espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathbb{K} (\mathbb{R} o \mathbb{C}) que asigna a cada vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ un vector $|v'\rangle = \mathbb{T}|v\rangle \in \mathbf{V}_2$ y que satisface las siguientes propiedades de linealidad:

1. Aditividad:

$$|v'\rangle = \mathbb{T}|v\rangle \quad / \quad \mathbb{T}[\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle] = \alpha\mathbb{T}|v_1\rangle + \beta\mathbb{T}|v_2\rangle \quad \forall |v_1\rangle \text{ y } |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1. \quad (4.1)$$

2. Homogeneidad:

$$\mathbb{T}(\alpha|v\rangle) = \alpha\mathbb{T}|v\rangle, \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}. \quad (4.2)$$

Con los siguientes ejemplos ilustraremos esas dos propiedades: aditividad y homogeneidad.

Ejemplo 4.1

1. Las siguientes transformaciones claramente son lineales

$$|x'\rangle = \mathbb{T}|x\rangle \rightarrow (x', y', z') = \mathbb{T}\{(x, y, z)\} ,$$

(a). $\mathbb{T}[(x, y, z)] = (x, 2y, 3z)$, la linealidad impone

$$\mathbb{T}[\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)] = \alpha\mathbb{T}[(x_1, y_1, z_1)] + \beta\mathbb{T}[(x_2, y_2, z_2)] ,$$

entonces:

$$\mathbb{T}[(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)] = \alpha(x_1, 2y_1, 3z_1) + \beta(x_2, 2y_2, 3z_2) ,$$

por lo tanto

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, 2[\alpha y_1 + \beta y_2], 3[\alpha z_1 + \beta z_2]) = (\alpha x_1 + \beta x_2, 2[\alpha y_1 + \beta y_2], 3[\alpha z_1 + \beta z_2]) .$$

(b). $\mathbb{T}\{(x, y, z)\} = (z, y, x)$, otra vez, la linealidad se escribe como

$$\mathbb{T}[\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)] = \alpha\mathbb{T}[(x_1, y_1, z_1)] + \beta\mathbb{T}[(x_2, y_2, z_2)] ,$$

igual que en el caso anterior:

$$\mathbb{T}\{(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)\} = \alpha(z_1, y_1, x_1) + \beta(z_2, y_2, x_2) ,$$

con lo cual

$$(\alpha z_1 + \beta z_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2) = (\alpha z_1 + \beta z_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2) .$$

2. Operaciones tan sencillas como la multiplicación por un número es una transformación (u operador) lineal, esto es, una transformación $\mathbb{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ tal que

$$\mathbb{T}|v\rangle = |v'\rangle = \lambda|v\rangle \Rightarrow \mathbb{T}[\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle] = \alpha\mathbb{T}|v\rangle + \beta\mathbb{T}|w\rangle = \alpha\lambda|v\rangle + \beta\lambda|w\rangle .$$

Si $\lambda = 1$ tenemos el operador identidad que transforma todo vector en sí mismo; si $\lambda = 0$ tendremos la transformación cero, vale decir que lleva a todo $|v\rangle \in \mathbf{V}$ al elemento cero $|0\rangle$.

3. La definición de producto interno también puede ser vista como una transformación (operador) lineal $\mathbb{T} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{T}|v\rangle = \lambda \Leftrightarrow \langle u|v\rangle \equiv \lambda .$$

Otra vez: $\mathbb{T}[\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle] = \langle u|[\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle] = \alpha\langle u|v\rangle + \beta\langle u|w\rangle$, por lo tanto es lineal. Esto implica que también la proyección de un determinado $|v\rangle \in \mathbf{V}$ sobre un subespacio S es un operador lineal, y lo denominaremos como:

$$[|s\rangle\langle s|] |v\rangle = \langle s|v\rangle|s\rangle = |\tilde{v}\rangle \quad \text{con } |s\rangle \text{ y } |\tilde{v}\rangle \in S .$$

Esta idea se extiende fácilmente para un proyector $\mathbb{P}_m : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{S}^m$ con $n \geq m$, de tal modo que para un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}^n$

$$\mathbb{P}_m|v\rangle \equiv (|u_i\rangle\langle u^i|_m)|v\rangle = \langle u^i|v\rangle_m|u_i\rangle = c^i|u_i\rangle \equiv |\tilde{v}\rangle \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, m ,$$

y $\{|u^i\rangle\}$ una base de \mathbf{S}^m . Tal y como lo presentaremos en la sección 4.1.4 la definición general de un proyector será $\mathbb{P}_m\mathbb{P}_m \equiv \mathbb{P}_m^2 = \mathbb{P}_m$. Observe la notación para el operador proyección $\mathbb{P}_m \equiv |u_i\rangle\langle u^i|_m$ y que además estamos utilizando la convención de Einstein para la suma de índices.

4. Las ecuaciones lineales también pueden verse como transformaciones lineales. Esto es, considere una transformación lineal $\mathbb{T} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}_m$. Por lo tanto asociaremos

$$|y\rangle = \mathbb{T}|x\rangle \Rightarrow (y^1, y^2, y^3, \dots, y^m) = \mathbb{T}[(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)] ,$$

a través de $n \times m$ números, a_j^i , organizados de la siguiente forma:

$$y^i = a_j^i x^j \quad \text{con } \begin{cases} i = 1, 2, \dots, m, \\ j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

una vez más,

$$\begin{aligned} \mathbb{T}[\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle] &= \mathbb{T}[\alpha(v^1, v^2, v^3, \dots, v^n) + \beta(w^1, w^2, w^3, \dots, w^n)] = \alpha a_j^i v^j + \beta a_j^i w^j, \\ &= \mathbb{T}[(\alpha v^1 + \beta w^1, \alpha v^2 + \beta w^2, \alpha v^3 + \beta w^3, \dots, \alpha v^n + \beta w^n)], \\ &= a_j^i (\alpha v + \beta w)^j = \alpha a_j^i v^j + \beta a_j^i w^j = a_j^i (\alpha v^j + \beta w^j). \end{aligned}$$

5. La derivada es un operador lineal

$$|v'\rangle = \mathbb{T}|v\rangle \rightarrow |y'\rangle = \mathbb{D}|y\rangle \rightarrow \mathbb{D}[y(x)] \equiv \frac{d}{dx}[y(x)] \equiv \frac{dy(x)}{dx} = y'(x),$$

es claro que $\mathbb{D}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathbb{D}[f(x)] + \beta \mathbb{D}[g(x)] \equiv \alpha f'(x) + \beta g'(x)$. Igualmente podemos asociar un operador diferencial de cualquier orden a una derivada del mismo orden, esto es

$$|y^{(n)}\rangle = \mathbb{D}^n|y\rangle \rightarrow \mathbb{D}^n[y(x)] \equiv \frac{d^n y(x)}{dx^n} \equiv y^{(n)}(x).$$

6. Del mismo modo, cualquier ecuación diferencial lineal es un ejemplo de operador lineal, digamos

$$y'' - 3y' + 2y = (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)y(x).$$

Si $y(x) = \alpha f(x) + g(x)$ la linealidad es evidente:

$$\begin{aligned} (\alpha f + g)'' - 3(\alpha f + g)' + 2(\alpha f + g) &= \alpha(f'' - 3f' + 2f) + g'' - 3g' + 2g, \\ &\quad \uparrow \\ (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)(\alpha f(x) + g(x)) &= (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)\alpha f(x) + (\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2)g(x). \end{aligned}$$

7. La integral también es un operador lineal:

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t)dt &\stackrel{\Leftrightarrow}{=} \mathbb{T}[f(t)], \\ \int_a^x [\alpha f(t) + \beta g(t)]dt &= \alpha \int_a^x \alpha f(t)dt + \beta \int_a^x g(t)dt. \end{aligned}$$



Considerando este último ejemplo, y como estudiaremos más adelante, existen otros ejemplos típicos de operadores de transformaciones integrales, es decir, transformaciones del tipo:

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s, t) f(t)dt \stackrel{\Leftrightarrow}{=} \mathbb{T}[f(t)],$$

donde $\mathcal{K}(s, t)$ es una función conocida de s y t , denominada el *kernel* o *núcleo* de la transformación. Si a y b son finitos la transformación se dirá finita, de lo contrario infinita. Este tipo de función de dos variables dentro de una integral la consideramos con detalle en las secciones 3.5 y 3.6.1 del capítulo anterior.

Así, si $f(t) = \alpha f_1(t) + f_2(t)$, con $f_1(t)$ y $f_2(t) \in \mathcal{C}_{[a,b]}^\infty$, es obvio que:

$$F(s) = \int_a^b \mathcal{K}(s, t) [\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] dt = \alpha \int_a^b \mathcal{K}(s, t) f_1(t) dt + \beta \int_a^b \mathcal{K}(s, t) f_2(t) dt,$$

$$F(s) = \alpha F(s_1) + \beta F(s_2) \stackrel{\Leftrightarrow}{=} \mathbb{T}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha \mathbb{T}[f_1(t)] + \beta \mathbb{T}[f_2(t)].$$

Dependiendo de la selección del núcleo y los límites tendremos distintas transformaciones integrales, en Física las más comunes son:

Nombre	$F(s) = \mathbb{T}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathbb{T}^{-1}\{F(s)\}$
Laplace	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds$
Fourier de senos cosenos	$F(s) = \begin{cases} \frac{\sin(st)}{s} & f(t)dt \\ \frac{\cos(st)}{s} & f(t)dt \end{cases}$	$f(t) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\sin(st)}{s} F(s) ds \\ \int_0^\infty \frac{\cos(st)}{s} F(s) ds \end{cases}$
Fourier compleja	$F(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{ist} f(t) dt$	$f(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ist} F(s) ds$
Hankel	$F(s) = \int_0^\infty t J_n(st) f(t) dt$	$f(t) = \int_0^\infty s J_n(ts) F(s) ds$
Mellin	$F(s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{-t} F(s) ds$

En el capítulo anterior presentamos con algún detalle las Transformadas de Fourier en la sección [3.6.2](#) en el contexto de las bases continuas para un espacio de funciones.

4.1.1 Espacio vectorial de operadores lineales

Es posible definir un conjunto de operadores lineales $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \dots\} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ y constituir un espacio vectorial lineal si se dispone entre ellos de la operación suma y la multiplicación por un número. Así, claramente, dado $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \dots\}$, y definida

$$(\lambda \mathbb{A} + \mathbb{B}) |v\rangle \equiv \lambda \mathbb{A}|v\rangle + \mathbb{B}|v\rangle \quad / \quad \begin{cases} \mathbb{A}[\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle] = \alpha \mathbb{A}|v_1\rangle + \beta \mathbb{A}|v_2\rangle, \\ \mathbb{B}[\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle] = \alpha \mathbb{B}|v_1\rangle + \beta \mathbb{B}|v_2\rangle, \end{cases}$$

es directo comprobar que:

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbb{A} + \mathbb{B}) [\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle] &= \lambda \mathbb{A}[\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle] + \mathbb{B}[\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle], \\ &= \lambda(\alpha \mathbb{A}|v_1\rangle + \beta \mathbb{A}|v_2\rangle) + \alpha \mathbb{B}|v_1\rangle + \beta \mathbb{B}|v_2\rangle, \\ &= \lambda(\alpha \mathbb{A}|v_1\rangle + \alpha \mathbb{B}|v_1\rangle) + \beta \mathbb{A}|v_2\rangle + \beta \mathbb{B}|v_2\rangle, \\ &= \lambda\alpha(\mathbb{A}|v_1\rangle + \mathbb{B}|v_1\rangle) + \beta(\mathbb{A}|v_2\rangle + \mathbb{B}|v_2\rangle). \end{aligned}$$

Igualmente, se cumple que $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$, con \mathbb{A}, \mathbb{B} y \mathbb{C} lineales en \mathbf{V} ,

$$\begin{aligned} [(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C}]|v\rangle &= (\mathbb{A} + \mathbb{B})|v\rangle + \mathbb{C}|v\rangle \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1, \\ &= \mathbb{A}|v\rangle + \mathbb{B}|v\rangle + \mathbb{C}|v\rangle, \\ &= \mathbb{A}|v\rangle + (\mathbb{B} + \mathbb{C})|v\rangle, \\ &= [\mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})]|v\rangle. \end{aligned}$$

Del mismo modo se puede comprobar fácilmente $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$.

Ahora bien, si definimos la transformación cero de $\mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ tal que $\mathbb{O}|v\rangle = |0\rangle \forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1$, que asigna el vector $|0\rangle \in \mathbf{V}_2 \forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1$, entonces el operador lineal \mathbb{O} será el elemento neutro respecto a la suma de operadores.

Finalmente, el elemento simétrico queda definido por

$$(-\mathbb{A})|v\rangle = -\mathbb{A}|v\rangle \Rightarrow (\mathbb{A} - \mathbb{A})|v\rangle = \mathbb{O}|v\rangle = |0\rangle.$$

Con ello queda demostrado que los operadores lineales forman un espacio vectorial. De ahora en adelante lo denominaremos $\mathcal{L}(V_1, V_2)$.

4.1.2 Operadores Tensoriales

Tal y como vimos en la sección 3.2.3 los tensores forman un espacio vectorial. Ahora nos toca construir los operadores de actúan en esos espacios tensoriales. Sean $\mathbb{A}_{(1)}$ y $\mathbb{B}_{(2)}$ dos operadores lineales que actúan en dos espacios vectoriales V_1 , y V_2 , respectivamente. Entonces

$$(\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)})|v(1) w(2)\rangle \equiv (\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)})(|v(1)\rangle \otimes |w(2)\rangle) = \mathbb{A}_{(1)}|v(1)\rangle \otimes \mathbb{B}_{(2)}|w(2)\rangle.$$

De tal forma que si $(\mathbb{A}_{(1)})_j^i$ y $(\mathbb{B}_{(2)})_m^k$ son matrices $n \times n$ y $m \times m$ el operador tensorial será una matriz $nm \times nm$. Esto es

$$\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbb{B}_{(2)} & a_{12}\mathbb{B}_{(2)} & \cdots & a_{1n}\mathbb{B}_{(2)} \\ a_{21}\mathbb{B}_{(2)} & a_{22}\mathbb{B}_{(2)} & \cdots & a_{2n}\mathbb{B}_{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbb{B}_{(2)} & a_{n2}\mathbb{B}_{(2)} & \cdots & a_{nn}\mathbb{B}_{(2)} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.2 Lo ilustramos con un ejemplo sencillo. Sean $(\mathbb{A}_{(1)})_j^i$ y $(\mathbb{B}_{(2)})_m^k$ dos matrices definidas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , respectivamente.

$$(\mathbb{A}_{(1)})_j^i = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (\mathbb{B}_{(2)})_m^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces, el operador tensorial $(\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)})$ definido en \mathbb{R}^6 se construye como

$$\mathbb{A}_{(1)} \otimes \mathbb{B}_{(2)} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

△

4.1.3 Composición de operadores lineales

El producto o composición de dos operadores lineales, \mathbb{A} y \mathbb{B} se denotará \mathbb{AB} y significará que primero se aplica \mathbb{B} y al resultado se aplica \mathbb{A} . Esto es:

$$\mathbb{AB}|v\rangle = \mathbb{A}(\mathbb{B}|v\rangle) = \mathbb{A}|\tilde{v}\rangle = |\tilde{v}'\rangle.$$

La composición de operadores cumple con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} (\mathbb{AB})\mathbb{C} &= \mathbb{A}(\mathbb{BC}); & \alpha(\mathbb{AB}) &= (\alpha\mathbb{A})\mathbb{B} = \mathbb{A}(\alpha\mathbb{B}); \\ (\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2)\mathbb{B} &= \mathbb{A}_1\mathbb{B} + \mathbb{A}_2\mathbb{B}; & \mathbb{A}(\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2) &= \mathbb{AB}_1 + \mathbb{AB}_2. \end{aligned}$$

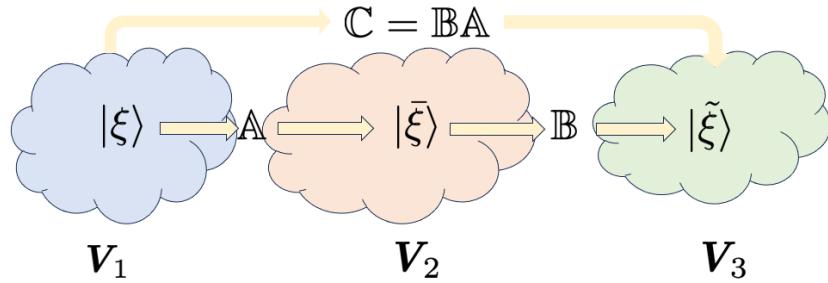


Figura 4.1: Ilustración de la composición de operadores lineales $\mathbb{B}\mathbb{A}|v\rangle = \mathbb{B}(\mathbb{A}|v\rangle) = \mathbb{B}|\bar{v}\rangle = |\tilde{v}\rangle$. Primero actúa $\mathbb{A}|v\rangle = |\bar{v}\rangle$ y luego \mathbb{B} , $\mathbb{B}|\bar{v}\rangle - |\tilde{v}\rangle$.

Es decir, que la composición de operadores es asociativa y distributiva respecto a la suma y que commuta respecto a la multiplicación por números. Si \mathbb{I} es el operador identidad: $\mathbb{I}|v\rangle = |v\rangle \Rightarrow \mathbb{A}\mathbb{I} = \mathbb{I}\mathbb{A} = \mathbb{A}$.

En general $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$ y podemos construir el conmutador de estos operadores como:

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A},$$

por lo tanto:

$$[\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}]|v\rangle = \mathbb{A}\mathbb{B}|v\rangle - \mathbb{B}\mathbb{A}|v\rangle.$$

Algunas de las propiedades más útiles de los conmutadores son:

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = -[\mathbb{B}, \mathbb{A}] \quad (4.3)$$

$$[\mathbb{A}, (\mathbb{B} + \mathbb{C})] = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] + [\mathbb{A}, \mathbb{C}] \quad (4.4)$$

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}\mathbb{C}] = [\mathbb{A}, \mathbb{B}]\mathbb{C} + \mathbb{B}[\mathbb{A}, \mathbb{C}] \quad (4.5)$$

$$[\mathbb{A}, [\mathbb{B}, \mathbb{C}]] = -[\mathbb{B}, [\mathbb{C}, \mathbb{A}]] - [\mathbb{C}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]]. \quad (4.6)$$

Un par de resultados inmediatos se derivan de la composición de operadores:

1. **Potencias de operadores.** Uno de los ejemplos más útiles en la composición de operadores lo constituyen las potencias de los operadores, las cuales provienen de la aplicación consecutiva de un mismo operador,

$$\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}; \quad \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}; \quad \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\mathbb{A}; \quad \mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^2\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{A} \dots$$

es claro que las potencias de operadores cumplen las propiedades estándares de las potencias de números

$$\mathbb{A}^{n+m} = \mathbb{A}^n\mathbb{A}^m; \quad (\mathbb{A}^n)^m = \mathbb{A}^{nm}.$$

Llamaremos *operadores nilpotentes de grado n* a los operadores $\mathbb{A}^n \neq 0$, del tipo $\mathbb{A}^n|v\rangle = |0\rangle \forall |v\rangle \in V_1$ y $|0\rangle \in V_2$. Es decir, un operador que lleva cualquier vector $|v\rangle$ al elemento neutro de V_2 . El ejemplo más notorio es el operador diferencial

$$\mathbb{D}^n|P^{n-1}\rangle = |0\rangle \iff \frac{d^n}{dx^n} P_{n-1}(x) = \frac{d^n}{dx^n} [a_i x^i] = 0,$$

con $|P^{n-1}\rangle$ perteneciente al espacio de polinomios de grado $n-1$.

2. **Operador ecuación diferencial.** Si consideramos el espacio de funciones $f(x) \in \mathcal{C}_{[a,b]}^\infty$ podemos

construir un operador diferencial

$$[a_0 + a_1 \mathbb{D} + a_2 \mathbb{D}^2 + \cdots + a_n \mathbb{D}^n] |f\rangle \Rightarrow \left(a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + a_2 \frac{d^2}{dx^2} + \cdots + a_n \frac{d^n}{dx^n} \right) f(x),$$

con $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ coeficientes constantes. De este modo, por ejemplo:

$$(\mathbb{D}^2 - 3\mathbb{D} + 2) y = (\mathbb{D} - 1)(\mathbb{D} - 2)y \Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} - 3 \frac{d}{dx} + 2 \right) y(x) = y'' - 3y' + 2y.$$

A continuación en estos ejemplos ilustraremos un poco del álgebra de operadores. En particular discutiremos el operador cantidad de movimiento angular en mecánica cuántica.

Ejemplo 4.3 Dados los operadores lineales \mathbb{A}, \mathbb{B} y el operador identidad \mathbb{I} , tales que:

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{B}\mathbb{A}, \quad \mathbb{A}^2 = \mathbb{I}, \quad \mathbb{B}^2 = \mathbb{I} \text{ y } [\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 2i\mathbb{C}.$$

- Mostraremos que: $\mathbb{C}^2 = \mathbb{I}$

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} = 2i\mathbb{C} \Rightarrow 2\mathbb{A}\mathbb{B} = 2i\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{A} = -\mathbb{C}^2 \Rightarrow -\mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{B} = -\mathbb{C}^2 \Rightarrow \mathbb{I} = \mathbb{C}^2.$$

- Que: $[\mathbb{B}, \mathbb{C}] = 2i\mathbb{A}$

$$[\mathbb{B}, \mathbb{C}] = -i(\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{B}) = 2i\mathbb{A} \Rightarrow -i(\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{A}) = 2i\mathbb{A} \Rightarrow -i(-\mathbb{B}\mathbb{B}\mathbb{A} - \mathbb{A}) = 2i\mathbb{A}.$$

- Y evaluemos: $[[\mathbb{A}, \mathbb{B}], [\mathbb{B}, \mathbb{C}]], [\mathbb{A}, \mathbb{B}]$.

$$\begin{aligned} [[\mathbb{A}, \mathbb{B}], [\mathbb{B}, \mathbb{C}]], [\mathbb{A}, \mathbb{B}] &= [[2i\mathbb{C}, 2i\mathbb{A}], 2i\mathbb{C}] = 8[[\mathbb{A}\mathbb{B}, i\mathbb{A}], \mathbb{A}\mathbb{B}] = 8i[(\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{B}), \mathbb{A}\mathbb{B}] , \\ &= 8i[-2\mathbb{B}, \mathbb{A}\mathbb{B}] = 16i(\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{B}) = 32i\mathbb{A}. \end{aligned}$$

△

Ejemplo 4.4 Dados tres operadores vectoriales: $\vec{\mathbb{A}}, \vec{\mathbb{B}}$ y $\vec{\mathbb{L}}$, definidos como:

$$\vec{\mathbb{A}} = \mathbb{A}^{(i)}|e_i\rangle \equiv \mathbb{A}^{(1)}|e_1\rangle + \mathbb{A}^{(2)}|e_2\rangle + \mathbb{A}^{(3)}|e_3\rangle, \quad \vec{\mathbb{B}} = \mathbb{B}^{(i)}|e_i\rangle \text{ y } \vec{\mathbb{L}} = \mathbb{L}^{(i)}|e_i\rangle,$$

donde $|e_i\rangle$ son vectores base y se supone la suma sobre índices repetidos ($i = 1, 2, 3$). Suponemos que estos operadores comutan entre sí de la siguiente manera:

$$[\mathbb{A}^{(i)}, \mathbb{B}^{(j)}] = [\mathbb{A}^{(k)}, \mathbb{L}^{(l)}] = [\mathbb{L}^{(m)}, \mathbb{B}^{(n)}] = 0, \quad \text{para todos } i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3.$$

Es decir, todas las componentes de $\vec{\mathbb{A}}$ comutan con las de $\vec{\mathbb{B}}$, y ambas comutan con $\vec{\mathbb{L}}$. Adicionalmente, las componentes $\mathbb{L}^{(i)}$ cumplen con el álgebra $\varepsilon_{(k)(l)(m)}\mathbb{L}^{(k)} = [\mathbb{L}_{(l)}, \mathbb{L}_{(m)}]$. Aquí, los superíndices indican las componentes de los operadores vectoriales, no potencias y su posición “arriba” y “abajo” con equivalentes. La notación vectorial de índices y el tensor de Levi-Civita, $\varepsilon_{(k)(l)(m)}$, fueron discutidos anteriormente en la sección 1.4.

Podemos demostrar la siguiente relación:

$$[\vec{\mathbb{A}} \cdot \vec{\mathbb{L}}, \vec{\mathbb{B}} \cdot \vec{\mathbb{L}}] = (\vec{\mathbb{A}} \times \vec{\mathbb{B}}) \cdot \vec{\mathbb{L}}.$$

Donde $\vec{\mathbb{A}} \times \vec{\mathbb{B}}$ es el producto vectorial de los operadores vectoriales $\vec{\mathbb{A}}$ y $\vec{\mathbb{B}}$. Esta relación ilustra cómo el conmutador de los productos escalares de estos operadores con $\vec{\mathbb{L}}$ puede expresarse en términos del producto vectorial y el operador $\vec{\mathbb{L}}$.

Veamos:

$$\begin{aligned} [\vec{\mathbb{A}} \cdot \vec{\mathbb{L}}, \vec{\mathbb{B}} \cdot \vec{\mathbb{L}}] &= \mathbb{A}^{(i)}\mathbb{L}_{(i)}\mathbb{B}^{(j)}\mathbb{L}_{(j)} - \mathbb{B}^{(j)}\mathbb{L}_{(j)}\mathbb{A}^{(i)}\mathbb{L}_{(i)} \\ &\equiv \mathbb{A}^{(i)}\mathbb{B}^{(j)}\mathbb{L}_{(i)}\mathbb{L}_{(j)} - \mathbb{A}^{(i)}\mathbb{B}^{(j)}\mathbb{L}_{(j)}\mathbb{L}_{(i)} \equiv \mathbb{A}^{(i)}\mathbb{B}^{(j)}([\mathbb{L}_{(i)}, \mathbb{L}_{(j)}]), \end{aligned}$$

donde las dos últimas equivalencias las hemos construido a partir de las propiedades de conmutación de los operadores $\mathbb{A}^{(i)}, \mathbb{B}^{(j)}$ y $\mathbb{L}^{(k)}$.

Finalmente, invocamos el álgebra de los operadores $\mathbb{L}_{(l)}$ y $\mathbb{L}_{(m)}$ y se obtiene

$$\mathbb{A}^{(i)}\mathbb{B}^{(j)}([\mathbb{L}_{(i)}, \mathbb{L}_{(j)}]) = \mathbb{A}^{(i)}\mathbb{B}^{(j)}(\varepsilon_{(i)(j)(k)}\mathbb{L}^{(k)}) = \varepsilon_{(i)(j)(k)}\mathbb{A}^{(i)}\mathbb{B}^{(j)}\mathbb{L}^{(k)} = (\vec{\mathbb{A}} \times \vec{\mathbb{B}}) \cdot \vec{\mathbb{L}}.$$

△

4.1.4 Proyectores

La notación de Dirac se hace particularmente conveniente para representar proyectores. Hasta ahora, hemos relacionado un funcional lineal, un *bra* $\langle w|$ del espacio dual V^* , con un vector *ket* $|v\rangle$ del espacio vectorial directo V a través de su producto interno $\langle w|v\rangle$, el cual es, en general, un número complejo. Ahora escribiremos esta relación entre vectores y formas diferenciales de una manera diferente: la relación entre $\langle w|$ y $|v\rangle$ un *ket* $|\Psi\rangle$ o un *bra* $\langle\Phi|$ arbitrarios puede ser:

$$|v\rangle\langle w| \Rightarrow \begin{cases} |v\rangle\langle w|\Psi\rangle, \\ \langle\Phi|v\rangle\langle w|. \end{cases}$$

La primera será la multiplicación del vector $|v\rangle$ por el número complejo $\langle w|\Psi\rangle$, mientras que la segunda relación será la multiplicación de la forma $\langle w|$ por el complejo $\langle\Phi|v\rangle$. Es imperioso señalar que el orden en la escritura de los vectores y formas es crítico, sólo los números complejos λ se pueden mover con impunidad a través de estas relaciones.

$$\begin{aligned} \lambda|v\rangle &= |\lambda v\rangle = |v\rangle\lambda, & \lambda\langle w| &= \langle\lambda w| = \langle w|\lambda, \\ \uparrow\downarrow && \uparrow\downarrow & \\ \langle w|\lambda|v\rangle &= \lambda\langle w|v\rangle = \langle w|v\rangle\lambda & \text{y} & \mathbb{A}|\lambda v\rangle = \mathbb{A}\lambda|v\rangle = \lambda\mathbb{A}|v\rangle. \end{aligned}$$

En general, la definición de un operador proyección a lo largo de un vector $|v\rangle$ será $\mathbb{P}_{|v\rangle}^2 = \mathbb{P}_{|v\rangle}$. Por lo tanto, dado un vector $|v\rangle$, podemos construir un proyector $\mathbb{P}_{|v\rangle}$ a lo largo del vector $|v\rangle$,

$$\mathbb{P}_{|v\rangle} \equiv |v\rangle\langle v|, \quad \text{con } \langle v|v\rangle = 1,$$

siempre y cuando este operador lineal cumpla:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{|v\rangle}[\alpha|z_1\rangle + \beta|z_2\rangle] &= \alpha\mathbb{P}_{|v\rangle}|z_1\rangle + \beta\mathbb{P}_{|v\rangle}|z_2\rangle, \\ |v\rangle\langle v|[\alpha|z_1\rangle + \beta|z_2\rangle] &= |v\rangle\langle v|\alpha|z_1\rangle + |v\rangle\langle v|\beta|z_2\rangle = \alpha|v\rangle\langle v|z_1\rangle + \beta|v\rangle\langle v|z_2\rangle, \end{aligned}$$

y además,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{|v\rangle}^2 &= \mathbb{P}_{|v\rangle} \iff (\langle v|v\rangle)(|v\rangle\langle v|) = |v\rangle\langle v|, \\ \mathbb{P}_{|v\rangle}\mathbb{P}_{|v\rangle}|z\rangle &= (\langle v|v\rangle)(|v\rangle\langle v|)|z\rangle = |v\rangle\langle v|v\rangle\langle v|z\rangle = |v\rangle\langle v|z\rangle = \mathbb{P}_{|v\rangle}|z\rangle. \end{aligned}$$

Así, el operador $\mathbb{P}_{|v\rangle}$ actuando sobre el vector $|\Psi\rangle$ representará la proyección de $|\Psi\rangle$ a lo largo de $|v\rangle$

$$\mathbb{P}_{|v\rangle}|\Psi\rangle = |v\rangle\langle v|\Psi\rangle \equiv \langle v|\Psi\rangle|v\rangle.$$

Es inmediato construir un proyector de un vector sobre un subespacio $S_q \subset V^n$. Entonces sea: $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_q\rangle\}$ un conjunto ortonormal de vectores que expande S_q , por lo tanto, definiremos el proyector \mathbb{P}_q al proyector sobre el subespacio S_q de la forma: $\mathbb{P}_q = |e_i\rangle\langle e^i|_q$, es claro que $\forall |v\rangle \in V$ se tiene:

$$\mathbb{P}_q^2|v\rangle = \mathbb{P}_q\mathbb{P}_q|v\rangle \Rightarrow \mathbb{P}_q^2|v\rangle = (|e_i\rangle\langle e^i|_q)(|e_j\rangle\langle e^j|_q)|v\rangle = |e_i\rangle\overbrace{\langle e^i|e_j\rangle}^{\delta_j^i}\langle e^j|v\rangle = |e_j\rangle\langle e^j|v\rangle \equiv \mathbb{P}_q|v\rangle,$$

es decir, $\mathbb{P}_q^2 = \mathbb{P}_q$ y de esta misma relación

$$(|e_i\rangle\langle e^i|_q) (|e_j\rangle\langle e^j|_q) = |e_i\rangle\overbrace{\langle e^i|e_j\rangle\langle e^j|}^{\delta_j^i} = |e_i\rangle\langle e^i|_q$$

concluimos que necesariamente, para construir un proyector la base tiene que ser ortonormal, $\langle e^i|e_j\rangle = \delta_j^i$, como lo mencionamos en el ejemplo de transformaciones generales de tensores en la página 195.

Más aún, si la “proyección” la hacemos sobre todo el espacio, vale decir, convertimos ese subespacio en el espacio total haciendo $q \rightarrow n$ obtendremos el operador identidad \mathbb{I} . Claramente, esta afirmación es válida tanto para bases ortogonales como oblicuas.

Consideremos, una vez mas una base ortonormal $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ que expanda el espacio vectorial V , entonces

$$|v\rangle = v^i|e_i\rangle \Rightarrow |e_j\rangle\langle e^j|v\rangle \equiv |e_j\rangle\langle e^j| (v^i|e_i\rangle) = v^i|e_j\rangle\overbrace{\langle e^j|e_i\rangle}^{\delta_i^j} = v^i|e_i\rangle = |v\rangle \Rightarrow |e_j\rangle\langle e^j| \equiv \mathbb{I}.$$

Esta manera curiosa de escribir un operador identidad, $|e_j\rangle\langle e^j| \equiv \mathbb{I}$, la utilizaremos muy frecuentemente en las próximas secciones.

4.1.5 Funciones de operadores

Para construir funciones de operadores lineales, procedemos por analogía, basándonos en el primero de los ejemplos de la sección 4.1.3. Vale decir que se puede construir un “polinomio” en potencias de los operadores a partir de la idea:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = a_ix^i \Leftrightarrow P_n(\mathbb{A})|v\rangle = [a_0 + a_1\mathbb{A} + \dots + a_n\mathbb{A}^n]|v\rangle = [a_i\mathbb{A}^i]|v\rangle, \\ \forall |v\rangle \in V_1.$$

Si nos saltamos todos los detalles de convergencia de la serie anterior –los cuales dependerán de los autovalores de \mathbb{A} y de su radio de convergencia– y nos inspiramos en el desarrollo de una función $F(z)$ como una serie de potencias de z en un cierto dominio, es posible expresar la función de un operador, $\mathbb{F}(\mathbb{A})$, como una serie de potencias del operador \mathbb{A} , esto es:

$$F(z) = a_iz^i \Leftrightarrow \mathbb{F}(\mathbb{A})|v\rangle = [a_i\mathbb{A}^i]|v\rangle.$$

Tal y como se hace en el caso de funciones, “desarrollamos por Taylor” la función como una serie de potencias del operador:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!} \Leftrightarrow \mathbb{F}(\mathbb{A})|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{\mathbb{A}^n}{n!} \right] |v\rangle, \quad (4.7)$$

de esta manera podemos expresar la exponencial de un operador \mathbb{A} , como

$$e^{\mathbb{A}}|v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!} \right] |v\rangle = \left[\mathbb{I} + \mathbb{A} + \frac{\mathbb{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbb{A}^n}{n!} \dots \right] |v\rangle.$$

En este caso hay que hacer una acotación, dado que, en general, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] \neq 0 \Rightarrow e^{\mathbb{A}}e^{\mathbb{B}} \neq e^{\mathbb{B}}e^{\mathbb{A}} \neq e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}$.

Esta afirmación se corrobora de manera inmediata al desarrollar las exponentiales:

$$e^{\mathbb{A}} e^{\mathbb{B}} |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n}{n!} \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbb{B}^m}{m!} \right] |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^n \mathbb{B}^m}{n! m!} \right] |v\rangle,$$

$$e^{\mathbb{B}} e^{\mathbb{A}} |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{B}^n}{n!} \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbb{A}^m}{m!} \right] |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbb{B}^n \mathbb{A}^m}{n! m!} \right] |v\rangle,$$

y sólo en el caso en que $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$ se tiene

$$e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}} |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{A} + \mathbb{B})^n}{n!} \right] |v\rangle,$$

es decir, si $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0 \Rightarrow e^{\mathbb{A}} e^{\mathbb{B}} = e^{\mathbb{B}} e^{\mathbb{A}} = e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}}$. La demostración no es inmediata y la haremos al final de la próxima sección en la cual desarrollaremos el concepto de derivada de operadores.

4.1.6 Diferenciación de operadores

Distinguiremos dos casos en la diferenciación de operadores: uno cuando el operador depende de una variable y diferenciamos respecto esa variable, $\frac{d\mathbb{A}(t)}{dt}|v\rangle$ y otro cuando diferenciamos respecto al operador mismo: $\frac{dF(\mathbb{B})}{d\mathbb{B}}$.

Empecemos por considerar operadores $\mathbb{A}(t)$, es decir que pueden depender de una variable arbitraria t . Podremos entonces definir la derivada como:

$$\frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{A}(t + \Delta t) - \mathbb{A}(t)}{\Delta t}.$$

Como era de esperarse, con esta definición se cumplirán todas las propiedades de las derivadas de funciones¹.

Empecemos por considerar el caso más simple: $\mathbb{A}(t) = At$, el operador depende linealmente de la variable t . Si queremos conocer la expresión para $\frac{de^{At}}{dt}$, para este caso elemental recordemos que

$$e^{At} |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \right] |v\rangle = \left[\mathbb{I} + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots + \frac{(At)^n}{n!} \cdots \right] |v\rangle, \quad (4.8)$$

por lo tanto, tendremos:

$$\frac{de^{At}}{dt} |v\rangle = \frac{d}{dt} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \right] |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{(At)^n}{n!} \right) \right] |v\rangle = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1} \mathbb{A}^n}{n!} \right] |v\rangle = \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n-1} \mathbb{A}^{n-1}}{(n-1)!} \right]}_{e^{\mathbb{A}t}} \mathbb{A} |v\rangle.$$

Nótese que la suma es hasta infinito, por lo tanto, al cambiar de índice $p = n - 1$, p sigue variando hasta infinito y la serie es la misma que la anterior. Finalmente, obtendremos²:

$$\frac{de^{At}}{dt} |v\rangle = e^{At} \mathbb{A} |v\rangle \equiv \mathbb{A} e^{At} |v\rangle \Rightarrow [e^{At}, \mathbb{A}] = 0.$$

En general también es fácil demostrar que $[\mathbb{F}(\mathbb{A}), \mathbb{A}] = 0$ ya que a partir del desarrollo (4.7) se hace evidente

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{\mathbb{A}^n}{n!} \right) \mathbb{A} \equiv \mathbb{A} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{\mathbb{A}^n}{n!} \right),$$

¹Más adelante, en la sección 4.3.6 consideraremos la expresión matricial de los operadores y serán evidentes estas propiedades que aquí presentamos sin mayores justificaciones.

²Es inmediato comprobarlo si consideramos la expansión 4.8.

Ahora bien, cuando se presenta la siguiente situación:

$$\frac{d(e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t})}{dt}|v\rangle = \frac{de^{\mathbb{A}t}}{dt}e^{\mathbb{B}t}|v\rangle + e^{\mathbb{A}t}\frac{de^{\mathbb{B}t}}{dt}|v\rangle = \mathbb{A}e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t}|v\rangle + e^{\mathbb{A}t}\mathbb{B}e^{\mathbb{B}t}|v\rangle = e^{\mathbb{A}t}\mathbb{A}e^{\mathbb{B}t}|v\rangle + e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t}\mathbb{B}|v\rangle,$$

hay que cuidar el orden en el cual se presentan los operadores. En particular en la expresión anterior hemos utilizado que siempre se cumple $[e^{\mathbb{B}t}, \mathbb{B}] = 0$, pero no hemos supuesto (ni conocemos) nada de $[\mathbb{A}, \mathbb{B}]$. Si, adicionalmente, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$ podremos factorizar $e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t}$ y tendremos

$$\frac{d(e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t})}{dt}|v\rangle = (\mathbb{A} + \mathbb{B})e^{\mathbb{A}t}e^{\mathbb{B}t}|v\rangle,$$

pero si $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] \neq 0$, el orden de aparición de los operadores es muy importante.

Para construir la expresión de la derivada de una función de operador respecto a su argumento, probaremos la siguiente afirmación:

$$\text{Si } [\mathbb{A}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] = [\mathbb{B}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] = 0 \Rightarrow [\mathbb{A}, F(\mathbb{B})] = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \frac{dF(\mathbb{B})}{d\mathbb{B}}. \quad (4.9)$$

Esta relación es fácilmente demostrable si suponemos $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{I}$, el operador identidad. Obviamente aquí se cumple que: $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{I} \Rightarrow [\mathbb{A}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] = [\mathbb{B}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] = 0$.

En ese caso es fácil demostrar que: $\mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = n\mathbb{B}^{n-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} &= \underbrace{\mathbb{A}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_n - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}\mathbb{A}}_n = (\mathbb{I} + \mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-1} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}\mathbb{A}}_n, \\ &= \mathbb{I}\mathbb{B}^{n-1} + \mathbb{B}(\mathbb{I} + \mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-2} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}\mathbb{A}}_n, \\ &= 2\mathbb{B}^{n-1} + \mathbb{B}^2(\mathbb{I} + \mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-3} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}\mathbb{A}}_n = \dots = n\mathbb{B}^{n-1}. \end{aligned}$$

Para demostrar la relación (4.9) “desarrollamos en serie de Taylor” la función $F(\mathbb{B})$ en el comutador

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}, F(\mathbb{B})] &= \left[\mathbb{A}, \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\mathbb{B}^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{[\mathbb{A}, \mathbb{B}^n]}{n!} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{n\mathbb{B}^{n-1}}{n!}, \\ &= [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{\mathbb{B}^{n-1}}{(n-1)!} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \frac{dF(\mathbb{B})}{d\mathbb{B}}. \end{aligned}$$

Para el caso más general: si

$$[\mathbb{A}, \mathbb{C}] = [\mathbb{B}, \mathbb{C}] = 0 \text{ con } \mathbb{C} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \Rightarrow [\mathbb{A}, F(\mathbb{B})] \stackrel{?}{=} [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \frac{dF(\mathbb{B})}{d\mathbb{B}},$$

se procede del mismo modo.

Probamos primero que: si

$$[\mathbb{A}, \mathbb{C}] = [\mathbb{B}, \mathbb{C}] = 0, \quad \text{con } \mathbb{C} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \Rightarrow [\mathbb{A}, \mathbb{B}^n] = \mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} = n[\mathbb{A}, \mathbb{B}]\mathbb{B}^{n-1},$$

tendremos:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{B}^n - \mathbb{B}^n\mathbb{A} &= \underbrace{\mathbb{A}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_n - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}\mathbb{A}}_n = (\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-1} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}\mathbb{A}}_n, \\ &= \mathbb{C}\mathbb{B}^{n-1} + \mathbb{B}(\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-2} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}\mathbb{A}}_n, \\ &= 2\mathbb{C}\mathbb{B}^{n-1} + \mathbb{B}^2(\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{A})\underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}}_{n-3} - \underbrace{\mathbb{B}\mathbb{B}\cdots\mathbb{B}\mathbb{A}}_n = \dots = n\mathbb{C}\mathbb{B}^{n-1} = n[\mathbb{A}, \mathbb{B}]\mathbb{B}^{n-1}, \end{aligned}$$

con lo cual es inmediato demostrar que:

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}, F(\mathbb{B})] &= \left[\mathbb{A}, \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{\mathbb{B}^n}{n!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{[\mathbb{A}, \mathbb{B}^n]}{n!} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{n\mathbb{B}^{n-1}}{n!}, \\ &= [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{\mathbb{B}^{n-1}}{(n-1)!} = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \frac{dF(\mathbb{B})}{d\mathbb{B}}. \end{aligned}$$

4.1.7 La fórmula de Glauber

Ahora estamos en capacidad de demostrar limpiamente la fórmula de Glauber:

$$e^{\mathbb{A}} e^{\mathbb{B}} = e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}} e^{\frac{1}{2}[\mathbb{A}, \mathbb{B}]}.$$

Para demostrarla, procedemos a considerar un operador $\mathbb{F}(t) = e^{\mathbb{A}t} e^{\mathbb{B}t}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{F}(t)}{dt} |v\rangle &= \frac{d(e^{\mathbb{A}t} e^{\mathbb{B}t})}{dt} |v\rangle = \mathbb{A} e^{\mathbb{A}t} e^{\mathbb{B}t} |v\rangle + e^{\mathbb{A}t} \mathbb{B} e^{\mathbb{B}t} |v\rangle = (\mathbb{A} + e^{\mathbb{A}t} \mathbb{B} e^{-\mathbb{A}t}) e^{\mathbb{A}t} e^{\mathbb{B}t} |v\rangle, \\ &= (\mathbb{A} + e^{\mathbb{A}t} \mathbb{B} e^{-\mathbb{A}t}) \mathbb{F}(t) |v\rangle. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que: $[\mathbb{A}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] = [\mathbb{B}, [\mathbb{A}, \mathbb{B}]] = 0 \Rightarrow [\mathbb{A}, F(\mathbb{B})] = [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \frac{dF(\mathbb{B})}{d\mathbb{B}}$,

entonces: $[\mathbb{A}^{\mathbb{A}t}, \mathbb{B}] = t [\mathbb{A}, \mathbb{B}] e^{\mathbb{A}t} \Rightarrow \mathbb{A}^{\mathbb{A}t} \mathbb{B} = \mathbb{B} e^{\mathbb{A}t} + t [\mathbb{A}, \mathbb{B}] e^{\mathbb{A}t}$,

es decir: $\frac{d\mathbb{F}(t)}{dt} |v\rangle = (\mathbb{A} + e^{\mathbb{A}t} \mathbb{B} e^{-\mathbb{A}t}) \mathbb{F}(t) |v\rangle = (\mathbb{A} + \mathbb{B} + t [\mathbb{A}, \mathbb{B}]) \mathbb{F}(t) |v\rangle$,

por tanto uno puede darse cuenta que: $\mathbb{F}(t) = e^{\left\{(\mathbb{A}+\mathbb{B})t + \frac{t^2}{2}[\mathbb{A}, \mathbb{B}]\right\}}$,

cumple con la ecuación anterior, por lo tanto absorbiendo t en los operadores correspondientes llegamos a la fórmula de Glauber: $e^{\mathbb{A}} e^{\mathbb{B}} = e^{\mathbb{A}+\mathbb{B}} e^{\frac{1}{2}[\mathbb{A}, \mathbb{B}]}$.

La fórmula de Glauber tiene su origen en los trabajos pioneros de Roy J. Glauber³ en óptica cuántica. Representa una contribución significativa a la comprensión de la coherencia y la correlación en los estados en sistemas cuánticos. Su importancia salpica a diversos campos que van desde la Física de altas energías a la materia condensada, pasando por la astrofísica, la óptica cuántica y la computación cuántica.

Practicando con SymPy

- Si tenemos la siguiente transformación, $|x'\rangle = \mathbb{T}|x\rangle$:

$$\mathbb{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{T}[(x, y, z)] = (2x + y, x - z, x + y + z, y + z),$$

entonces, para que sea una transformación lineal debe satisfacer lo siguiente:

- $\mathbb{T}[|v_1\rangle + |v_2\rangle] = \mathbb{T}[|v_1\rangle] + \mathbb{T}[|v_2\rangle]$.
- $\mathbb{T}[\alpha|v\rangle] = \alpha\mathbb{T}[|v\rangle]$.

³Premio Nobel por su contribución a la teoría cuántica de la coherencia óptica: https://en.wikipedia.org/wiki/Roy_J._Glauber. Con 18 años ingresó al Proyecto Manhattan, constituyéndose en el investigador más joven del proyecto. Sus recuerdos de esa época han sido recogidos magistralmente en el libro José Ignacio Latorre Sentís y Maite Soto Sanfiel, (2022) ‘La última voz’, (Ariel, Madrid).

```
[1]: import sympy
from sympy import *
init_printing()
```

Podemos demostrar ambas propiedades de la manera siguiente

```
[2]: # Definir las variables simbólicas
x, y, z, x1, x2, y1, y2, z1, z2, α = symbols('x y z x1 x2 y1 y2 z1 z2 α')
# Definir la función f
f = [2*x + y, x - z, x + y + z, y + z]
# Calcular ld y li
ld = [f[0].subs({x: x1 + x2, y: y1 + y2, z: z1 + z2}),
      f[1].subs({x: x1 + x2, y: y1 + y2, z: z1 + z2}),
      f[2].subs({x: x1 + x2, y: y1 + y2, z: z1 + z2}),
      f[3].subs({x: x1 + x2, y: y1 + y2, z: z1 + z2})]
li = [f[0].subs({x: x1, y: y1, z: z1}) + f[0].subs({x: x2, y: y2, z: z2}),
      f[1].subs({x: x1, y: y1, z: z1}) + f[1].subs({x: x2, y: y2, z: z2}),
      f[2].subs({x: x1, y: y1, z: z1}) + f[2].subs({x: x2, y: y2, z: z2}),
      f[3].subs({x: x1, y: y1, z: z1}) + f[3].subs({x: x2, y: y2, z: z2})]
# Aplicar factor a ld y li
ld_f = [factor(expr) for expr in ld]
li_f = [factor(expr) for expr in li]
# Restar ld de li y simplificar el resultado
resultado = [expr1 - expr2 for expr1, expr2 in zip(ld_f, li_f)]
ceros = [ratsimp(expr) for expr in resultado]
ceros
```

[2]: [0, 0, 0, 0]

Para la segunda condición

```
[3]: # Calcular f(alpha*x, alpha*y, alpha*z) - alpha*f(x, y, z)
f1 = [f[i].subs({x: α*x, y: α*y, z: α*z}) - α*f[i] for i in range(len(f))]
ceros = [factor(expr) for expr in f1]
ceros
```

[3]: [0, 0, 0, 0]

2. Consideremos ahora la siguiente transformación, $|x\{l\}\rangle = \mathbf{T}|x\rangle$:

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{T}[(x, y, z)] = (x^2, y + z, z^2).$$

```
[4]: # Definir la función f
f = [x**2, y + z, z**2]
# Calcular ld y li
ld = [f[0].subs({x: x1 + x2, y: y1 + y2, z: z1 + z2}),
      f[1].subs({x: x1 + x2, y: y1 + y2, z: z1 + z2}),
      f[2].subs({x: x1 + x2, y: y1 + y2, z: z1 + z2})]
li = [f[0].subs({x: x1, y: y1, z: z1}) + f[0].subs({x: x2, y: y2, z: z2}),
      f[1].subs({x: x1, y: y1, z: z1}) + f[1].subs({x: x2, y: y2, z: z2}),
      f[2].subs({x: x1, y: y1, z: z1}) + f[2].subs({x: x2, y: y2, z: z2})]
# Aplicar factor a ld y li
ld_f = [factor(expr) for expr in ld]
li_f = [factor(expr) for expr in li]
# Restar ld de li y simplificar el resultado
resultado = [expr1 - expr2 for expr1, expr2 in zip(ld_f, li_f)]
ceros = [ratsimp(expr) for expr in resultado]
ceros
```

[4]: $[2x_1x_2, 0, 2z_1z_2]$

No es una transformación lineal.

3. Dadas las siguientes transformaciones de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{A}[(x, y, z)] = (2x - z, x + z, x), \quad \mathbb{B}[(x, y, z)] = (z, x, y).$$

Veamos si comutan, es decir, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} = 0$.

Podemos ver que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A}[\mathbb{B}|x] = (2z - y, z + y, z)$ y $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{B}[\mathbb{A}|x] = (x, 2x - z, x + z)$.

```
[5]: # Definir las funciones A y B
def A(x, y, z):
    return [2*x - z, x + z, x]
def B(x, y, z):
    return [z, x, y]
# Definir la lista [x, y, z]
xyz = [z, x, y]
# Evaluar A en (x, y, z)
AB = A(*xyz)
print('AB=' , AB)
# Restablecer los valores de x, y, z
xyz = [2*x - z, x + z, x]
# Evaluar B en (x, y, z) modificado
BA = B(*xyz)
print('BA=' , BA)
# Calcular la diferencia AB - BA
```

```
diferencia = [AB[i] - BA[i] for i in range(len(BA))]
diferencia
```

$AB = [-y + 2z, y + z, z]$

$BA = [x, 2x - z, x + z]$

[5] : $[-x - y + 2z, -2x + y + 2z, -x]$

Por lo tanto no comutan.

4.1.8 Ejercicios

1. Diga si las siguientes transformaciones, $|x'\rangle = T|x\rangle$ son lineales
 - (a). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T[(x, y, z)] = (x + y, x + z).$
 - (b). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T[(x, y, z)] = (x, y, y + z).$
 - (c). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T[(x, y, z)] = (x, x + y, x - y).$
 - (d). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, T[(x, y, z)] = (x + y, x + z, 2x + y + z, y - z).$
 - (e). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T[(x, y, z)] = (\sin(x), \cos(y), 0).$
 2. Cuál de las siguientes transformaciones definidas sobre V^3 son lineales
 - (a). $T|x\rangle = |x\rangle + |a\rangle$ donde $|a\rangle$ es un vector constante diferente de cero.
 - (b). $T|x\rangle = |a\rangle.$
 - (c). $T|x\rangle = \langle a|x\rangle|a\rangle.$
 - (d). $T|x\rangle = \langle a|x\rangle|x\rangle.$
 3. Considere las siguientes operaciones en el espacio de los polinomios en x y diga si corresponden a transformaciones lineales:
 - a) La multiplicación por x . b) La multiplicación por x^2 . b) La diferenciación.
 4. Suponga que $AB = BA$. Demuestre que:
 - (a). $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$
 - (b). $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$
- ¿Cómo cambian las fórmulas anteriores si $AB \neq BA$?
5. Suponga que un operador \mathbb{L} puede ser escrito como la composición de otros dos operadores $\mathbb{L} = \mathbb{L}_-\mathbb{L}_+$ con $[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+] = \mathbb{I}$. Demostrar que:

$$\text{Si } \mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle \text{ y } |y\rangle = \mathbb{L}_+|x\rangle \text{ entonces } \mathbb{L}|y\rangle = (\lambda + 1)|y\rangle$$

y, del mismo modo, demuestre que:

$$\text{Si } \mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle \text{ y } |z\rangle = \mathbb{L}_-|x\rangle \text{ entonces } \mathbb{L}|z\rangle = (\lambda - 1)|z\rangle.$$

Por ello es costumbre denominar a \mathbb{L}_+ y \mathbb{L}_- los operadores de “subidas” y de “bajada” respectivamente, ya que ellos construyen otros vectores con autovalores mayores (menores) en una unidad al vector operado.

4.2 Tipos de operadores

Discutiremos en esta sección algunas de las propiedades que caracterizan a los operadores lineales. Además, tal y como están definidas las transformaciones lineales tiene sentido estudiar si ellas poseen

la característica de ser: inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Las transformaciones lineales tendrán nombres particulares para cada uno de estos casos.

Como ya fue señalado, una transformación lineal es una función, aplicación, operador o mapeo cuyos dominios y rangos son subconjuntos de espacios vectoriales y que hemos simbolizado como:

$$\mathbb{A} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2 \Rightarrow \mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle, \text{ con } |v\rangle \in \mathbf{V}_1 \text{ y } |v'\rangle \in \mathbf{V}_2.$$

En el lenguaje de la teoría de conjuntos a los elementos $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ se les denomina la imagen de $|v\rangle$ debido a \mathbb{A} . Si S es un subconjunto de \mathbf{V}_1 , entonces al conjunto de todas las imágenes, que denotaremos por $\mathbb{A}(S)$, se le denomina la imagen de S debido a la aplicación de \mathbb{A} en \mathbf{V}_1 . A la imagen del dominio de \mathbf{V}_1 , $\mathbb{A}\{\mathbf{V}_1\}$, se le llama el rango de \mathbb{A} y es un subespacio de \mathbf{V}_2 .

4.2.1 Espacio nulo e imagen de un operador

El conjunto de todos los $|v\rangle \in \mathbf{V}_1 / \mathbb{A}|v\rangle = |0\rangle$, se denomina espacio nulo, núcleo o *kernel* (núcleo en alemán) de la transformación \mathbb{A} y lo denotaremos como $\mathbb{N}(\mathbb{A})$. En símbolos diremos que:

$$\mathbb{N}(\mathbb{A}) = \{|v\rangle \in \mathbf{V}_1 \wedge \mathbb{A}|v\rangle = |0\rangle\}.$$

Adicionalmente, $\mathbb{N}(\mathbb{A}) \subset \mathbf{V}_1$, es decir, será un subespacio de \mathbf{V}_1 . La prueba de esta afirmación es inmediata. Dados $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{N}(\mathbb{A})$, con \mathbb{A} un operador lineal, es claro que:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{A}|v_1\rangle = |0\rangle \\ \mathbb{A}|v_2\rangle = |0\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 \mathbb{A}|v_1\rangle + \alpha_2 \mathbb{A}|v_2\rangle = |0\rangle = \mathbb{A}(\alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle),$$

por la misma razón se tiene que el elemento neutro está contenido en $\mathbb{N}(\mathbb{A})$, esto es:

$$\mathbb{A}|\alpha v\rangle = |0\rangle \quad \forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1 \wedge \forall \alpha \therefore \mathbb{A}|0\rangle = |0\rangle \quad \text{si } \alpha = 0,$$

por lo tanto, queda demostrado que $\mathbb{N}(\mathbb{A})$ es un subespacio de \mathbf{V}_1 .

Por otra parte, definiremos la imagen (rango o recorrido) de \mathbb{A} , y la denotaremos como:

$$\mathbb{A}\{\mathbf{V}\} = \{|v'\rangle \in \mathbf{V}_2 \wedge \mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle\},$$

igualmente $\mathbb{A}\{\mathbf{V}\} \subset \mathbf{V}_2$ también será un subespacio de \mathbf{V}_2 ya que si $|v\rangle = \alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle$ y dado que \mathbb{A} es un operador lineal, se cumple que:

$$\mathbb{A}\left(\underbrace{\alpha_1|v_1\rangle + \alpha_2|v_2\rangle}_{|v\rangle}\right) = \alpha_1 \underbrace{\mathbb{A}|v_1\rangle}_{|v'_1\rangle} + \alpha_2 \underbrace{\mathbb{A}|v_2\rangle}_{|v'_2\rangle} = \underbrace{\alpha_1|v'_1\rangle + \alpha_2|v'_2\rangle}_{|v'\rangle}.$$

Es claro que si \mathbf{V} es de dimensión finita n , entonces tanto el núcleo como la imagen $\mathbb{A}\{\mathbf{V}\}$ de la transformación lineal son subespacios de dimensión finita. De hecho, se cumple que:

$$\dim[\mathbb{N}(\mathbb{A})] + \dim[\mathbb{A}\{\mathbf{V}\}] = \dim[\mathbf{V}],$$

es decir, la dimensión del núcleo más la dimensión del rango (o imagen) de una transformación lineal es igual a la dimensión del dominio.

Para demostrar esta afirmación, supongamos que $\dim[\mathbf{V}] = n$ y que $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_k\rangle\}$ es una base de $\mathbb{N}(\mathbb{A})$, donde $k = \dim[\mathbb{N}(\mathbb{A})] \leq n$. Como este conjunto es linealmente independiente y genera $\mathbb{N}(\mathbb{A})$, podemos extenderlo a una base completa de \mathbf{V} añadiendo vectores $|e_{k+1}\rangle, \dots, |e_n\rangle$. Así, obtenemos una base de \mathbf{V} : $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_k\rangle, |e_{k+1}\rangle, \dots, |e_{k+r-1}\rangle, |e_{k+r}\rangle\}$, donde $n = k + r$.

El esquema de la demostración será el siguiente:

- primero probaremos que los r elementos $\{\mathbb{A}\{|e_{k+1}\rangle\}, \mathbb{A}\{|e_{k+2}\rangle\}, \dots, \mathbb{A}\{|e_{k+r-1}\rangle\}, \mathbb{A}\{|e_{k+r}\rangle\}\}$

forman una base para $\mathbb{A}\{\mathbf{V}\}$. Esto significa que estaríamos probando que: $\dim\{\mathbb{A}\{\mathbf{V}\}\} = r$, $k + r = n$.

- luego hay que demostrar que los elementos $\{\mathbb{A}\{|e_{k+1}\rangle\}, \mathbb{A}\{|e_{k+2}\rangle\}, \dots, \mathbb{A}\{|e_{k+r-1}\rangle\}, \mathbb{A}\{|e_{k+r}\rangle\}\}$ son linealmente independientes.

Si los r elementos $\{\mathbb{A}\{|e_{k+1}\rangle\}, \mathbb{A}\{|e_{k+2}\rangle\}, \dots, \mathbb{A}\{|e_{k+r-1}\rangle\}, \mathbb{A}\{|e_{k+r}\rangle\}\}$ expanden $\mathbb{A}\{\mathbf{V}\}$ entonces cualquier elemento $|w\rangle \in \mathbb{A}\{\mathbf{V}\}$ / $|w\rangle = \mathbb{A}|v\rangle = C^i|\mathbb{A}e_i\rangle$, con $|\mathbb{A}e_i\rangle = \mathbb{A}|e_i\rangle$.

Ahora bien, analicemos con cuidado los límites de la suma implícita del índice $i = 1, 2, \dots, k + r$

$$|w\rangle = C^i|\mathbb{A}e_i\rangle = \underbrace{C^1|\mathbb{A}e_1\rangle + C^2|\mathbb{A}e_2\rangle + \dots + C^k|\mathbb{A}e_k\rangle}_{=|0\rangle \text{ ya que } \mathbb{A}|e_1\rangle = \mathbb{A}|e_2\rangle = \mathbb{A}|e_3\rangle = \dots = \mathbb{A}|e_k\rangle = |0\rangle} + C^{k+1}|\mathbb{A}e_{k+1}\rangle + \dots + C^{k+r}|\mathbb{A}e_{k+r}\rangle.$$

Por lo tanto $\{\mathbb{A}\{|e_{k+1}\rangle\}, \mathbb{A}\{|e_{k+2}\rangle\}, \dots, \mathbb{A}\{|e_{k+r-1}\rangle\}, \mathbb{A}\{|e_{k+r}\rangle\}\}$ expanden $\mathbb{A}\{\mathbf{V}\}$.

Ahora bien, para demostrar que son base, demostraremos que son linealmente independientes. Para ello supondremos que:

$$\exists \quad \left\{ C^{k+1}, C^{k+2}, \dots, C^{k+r} \right\} / C^i|\mathbb{A}e_i\rangle = 0, \quad \text{con } i = k + 1, k + 2, \dots, k + r,$$

y tenemos que demostrar que $C^{k+1} = C^{k+2} = \dots = C^{k+r} = 0$.

Entonces $C^i|\mathbb{A}e_i\rangle = C^i\mathbb{A}|e_i\rangle = \mathbb{A}(C^i|e_i\rangle) = 0$, con $i = k + 1, k + 2, \dots, k + r$, esto significa que el elemento $|v\rangle = C^i|e_i\rangle \in \mathbb{N}(\mathbb{A})$, con $i = k + 1, k + 2, \dots, k + r$.

Con lo cual, dado que $\forall |v\rangle \in \mathbb{N}(\mathbb{A}), |v\rangle = C^i|e_i\rangle$, con $i = 1, 2, \dots, r$, se puede hacer la siguiente resta:

$$|v\rangle - |v\rangle = \sum_{i=1}^k C^i|e_i\rangle - \sum_{i=k+1}^{k+r} C^i|e_i\rangle = |0\rangle,$$

y como los $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_k\rangle, |e_{k+1}\rangle, \dots, |e_{k+r-1}\rangle, |e_{k+r}\rangle\}$ son una base de \mathbf{V} entonces resulta que los coeficientes: $C^{k+1} = C^{k+2} = \dots = C^{k+r} = 0$.

Si el espacio vectorial \mathbf{V} es de dimensión infinita, al menos uno de los dos subespacios $\mathbb{N}(\mathbb{A})$ o $\mathbb{A}\{\mathbf{V}\}$ será de dimensión infinita.

Ejemplo 4.5 A continuación ejemplificaremos algunos casos que ilustran lo que representa un espacio nulo.

1. **Transformación identidad:** Sea $\mathbb{I} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$, la transformación identidad, entonces

$$\forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1 / \mathbb{I}|v\rangle = |v\rangle \Rightarrow \mathbb{N}(\mathbb{I}) = \{|0\rangle\} \subset \mathbf{V}_1 \wedge \mathbb{A}\{\mathbf{V}\} \equiv \mathbf{V}_1.$$

2. **Sistemas de ecuaciones lineales:** En \mathbf{V}^n las soluciones a los sistemas de ecuaciones lineales representan el espacio nulo, $\mathbb{N}(\mathbb{A})$, para vectores de \mathbf{V}^n

$$\mathbb{A}|x\rangle = |0\rangle \iff \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff A_j^i x_i = 0,$$

con j ecuaciones ($j = 1, 2, \dots, n$). Recordemos que estamos utilizando la convención de Einstein para suma de índices.

3. **Ecuaciones diferenciales ordinarias:** Sea $\mathcal{C}_{[-\infty, \infty]}^2$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas y doblemente diferenciables definidas en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Definimos la transformación lineal $\mathbb{A} : \mathcal{C}_{[-\infty, \infty]}^2 \rightarrow \mathcal{C}_{[-\infty, \infty]}$ como $\mathbb{A} = (\mathbb{D}^2 - 1)$, de modo que para toda $y(x) \in \mathcal{C}_{[-\infty, \infty]}^2$ se cumple: $\mathbb{A}|x\rangle = |0\rangle \iff (\mathbb{D}^2 - 1)y(x) = 0 \iff \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)y(x) = y'' - y = 0$.

El núcleo o espacio nulo de \mathbb{A} , $\mathcal{N}(\mathbb{A})$, está constituido por el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial mencionada. Por lo tanto, el problema de encontrar las soluciones de la ecuación diferencial es equivalente a encontrar los elementos del núcleo de \mathbb{A} .



4.2.2 Operadores inyectivos, sobreyectivos, biyectivos e inversos

Se dice que $\mathbb{A} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ es **inyectiva (uno a uno)** si, dados $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1$, $\wedge |v'\rangle \in \mathbf{V}_2$, se tiene que:

$$\mathbb{A}|v_1\rangle = |v'\rangle \wedge \mathbb{A}|v_2\rangle = |v'\rangle \Rightarrow |v_1\rangle = |v_2\rangle,$$

es decir, será inyectiva si \mathbb{A} transforma vectores distintos de \mathbf{V}_1 en dos vectores distintos de \mathbf{V}_2 . Otra manera de decirlo es que todos los elementos de \mathbf{V}_2 provienen de las transformaciones de *a lo sumo de un elemento* de \mathbf{V}_1 . Por lo tanto, una transformación \mathbb{A} inyectiva no cubre, necesariamente, todos los elementos de \mathbf{V}_2 . Pueden existir elementos en \mathbf{V}_2 que no provengan de una transformación desde \mathbf{V}_1 .

Se dice que $\mathbb{A} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ es **sobreyectiva** si, todos los elementos de \mathbf{V}_2 provienen la transformaciones de *al menos un elemento* de \mathbf{V}_1 . Entonces un elemento de \mathbf{V}_2 puede ser el resultado de la transformación \mathbb{A} de dos o mas elementos distintos de \mathbf{V}_2 . Es posible que ocurra $\mathbb{A}|v_1\rangle = |v'\rangle \wedge \mathbb{A}|v_2\rangle = |v'\rangle$.

Se dice que $\mathbb{A} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez. En este caso, la transformación lineal \mathbb{A} cubre todo \mathbf{V}_2 y a cada elemento de \mathbf{V}_2 le corresponde uno y solo un elemento de \mathbf{V}_1 .

Si \mathbb{A} es una transformación lineal en un espacio vectorial \mathbf{V} de dimensión finita, esto es $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$, se puede afirmar que \mathbb{A} es inyectiva si y sólo si $\mathcal{N}(\mathbb{A}) = \{|0\rangle\}$. En otras palabras, si el núcleo de \mathbb{A} está constituido únicamente por el vector cero⁴. Más aún, en este caso, una transformación lineal inyectiva es automáticamente sobreyectiva y, por lo tanto biyectiva con lo cual la existencia de un inverso está garantizada. La demostración es sencilla.

Sea \mathbb{A} una transformación lineal inyectiva en un espacio vectorial \mathbf{V}^n de dimensión finita n . Por ser inyectiva su núcleo es trivial, es decir, $\mathcal{N}(\mathbb{A}) = |0\rangle$, y por tanto $\dim(\mathcal{N}(\mathbb{A})) = 0$. Entonces:

$$\dim[\mathbb{A}\{\mathbf{V}\}] = \dim[\mathbf{V}^n] - \dim[\mathcal{N}(\mathbb{A})] = n - 0 = n.$$

Esto implica que $\dim[\mathbb{A}\{\mathbf{V}^n\}] = \dim[\mathbf{V}^n]$, es decir, \mathbb{A} es sobreyectiva. Recíprocamente, si el núcleo de \mathbb{A} es trivial y $\mathbb{A}|v_1\rangle = \mathbb{A}|v_2\rangle$, entonces:

$$\mathbb{A}|v_1\rangle - \mathbb{A}|v_2\rangle = \mathbb{A}(|v_1\rangle - |v_2\rangle) = |0\rangle.$$

Como $\mathcal{N}(\mathbb{A}) = |0\rangle$, se deduce que:

$$|v_1\rangle - |v_2\rangle = |0\rangle \Rightarrow |v_1\rangle = |v_2\rangle.$$

Por lo tanto, \mathbb{A} es inyectiva.

La importancia de las transformaciones lineales biyectivas reside en la posibilidad de definir inversa, debido a que siempre existe en \mathbf{V}_2 un vector $|v'\rangle$ asociado a través de \mathbb{A} con un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$. Diremos que $\mathbb{A}^{-1} : \mathbf{V}_2 \rightarrow \mathbf{V}_1$ es el inverso de \mathbb{A} , si $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$.

Habrá que hacer un par de comentarios al respecto. El primero es que, tal y como hemos enfatizado arriba, en general, los operadores no comutan entre si, y los inversos no son una excepción. Es decir,

⁴Como vimos en la sección 4.2.1, el núcleo $\mathcal{N}(\mathbb{A})$ de una transformación lineal lo constituyen el conjunto de vectores $\{|v_i\rangle\}$ tales que $\mathbb{A}|v_i\rangle = |0\rangle$.

debería existir (y de hecho existen) inversas por la izquierda $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}$ e inversas por la derecha $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$. Por simplicidad e importancia en Física obviaremos esta dicotomía y supondremos que $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}$. El segundo comentario tiene que ver con la existencia y unicidad del inverso de un operador lineal. Algunos operadores tienen inverso, otros no, pero aquellos que tienen inverso, ese inverso será único.

Supongamos:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{A}_1^{-1}\mathbb{A}|v\rangle = |v\rangle \\ \wedge \\ \mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{A}|v\rangle = |v\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{A}_1^{-1}\mathbb{A}|v\rangle - \mathbb{A}_2^{-1}\mathbb{A}|v\rangle = |0\rangle = \underbrace{(\mathbb{A}_1^{-1} - \mathbb{A}_2^{-1})}_{\mathbb{A}_1^{-1} = \mathbb{A}_2^{-1}}\mathbb{A}|v\rangle \Rightarrow \mathbb{A}_1^{-1} = \mathbb{A}_2^{-1}.$$

Ahora bien, dados \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 dos espacios vectoriales de la misma dimensión finita, entonces un operador lineal \mathbb{A} tendrá inverso si y sólo si para cada vector $|v'\rangle \in \mathbf{V}_2$ existe un único vector $|v\rangle \in \mathbf{V}_1$ tal que $\mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle$. Es decir, cada vector $|v'\rangle$ está asociado con uno y sólo uno vector $|v\rangle$ a través de la transformación lineal \mathbb{A} . Dejaremos sin demostración esta afirmación, pero lo importante es recalcar que para que exista inverso, la transformación lineal \mathbb{A} tiene que ser biyectiva, y esto implica que se asocia uno y sólo un vector de \mathbf{V}_1 con otro de \mathbf{V}_2 .

Esto nos lleva a la definición de espacios vectoriales isomorfos⁵:

Definición 4.2 (Espacios Vectoriales Isomorfos)

Dos espacios vectoriales $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ son *isomorfos* si existe una transformación

$$\mathbb{A} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2 \quad \Rightarrow \quad |v'\rangle = \mathbb{A}|v\rangle,$$

denominada *isomorfismo*, tal que:

1. \mathbb{A} es biyectiva.
2. \mathbb{A} es lineal: $\mathbb{A}[\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle] = \alpha\mathbb{A}|v_1\rangle + \beta\mathbb{A}|v_2\rangle \quad \forall |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}_1$.

El que \mathbb{A} sea biyectiva nos garantiza que existe la transformación inversa \mathbb{A}^{-1} , que también será biyectiva. Es decir, podríamos hablar de manera equivalente de una transformación $\mathbb{F} : \mathbf{V}_2 \rightarrow \mathbf{V}_1$. Volveremos a este tema más adelante. Todavía podemos añadir algunas demostraciones que resultan ser consecuencias de las afirmaciones anteriores.

Sea la transformación lineal $\mathbb{A} : \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ entre espacios vectoriales de dimensión igual y finita. Supongamos además que $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$. Entonces, las siguientes afirmaciones son válidas y equivalentes:

1. \mathbb{A} es biyectiva, es decir, es inyectiva y sobreyectiva.
2. \mathbb{A} es invertible, y su inversa $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{A}\{\mathbf{V}_1\} \rightarrow \mathbf{V}_1$ es lineal.
3. $\forall |v\rangle \in \mathbf{V}_1, \mathbb{A}|v\rangle = |0\rangle \Rightarrow |v\rangle = |0\rangle$. Esto es, el núcleo de \mathbb{A} , $\mathbb{N}(\mathbb{A})$, únicamente contiene al elemento neutro de \mathbf{V}_1 .

Ahora bien, si $\dim[\mathbf{V}_1] = \dim[\mathbf{V}_2] = n$, las siguientes afirmaciones son válidas y equivalentes:

1. \mathbb{A} es una transformación lineal biyectiva de \mathbf{V}_1 en \mathbf{V}_2 .
2. Si $\{|u_1\rangle, \dots, |u_n\rangle\} \subset \mathbf{V}_1$ es linealmente independiente, entonces $\{\mathbb{A}|u_1\rangle, \dots, \mathbb{A}|u_n\rangle\} \subset \mathbf{V}_2$, también lo será.
3. $\dim[\mathbb{A}\{\mathbf{V}_1\}] = n$, es decir, \mathbb{A} es sobreyectiva y su imagen es todo \mathbf{V}_2 .
4. Si $\{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ es una base de \mathbf{V}_1 , entonces $\{\mathbb{A}|e_1\rangle, \dots, \mathbb{A}|e_n\rangle\}$ será una base de \mathbf{V}_2 .

⁵Se dice que una transformación lineal es un *monomorfismo* si \mathbb{A} es inyectiva, un *epimorfismo* si \mathbb{A} es sobreyectiva y un *isomorfismo* si es biyectiva.

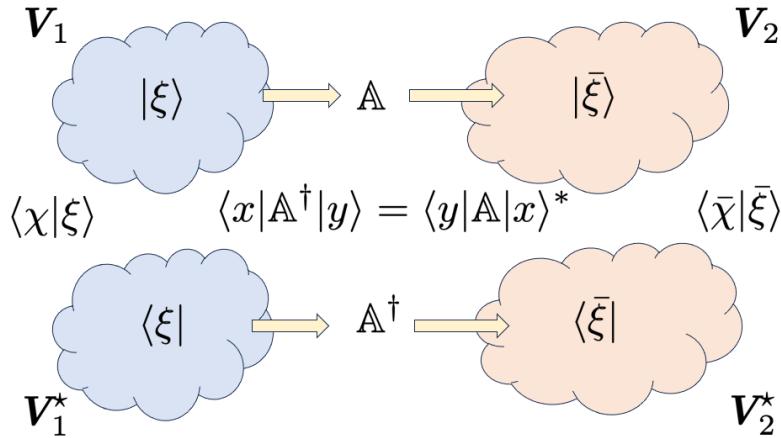


Figura 4.2: Ilustración de la construcción de operadores adjuntos $\mathbb{A} \leftrightarrow \mathbb{A}^\dagger$. Si un operador \mathbb{A} actúa de $V_1 \rightarrow V_2$ y tenemos un producto interno definido, $\langle \chi | \xi \rangle$ y $\langle \bar{\chi} | \bar{\xi} \rangle$ en V_1 y V_2 , respectivamente. Entonces podemos construir los espacios duales V_1^* y V_2^* , así como también el operador adjunto de \mathbb{A} , como \mathbb{A}^\dagger que opera entre los espacios duales $V_1^* \rightarrow V_2^*$. La relación que nos vincula un operador \mathbb{A} con su dual \mathbb{A}^\dagger es $\langle x | \mathbb{A}^\dagger | y \rangle = \langle y | \mathbb{A} | x \rangle^*$.

4.2.3 Operadores adjuntos

En la sección 4.1, definimos la acción de un operador lineal $\mathbb{A} : V \rightarrow W$ de tal forma que $\mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle$. En esta sección definiremos el operador:

$$\mathbb{A}^\dagger : V^* \rightarrow W^* \text{ de tal forma que } \langle v' | = \langle v | \mathbb{A}^\dagger ,$$

donde V^* y W^* son los duales de V y W , respectivamente. Diremos que el operador \mathbb{A}^\dagger es el adjunto de \mathbb{A} ⁶.

Entonces, como discutimos en la sección 3.1.1, a cada vector (*ket*) $|v\rangle$ le está asociado una forma lineal o vector dual (*bra*) $\langle v|$, a cada *ket* transformado $\mathbb{A}|v\rangle = |v'\rangle$ le corresponderá un *bra* transformado $\langle v' | = \langle v | \mathbb{A}^\dagger$. Es indispensable que acordemos que \mathbb{A}^\dagger siempre actúa sobre vectores duales, $\langle v' | \equiv \langle v | \mathbb{A}^\dagger$, eso evitará ambigüedades de la notación⁷. En pocas palabras:

$$|v\rangle \iff \langle v | \Rightarrow |v'\rangle = \mathbb{A}|v\rangle \iff \langle v' | = \langle v | \mathbb{A}^\dagger .$$

Si \mathbb{A} es lineal, \mathbb{A}^\dagger también lo será, dado que a un vector $|w\rangle = \lambda_1|z_1\rangle + \lambda_2|z_2\rangle$ le corresponde un *bra* $\langle w | = \lambda_1^* \langle z_1 | + \lambda_2^* \langle z_2 |$ ⁸. Por lo tanto, $|w'\rangle = \mathbb{A}|w\rangle = \lambda_1 \mathbb{A}|z_1\rangle + \lambda_2 \mathbb{A}|z_2\rangle$, por ser \mathbb{A} lineal, entonces

$$|w'\rangle \iff \langle w' | \equiv \langle w | \mathbb{A}^\dagger = (\lambda_1^* \langle z_1 | + \lambda_2^* \langle z_2 |) \mathbb{A}^\dagger \equiv \lambda_1^* \langle z'_1 | + \lambda_2^* \langle z'_2 | = \lambda_1^* \langle z_1 | \mathbb{A}^\dagger + \lambda_2^* \langle z_2 | \mathbb{A}^\dagger .$$

Es claro que a partir de la definición de producto interno tendremos:

$$\langle \tilde{x} | y \rangle = \langle y | \tilde{x} \rangle^* \quad \forall \quad |\tilde{x}\rangle = \mathbb{A}|x\rangle, |y\rangle \in V \Rightarrow \langle x | \mathbb{A}^\dagger | y \rangle = \langle y | \mathbb{A} | x \rangle^* \quad \forall |x\rangle, |y\rangle \in V .$$

Esta última relación

$$\langle x | \mathbb{A}^\dagger | y \rangle = \langle y | \mathbb{A} | x \rangle^* \quad \forall |x\rangle, |y\rangle \in V , \tag{4.10}$$

nos permite asociar \mathbb{A}^\dagger con \mathbb{A} . Esto es, conociendo las propiedades de \mathbb{A} las extendemos a \mathbb{A}^\dagger y es a

⁶En la literatura también encontrarán que \mathbb{A}^\dagger es el hermítico conjugado de \mathbb{A} , pero hemos creído conveniente llamarlo únicamente el adjunto de \mathbb{A} para evitar confusiones con operadores hermíticos.

⁷Puede consultar una discusión sobre las ambigüedades de la notación de Dirac en Gieres, F. (2000). “Mathematical surprises and Dirac’s formalism in quantum mechanics”. Reports on Progress in Physics, 63(12), 1893.

⁸La correspondencia es antilineal, note la conjugación de los números λ_1 y λ_2 .

partir de esta relación que podemos deducir las propiedades de los operadores adjuntos:

$$(\mathbb{A}^\dagger)^\dagger = \mathbb{A}, \quad (\lambda\mathbb{A})^\dagger = \lambda^*\mathbb{A}^\dagger, \quad (\mathbb{A} + \mathbb{B})^\dagger = \mathbb{A}^\dagger + \mathbb{B}^\dagger, \quad (\mathbb{A}\mathbb{B})^\dagger = \mathbb{B}^\dagger\mathbb{A}^\dagger.$$

Esta última propiedad es fácilmente demostrable y es educativa su demostración. Dado que $|v'\rangle = \mathbb{A}\mathbb{B}|v\rangle$, y además se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} |\bar{v}\rangle = \mathbb{B}|v\rangle \\ |v'\rangle = \mathbb{A}|\bar{v}\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \langle v'| = \langle \bar{v}|\mathbb{A}^\dagger = \langle v|\mathbb{B}^\dagger\mathbb{A}^\dagger = \langle v|(\mathbb{A}\mathbb{B})^\dagger.$$

A partir de las propiedades anteriores se deriva una más útil relacionada con el commutador,

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}]^\dagger = - [\mathbb{A}^\dagger, \mathbb{B}^\dagger] = [\mathbb{B}^\dagger, \mathbb{A}^\dagger].$$

Las conclusiones a las que llegamos resultan ser que, para obtener el adjunto de una expresión, se debe proceder de la siguiente manera:

- Cambiar constantes por sus complejas conjugadas $\lambda \rightleftharpoons \lambda^*$.
- Cambiar los *kets* por sus *bras* asociados y viceversa (*bras* por *kets*): $|v\rangle \rightleftharpoons \langle v|$.
- Cambiar operadores lineales por sus adjuntos $\mathbb{A}^\dagger \rightleftharpoons \mathbb{A}$.
- Invertir el orden de los factores.

De este modo $(|v\rangle\langle w|)^\dagger = |w\rangle\langle v|$, que se deduce fácilmente de la consecuencia de la definición de producto interno

$$\langle x| \left(\underline{|v\rangle\langle w|} \right)^\dagger |y\rangle = \langle y| (|v\rangle\langle w|) |x\rangle^* = \langle y| |v\rangle^* \langle w||x\rangle^* = \langle x| \underline{|w\rangle\langle v|} |y\rangle.$$

4.2.4 Operadores hermíticos

Existe un conjunto de operadores que se denominan hermíticos o autoadjuntos. Un operador hermítico (o autoadjunto) será aquel para el cual su adjunto es el mismo operador: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$ ⁹. Entonces, a partir de (4.10) tendremos:

$$\langle x|\mathbb{A}^\dagger|y\rangle \equiv \langle x|\mathbb{A}|y\rangle = \langle y|\mathbb{A}|x\rangle^*.$$

Estos operadores juegan el rol de los números reales en el sentido de que son “iguales a su propio complejo conjugado” y se utilizan como los observables en la Mecánica Cuántica. Claramente los proyectores son operadores autoadjuntos por construcción: $\mathbb{P}_{|v\rangle}^\dagger \equiv (|v\rangle\langle v|)^\dagger = |v\rangle\langle v|$.

Adicionalmente, llamaremos operador normal a aquellos que satisfacen $\mathbb{A}^\dagger\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}^\dagger$.

4.2.5 Operadores unitarios

Por definición, un operador será unitario si su inversa es igual a su adjunto:

$$\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^\dagger \Rightarrow \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I}.$$

De estos operadores podemos decir varias cosas:

- Las transformaciones unitarias dejan invariante al producto interno y consecuentemente la norma de vectores y esto se demuestra fácilmente. Dados dos vectores $|x\rangle, |y\rangle$ sobre los cuales actúa un

⁹Si $\mathbb{A}^\dagger = -\mathbb{A}$ el operador lineal se denomina antihermítico.

operador unitario

$$\left. \begin{array}{l} |x'\rangle = \mathbb{U}|x\rangle \\ |y'\rangle = \mathbb{U}|y\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \langle y'|x'\rangle = \langle y|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|x\rangle = \langle y|x\rangle.$$

Es claro que si \mathbb{A} es hermítico, $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$, el operador $\mathbb{U} = e^{i\mathbb{A}}$ es unitario.

$$\mathbb{U} = e^{i\mathbb{A}} \Rightarrow \mathbb{U}^\dagger = e^{-i\mathbb{A}^\dagger} = e^{-i\mathbb{A}} \Rightarrow \mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = e^{i\mathbb{A}}e^{-i\mathbb{A}} = \mathbb{I} = \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = e^{-i\mathbb{A}}e^{i\mathbb{A}}.$$

- El producto de dos operadores unitarios también es unitario. Esto es, si \mathbb{U} y \mathbb{V} son unitarios entonces:

$$(\mathbb{U}\mathbb{V})^\dagger (\mathbb{U}\mathbb{V}) = \mathbb{V}^\dagger \underbrace{\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}}_{\mathbb{I}} \mathbb{V} = \mathbb{V}^\dagger\mathbb{V} = \mathbb{I} \Leftrightarrow (\mathbb{U}\mathbb{V})(\mathbb{U}\mathbb{V})^\dagger = \mathbb{U}^\dagger \underbrace{\mathbb{V}^\dagger\mathbb{V}}_{\mathbb{I}} \mathbb{U} = \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = \mathbb{I}$$

- La invariancia del producto interno implica que los operadores unitarios aplican una base ortogonal en otra: $\{|e_i\rangle\} \xrightarrow{\mathbb{U}} \{|\hat{e}_i\rangle\}$. Veamos, si $\{|\hat{e}_i\rangle\}$ es una base ortonormal para \mathcal{V} entonces:

$$|\hat{e}_{j'}\rangle = \mathbb{U}|\hat{e}_j\rangle \Rightarrow \langle \hat{e}^{i'}|\hat{e}_{j'}\rangle = \langle \hat{e}^{i'}|\mathbb{U}|\hat{e}_j\rangle = \langle \hat{e}^i|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|\hat{e}_j\rangle = \langle \hat{e}^i|\hat{e}_j\rangle = \delta_j^i.$$

- Existe una relación importante entre operadores normales y unitarios. Si un operador \mathbb{A} es normal entonces existe un operador diagonal $\mathbb{D}\text{iag}$ y uno unitario \mathbb{U} tal que: $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{D}\text{iag}\mathbb{U}^\dagger$.
Más adelante, en la sección 4.6.1, veremos que los valores en la diagonal de la representación matricial de $\mathbb{D}\text{iag}$ serán los *autovalores* de \mathbb{A} y las columnas de \mathbb{U} los *autovectores* de \mathbb{A} .

En los ejemplos que siguen mostraremos el álgebra de algunos operadores hermíticos, muy significativos, en Mecánica Cuántica.

Ejemplo 4.6 Sean \mathbb{A} y \mathbb{B} dos operadores hermíticos y un operador unitario definido como: $\mathbb{U} = \mathbb{A} + i\mathbb{B}$. Mostraremos que $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$ y $\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2 = \mathbb{I}$.

Comenzamos con $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$:

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = (\mathbb{A} + i\mathbb{B})(\mathbb{A} + i\mathbb{B})^\dagger = (\mathbb{A} + i\mathbb{B})^\dagger(\mathbb{A} + i\mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{A} + i\mathbb{B})(\mathbb{A} - i\mathbb{B}) = (\mathbb{A} - i\mathbb{B})(\mathbb{A} + i\mathbb{B})$$

$$\mathbb{B}\mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{B}\mathbb{A} + \mathbb{A}\mathbb{B} \Rightarrow [\mathbb{B}, \mathbb{A}] = -[\mathbb{B}, \mathbb{A}] \Rightarrow [\mathbb{B}, \mathbb{A}] = 0.$$

Continuamos con la segunda de las afirmaciones, que se puede demostrar, a partir de:

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{I} \Rightarrow (\mathbb{A} + i\mathbb{B})(\mathbb{A} + i\mathbb{B})^\dagger = (\mathbb{A} + i\mathbb{B})(\mathbb{A} - i\mathbb{B}) = (\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2 + i(\mathbb{B}\mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{B})) \Rightarrow \mathbb{I} = \mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2.$$



Ejemplo 4.7 En Mecánica Clásica la cantidad de momento angular viene definida como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Para pasar a Mecánica Cuántica se asocia \mathbf{r} y \mathbf{p} con los operadores posición y cantidad de movimiento los cuales, al operar sobre la función de onda nos proveen lo siguiente:

$$\langle r|\mathbb{X}|\psi\rangle = x\langle r|\psi\rangle = x\psi(\mathbf{r}), \quad \langle r|\mathbb{P}_x|\psi\rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)\langle r|\psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi(\mathbf{r}),$$

$$\langle r|\mathbb{Y}|\psi\rangle = y\langle r|\psi\rangle = y\psi(\mathbf{r}), \quad \langle r|\mathbb{P}_y|\psi\rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\right)\langle r|\psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\psi(\mathbf{r}),$$

$$\langle r|\mathbb{Z}|\psi\rangle = z\langle r|\psi\rangle = z\psi(\mathbf{r}), \quad \langle r|\mathbb{P}_z|\psi\rangle = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z}\right)\langle r|\psi\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}\psi(\mathbf{r}).$$

En coordenadas cartesianas, en la representación de coordenadas $\{|r\rangle\}$ tendremos que

$$\langle r|\mathbb{R}|\psi\rangle = \mathbf{r}\psi(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \langle r|\mathbb{P}|\psi\rangle = -i\hbar \nabla \psi(\mathbf{r}).$$

De forma que en Mecánica Cuántica las componentes cartesianas del operador cantidad de movimiento angular $\langle r|\mathbb{L}|\psi\rangle = -i\hbar (\mathbf{r} \times \nabla) \psi(\mathbf{r})$ son:

$$\langle r|\mathbb{L}|\psi\rangle = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{i}} - i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{j}} - i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{k}}.$$

Utilizando las definiciones anteriores vamos a mostrar que el conmutador de las componentes cartesianas de la cantidad de movimiento angular cumple la siguiente relación

$$[\mathbb{L}_x, \mathbb{L}_y] |\psi\rangle = i\hbar \mathbb{L}_z |\psi\rangle,$$

con: $\mathbb{L}^1 = \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_x$; $\mathbb{L}^2 = \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_y$; $\mathbb{L}^3 = \mathbb{L}_3 = \mathbb{L}_z$ y en general, $[\mathbb{L}_l, \mathbb{L}_m] = i\hbar \epsilon_{lmn} \mathbb{L}^n$.

Dado que: $[\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2] |\psi\rangle = [\mathbb{L}_x, \mathbb{L}_y] |\psi\rangle = (\mathbb{L}_x \mathbb{L}_y - \mathbb{L}_y \mathbb{L}_x) |\psi\rangle \Rightarrow$

$$\begin{aligned} [\mathbb{L}_x, \mathbb{L}_y] |\psi\rangle &= -i\hbar \left(\left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) - \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \psi(\mathbf{r}), \\ &= -i\hbar \left[y \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) - z \frac{\partial}{\partial y} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(z \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) - x \frac{\partial}{\partial z} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \right] \psi(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} [\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2] |\psi\rangle &= -i\hbar \left[\left(\left(yz \frac{\partial}{\partial z \partial x} + y \frac{\partial}{\partial x} \right) - xy \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \left(z^2 \frac{\partial}{\partial y \partial x} - zx \frac{\partial}{\partial y \partial z} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\left(zy \frac{\partial}{\partial x \partial z} - z^2 \frac{\partial}{\partial y \partial x} \right) - \left(yx \frac{\partial}{\partial z^2} - zx \frac{\partial}{\partial z \partial y} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \right) \right] \psi(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

$$[\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2] |\psi\rangle = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(\mathbf{r}).$$

Ejemplo 4.8 Un operador cantidad de movimiento generalizado se define como aquel conjunto de operadores hermíticos que cumplen con:

$$[\mathbb{J}_x, \mathbb{J}_y] = i\hbar \mathbb{J}_z \quad [\mathbb{J}_y, \mathbb{J}_z] = i\hbar \mathbb{J}_x \quad [\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_x] = i\hbar \mathbb{J}_y, \quad \text{es decir} \quad [\mathbb{J}_i, \mathbb{J}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \mathbb{J}_k,$$

con ϵ_{ijk} el símbolo de Levi-Civita (ver sección 1.4 y aquí los índices repetidos NO indican suma).

Adicionalmente, definimos los siguientes operadores:

$$\mathbb{J}^2 = \mathbb{J}_x^2 + \mathbb{J}_y^2 + \mathbb{J}_z^2; \quad \mathbb{J}_+ = \mathbb{J}_x + i\mathbb{J}_y \quad \text{y} \quad \mathbb{J}_- = \mathbb{J}_x - i\mathbb{J}_y.$$

Demosmos que: $[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_+] = [\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_-] = [\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_z] = 0$.

Para probar esta propiedad se puede demostrar de forma genérica que $[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_m] = 0$, donde $m = 1, 2, 3 \equiv x, y, z$. Esto es: cualquier componente \mathbb{J}_m commuta con \mathbb{J}^2 .

Consideremos el caso particular $m = 1 \equiv x$

$$[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_x] = [(\mathbb{J}_x \mathbb{J}_x + \mathbb{J}_y \mathbb{J}_y + \mathbb{J}_z \mathbb{J}_z), \mathbb{J}_x] = [\mathbb{J}_x \mathbb{J}_x, \mathbb{J}_x] + [\mathbb{J}_y \mathbb{J}_y, \mathbb{J}_x] + [\mathbb{J}_z \mathbb{J}_z, \mathbb{J}_x] = [\mathbb{J}_y \mathbb{J}_y, \mathbb{J}_x] + [\mathbb{J}_z \mathbb{J}_z, \mathbb{J}_x].$$

Haciendo uso de $[\mathbb{A}\mathbb{B}, \mathbb{C}] = \mathbb{A}[\mathbb{B}, \mathbb{C}] + [\mathbb{A}, \mathbb{C}]\mathbb{B}$, tendremos que

$$[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_x] = \mathbb{J}_y [\mathbb{J}_y, \mathbb{J}_x] + [\mathbb{J}_y, \mathbb{J}_x] \mathbb{J}_y + \mathbb{J}_z [\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_x] + [\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_x] \mathbb{J}_z = -i\hbar \mathbb{J}_y \mathbb{J}_z - i\hbar \mathbb{J}_z \mathbb{J}_y + i\hbar \mathbb{J}_z \mathbb{J}_y + i\hbar \mathbb{J}_y \mathbb{J}_z = 0.$$

Este desarrollo vale para todas las componentes y, al comutar \mathbb{J}^2 con todas las componentes queda

demostrado que:

$$[\mathbb{J}^2, \mathbb{J}_\pm] = [\mathbb{J}_x^2 + \mathbb{J}_y^2 + \mathbb{J}_z^2, \mathbb{J}_x \pm i\mathbb{J}_y] = [\mathbb{J}_y^2, \mathbb{J}_x] + [\mathbb{J}_z^2, \mathbb{J}_x] \pm i [\mathbb{J}_x^2, \mathbb{J}_y] \pm i [\mathbb{J}_z^2, \mathbb{J}_y] = 0.$$



Practicando con SymPy

- Consideremos la siguiente transformación lineal:

$$\mathbb{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{T}[(x, y, z)] = (2x + y, x - z, x + y + z, y + z).$$

```
[1]: import sympy
from sympy import *
init_printing()
```

Podemos preguntarnos si es una transformación biyectiva, para averiguarlo calculemos el núcleo de la transformación. Hagamos entonces lo siguiente:

```
[2]: # Definir las variables simbólicas
x, y, z = symbols('x y z')
# Resolver el sistema de ecuaciones
solucion = solve([2*x + y, x - z, x + y + z, y + z], (x, y, z))
solucion
```

[2] : $\{x : 0, y : 0, z : 0\}$

De manera que $\mathcal{N}(\mathbb{T}) = \{(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ y la transformación es biyectiva.

- Consideremos ahora la transformación lineal:

$$\mathbb{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{T}[(x, y, z)] = (x + y, x + z, 2x + y + z, y - z)$$

```
[3]: solucion = solve([x + y, x + z, 2*x + y + z, y - z], (x, y, z))
solucion
```

[3] : $\{x : -z, y : z\}$

Por lo tanto $\mathcal{N}(\mathbb{T}) = \{(-\lambda, \lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

En este caso, la transformación no es biyectiva. Notemos que el vector $|e\rangle = (-1, 1, 1)$ resulta ser el vector base para subespacio vectorial núcleo, es decir, la dimensión de este espacio vectorial es: $\dim[\mathcal{N}(\mathbb{T})] = 1$.

Como veremos más adelante una base en el espacio imagen o rango es el conjunto: $\{\mathbb{T}[(1, 0, 0)], \mathbb{T}[(0, 1, 0)], \mathbb{T}[(0, 0, 1)]\}$.

Por lo tanto, podemos hacer los siguientes cálculos:

```
[4]: # Definir la función T(x, y, z)
def T(x, y, z):
    return [x + y, x + z, 2*x + y + z, y - z]
# Crear la matriz M
M = Matrix([T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)])
#print(M)
```

```
# Triangularizar la matriz M
triangularizada = M.rref()
triangularizada
```

[4]:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (0, 1) \right)$$

Eso significa que una base para el rango $\mathbb{T}\{\mathbb{R}^4\}$ será: $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, -1)\}$, es decir, la dimensión se este subespacio vectorial es $\dim [\mathbb{T}\{\mathbb{R}^4\}] = 2$.

Por lo tanto:

$$\dim [\aleph(\mathbb{T})] + \dim [\mathbb{T}\{\mathbb{R}^4\}] = \dim [\mathbb{R}^3] \Rightarrow 1 + 2 = 3.$$

3. Consideremos ahora el siguiente espacio vectorial $V^3 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ en \mathbb{R}^3 , y la siguiente transformación lineal de $V^3 \rightarrow V^3$

$$F(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z, 2z),$$

[5]: # Definir la función T(x, y, z)

```
def F(x, y, z):
    return [x + y + z, x + y - z, 2*z]
solucion = solve([x + y + z, x + y - z, 2*z], (x, y, z))
solucion
```

[5]: $\{x : -y, z : 0\}$

La solución es: $x = C$, $y = -C$ y $z = 0$, por lo tanto, una base para el espacio $\aleph[F]$ es: $\{(1, -1, 0)\}$.

Si ahora evaluamos la transformación F para la base canónica resulta lo siguiente:

[6]: Img = Matrix([F(1,0,0),F(0,1,0),F(0,0,1)])

```
Img
```

[6]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Reduciremos la matriz anterior

[7]: Img.rref()

[7]:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (0, 1) \right)$$

Es decir, una base para el espacio imagen o rango es el conjunto: $\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$.

Podemos también calcular una base para $V^3 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$.

[8]: solucion = solve([x + y + z], (x, y, z))

```
solucion
```

[8]: $\{x : -y - z\}$

Es una solución del tipo: $x = -C_3 - C_2$, $y = C_3$ y $z = \{C_2\}$. Una base vendrá dada por: $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Si evaluamos la transformación dada en esta base, resulta:

[9]: `Matrix([F(-1,1,0),F(-1,0,1)])`

[9]:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

El espacio vectorial tiene como base $\{(0, -2, 2)\}$.

4.2.6 Ejercicios

1. Considere los siguientes operadores: $A = A^\dagger$ hermítico, $K = -K^\dagger$ antihermítico; $U^{-1} = U^\dagger$ unitario, P y Q dos operadores genéricos. Pruebe las siguientes afirmaciones:
 - (a). En general:
 - I. $(P^\dagger)^{-1} = (P^{-1})^\dagger$.
 - II. $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$
 - III. Si $[P, Q] = 0$, entonces $P(Q)^{-1} = (Q)^{-1}P$
 - IV. $(e^P)^\dagger = e^{P^\dagger}$
 - V. $P e^{Q P^{-1}} = e^{P Q P^{-1}}$
 - (b). Si A es hermítico entonces $\tilde{A} = U^{-1}AU$ también será un operador hermítico.
 - (c). Si A es hermítico entonces e^{iA} es unitario.
 - (d). Si K es antihermítico entonces $\tilde{K} = U^{-1}KU$ es también lo será. En particular eso se cumple para $\tilde{K} = iA$. Es decir, podemos construir un operador antihermítico a partir de uno hermítico.
 - (e). Dados dos operadores A y B , hermíticos, su composición AB , será hermítica *si y sólo si* A y B comuntan.
 - (f). Si S es un operador real y antisimétrico¹⁰ y I el operador unidad, pruebe:
 - I. Los operadores $(I - S)$ y $(I + S)$ comutan.
 - II. El operador $(I - S)(I + S)$ es simétrico, mientras que $(I - S)(I + S)^{-1}$ es ortogonal.¹¹
 - (g). Considere una matriz ortogonal de la forma $R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, encuentre la expresión para S que reproduce $R = (I - S)(I + S)^{-1}$.
2. Si un operador lineal C genérico, entonces pruebe que $(C + C^\dagger)$ y $i(C - C^\dagger)$, con $i = \sqrt{-1}$, serán hermíticos. Esto, obviamente implica que siempre podremos separar un operador lineal como:

$$C = \frac{1}{2} (C + C^\dagger) + \frac{1}{2} (C - C^\dagger).$$
 donde $(C + C^\dagger)$ representa su parte hermítica y $(C - C^\dagger)$ su parte antihermítica.
3. Si A y B son operadores hermíticos que no comuntan: $AB - BA = iC$, entonces pruebe que C es hermítico.
4. Si $A = \exp(i\alpha B)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre que si B es hermítico entonces A es unitario.
5. Pruebe que el resultado del producto tensorial de dos operadores unitarios también es unitario.

¹⁰Esto es $S^\dagger \equiv S^T = -S$ con S^T el traspuesto de S .

¹¹Esto es $A^T = A^{-1}$ con A^T el traspuesto de A .

4.3 Representación matricial de operadores

Dados dos vectores $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ definiremos como el elemento de matriz del operador \mathbb{A} al producto interno de dos vectores

$$\langle v_2 | (\mathbb{A}|v_1\rangle) \equiv A_{(|v_1\rangle,|v_2\rangle)}, \quad (4.11)$$

es claro que $A_{(|v_1\rangle,|v_2\rangle)}$ será en general un número complejo, pero además el valor de ese número dependerá de los vectores $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ con los cuales se haga la operación (4.11).

El paso más importante para asociar un conjunto de números a un operador lo constituye realizar la operación (4.11) con los elementos de una base del espacio vectorial donde opera \mathbb{A} .

Supongamos un operador lineal \mathbb{A} en el espacio vectorial de transformaciones lineales $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ donde $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$, y sean $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_1\rangle, |\tilde{e}_2\rangle, |\tilde{e}_3\rangle, \dots, |\tilde{e}_m\rangle\}$ bases ortonormales¹² para \mathbf{V} y \mathbf{W} respectivamente.

Entonces en la ecuación (4.11) cada uno de los vectores $\mathbb{A}|e_i\rangle \in \mathbf{W}$ nos conduce a:

$$\langle \tilde{e}^\beta | \mathbb{A} | e_i \rangle = A_i^\beta \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \text{ y } \alpha, \beta = 1, 2, \dots, m. \quad (4.12)$$

Las cantidades A_j^β son la representación del operador \mathbb{A} respecto a las bases $\{|e_n\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_m\rangle\}$ de \mathbf{V} y \mathbf{W} respectivamente. Es decir, definiremos una matriz A_j^β como un arreglo de números donde el superíndice, β , indica fila y el subíndice, j , columna:

$$A_j^\beta = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & \ddots & & \\ A_1^m & A_2^m & & A_n^m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_1^2 \\ \vdots \\ A_1^m \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{cccc} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \end{array} \right).$$

Es importante señalar que cambiando el orden de los vectores dentro de la base cambia la representación matricial del operador. Esto significa que la organización de los número A_j^β dependerá del orden que le demos a los vectores en las bases $\{|e_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_i\rangle\}$.

Definitivamente, las matrices son uno de los objetos más útiles de las matemáticas que permiten “aterrizar” conceptos y calcular cantidades. La palabra matriz fue introducida en 1850 por James Joseph Sylvester¹³ y su teoría desarrollada por Hamilton¹⁴ y Cayley¹⁵. Si bien los físicos las consideramos indispensables, no fueron utilizadas de manera intensiva hasta el aparición de la Mecánica Cuántica alrededor de 1925.

¹²Como hemos mencionado con anterioridad, las bases no necesariamente deben ser ortogonales (o mejor ortonormales), pero uno siempre puede ortogonalizarlas (y ortonormalizarlas).

¹³James Joseph Sylvester (1814-1897 Londres, Inglaterra) Además de sus aportes con Cayley a la teoría de las matrices, descubrió la solución a la ecuación cúbica y fue el primero en utilizar el término discriminante para categorizar cada una de las raíces de la ecuación. Para vivir tuvo que ejercer de abogado durante una década. Por fortuna, otro matemático de la época (Arthur Cayley) frecuentaba los mismos juzgados y tribunales y pudieron interactuar. Por ser judío tuvo cantidad de dificultades para conseguir trabajo en la Academia. https://en.wikipedia.org/wiki/James_Joseph_Sylvester.

¹⁴Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865, Dublin, Irlanda) Se distinguió por sus contribuciones en el campo de la óptica, dinámica del cuerpo rígido, teoría de ecuaciones algebraicas y teoría de operadores lineales https://en.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton.

¹⁵Arthur Cayley (1821, Richmond, 1895, Cambridge, Inglaterra) En sus cerca de 900 trabajos cubrió casi la totalidad de las áreas de las matemáticas de aquel entonces. Sus mayores contribuciones se centran en la teoría de matrices y la geometría no euclídea. No consiguió empleo como matemático y tuvo que graduarse de abogado para ejercer durante más de 15 años, durante los cuales publicó más de 250 trabajos en matemáticas https://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Cayley.

En los ejemplos continuación construimos las representaciones matriciales para varios operadores lineales.

Ejemplo 4.9 Si tenemos un matriz B_j^i , 2×3 , de la forma

$$B_j^i = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

y suponemos las bases canónicas para \mathbf{V}^3 y \mathbf{V}^2 : $\{|i_1\rangle, |i_2\rangle, |i_3\rangle\}$ y $\{|i_1\rangle, |i_2\rangle\}$, respectivamente, entonces la matriz \mathbb{B} representa la transformación $\mathbb{B} : \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}^2$ que lleva un vector genérico $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3)$ a un vector genérico $|y\rangle = (y_1, y_2)$ tal que:

$$B_j^i = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{B}|x\rangle = |y\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

esto es:

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 &= x_1 + 0x_2 + 4x_3. \end{aligned}$$

Es claro que la representación matricial dependerá de la base en la cual se exprese.

Ejemplo 4.10 Si suponemos el operador diferencial $\mathbb{D}(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dx}$ cuyo dominio está conformado por el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 3 , entonces tendremos que: $\mathbb{D}(\cdot) : \mathbf{P}^3 \rightarrow \mathbf{P}^2$. En este caso las bases podrían ser: $|p_i\rangle = \{1, x, x^2, x^3\}$ y $|\tilde{p}_j\rangle = \{1, x, x^2\}$ de \mathbf{P}^3 y \mathbf{P}^2 respectivamente.

Al operar (diferenciar) sobre $|p_j\rangle \in \mathbf{P}^3$ y expresar ese resultado en la base de \mathbf{P}^2 tenemos:

$$\mathbb{D}|p_j\rangle \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d(1)}{dx} & = & 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{d(x)}{dx} & = & 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{d(x^2)}{dx} & = & 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \frac{d(x^3)}{dx} & = & 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 \end{array} \right. \Rightarrow \langle \tilde{p}^\alpha | \mathbb{D}|p_j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Los coeficientes de esa expansión serán las columnas de la matriz que los representa. Para enfatizar, los elementos de una matriz, no sólo dependen de la base sino del orden en el cual la base se presente.

Consideremos que la base de \mathbf{P}^2 viene representada por $|\hat{p}_j\rangle = \{x^2, x, 1\}$, la representación matricial del operador $\mathbb{D}(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dx}$ será:

$$\mathbb{D}|p_j\rangle \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d(1)}{dx} & = & 0 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1 \\ \frac{d(x)}{dx} & = & 1 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot 1 \\ \frac{d(x^2)}{dx} & = & 2x = 0 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 0 \cdot 1 \\ \frac{d(x^3)}{dx} & = & 3x^2 = 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1 \end{array} \right. \Rightarrow \langle \hat{p}^\alpha | \mathbb{D}|p_j\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede ver que $\mathbb{D}|p_j\rangle$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 + 2x + 3x^2,$$

y equivalentemente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x^2 + 2x + 1,$$

¡Es el mismo polinomio! Recuerde que las componentes del vector multiplican a los vectores bases en el mismo orden.

Ejemplo 4.11 Construyamos la representación para el mismo operador \mathbb{D} del ejemplo anterior, pero ahora en las siguientes bases: $|p_i\rangle = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ y $|\tilde{p}_i\rangle = \{1, x, x^2\}$ de \mathbf{P}^3 y \mathbf{P}^2 , respectivamente. Entonces, nuevamente vemos que $\mathbb{D}|p_j\rangle$ implica:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{d(1)}{dx} & = & 0 \\ \frac{d(1+x)}{dx} & = & 1 \\ \frac{d(1+x+x^2)}{dx} & = & 1+2x \\ \frac{d(1+x+x^2+x^3)}{dx} & = & 1+2x+3x^2 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{lcl} 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 3 \cdot x^2 \end{array} \right. \Rightarrow \langle \tilde{p}^\alpha | \mathbb{D} | p_j \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.3.1 Álgebra elemental de matrices

El álgebra de operadores que definimos en la sección 4.1.1, puede ser traducida al lenguaje de matrices. Por comodidad supondremos un único espacio vectorial, $V \equiv W$ y, por lo tanto nos basta una base ortogonal $\{|e_n\rangle\}$. De este modo, es claro que se obtienen nuevamente las conocidas relaciones para matrices cuadradas

$$\langle e^i | \mathbb{A} + \mathbb{B} | e_j \rangle = \langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle + \langle e^i | \mathbb{B} | e_j \rangle = A_j^i + B_j^i.$$

Con lo cual tenemos la suma de matrices que todos hemos visto en los cursos básicos

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & \ddots & & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \cdots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & & B_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \\ B_1^n & B_2^n & & B_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^1 + B_1^1 & A_2^1 + B_2^1 & \cdots & A_n^1 + B_n^1 \\ A_1^2 + B_1^2 & A_2^2 + B_2^2 & & A_n^2 + B_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_1^n + B_1^n & & & A_n^n + B_n^n \end{pmatrix}.$$

De igual modo, para la representación de composición de operadores que consideramos en la sección 4.1.3 tendremos:

$$\langle e^i | \mathbb{A} \mathbb{B} | e_j \rangle = \langle e^i | \mathbb{A} \mathbb{I} \mathbb{B} | e_j \rangle = \langle e^i | \mathbb{A} \left(|e_k\rangle \langle e^k| \right) \mathbb{B} | e_j \rangle = \langle e^i | \mathbb{A} | e_k \rangle \langle e^k | \mathbb{B} | e_j \rangle = A_k^i B_j^k,$$

que se traduce en la tradicional multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & \ddots & & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \cdots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & & B_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \\ B_1^n & B_2^n & & A_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k^1 B_1^k & A_k^1 B_2^k & \cdots & A_k^1 B_n^k \\ A_k^2 B_1^k & A_k^2 B_2^k & & A_k^2 B_n^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_k^n B_1^k & & & A_k^n B_n^k \end{pmatrix},$$

como ya sabíamos $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A} \rightarrow A_k^i B_j^k \neq B_k^i A_j^k$. Nótese el orden de los índices repetidos para denotar la multiplicación de las matrices. Este orden indica multiplicación de filas (índices abajo) por columnas (índices arriba).

Finalmente, es claro que la multiplicación de un número por una matriz es la multiplicación de todos sus elementos por ese número

$$\langle e^i | \alpha \mathbb{A} | e_j \rangle = \alpha \langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle = \alpha A_j^i.$$

4.3.2 Bases y la representación matricial de operadores

Como es claro de la ecuación (4.12) la representación matricial de un operador depende de las bases de V y W , respectivamente. A continuación discutiremos algunos ejemplos particulares.

4.3.2.1 Representación diagonal

Dado un operador lineal $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, donde $\dim(V) = \dim(W) = n$, y sean $\{|\hat{e}_i\rangle\}$ y $\{|\hat{w}_i\rangle\}$ bases ortonormales de V y W , respectivamente. Supongamos que \mathbb{A} actúa sobre los vectores de la base de la siguiente manera:

$$\mathbb{A}|\hat{e}_i\rangle = \lambda_i |\hat{w}_i\rangle,$$

donde los λ_i son escalares, también llamados factores de escala.

La matriz que representa a \mathbb{A} en las bases $\{|\hat{e}_i\rangle\}$ de V y $\{|\hat{w}_j\rangle\}$ de W se define mediante los elementos:

$$A_i^j = \langle \hat{w}^j | \mathbb{A} | \hat{e}_i \rangle = \langle \hat{w}^j | \lambda_i | \hat{w}_i \rangle = \lambda_i \langle \hat{w}^j | \hat{w}_i \rangle = \lambda_i \delta_i^j,$$

donde $\langle \hat{w}^j |$ son los elementos de la base dual de W . Es importante señalar que $\lambda_i \delta_i^j$, en la ecuación anterior, no se pueden interpretar como suma, sino sencillamente que se repite para cada índice i . Como regla, pueden recordar que índices “arriba y abajo” indican suma, pero en el mismo nivel “arriba o abajo” no.

Consideremos ahora el caso donde el operador lineal es $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, con $\dim(V) = n$, donde $\{|\hat{e}_i\rangle\}$ forma una base ortonormal de V . Supongamos que \mathbb{A} actúa sobre los vectores de la base de la siguiente manera:

$$\mathbb{A}|\hat{e}_i\rangle = \lambda_i |\hat{e}_i\rangle,$$

aquí los escalares λ_i son los valores propios (autovalores) asociados a los vectores propios (autovectores) $|\hat{e}_i\rangle$. Veremos la importancia de esta propiedad cuando nos toque discutir los autovalores y autovectores de operadores lineales en la sección 4.5.

Entonces, la representación matricial de \mathbb{A} en esta base es diagonal:

$$A_i^j = \langle \hat{e}^j | \mathbb{A} | \hat{e}_i \rangle = \lambda_i \langle \hat{e}^j | \hat{e}_i \rangle = \lambda_i \delta_i^j.$$

Ejemplo 4.12 Existen varios casos obvios de representaciones diagonales, veamos algunos ejemplos:

- La matriz identidad es la representación matricial del operador identidad, $\mathbb{I}|x\rangle = |x\rangle$, donde $|x\rangle$ es un vector arbitrario del espacio vectorial V . Claramente es aquella matriz que sólo tiene elementos en la diagonal iguales a la unidad $\mathbb{I} \Rightarrow I_j^i = \delta_j^i$, y el resto cero.
- La matriz nula es la representación matricial del operador nulo, $\mathbb{O}|x\rangle = |0\rangle$ y tiene todos los elementos iguales a cero $\mathbb{O} \Rightarrow 0_j^i = 0$.
- Una matriz diagonal es aquella que contiene elementos únicamente en la diagonal y las demás componentes son cero: $A_j^i = 0 \forall i \neq j$. Como veremos más adelante en la sección 4.4, existen algunos métodos para reducir una matriz a su forma diagonal. Una propiedad importante de estas representaciones matriciales es que muestran que, en esa base, los operadores commutan entre si, es decir, $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$, si las representaciones matriciales para \mathbb{A} y \mathbb{B} son diagonales.
- También podemos tener matrices diagonales a bloques, vale decir:

$$D_j^i = \begin{pmatrix} D_1^1 & D_2^1 & 0 & 0 \\ D_1^2 & D_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3^3 & D_4^3 \\ 0 & 0 & D_3^4 & D_4^4 \end{pmatrix}.$$

Este tipo de representaciones matriciales nos lo encontraremos con detalle en la sección 4.6.5.

- También tenemos las triangulares superior e inferior:

$$\check{D}_j^i = \begin{pmatrix} \check{D}_1^1 & \check{D}_2^1 & \check{D}_3^1 & \check{D}_4^1 \\ 0 & \check{D}_2^2 & \check{D}_3^2 & \check{D}_4^2 \\ 0 & 0 & \check{D}_3^3 & \check{D}_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & \check{D}_4^4 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \hat{D}_j^i = \begin{pmatrix} \hat{D}_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{D}_1^2 & \hat{D}_2^2 & 0 & 0 \\ \hat{D}_1^3 & D_2^3 & \hat{D}_3^3 & 0 \\ \hat{D}_1^4 & \hat{D}_2^4 & \hat{D}_3^4 & \hat{D}_4^4 \end{pmatrix}.$$



4.3.2.2 Representación matricial de operadores, inversos, adjuntos, hermíticos, y unitarios

A continuación presentaremos un conjunto de representaciones matriciales de varios tipos de operadores importantes¹⁶. Es bueno tener en mente que las matrices pueden tener todos sus elementos reales, diremos que son matrices pertenecientes al espacio vectorial de matrices reales $\mathbb{R}_{n \times m}$ o tener como elementos números complejos, en este caso diremos que pertenecen al espacio vectorial de matrices complejas $\mathbb{C}_{n \times m}$.

4.3.2.2.1. Matrices Inversas. Hemos visto en 4.2.2 que dada una transformación lineal biyectiva, podemos definir una inversa para esa transformación lineal. Esa transformación lineal tendrá como representación un matriz. Por lo tanto, dado un operador lineal \mathbb{A} diremos que otro operador lineal \mathbb{B} será su inverso (por la derecha) si

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I} \Rightarrow \langle e^i | \mathbb{A} | e_k \rangle \langle e^k | \mathbb{B} | e_j \rangle = \delta_j^i \Rightarrow A_k^i B_j^k = \delta_j^i.$$

Ahora bien, como conocemos la matriz A_k^i y la suponemos no singular ($\det |A_k^i| \neq 0$) al tomar un j fijo tendremos un sistema de n ecuaciones lineales inhomogéneo con n incógnitas: $B_j^1, B_j^2, B_j^3, \dots, B_j^n$. Al resolver el sistema tendremos la solución.

¹⁶Para mayores detalles sobre éstas y otros tipos de matrices pueden consultar Antony, R. y Alemayehu, H., (2015), “A Note on Special Matrices”, Italian journal of pure and applied mathematics, 587-604.

Un procedimiento para encontrar la inversa es el método de eliminación de Gauss-Jordan. Este método lo vamos a estudiar en detalle en la sección 4.4. Veamos como funciona para una matriz 3×3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & 1 & 0 & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & 0 & 1 & 0 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & B_1^1 & B_2^1 & B_3^1 \\ 0 & 1 & 0 & B_1^2 & B_2^2 & B_3^2 \\ 0 & 0 & 1 & B_1^3 & B_2^3 & B_3^3 \end{array} \right).$$

Algunas propiedades importantes que en su momento vimos con los operadores (sección 4.2) y que ahora se reproducen con sus representaciones matriciales:

$$((A_k^i)^{-1})^{-1} = A_k^i, ((A_k^i)^T)^{-1} = ((A_k^i)^{-1})^T \Leftrightarrow ((A_k^i)^\dagger)^{-1} = ((A_k^i)^{-1})^\dagger, (A_k^i B_j^k)^{-1} = (B_k^i)^{-1} (A_j^k)^{-1}.$$

A continuación exemplificamos un cálculo de matriz inversa.

Ejemplo 4.13 Queremos hallar la matriz inversa de

$$A_k^i = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando el método de Gauss-Jordan. Entonces, escribimos la siguiente matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Si multiplicamos la segunda fila por -1 y la sumamos con la primera fila obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Ahora multiplicamos la tercera fila por 2 y sumamos con la primera fila

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Multiplicamos la primera fila por -2 y sumamos con la tercera

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Multiplicamos la segunda fila por $-8/3$ y sumamos con la tercera, luego multiplicamos esa segunda fila por -3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Multiplicamos la tercera fila por $-1/5$ y sumamos con la segunda fila, luego multiplicamos esa tercera fila por $-5/8$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 4 \end{array} \right).$$

Se suma la primera fila con la segunda y luego se multiplica esta primera fila que resulta por $-1/4$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & 4 \end{array} \right).$$

Por lo tanto, la matriz inversa es: $(A_k^i)^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{array} \right)$.

4.3.2.2.2. Matrices adjuntas. Consideremos la representación matricial de un operador adjunto, tal y como lo desarrollamos en la sección 4.2.3,

$$(A^\dagger)_j^i = \langle e^i | A^\dagger | e_j \rangle = \langle e^j | A | e_i \rangle^* = (A_i^j)^*,$$

vale decir: la matriz que representa el operador adjunto A^\dagger , es la traspuesta conjugada de la matriz que representa al operador A .

Si el operador es hermítico: $A^\dagger = A \Rightarrow (A^\dagger)_j^i = A_j^i$. Por lo tanto, las matrices hermíticas son simétricas respecto a la diagonal y los elementos de la diagonal son números reales.

4.3.2.2.3. Matrices hermíticas. Aquí vale la pena re-expresar, con matrices, algunas de las propiedades que arriba expusimos:

$$\begin{aligned} (A^\dagger)^\dagger &\rightarrow (\langle e^i | A^\dagger | e_j \rangle)^\dagger = \left((A^\dagger)_j^i \right)^\dagger = \left((A_i^j)^* \right)^\dagger = A_j^i \quad \text{y} \\ (\lambda A)^\dagger &\rightarrow \langle e^i | \lambda A^\dagger | e_j \rangle = \langle e^j | \lambda A | e_i \rangle^* = \lambda^* \langle e^j | A | e_i \rangle^* = \lambda^* \langle e^i | A^\dagger | e_j \rangle = \lambda^* A^\dagger, \end{aligned}$$

pero más interesante es:

$$(AB)^\dagger \rightarrow \langle e^i | (AB)^\dagger | e_j \rangle = (A_k^i B_j^k)^\dagger = (A_k^i)^* (B_j^k)^* = (A^\dagger)_j^k (B^\dagger)_k^i = (B^\dagger)_k^i (A^\dagger)_j^k = B^\dagger A^\dagger.$$

4.3.2.2.4. Matrices antihermíticas. Si el operador es antihermítico: $A^\dagger = -A \Rightarrow (A^\dagger)_j^i = -A_j^i$. Por lo tanto, las matrices antihermíticas son antisimétricas respecto a la diagonal y los elementos de la diagonal se anulan.

4.3.2.2.5. Matriz de cofactores. A una matriz A_j^i le podemos asociar una de cofactores $(A^c)_j^i$ de la manera siguiente:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^c)_j^i = \begin{pmatrix} (A^c)_1^1 & (A^c)_2^1 & (A^c)_3^1 \\ (A^c)_1^2 & (A^c)_2^2 & (A^c)_3^2 \\ (A^c)_1^3 & (A^c)_2^3 & (A^c)_3^3 \end{pmatrix}.$$

Donde los $(A^c)_j^i$ son:

$$(A^c)_1^1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}, \quad (A^c)_2^1 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix}, \quad (A^c)_3^1 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix},$$

$$(A^c)_1^2 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}, \quad (A^c)_2^2 = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix}, \quad (A^c)_3^2 = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix},$$

$$(A^c)_1^3 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_2^1 & a_3^1 \\ a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}, \quad (A^c)_2^3 = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_3^2 \end{vmatrix}, \quad (A^c)_3^3 = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}.$$

4.3.2.2.6. Matrices de cofactores adjunta. Definamos ahora la matriz de cofactores adjunta, $\text{MCofAdj} [A_j^i]$, a la traspuesta de la matriz de cofactores de una determinada matriz, es decir,

$$\text{MCofAdj} [A_j^i] = ((A^c)_j^i)^T = (A^c)_i^j.$$

Ejemplo 4.14

Dada la matriz: $A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{MCofAdj} [A_j^i] = \begin{pmatrix} +3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$

Una matriz de cofactores será autoadjunta si $\text{MCofAdj} [A_j^i] = A_j^i$.



4.3.2.2.7. Matrices unitarias. Consideremos ahora la representación matricial de un operador unitario, tal y como lo desarrollamos en la sección 4.2.5,

$$\left(U^\dagger \right)_j^i = \langle e^i | U^\dagger | e_j \rangle = \langle e^j | U | e_i \rangle^* = \left(U_i^j \right)^* = \left(U_j^i \right)^{-1},$$

claramente,

$$\langle e^i | U^\dagger U | e_j \rangle = \langle e^i | I | e_j \rangle \Rightarrow \langle e^i | U^\dagger | e_k \rangle \langle e^k | U | e_j \rangle = \langle e^i | I | e_j \rangle \Rightarrow \left(U^\dagger \right)_k^i (U)_j^k = \delta_j^i.$$

Por lo tanto, la adjunta (traspuesta conjugada) de una matriz unitaria corresponde con su inversa. Una matriz unitaria real, se denomina una matriz ortogonal y su traspuesta es su inversa.

Ejemplo 4.15 Anteriormente mencionamos, en la sección 1.4.3, que en el espacio real \mathbb{R}^3 podemos tener una transformación de coordenadas cartesianas: $(x, y, z) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ que consiste en rotar, un ángulo θ , uno de los sistemas respecto al otro. Si la rotación se hace alrededor del eje z , la relación entre las coordenadas es la siguiente:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\ \tilde{y} = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ \tilde{z} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}^1 = x^1 \cos(\theta) + x^2 \sin(\theta) \\ \tilde{x}^2 = -x^1 \sin(\theta) + x^2 \cos(\theta) \\ \tilde{x}^3 = x^3 \end{cases}.$$

En el lenguaje de matrices

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tilde{x}^i = \tilde{A}_j^i x^j.$$

Claramente, la traspuesta de esta matriz de rotación es su inversa.

Como dijimos en su momento, las transformaciones unitarias preservan el producto interno y las matrices de rotación, al ser representaciones matriciales reales de operadores unitarios también lo preservan. Esto es

$$x^i x_i = \tilde{x}^i \tilde{x}_i = (\tilde{A}_k^i x^k)(\tilde{A}_i^j x_j) = x^k x_j \tilde{A}_i^j \tilde{A}_k^i .$$

entonces se tiene que cumplir que: $\tilde{A}_i^j \tilde{A}_k^i = \delta_k^j$.

4.3.3 Representación matricial y transformaciones

Hemos dicho que dada una base particular en el espacio de acción de un operador, éste quedará representado por una matriz adaptada a esa base. Por lo tanto, si cambiamos la base que genera la representación, ese mismo operador tendrá otra matriz como representación.

Por comodidad volvamos a suponer un único espacio vectorial, $V \equiv W$, pero ahora supondremos que este espacio vectorial V tiene dos bases discretas ortonormales $\{|e_i\rangle\}$ y $\{|\tilde{e}_i\rangle\}$. Entonces las representaciones matriciales de \mathbb{A} : $\tilde{A}_j^i = \langle \tilde{e}^i | \mathbb{A} | \tilde{e}_j \rangle$ y $A_j^i = \langle e^k | \mathbb{A} | e_m \rangle$, están relacionadas por:

$$\langle \tilde{e}^i | \mathbb{A} | \tilde{e}_j \rangle = \langle \tilde{e}^i | \left(|e_k\rangle \langle e^k| \right) \mathbb{A} (|e_m\rangle \langle e^m|) | \tilde{e}_j \rangle = \underbrace{\langle \tilde{e}^i | e_k \rangle}_{S_k^i} \underbrace{\langle e^k | \mathbb{A} | e_m \rangle}_{S_m^k} \underbrace{\langle e^m | \tilde{e}_j \rangle}_{\tilde{S}_j^m} \Leftrightarrow \tilde{A}_j^i = S_k^i A_m^k \tilde{S}_j^m , \quad (4.13)$$

donde \tilde{A}_j^i es la representación del operador \mathbb{A} en la base $\{|\tilde{e}_j\rangle\}$ y A_m^k en la base $\{|e_m\rangle\}$.

Más aún, siempre podremos expresar unos vectores base en términos de los otros de tal forma que:

$$|\tilde{e}_j\rangle = \tilde{S}_j^m |e_m\rangle = \tilde{S}_j^m (S_m^n |\tilde{e}_n\rangle) \Rightarrow \langle \tilde{e}^n | \tilde{e}_j \rangle = \delta_j^n = \tilde{S}_j^m S_m^n \equiv S_m^n \tilde{S}_j^m \Rightarrow \tilde{S}_j^i = (S_j^i)^{-1} , \quad (4.14)$$

con lo cual la relación (4.13), $\tilde{A}_j^i = S_k^i A_m^k \tilde{S}_j^m$, puede ser reescrita como

$$\tilde{A}_j^i = S_k^i A_m^k (S_j^m)^{-1} \Leftrightarrow \tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{S} \mathbb{A} \mathbb{S}^{-1} \Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{S}^{-1} \tilde{\mathbb{A}} \mathbb{S}. \quad (4.15)$$

Diremos que dos representaciones matriciales A_j^i y \tilde{A}_m^k , de un mismo operador \mathbb{A} , son similares si están relacionadas entre si por (4.15), donde la matriz de transformación S_k^i y su inversa se construyen a partir de los productos internos de las bases. Esa misma afirmación se puede rephraser por el hecho que dos operadores $\tilde{\mathbb{A}}$ y \mathbb{A} están relacionados por una transformación de similaridad (4.15) constituyen distintas representaciones de un mismo operador.

Adicionalmente, por la definición de producto interno, $\langle e^k | \tilde{e}_m \rangle = \langle \tilde{e}^m | e_k \rangle^*$ y tomando en cuenta (4.14), tendremos:

$$\tilde{S}_m^k = (S_m^n)^* \equiv \left(S^\dagger \right)_m^k = \left(S_m^k \right)^{-1} ,$$

es decir, las matrices de productos internos que transforman las representaciones matriciales de los operadores, son unitarias y la relación (4.13) puede escribirse también como:

$$\tilde{A}_j^i = S_k^i A_m^k \tilde{S}_j^m \Leftrightarrow \tilde{A}_j^i = S_k^i A_m^k \left(S^\dagger \right)_j^m . \quad (4.16)$$

En este caso, diremos que las representaciones matriciales de \mathbb{A} están relacionadas a una transformación unitaria del tipo (4.16).

Siguen algunos ejemplos en los cuales mostramos la dependencia de la base al generar la representación matricial de un operador lineal.

Ejemplo 4.16 Dada la siguiente transformación:

$$\mathbb{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{T} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x+y \\ x-2z \\ x+2y+3z \\ y-2z \end{pmatrix}.$$

y tomemos como bases los conjuntos:

$$\{|e_i\rangle\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3, \quad |\tilde{e}_i\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^4.$$

Queremos encontrar la representación matricial del operador \mathbb{T} , esto es

$$T_j^i = \langle \tilde{e}^i | \mathbb{T} | e_j \rangle = \langle \tilde{e}^i | (C_j^k | \tilde{e}_k \rangle) \equiv C_j^k \langle \tilde{e}^i | \tilde{e}_k \rangle,$$

por lo tanto los C_j^k son los coeficientes de la expansión de los vectores base de \mathbb{R}^3 transformados. Es decir

$$\mathbb{T} |e_1\rangle = C_1^k | \tilde{e}_k \rangle, \quad \mathbb{T} |e_2\rangle = C_2^k | \tilde{e}_k \rangle, \quad \mathbb{T} |e_3\rangle = C_3^k | \tilde{e}_k \rangle, \quad \text{y} \quad \mathbb{T} |e_4\rangle = C_4^k | \tilde{e}_k \rangle.$$

Entonces, podemos hacer las siguientes expansiones:

$$\mathbb{T} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y al resolver para $\{C_1^1, C_1^2, C_1^3, C_1^4\}$ obtenemos: $\{C_1^1 = 2, C_1^2 = -1, C_1^3 = 2, C_1^4 = -2\}$.

Para el siguiente vector base de \mathbb{R}^3

$$\mathbb{T} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = C_2^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

resolviendo para $\{C_2^1, C_2^2, C_2^3, C_2^4\}$ se obtiene: $\{C_2^1 = 1, C_2^2 = -2, C_2^3 = 5, C_2^4 = -6\}$.

Y finalmente, para:

$$\mathbb{T} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = C_3^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

resulta: $\{C_3^1 = 1, C_3^2 = -3, C_3^3 = 7, C_3^4 = -6\}$.

Por lo tanto, la representación matricial que hemos obtenido será:

$$T_1^1 = C_1^k \langle \tilde{e}^1 | \tilde{e}_k \rangle = C_1^1 \langle \tilde{e}^1 | e_1 \rangle + C_1^2 \langle \tilde{e}^1 | e_2 \rangle + C_1^3 \langle \tilde{e}^1 | e_3 \rangle + C_1^4 \langle \tilde{e}^1 | e_4 \rangle,$$

$$T_2^1 = C_2^k \langle \tilde{e}^1 | \tilde{e}_k \rangle = C_2^1 \langle \tilde{e}^1 | e_1 \rangle + C_2^2 \langle \tilde{e}^1 | e_2 \rangle + C_2^3 \langle \tilde{e}^1 | e_3 \rangle + C_2^4 \langle \tilde{e}^1 | e_4 \rangle, \dots$$

Vale decir:

$$T_1^1 = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 7,$$

$$T_2^1 = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 2 + (-6) \cdot 1 = 2, \quad \dots$$

Si continuamos haciendo todas las cuentas, para todas las demás componentes, tendremos la siguiente matriz:

$$\langle \tilde{e}^j | \mathbb{T} | e_i \rangle = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación para la transformación de cualquier vector es entonces:

$$\mathbb{T}|\tilde{x}\rangle = |x\rangle \Rightarrow \tilde{x}^j = T_i^j x^i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 \\ \tilde{x}^2 \\ \tilde{x}^3 \\ \tilde{x}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Nótese que hemos supuesto que la bases de los espacios duales \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 , son

$$\{e^i\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \in \mathbb{R}^3, \quad \{\tilde{e}^i\} = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\} \in \mathbb{R}^4.$$

¿Cómo hubiera cambiado la representación matricial de \mathbb{T} de haber seleccionado una base recíproca (en el sentido de la discutida en la sección 3.1.2) en los espacios duales \mathbb{R}^{3*} y \mathbb{R}^{4*}

Pedimos al lector repetir los cálculos pero considerando las bases:

$$\{|e_i\rangle\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3, \quad \{|\tilde{e}_i\rangle\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^4.$$

y también las siguientes bases canónicas

$$\{|e_i\rangle\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3, \quad |\tilde{e}_i\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^4.$$

¿Qué puede concluir de los resultados obtenidos de este último par de bases?



Ejemplo 4.17 Consideremos que el espacio de estados para un determinado sistema físico viene expandido por la base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Definamos dos operadores \mathbb{L}_z y \mathbb{S} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_z|u_1\rangle &= |u_1\rangle, & \mathbb{L}_z|u_2\rangle &= 0, & \mathbb{L}_z|u_3\rangle &= -|u_3\rangle, \\ \mathbb{S}|u_1\rangle &= |u_3\rangle, & \mathbb{S}|u_2\rangle &= |u_2\rangle, & \mathbb{S}|u_3\rangle &= |u_1\rangle. \end{aligned}$$

1. Calculemos la representación matricial en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ del operador: $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$.

La matriz será:

$$\begin{pmatrix} \langle u^1 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_1 \rangle & \langle u^1 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_2 \rangle & \langle u^1 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_3 \rangle \\ \langle u^2 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_1 \rangle & \langle u^2 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_2 \rangle & \langle u^2 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_3 \rangle \\ \langle u^3 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_1 \rangle & \langle u^3 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_2 \rangle & \langle u^3 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_3 \rangle \end{pmatrix},$$

con lo cual:

$$\begin{pmatrix} \langle u^1 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_1 \rangle - \langle u^1 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_1 \rangle & \langle u^1 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_2 \rangle - \langle u^1 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_2 \rangle & \langle u^1 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_3 \rangle - \langle u^1 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_3 \rangle \\ \langle u^2 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_1 \rangle - \langle u^2 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_1 \rangle & \langle u^2 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_2 \rangle - \langle u^2 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_2 \rangle & \langle u^2 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_3 \rangle - \langle u^2 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_3 \rangle \\ \langle u^3 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_1 \rangle - \langle u^3 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_1 \rangle & \langle u^3 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_2 \rangle - \langle u^3 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_2 \rangle & \langle u^3 | \mathbb{L}_z \mathbb{S} | u_3 \rangle - \langle u^3 | \mathbb{S} \mathbb{L}_z | u_3 \rangle \end{pmatrix},$$

de donde:

$$\langle u^i | [\mathbb{L}_z, \mathbb{S}] | u_j \rangle = \begin{pmatrix} 0 - 0 & 0 - 0 & 1 - (-1) \\ 0 - 0 & 0 - 0 & 0 - 0 \\ (-1) - 1 & 0 - 0 & 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. ¿ \mathbb{L}_z, \mathbb{S} y $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$ serán biyectivas?

Veamos. Por definición \mathbb{S} es biyectiva ya que cada vector tiene su imagen, \mathbb{L}_z no lo es por cuanto el vector $|u_2\rangle$ no tiene imagen y, finalmente $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$ tampoco será biyectiva dado que $\langle u^i | [\mathbb{L}_z, \mathbb{S}] | u_j \rangle$ no tiene inversa ya que $\det |\langle u^i | [\mathbb{L}_z, \mathbb{S}] | u_j \rangle| = 0$.

3. Calculemos la dimensión del dominio, del rango y del núcleo de las transformaciones \mathbb{L}_z, \mathbb{S} y $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$.

	Dominio	Rango	Núcleo	
\mathbb{L}_z	3	2	1	
\mathbb{S}	3	3	0	
$[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}]$	3	2	2	

dado que $[\mathbb{L}_z, \mathbb{S}] |u_2\rangle = 0$.



Ejemplo 4.18 Buscaremos la expresión matricial para los operadores lineales de Pauli: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ sabiendo que actúan como:

$$\sigma_z |+\rangle = |+\rangle, \sigma_z |-\rangle = -|-\rangle, \sigma_x |+\rangle_x = |+\rangle_x, \sigma_x |-\rangle_x = -|-\rangle_x, \sigma_y |+\rangle_y = |+\rangle_y, \sigma_y |-\rangle_y = -|-\rangle_y$$

con:

$$|+\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |-\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle + |-\rangle], |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle - |-\rangle], \\ |+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle + i|-\rangle], |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle - i|-\rangle].$$

Ahora bien:

$${}_x\langle +|+\rangle_x = 1, \quad {}_x\langle +|-\rangle_x = {}_x\langle -|+\rangle_x = 0, \quad {}_x\langle -|-\rangle_x = 1,$$

$${}_y\langle +|+\rangle_y = 1, \quad {}_y\langle +|-\rangle_y = {}_y\langle -|+\rangle_y = 0, \quad {}_y\langle -|-\rangle_y = 1.$$

Es decir, los vectores $\{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$ y $\{|+\rangle_y, |-\rangle_y\}$ forman bases ortonormales, por lo que los vectores

$\{|+\rangle, |-\rangle\}$ se pueden expresar en término de esas bases como:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_x + |-\rangle_x], \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_x - |-\rangle_x],$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_y + |-\rangle_y], \quad |-\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}} [|+\rangle_y - |-\rangle_y].$$

Así las expresiones matriciales serán:

$$(\sigma_z)_j^i = \begin{pmatrix} \langle +|\sigma_z|+ \rangle & \langle +|\sigma_z|- \rangle \\ \langle -|\sigma_z|+ \rangle & \langle -|\sigma_z|- \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para $(\sigma_x)_j^i$:

$$(\sigma_x)_j^i = \begin{pmatrix} \langle +|\sigma_x|+ \rangle & \langle +|\sigma_x|- \rangle \\ \langle -|\sigma_x|+ \rangle & \langle -|\sigma_x|- \rangle \end{pmatrix},$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [x\langle +| +_x \langle -|] \sigma_x [|+\rangle_x + |-\rangle_x] & [x\langle +| +_x \langle -|] \sigma_x [|+\rangle_x - |-\rangle_x] \\ [x\langle +| -_x \langle -|] \sigma_x [|+\rangle_x + |-\rangle_x] & [x\langle +| -_x \langle -|] \sigma_x [|+\rangle_x - |-\rangle_x] \end{pmatrix},$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [x\langle +| +_x \langle -|] [|+\rangle_x - |-\rangle_x] & [x\langle +| +_x \langle -|] [|+\rangle_x + |-\rangle_x] \\ [x\langle +| -_x \langle -|] [|+\rangle_x - |-\rangle_x] & [x\langle +| -_x \langle -|] [|+\rangle_x + |-\rangle_x] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y finalmente, para $(\sigma_y)_j^i$:

$$(\sigma_y)_j^i = \begin{pmatrix} \langle +|\sigma_y|+ \rangle & \langle +|\sigma_y|- \rangle \\ \langle -|\sigma_y|+ \rangle & \langle -|\sigma_y|- \rangle \end{pmatrix},$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [y\langle +| +_y \langle -|] \sigma_y [|+\rangle_y + |-\rangle_y] & -i[y\langle +| +_y \langle -|] \sigma_y [|+\rangle_y - |-\rangle_y] \\ i[y\langle +| -_y \langle -|] \sigma_y [|+\rangle_y + |-\rangle_y] & [y\langle +| -_y \langle -|] \sigma_y [|+\rangle_y - |-\rangle_y] \end{pmatrix},$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [y\langle +| +_y \langle -|] [|+\rangle_y - |-\rangle_y] & -i[y\langle +| +_y \langle -|] [|+\rangle_y + |-\rangle_y] \\ i[y\langle +| -_y \langle -|] [|+\rangle_y - |-\rangle_y] & -[y\langle +| -_y \langle -|] [|+\rangle_y + |-\rangle_y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3.4 Traza de operadores

La traza, $\text{Tr}(\mathbb{A})$, de un operador \mathbb{A} es la suma de los elementos diagonales de su representación matricial \mathbb{A} . Esto es, dado un operador \mathbb{A} y una base ortogonal $\{|e_i\rangle\}$ para V^n , entonces:

$$\text{Tr}(\mathbb{A}) = \langle e^k | \mathbb{A} | e_k \rangle = A_k^k.$$

La traza de la representación matricial de un operador es, por ejemplo:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Tr}(\mathbb{A}) = A_i^i = 15.$$

4.3.4.1 Propiedades de la Traza

Claramente la traza es lineal: $\text{Tr}(\mathbb{A} + \lambda\mathbb{B}) = \text{Tr}(\mathbb{A}) + \lambda\text{Tr}(\mathbb{B})$, ya que

$$\text{Tr}(\mathbb{A} + \lambda\mathbb{B}) = \langle e^k | \mathbb{A} + \lambda\mathbb{B} | e_k \rangle = \langle e^k | \mathbb{A} | e_k \rangle + \lambda \langle e^k | \mathbb{B} | e_k \rangle = \text{Tr}(\mathbb{A}) + \lambda\text{Tr}(\mathbb{B}).$$

La traza de un producto conmuta, esto es, $\text{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \text{Tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$, y es fácilmente demostrable:

$$\text{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \langle e^k | \mathbb{A}\mathbb{B} | e_k \rangle = \langle e^k | \underbrace{\mathbb{A} | e_m \rangle}_{\mathbb{I}} \langle e^m | \mathbb{B} | e_k \rangle = \langle e^k | \underbrace{\mathbb{B} | e_m \rangle}_{\mathbb{I}} \langle e^m | \mathbb{A} | e_k \rangle = \text{Tr}(\mathbb{B}\mathbb{A}).$$

Recuerde que $\langle e^k | \mathbb{B} | e_m \rangle$ y $\langle e^k | \mathbb{A} | e_k \rangle$ son números que pueden ser reordenados. Donde, una vez más, hemos utilizado las dos relaciones de cierre $|\tilde{e}_m\rangle\langle\tilde{e}^m| = |e_k\rangle\langle e^k| = \mathbb{I}$. Del mismo modo es fácil demostrar que la traza de un triple producto de matrices respeta la ciclicidad del orden de la matrices en el producto: $\text{Tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}) = \text{Tr}(\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A}) = \text{Tr}(\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{B})$.

4.3.4.2 Invariancia de la Traza

La traza de una matriz no depende de la base que seleccionemos, es un invariante que caracteriza al operador independientemente de la base en la cual se represente. Entonces, a partir de (4.13) tendremos:

$$A_k^k = \langle e^k | \mathbb{A} | e_k \rangle = \langle e^k | \underbrace{\tilde{e}_m \rangle}_{\mathbb{I}} \langle \tilde{e}^m | \mathbb{A} | e_k \rangle = \langle \tilde{e}^m | \mathbb{A} | e_k \rangle \langle e^k | \underbrace{\tilde{e}_m}_{\mathbb{I}} = \langle \tilde{e}^m | \mathbb{A} | \tilde{e}_m \rangle = \tilde{A}_m^m.$$

Nótese que primero hemos introducido $|\tilde{e}_m\rangle\langle\tilde{e}^m|$, luego hemos reubicado el término $\langle e^k | \tilde{e}_m \rangle$, para el lado derecho y, finalmente, hemos identificado el término $|e_k\rangle\langle e^k|$ como el operador unidad. Es claro que la traza caracteriza al operador independiente de su representación matricial.

4.3.5 Un paréntesis sobre determinantes

El determinante de un operador, \mathbb{A} , se define como una aplicación de su representación matricial, $\langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle$ en \mathbb{R} , es decir, asocia un número real con la representación matricial del operador, y se define como:

$$\det |\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\dots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \dots \equiv \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{vmatrix},$$

donde los elementos de la representación matricial se expresan como $A_j^i = \langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle$ y hemos generalizado el tensor de Levi-Civita que presentamos en la sección 1.4.1, de tal forma que:

$$\varepsilon^{ijk\dots} = \varepsilon_{ijk\dots} = \begin{cases} 0, & \text{si cualesquiera dos índices son iguales,} \\ 1, & \text{si los índices } i, j, k \dots \text{ constituyen una permutación cíclica de } 1, 2, 3 \dots n, \\ -1, & \text{si los índices } i, j, k \dots \text{ constituyen una permutación anticíclica de } 2, 1, 3 \dots n. \end{cases}$$

Un ejemplo simplificado de esta asociación para el caso de representaciones matriciales 3×3 es el

siguiente:

$$\langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det |\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk} A_i^1 A_j^2 A_k^3 = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix},$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \det |\mathbb{A}| &= \varepsilon^{123} A_1^1 A_2^2 A_3^3 + \varepsilon^{312} A_3^1 A_1^2 A_2^3 + \varepsilon^{231} A_2^1 A_3^2 A_1^3 + \varepsilon^{132} A_1^1 A_3^2 A_2^3 + \varepsilon^{321} A_3^1 A_2^2 A_1^3 + \varepsilon^{213} A_2^1 A_1^2 A_3^3 \\ &= A_1^1 A_2^2 A_3^3 + A_3^1 A_1^2 A_2^3 + A_2^1 A_3^2 A_1^3 - A_1^1 A_3^2 A_2^3 - A_3^1 A_2^2 A_1^3 - A_2^1 A_1^2 A_3^3. \end{aligned}$$

4.3.5.1 Propiedades de los determinantes

1. $\det |\mathbb{A}| = \det |\mathbb{A}^T|$, donde \mathbb{A}^T es el operador traspuesto de \mathbb{A} , esto es claro para las representaciones matriciales $\langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle = A_j^i = (\langle e^j | \mathbb{A} | e_i \rangle)^T$.

Esta propiedad proviene de la definición del índice de Levi-Civita: $\det |\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\dots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \dots = \varepsilon_{ijk\dots} A_1^i A_2^j A_3^k \dots = \det |\mathbb{A}^T|$, que se traduce en que si se intercambian filas por columnas el determinante no se altera.

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix}.$$

2. Si dos filas o dos columnas son idénticas el determinante se anula

$$\varepsilon^{iik\dots} A_i^1 A_i^2 A_k^3 \dots = \varepsilon_{iik\dots} A_1^i A_2^i A_3^k \dots = 0, \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por el número

$$\varepsilon^{ijk\dots} A_i^1 (\lambda A_j^2) A_k^3 \dots = \lambda \varepsilon^{ijk\dots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \dots = \lambda \det |\mathbb{A}|,$$

$$\varepsilon_{ijk\dots} A_1^i A_2^j (\lambda A_3^k) \dots = \lambda \varepsilon_{ijk\dots} A_1^i A_2^j A_3^k \dots = \lambda \det |\mathbb{A}|,$$

de aquí claramente se desprende que si una fila o una columna es cero ($\lambda = 0$) el determinante se anula. Más aún, si dos filas o dos columnas son proporcionales $A_i^1 = \lambda A_j^1$ el determinante se anula, por cuanto se cumple la propiedad anterior:

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \lambda A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & \lambda A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & \lambda A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ \lambda A_1^3 & \lambda A_2^3 & \lambda A_3^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}.$$

Resulta obvio que:

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & 0 & A_3^1 \\ A_1^2 & 0 & A_3^2 \\ A_1^3 & 0 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

al igual que:

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \lambda A_1^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & \lambda A_1^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & \lambda A_1^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ \lambda A_1^1 & \lambda A_2^1 & \lambda A_3^1 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Si se intercambian dos filas o dos columnas cambia de signo del determinante.

$$\det |\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\dots} A_i^1 A_j^2 A_k^3 \dots = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n \end{vmatrix} \Rightarrow \varepsilon^{ijk\dots} A_j^1 A_i^2 A_k^3 \dots = -\det |\langle e^i | \bar{\mathbb{A}} | e_j \rangle|,$$

donde en la representación matricial $\langle e^i | \bar{\mathbb{A}} | e_j \rangle$ se han intercambiando un par de columnas. Claramente las propiedades del índice de Levi-Civita, obliga al cambio de signo $\det |\tilde{\mathbb{A}}| = -\det |\mathbb{A}|$.

Nótese que las propiedades anteriores nos lleva a reescribir el determinante de un operador de la siguiente manera:

$$\det |\mathbb{A}| = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\dots} \det |\mathbb{A}| = \varepsilon_{ijk\dots} A_\alpha^i A_\beta^j A_\gamma^k \dots \iff \det |\mathbb{A}| = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\dots} \det |\mathbb{A}| = \varepsilon^{ijk\dots} A_i^\alpha A_j^\beta A_k^\gamma \dots$$

claramente, si $\alpha\beta\gamma\dots = 123\dots$ obtenemos nuevamente la definición anterior. Si se intercambian dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo debido al intercambio de dos índices griegos. Si dos filas o dos columnas son iguales el determinante se anula debido a la propiedad de símbolo de Levi-Civita con índices griegos.

5. El determinante de la composición de operadores es el producto de sus determinantes

$$\det |\mathbb{AB}| = \det |\mathbb{A}| \det |\mathbb{B}|.$$

Antes de proceder a la demostración de esta importante propiedad jugaremos un poco más con las propiedades de las matrices. Si \mathbb{A} es un operador con una representación matricial $m \times n$ y \mathbb{B} es uno con una representación matricial $n \times p$, entonces tendremos $(\mathbb{AB})^\alpha = \mathbb{A}^\alpha \mathbb{B}$, esto es, la α -ésima fila de \mathbb{AB} es igual a la multiplicación de la α -ésima fila de \mathbb{A} , por toda la matriz \mathbb{B} .

Veamos: $C_j^\alpha = (\mathbb{AB})_j^\alpha = A_l^\alpha B_j^l$, por lo tanto la α -ésima fila:

$$C_j^\alpha = A_l^\alpha B_j^l \Rightarrow C_j^\alpha = (A_1^\alpha, A_2^\alpha, A_3^\alpha, \dots, A_n^\alpha) \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & \dots & B_n^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & & B_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ B_1^n & B_2^n & & B_n^n \end{pmatrix}.$$

Tendremos entonces:

$$\det |\mathbb{A}| \det |\mathbb{B}| = \det |\mathbb{A}| \left(\varepsilon_{ijk\dots} B_1^i B_2^j B_3^k \dots \right) = \left(\varepsilon_{ijk\dots} A_\alpha^i A_\beta^j A_\gamma^k \dots \right) \left(\varepsilon_{abc\dots} B_1^a B_2^b B_3^c \dots \right),$$

que siempre puede ser rearreglado como:

$$\left(\varepsilon^{ijk\dots} A_i^\alpha A_j^\beta A_k^\gamma \dots \right) \left(\varepsilon_{ijk\dots} B_1^i B_2^j B_3^k \dots \right) = A_i^\alpha B_1^i A_j^\beta B_2^j A_k^\gamma B_3^k \dots = \det |\mathbb{AB}|.$$

Veamos este desarrollo para el caso de matrices 3×3 :

$$\begin{aligned} \det |\mathbb{A}| \det |\mathbb{B}| &= (\varepsilon^{123} A_1^1 A_2^2 A_3^3 + \varepsilon^{312} A_3^1 A_1^2 A_2^3 + \varepsilon^{231} A_2^1 A_3^2 A_1^3 + \varepsilon^{132} A_1^1 A_3^2 A_2^3 \\ &+ \varepsilon^{321} A_3^1 A_2^2 A_1^3 + \varepsilon^{213} A_2^1 A_1^2 A_3^3) \cdot (\varepsilon^{123} B_1^1 B_2^2 B_3^3 + \varepsilon^{312} B_3^1 B_1^2 B_2^3 + \varepsilon^{231} B_2^1 B_3^2 B_1^3 \\ &+ \varepsilon^{132} B_1^1 B_3^2 B_2^3 + \varepsilon^{321} B_3^1 B_2^2 B_1^3 + \varepsilon^{213} B_2^1 B_1^2 B_3^3), \end{aligned}$$

con lo cual:

$$\begin{aligned}
 &= A_1^1 A_2^2 A_3^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_2^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 - B_1^1 B_3^2 B_2^3 - B_3^1 B_2^2 B_1^3 - B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\
 &+ A_3^1 A_1^2 A_2^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_2^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\
 &+ A_2^1 A_3^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_2^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\
 &- A_1^1 A_3^2 A_2^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_2^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\
 &- A_3^1 A_2^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_2^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) \\
 &- A_2^1 A_1^2 A_3^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_3^1 B_2^2 B_2^3 + B_2^1 B_3^2 B_1^3 + B_1^1 B_3^2 B_2^3 + B_3^1 B_2^2 B_1^3 + B_2^1 B_1^2 B_3^3) .
 \end{aligned}$$

Como son números se pueden arreglar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 &= A_1^1 A_2^2 A_3^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_2^2 B_3^1 B_3^1 + B_3^3 B_2^1 B_2^2 - B_1^1 B_2^3 B_2^2 - B_3^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
 &+ A_3^1 A_1^2 A_2^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_2^2 B_3^1 B_3^1 + B_3^3 B_2^1 B_2^2 - B_1^1 B_2^3 B_2^2 - B_3^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
 &+ A_2^1 A_3^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_2^2 B_3^1 B_3^1 + B_3^3 B_2^1 B_2^2 - B_1^1 B_2^3 B_2^2 - B_3^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
 &- A_1^1 A_3^2 A_2^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_2^2 B_3^1 B_3^1 + B_3^3 B_2^1 B_2^2 - B_1^1 B_2^3 B_2^2 - B_3^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
 &- A_3^1 A_2^2 A_1^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_2^2 B_3^1 B_3^1 + B_3^3 B_2^1 B_2^2 - B_1^1 B_2^3 B_2^2 - B_3^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
 &- A_2^1 A_1^2 A_3^3 (B_1^1 B_2^2 B_3^3 + B_2^2 B_3^1 B_3^1 + B_3^3 B_2^1 B_2^2 - B_1^1 B_2^3 B_2^2 - B_3^3 B_2^2 B_3^1 - B_1^2 B_2^1 B_3^3) \\
 &= \varepsilon_{ijk} A_\alpha^i B_1^\alpha A_\lambda^j B_2^\lambda A_\mu^k B_3^\mu .
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\varepsilon_{ijk} A_\alpha^i B_1^\alpha A_\lambda^j B_2^\lambda A_\mu^k B_3^\mu = \det |\mathbb{A}| \det |\mathbb{B}| = \det |\mathbb{AB}| . \quad (4.17)$$

6. Un operador \mathbb{A} será singular si su $\det |\mathbb{A}| = 0$. Si $\det |\mathbb{A}| \neq 0$, entonces en su representación matricial existirá un número r máximo de vectores filas, o columnas, linealmente independientes, llamaremos a ese número, $0 \leq r \leq n$, el rango de la representación matricial del operador.

4.3.5.2 La invariancia del determinante

El resultado expresado en la ecuación (4.17) tiene varias consecuencias importantes:

1. El determinante del operador inverso es el inverso del determinante, es decir:

$$\det |\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det |\mathbb{A}|} = \det |\mathbb{A}|^{-1} .$$

Esta afirmación es fácilmente demostrable

$$\mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1} \mathbb{A} \Rightarrow \det |\mathbb{I}| = \det |\mathbb{AA}^{-1}| = \det |\mathbb{A}| \det |\mathbb{A}^{-1}| = 1 \Rightarrow \det |\mathbb{A}^{-1}| = \frac{1}{\det |\mathbb{A}|} .$$

2. La segunda consecuencia es todavía más importante: el determinante de un operador no depende de su representación matricial. Es decir, el determinante, al igual que la traza, asocia un número real al operador, independientemente de su representación matricial:

$$\det |\mathbb{A}| \equiv \det |\langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle| = \det |\langle \tilde{e}^i | \mathbb{A} | \tilde{e}_j \rangle| \equiv \det |\tilde{\mathbb{A}}| .$$

Es inmediato darse que cuenta que al aplicar la función determinante a la ecuación (4.15) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \det |\tilde{\mathbb{A}}_j^i| &= \det |S_k^i A_m^k (S_j^m)^{-1}| \equiv \det |S_k^i| \det |A_m^k| \det |(S_j^m)^{-1}| \\
 &= \det |S_k^i| \det |A_m^k| \frac{1}{\det |S_j^m|} = \det |A_m^k| .
 \end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrada la invariancia del determinante de representaciones matriciales de operadores en bases ortonormales.

4.3.5.3 Fórmula de Laplace

La fórmula de Laplace permite expresar el determinante de una matriz en términos de sus matrices menores o cofactores que presentamos en la sección 4.3.2.2.

$$\det |A| = \sum_{j=1}^n A_j^i (A^c)_j^i, \quad \text{para cualquier } i. \quad (4.18)$$

Ejemplo 4.19 Para la matriz

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

el desarrollo de Laplace (4.18) para la primera fila ($i = 1$) es:

$$\det |A| = A_1^1 (A^c)_1^1 + A_2^1 (A^c)_2^1 + A_3^1 (A^c)_3^1$$

$$\begin{aligned} &= 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(7) + 2(14) + 2(-7) = 35. \end{aligned}$$



También se puede obtener la matriz inversa de la siguiente manera:

$$A_j^{i-1} = \frac{\text{MCofAdj} \begin{bmatrix} A_j^i \end{bmatrix}}{\det |A_j^i|},$$

donde MCofAdj es la matriz de cofactores.

Ejemplo 4.20 Dada la siguiente matriz: $A_j^i = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Primero procedemos a calcular el determinante

$$\det |A_j^i| = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 35.$$

Calculemos ahora la matriz cofactor:

$$(A^c)_1^1 = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad (A^c)_2^1 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14, \quad (A^c)_3^1 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$(A^c)_1^2 = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad (A^c)_2^2 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad (A^c)_3^2 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$(A^c)_1^3 = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 2, \quad (A^c)_2^3 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 11, \quad (A^c)_3^3 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Por lo tanto, la matriz de cofactores y la adjunta son:

$$(A_j^i)^c = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -7 \\ 6 & -2 & -11 \\ 2 & 11 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{MCofAdj}[A_j^i] = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 14 & -2 & 11 \\ -7 & -11 & 8 \end{pmatrix}.$$

Y ahora si, la matriz inversa:

$$(A_j^i)^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 14 & -2 & 11 \\ -7 & -11 & 8 \end{pmatrix}.$$

4.3.6 Diferenciación de operadores y representación matricial

Retomemos, ahora en el lenguaje de representaciones matriciales de operadores, lo que desarrollamos en la sección 4.1.6. Dado un operador $\mathbb{A}(t)$, el cual supondremos dependiente de una variable arbitraria t , podremos definir la derivada como:

$$\frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{A}(t + \Delta t) - \mathbb{A}(t)}{\Delta t},$$

por lo tanto, si $\langle u^k | \mathbb{A} | u_i \rangle = A_i^k$ entonces:

$$\langle u^k | \frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} | u_i \rangle = \left(\frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} \right)_i^k = \frac{d}{dt} \langle u^k | \mathbb{A}(t) | u_i \rangle = \frac{dA_i^k}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dA_1^1}{dt} & \frac{dA_1^2}{dt} & \dots & \frac{dA_1^n}{dt} \\ \frac{dA_2^1}{dt} & \frac{dA_2^2}{dt} & & \frac{dA_2^n}{dt} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{dA_n^1}{dt} & \frac{dA_n^2}{dt} & & \frac{dA_n^n}{dt} \end{pmatrix}.$$

La regla es simple, la representación matricial de la derivada de un operador será la derivada de cada uno de sus elementos. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & e^{-x} & 5x \\ 3x^3 & 3 & \cos(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & -e^{-x} & 5 \\ 9x^2 & 0 & -\operatorname{sen}(x) \end{pmatrix}.$$

De igual forma tendremos las reglas usuales de la diferenciación y por lo tanto se cumplirá

$$\frac{d(\mathbb{A}(t) + \mathbb{B}(t))}{dt} = \frac{d(\mathbb{A}(t))}{dt} + \frac{d(\mathbb{B}(t))}{dt},$$

es decir:

$$\begin{aligned} \langle u^k | \frac{d(\mathbb{A}(t) + \mathbb{B}(t))}{dt} | u_i \rangle &= \frac{d}{dt} \langle u^k | (\mathbb{A}(t) + \mathbb{B}(t)) | u_i \rangle = \frac{d}{dt} \left(\langle u^k | \mathbb{A}(t) | u_i \rangle + \langle u^k | \mathbb{B}(t) | u_i \rangle \right) \\ &= \frac{d}{dt} \langle u^k | \mathbb{A}(t) | u_i \rangle + \frac{d}{dt} \langle u^k | \mathbb{B}(t) | u_i \rangle \\ &= \langle u^k | \frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} | u_i \rangle + \langle u^k | \frac{d\mathbb{B}(t)}{dt} | u_i \rangle = \frac{d(\mathbb{A}(t))}{dt} + \frac{d(\mathbb{B}(t))}{dt}. \end{aligned}$$

Del mismo modo se cumplirá:

$$\frac{d(\mathbb{A}(t)\mathbb{B}(t))}{dt} = \frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} \mathbb{B}(t) + \mathbb{A}(t) \frac{d\mathbb{B}(t)}{dt},$$

con la precaución de que no se puede modificar el orden de aparición de los operadores. Es fácil ver que:

$$\begin{aligned}\langle u^k | \frac{d(\mathbb{A}(t)\mathbb{B}(t))}{dt} | u_i \rangle &= \frac{d}{dt} \langle u^k | \mathbb{A}(t)\mathbb{B}(t) | u_i \rangle = \frac{d}{dt} \langle u^k | \mathbb{A}(t)\mathbb{I}\mathbb{B}(t) | u_i \rangle \\ &= \left(\langle u^k | \mathbb{A}(t) | u_m \rangle \langle u^m | \mathbb{B}(t) | u_i \rangle \right) \\ &= \frac{d\langle u^k | \mathbb{A}(t) | u_m \rangle}{dt} \langle u^m | \mathbb{B}(t) | u_i \rangle + \langle u^k | \mathbb{A}(t) | u_m \rangle \frac{d\langle u^m | \mathbb{B}(t) | u_i \rangle}{dt} \\ &= \langle u^k | \frac{d\mathbb{A}(t)}{dt} | u_m \rangle \langle u^m | \mathbb{B}(t) | u_i \rangle + \langle u^k | \mathbb{A}(t) | u_m \rangle \langle u^m | \frac{d\mathbb{B}(t)}{dt} | u_i \rangle.\end{aligned}$$

Practicando con SymPy

- Consideraremos la transformación lineal del ejercicio resuelto con anterioridad:

$$\mathbb{T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{T}[(x, y, z)] = (x + y, x - 2z, x + 2y + 3z, y - 2z).$$

```
[1]: import sympy
from sympy import *
init_printing()
```

Definamos la matriz

```
[2]: # Definimos las variables simbólicas
x, y, z = symbols('x y z')
C11, C12, C13, C14 = symbols('C11 C12 C13 C14')
C21, C22, C23, C24 = symbols('C21 C22 C23 C24')
C31, C32, C33, C34 = symbols('C31 C32 C33 C34')
# Definir la función T(x, y, z)
def T(x, y, z):
    return Matrix([x + y, x - 2 * z, x + 2 * y + 3 * z, y - 2 * z])
```

Escribimos ahora los vectores de la base en \mathbb{R}^4 :

```
[3]: e1 = Matrix([1, 1, 1, 1])
e2 = Matrix([0, 1, 1, 1])
e3 = Matrix([0, 0, 1, 1])
e4 = Matrix([0, 0, 0, 1])
```

Resolvemos los sistemas de ecuaciones

```
[4]: sol1 = linsolve(T(1, 1, 0) - C11*e1 - C12*e2 - C13*e3 - C14*e4, (C11, C12, C13, C14))
sol2 = linsolve(T(1, 0, 1) - C21*e1 - C22*e2 - C23*e3 - C24*e4, (C21, C22, C23, C24))
sol3 = linsolve(T(0, 1, 1) - C31*e1 - C32*e2 - C33*e3 - C34*e4, (C31, C32, C33, C34))
# Asignar las soluciones
C11, C12, C13, C14 = sol1.args[0]
C21, C22, C23, C24 = sol2.args[0]
C31, C32, C33, C34 = sol3.args[0]
```

Calcular ahora las componentes del tensor

```
[5]: T11 = C11*(e1.dot(e1))+C12*(e1.dot(e2))+C13*(e1.dot(e3))+C14*(e1.dot(e4))
T21 = C21*(e1.dot(e1))+C22*(e1.dot(e2))+C23*(e1.dot(e3))+C24*(e1.dot(e4))
T31 = C31*(e1.dot(e1))+C32*(e1.dot(e2))+C33*(e1.dot(e3))+C34*(e1.dot(e4))
T12 = C11*(e2.dot(e1))+C12*(e2.dot(e2))+C13*(e2.dot(e3))+C14*(e2.dot(e4))
T22 = C21*(e2.dot(e1))+C22*(e2.dot(e2))+C23*(e2.dot(e3))+C24*(e2.dot(e4))
T32 = C31*(e2.dot(e1))+C32*(e2.dot(e2))+C33*(e2.dot(e3))+C34*(e2.dot(e4))
T13 = C11*(e3.dot(e1))+C12*(e3.dot(e2))+C13*(e3.dot(e3))+C14*(e3.dot(e4))
T23 = C21*(e3.dot(e1))+C22*(e3.dot(e2))+C23*(e3.dot(e3))+C24*(e3.dot(e4))
T33 = C31*(e3.dot(e1))+C32*(e3.dot(e2))+C33*(e3.dot(e3))+C34*(e3.dot(e4))
T14 = C11*(e4.dot(e1))+C12*(e4.dot(e2))+C13*(e4.dot(e3))+C14*(e4.dot(e4))
T24 = C21*(e4.dot(e1))+C22*(e4.dot(e2))+C23*(e4.dot(e3))+C24*(e4.dot(e4))
T34 = C31*(e4.dot(e1))+C32*(e4.dot(e2))+C33*(e4.dot(e3))+C34*(e4.dot(e4))
# Construir la matriz
T_matrix=Matrix([[T11,T21,T31],[T12,T22,T32],[T13,T23,T33],[T14,T24,T34]])
T_matrix
```

[5]:

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Podemos repetir los cálculos pero ahora con la base canónica:

```
[6]: C11, C12, C13, C14 = symbols('C11 C12 C13 C14')
C21, C22, C23, C24 = symbols('C21 C22 C23 C24')
C31, C32, C33, C34 = symbols('C31 C32 C33 C34')
e1 = Matrix([1, 0, 0, 0])
e2 = Matrix([0, 1, 0, 0])
e3 = Matrix([0, 0, 1, 0])
e4 = Matrix([0, 0, 0, 1])
sol1 = linsolve(T(1, 1, 0)-C11*e1-C12*e2-C13*e3-C14*e4, (C11,C12,C13,C14))
sol2 = linsolve(T(1, 0, 1)-C21*e1-C22*e2-C23*e3-C24*e4, (C21,C22,C23,C24))
sol3 = linsolve(T(0, 1, 1)-C31*e1-C32*e2-C33*e3-C34*e4, (C31,C32,C33,C34))
# Asignar las soluciones
C11, C12, C13, C14 = sol1.args[0]
C21, C22, C23, C24 = sol2.args[0]
C31, C32, C33, C34 = sol3.args[0]
T11 = C11*(e1.dot(e1))+C12*(e1.dot(e2))+C13*(e1.dot(e3))+C14*(e1.dot(e4))
T21 = C21*(e1.dot(e1))+C22*(e1.dot(e2))+C23*(e1.dot(e3))+C24*(e1.dot(e4))
T31 = C31*(e1.dot(e1))+C32*(e1.dot(e2))+C33*(e1.dot(e3))+C34*(e1.dot(e4))
T12 = C11*(e2.dot(e1))+C12*(e2.dot(e2))+C13*(e2.dot(e3))+C14*(e2.dot(e4))
T22 = C21*(e2.dot(e1))+C22*(e2.dot(e2))+C23*(e2.dot(e3))+C24*(e2.dot(e4))
T32 = C31*(e2.dot(e1))+C32*(e2.dot(e2))+C33*(e2.dot(e3))+C34*(e2.dot(e4))
T13 = C11*(e3.dot(e1))+C12*(e3.dot(e2))+C13*(e3.dot(e3))+C14*(e3.dot(e4))
```

```

T23 = C21*(e3.dot(e1))+C22*(e3.dot(e2))+C23*(e3.dot(e3))+C24*(e3.dot(e4))
T33 = C31*(e3.dot(e1))+C32*(e3.dot(e2))+C33*(e3.dot(e3))+C34*(e3.dot(e4))
T14 = C11*(e4.dot(e1))+C12*(e4.dot(e2))+C13*(e4.dot(e3))+C14*(e4.dot(e4))
T24 = C21*(e4.dot(e1))+C22*(e4.dot(e2))+C23*(e4.dot(e3))+C24*(e4.dot(e4))
T34 = C31*(e4.dot(e1))+C32*(e4.dot(e2))+C33*(e4.dot(e3))+C34*(e4.dot(e4))
# Construir la matriz
T_matrix=Matrix([[T11,T21,T31],[T12,T22,T32],[T13,T23,T33],[T14,T24,T34]])
T_matrix

```

[6]:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Dada una transformación $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde una base para \mathbb{R}^3 es:

$$|e_i\rangle = \{(1, 2, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 3)\} \in \mathbb{R}^3,$$

y las imágenes de esta base respecto a la base canónica en \mathbb{R}^2 son:

$$T[|e_1\rangle] = (3, 3), T[|e_2\rangle] = (6, 3), T[|e_3\rangle] = (3, 6).$$

¿Qué transformación estaría asociada a las coordenadas canónicas en \mathbb{R}^3 ?

Escribamos los vectores

[7]: # Los vectores e1, e2, e3
e1 = Matrix([1, 2, 1])
e2 = Matrix([1, 1, 0])
e3 = Matrix([0, 0, 3])

Ahora introducimos las imágenes:

[8]: # Los vectores Te1, Te2, Te3
Te1 = Matrix([3, 3])
Te2 = Matrix([6, 3])
Te3 = Matrix([3, 6])

Respecto a estas coordenadas la transformación tiene la siguiente representación vectorial:

[9]: A = Matrix([Te1.T, Te2.T, Te3.T])
A

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Lo que queremos es buscar la representación matricial de la transformación pero respecto a la base canónica, por lo tanto debemos buscar primero el cambio de base a la base canónica en \mathbb{R}^3

[10]: B= Matrix([[e1 , e2, e3]]).T
B

[10]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

[11]:

```
E=B.inv()
E
```

[11]:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

En la base canónica la transformación tiene la siguiente representación:

[12]:

```
# Calcular AE
AE = (E @ A).T
AE
```

[12]:

$$\begin{bmatrix} 10 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la transformación es:

[13]:

```
def T(x, y, z):
    return Matrix([10*x -4*y +z, 5*x - 2*y +2*z])
```

[14]:

```
T(x,y,z)
```

[14]:

$$\begin{bmatrix} 10x - 4y + z \\ 5x - 2y + 2z \end{bmatrix}$$

Podemos verificar si el resultado es el correcto comparando con A

[15]:

```
a, b= symbols('a b')
e1 = Matrix([1, 0])
e2 = Matrix([0, 1])
sol1 = linsolve(T(1, 2, 1) - a * e1 - b * e2 , (a, b))
sol1
```

[15]:

$$\{(3, 3)\}$$

[16]:

```
sol2 = linsolve(T(1, 1, 0) - a * e1 - b * e2 , (a, b))
sol2
```

[16]:

$$\{(6, 3)\}$$

[17]:

```
sol3 = linsolve(T(0, 0, 3) - a * e1 - b * e2 , (a, b))
sol3
```

[17]:

$$\{(3, 6)\}$$

3. En este ejercicio vamos a introducir algunos comandos básicos que nos permitirán realizar operaciones típicas con matrices.

Dada la siguiente matriz:

[18]: `A = Matrix([[1, 2, 3], [4, 8, 5], [9, 5, 4]])`

`A`

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

La traspuesta es:

[19]: `A.T`

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

La matriz adjunta es la traspuesta de la matriz de cofactores de \mathbb{A} .

[20]: `A.adjoint()`

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Para la matriz inversa:

[21]: `A.inv()`

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{29}{91} & \frac{23}{91} & -\frac{1}{13} \\ \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

El determinante

[22]: `A.det()`

$$[22]: -91$$

La matriz identidad

[23]: `I3 = eye(3)`

`I3`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[24]: `I3.det()`

$$[24]: 1$$

Podemos comprobar que $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}$

[25]: `A.inv() @ A`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[26] : A

[26] : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

Para calcular la menor (i, j) de la matriz, es decir, eliminar la fila i y la columna j de una matriz se debe escribir:

[27] : A.minor_submatrix(1, 1)

[27] : $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

[28] : A.minor_submatrix(0, 0)

[28] : $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

[29] : A.upper_triangular()

[29] : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

[30] : A.lower_triangular()

[30] : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

La traza

[31] : A.trace()

[31] : 13

Consideremos ahora la matriz

[32] : a1, a2, a3 = symbols('a1 a2 a3')
N = Matrix([[1, 3, 0, 0], [y, z, 0, 0], [0, 0, x, 0], [0, 0, 0, 0]])
N

[32] : $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ y & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Podemos obtener las submatrices cuadradas de la diagonal principal de una matriz cuadrada. Esta opción es muy útil para invertir matrices simbólicas o resolver sistemas de ecuaciones lineales que pueden desacoplarse al tener una estructura diagonal en bloque.

[33] : a1, a2, a3 = N.get_diag_blocks()
a1

[33] :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ y & z \end{bmatrix}$$

[34] :

[34] :

$$\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$$

[35] :

[35] :

$$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Para matrices complejas, la matriz conjugada:

[36] :

```
M = Matrix([[1, I, 0], [-1, 2, -I], [I, 1, 2]])
M
```

[36] :

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 2 & -i \\ i & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

[37] :

[37] :

$$\begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & i \\ -i & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

El rango:

[38] :

[38] :

3

Disponemos de una función directa para $\exp(M)$, que se entiende como la matriz cuyo elemento i, j es igual a $\exp(M[i, j])$.

[39] :

```
R = Matrix([[1, 2], [0, 1]])
# Para calcular la exponencial de la matriz R
exp(R).simplify()
```

[39] :

$$\begin{bmatrix} e & 2e \\ 0 & e \end{bmatrix}$$

Si por ejemplo, queremos calcular $(1 - x)^M$ podemos hacer lo siguiente:

[40] :

```
Matrix([[((1-x)**M[i, j] for j in range(M.shape[1])] for i in range(M.
shape[0])]])
```

[40] :

$$\begin{bmatrix} 1 - x & (1 - x)^i & 1 \\ \frac{1}{1-x} & (1 - x)^2 & (1 - x)^{-i} \\ (1 - x)^i & 1 - x & (1 - x)^2 \end{bmatrix}$$

4.3.7 Ejercicios

1. Considere el espacio $\mathbf{P}_{(t)N}$ de polinomios de grado N en t , vale decir, $|f\rangle_t \leftrightarrow \sum_{n=0}^N a_n t^n$, considere además un operador $\mathbb{T} = e^{x\mathbb{D}} \equiv \exp(x\mathbb{D})$, con $\mathbb{D} = \frac{d}{dt}$.
 - (a). Muestre que $\mathbb{T}|p\rangle_t = |p\rangle_{t+x}$, esto es que el operador \mathbb{T} puede ser considerado un operador traslación espacial para los polinomios $\mathcal{P}(t)$ de grado N .
 - (b). Considere que el espacio de polinomios está definido en el intervalo $[-1, 1]$, que definimos un producto interno de la forma $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f g dt$ y un espacio de polinomios de grado $N = 2$. ¿Cuál es la representación matricial de \mathbb{T} en la base de polinomios de Legendre $\{P_0, P_1, P_2\}$?
2. Considere ahora el espacio vectorial $\mathbf{P}_{(t)4}$ de polinomios en t de grado 4, definidos en el intervalo $[-1, 1]$. Esto es $|f\rangle_t \leftrightarrow \sum_{n=0}^4 a_n t^n$ y este espacio está equipado con un producto interno de la forma $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$. Considere además para este espacio vectorial un operador lineal representado por $\mathbb{T} = e^{\mathbb{D}} \equiv \exp(\mathbb{D})$, donde $\mathbb{D} = \frac{d}{dt}$. Claramente, podemos encontrar dos bases para ese espacio vectorial: $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ y la base de polinomios de Legendre $\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$.
 - (a). Considere el polinomio $|f\rangle_t \leftrightarrow f(t) = 5t + 3t^2 + 4t^3$. Encuentre la expresión de este polinomio en término de las bases arriba mencionadas. ¿Cuál es la matriz de transformación de las componentes de ese vector entre ambas bases?
 - (b). Construya un proyector sobre el subespacio $\mathbf{P}_{(t)2}$, de polinomios de grado 2 y encuentre la proyección de $|f\rangle_t$ en ese subespacio. Discuta las diferencias y semejanzas entre las proyecciones de $|f\rangle_t$ en ese subespacio expresado en las bases $\{1, t, t^2\}$ y $\{P_0, P_1, P_2\}$. Recuerde las relaciones entre proyectores y bases ortonormales de la sección 4.1.4.
 - (c). Para $\mathbf{P}_{(t)4}$, construya el operador inverso \mathbb{T}^{-1} , el adjunto del operador \mathbb{T}^\dagger y precise si \mathbb{T} , es Hermítico o unitario.
 - (d). ¿Cuáles son las representaciones matriciales de \mathbb{T} en $\mathbf{P}_{(t)4}$, para cada una de las bases mencionadas? ¿Cómo transforman las representaciones? Compruebe que la traza y el determinante de ambas representaciones matriciales coinciden.
 - (e). ¿Cuáles son las representaciones matriciales de \mathbb{T}^{-1} y \mathbb{T}^\dagger en $\mathbf{P}_{(t)4}$ para cada una de las bases mencionadas? ¿Cómo transforman esas representaciones?
3. Heredando el formalismo de la Mecánica Clásica, se construye en Mecánica Cuántica el operador hamiltoniano, hermítico, para un sistema unidimensional como:

$$\mathbb{H} = \frac{\mathbb{P}^2}{2m} + \mathbb{V}(\mathbb{X}),$$

donde \mathbb{H}, \mathbb{P} y \mathbb{X} son operadores, y $\mathbb{V}(\mathbb{X})$ un operador que es una función de otro operador. Adicionalmente, uno puede construir el siguiente operador: $[\mathbb{X}, \mathbb{P}] = i\hbar\mathbb{I}$.

- (a). Determine los siguientes commutadores: $[\mathbb{H}, \mathbb{P}], [\mathbb{H}, \mathbb{X}]$ y $[\mathbb{H}, \mathbb{XP}]$.
- (b). Suponga que $\mathbb{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ y entonces calcule la representación matricial del siguiente operador $\langle\psi^m|[\mathbb{A}, \mathbb{H}]|\psi_n\rangle$, para un operador arbitrario \mathbb{A} .
4. Considere la representación matricial de un operador en la base canónica de la forma:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Existirá algún operador \mathbb{B} , no singular, tal que $\text{Diag} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{B}$, con Diag un operador diagonal? Si ese fuera el caso ¿Cuál sería la representación matricial de ese operador \mathbb{B} , en la base canónica?

Justifique su respuesta.

5. Sea la matriz

$$M_i^j(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Demuestre que:

$$\frac{d^2 M(t)}{dt^2} = -\omega^2 M(t).$$

6. Dada a matriz:

$$A_i^j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

evalúe: $\mathbb{A}^2, \mathbb{A}^3, \mathbb{A}^{Ax}$.

7. Dada la matriz:

$$A_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

demuestre que $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}\mathbb{A}\mathbb{A}\dots = \mathbb{I}$, con $n \neq 0$.

8. Considere el siguiente “operador vectorial” $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x \hat{\mathbf{i}} + \sigma_y \hat{\mathbf{j}} + \sigma_z \hat{\mathbf{k}}$, donde las matrices $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ son los operadores de Pauli que discutimos en la sección 4.18 y, mucho antes definimos (en la página 120) su representación matricial en la base canónica como:

$$(\sigma_x)_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_y)_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_z)_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\mathbb{I})_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El vector dirección puede escribirse como:

$$\mathbf{n} = \sin(\theta) \cos(\phi) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta) \sin(\phi) \hat{\mathbf{j}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{k}} = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} + n_z \hat{\mathbf{k}},$$

con lo cual: $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z$.

A partir de todo lo anterior calcule la representación matricial del siguiente operador en la base canónica

$$\exp\left(\frac{i}{2}\psi \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\right).$$

9. Dadas las siguientes representaciones matriciales:

$$(\mathbb{L}_x)_j^i = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\mathbb{L}_y)_j^i = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{2}/2 & 0 \\ -i\sqrt{2}/2 & 0 & i\sqrt{2}/2 \\ 0 & -i\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$(\mathbb{L}_z)_j^i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

demuestre las siguientes reglas de commutación:

- (a). $\mathbb{L}_x \mathbb{L}_y - \mathbb{L}_y \mathbb{L}_x = i \mathbb{L}_z$.
- (b). $\mathbb{L}_y \mathbb{L}_z - \mathbb{L}_z \mathbb{L}_y = i \mathbb{L}_x$.
- (c). $\mathbb{L}_z \mathbb{L}_x - \mathbb{L}_x \mathbb{L}_z = i \mathbb{L}_y$.
- (d). $\mathbb{L}_x^2 + \mathbb{L}_y^2 + \mathbb{L}_z^2 = 2$.

10. Calcule los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

11. Utilizando las propiedades de los determinantes resuelva para x

$$\begin{vmatrix} x+2 & x+4 & x-3 \\ x+3 & x & x+5 \\ x-2 & x-1 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$$

12. Utilizando la propiedad lineal de los determinantes calcule:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & n+p \\ c+d & q+r \end{vmatrix}.$$

13. Encuentre el determinante de la matriz 4×4 definida por la función:

$$A_j^i = \frac{1}{i+j-x}.$$

14. Muestre que si las filas de un determinante de orden n son linealmente independientes, entonces sus columnas son también linealmente independientes.

15. Dada la representación matricial de un operador \mathbb{B} :

$$B_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a). Encuentre la representación diagonal y la base que diagonaliza esta matriz.

(b). Muestre que la traza y el determinante de ambas representaciones matriciales coinciden.

(c). Encuentre la matriz de transformación a la representación diagonal.

16. Pruebe que la representación matricial, 2×2 más general para un operador unitario y simétrico (vale decir: $\mathbb{S}\mathbb{S}^\dagger = \mathbb{I}$ y $\mathbb{S}^T = \mathbb{S}$) puede ser escrita como:

$$(\mathbb{S})_j^i \equiv S_j^i = \begin{pmatrix} \alpha e^{2i\beta} & i\sqrt{1-\alpha^2}e^{i(\beta+\gamma)} \\ i\sqrt{1-\alpha^2}e^{i(\beta+\gamma)} & \alpha e^{2i\gamma} \end{pmatrix},$$

con α, β y γ parámetros reales y, adicionalmente $0 \leq \alpha \leq 1$.

17. Considere las matrices:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad B_j^i = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{6} & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diga si son: (a) reales, (b) diagonales, (c) simétricas, (d) antisimétricas, (e) singulares, (f) ortogonales, (g) hermíticas, (h) antihermíticas, (i) unitarias o (j) normales.

18. Dada una matriz hermítica $(\mathbb{H})_j^i = \begin{pmatrix} 10 & 3i \\ -3i & 0 \end{pmatrix}$, construya la matriz unitaria $(\mathbb{U})_j^i$, tal que $(\mathbb{U}^\dagger \mathbb{H} \mathbb{U})_j^i = (\text{Diag})_j^i$ donde $(\text{Diag})_j^i$ es una matriz real y diagonal.

19. Utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan encuentre la inversa de la matriz:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

20. Encuentre la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_j^i = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Además, calcule: $\mathbb{B}^T(\mathbb{A})^{-1}\mathbb{B}$ y $(2\mathbb{A} + (\mathbb{B})^{-1}\mathbb{B}^T)\mathbb{A}^T$.

21. Considere matrices ortogonales, reales 3×3 las cuales, adicionalmente cumplen con: $\det |\mathbb{M}| = 1$.

- (a). ¿Cuántos parámetros reales son necesarios para caracterizar únicamente a este tipo de matrices?
- (b). ¿Este tipo de matrices forman grupo bajo la multiplicación de matrices?
- (c). Si ahora considera la matrices ortogonales reales con $\det |\mathbb{M}| = -1$ ¿Este tipo de matrices formarán grupo bajo la multiplicación? Justifique su respuesta.

4.4 Sistemas de ecuaciones lineales

Una de las aplicaciones más útiles del álgebra de matrices es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} A_1^1 x^1 + A_2^1 x^2 + \cdots A_n^1 x^n &= c^1 \\ A_1^2 x^1 + A_2^2 x^2 + \cdots A_n^2 x^n &= c^2 \\ &\vdots \\ A_1^m x^1 + A_2^m x^2 + \cdots A_n^m x^n &= c^m, \end{aligned}$$

Este sistema puede ser expresado de una forma más compacta:

$$A_i^\alpha x^i = c^\alpha \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{y } \alpha = 1, 2, \dots, m,$$

por lo tanto, tendremos m ecuaciones lineales para n incógnitas (x^1, x^2, \dots, x^n). Las cantidades A_i^α resultan ser las componentes de la matriz de los coeficientes.

Si todos los c^i son cero el sistema se denomina homogéneo, en caso contrario inhomogéneo. Puede resultar que el conjunto de las incógnitas $\{x^i\}$ represente una solución, infinitas soluciones o que simplemente no exista una solución para el sistema.

Este problema puede ser pensado como un problema de un operador \mathbb{A} en el espacio vectorial de transformaciones lineales $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, donde $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $\dim(\mathbf{W}) = m$, con las c^α las componentes del vector transformado:

$$|c\rangle = \mathbb{A}|x\rangle \rightarrow c^\alpha = A_i^\alpha x^i.$$

Como lo discutimos en la sección 4.2.1, el operador \mathbb{A} aplicará todo vector de \mathbf{V} en algún subespacio (o todo el espacio) de \mathbf{W} . A este subespacio se le denomina el rango o recorrido de \mathbb{A} y su dimensión es igual al rango del operador \mathbb{A} . Si A_j^i es no singular, entonces existe algún subespacio de \mathbf{V} que es aplicado al vector cero de \mathbf{W} , es decir, se cumple que $\mathbb{A}|x'\rangle = |0\rangle$, donde al conjunto de vectores $\{|x'\rangle\}$

se le llama el espacio nulo de \mathbb{A} . A continuación, mostraremos algunos métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

4.4.1 Eliminación de Gauss-Jordan

Uno de los métodos más utilizados es el de la eliminación de *Gauss-Jordan*, el cual se basa en el intercambio de ecuaciones y la multiplicación apropiada e inteligente por constantes y resta de ecuaciones. La idea es construir una matriz triangular superior para poder luego despejar desde abajo.

Veamos como se aplica el método para resolver el sistema de ecuaciones. Primeramente escribimos el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{l} a \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right], \\ b \end{array}$$

entonces para eliminar x de la fila c (o la ecuación c) sumamos la fila a con la $c, a + c$ y esta nueva ecuación será la nueva c

$$\begin{array}{l} a \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array} \right], \\ b' \end{array}$$

ahora $-2a + b$ será la nueva b

$$\begin{array}{l} a \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array} \right], \\ b' \end{array}$$

finalmente $3b' + c'$

$$\begin{array}{l} a \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array} \right]. \\ b' \\ c'' \end{array}$$

Este sistema es equivalente al primer sistema de ecuaciones, el lector puede verificar que poseen el mismo determinante. Po lo tanto, la solución emerge rápidamente:

$$-5z = -15 \rightarrow z = 3, \quad -2y - z = -7 \rightarrow -2y - 3 = -7 \rightarrow y = 2, \quad 2x + 3(2) - 3 = 5 \rightarrow x = 1.$$

Es bueno recalcar que los sistemas de ecuaciones lineales no necesariamente tienen solución y a veces tienen más de una solución.

4.4.2 El método de la matriz inversa

El análisis matricial nos puede ayudar a investigar sobre las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, como vimos, en notación de matrices el sistema se puede escribir de la manera siguiente:

$$\left(\begin{array}{cccc} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ A_1^m & A_2^m & \dots & A_n^m \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^m \end{array} \right) \Rightarrow A_j^i x^j = c^i.$$

Podemos considerar a cada columna de la matriz A_j^i como un vector, entonces el *rango r* de la matriz

A_j^i será igual al número de vectores linealmente independientes, este número es también la dimensión del espacio vectorial que expanden estos vectores.

Con respecto a las posibles soluciones del sistema podemos decir:

1. Si c^i pertenece al rango de A_j^i y además $r = n$, entonces todos los vectores del conjunto son linealmente independientes y el sistema tendrá como única solución al conjunto $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$.
2. Si c^i pertenece al rango de A_j^i y además $r < n$, entonces únicamente r vectores serán linealmente independientes. Esto significa que podremos escoger los coeficientes de los $n - r$ vectores de manera arbitraria sin dejar de satisfacer el sistema. Por tanto, existirá un número infinito de soluciones, que expanden un espacio vectorial de dimensión $n - r$.
3. La otra posibilidad es que el sistema no tenga solución, en este caso c^i no pertenece al rango de A_j^i .

Cuando el sistema es homogéneo, $c^i = 0$, claramente existe una solución que viene a ser la trivial: $\{x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0\}$, además, si $r = n$ ésta será la única solución. Es bueno anotar que si hay menos ecuaciones que incógnitas ($m < n$) entonces automáticamente $r < n$, por lo tanto un conjunto de ecuaciones lineales homogéneas con menos ecuaciones que incógnitas siempre tiene una infinidad de soluciones.

Debemos considerar el importante caso cuando $m = n$, es decir, la matriz A_j^i es cuadrada y existe igual número de ecuaciones como de incógnitas. Al ser cuadrada la matriz se tiene que la condición $r = n$ implica que la matriz es no singular ($\det |A_j^i| \neq 0$). El caso $r < n$ se corresponde a que $\det |A_j^i| = 0$.

Para resolver el sistema de ecuaciones consideremos lo siguiente: dada la matriz A_j^i , $n \times n$ no singular, entonces A_j^i tiene una matriz inversa, tal que:

$$A_j^i x^j = c^i \Rightarrow x^i = (A_j^i)^{-1} c^i.$$

Siguen un ejemplo de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas.

Ejemplo 4.21 Resolver el sistema:

$$2x^1 + 4x^2 + 3x^3 = 4, \quad x^1 - 2x^2 - 2x^3 = 0, \quad -3x^1 + 3x^2 + 2x^3 = -7.$$

Utilizando el método de la matriz inversa.

Este sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$A_j^i x^j = c^i \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix},$$

donde A_j^i es la matriz de los coeficientes.

Luego de calcular la matriz inversa de A_j^i entonces resulta que

$$x^i = (A_j^i)^{-1} c^i \Rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 13 & 7 \\ -3 & -18 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Existe entonces una única solución al sistema, que es: $\{x^1 = 2, x^2 = -3, x^3 = 4\}$.



4.4.3 Factorización LU

El método de la matriz inversa es relativamente simple, pero laborioso cuando se trata de resolver sistemas de ecuaciones muy grandes. La factorización o descomposición LU (Lower-Upper) es una técnica, existen varias de este tipo, para factorizar una matriz como el producto de una matriz triangular inferior y una matriz triangular superior. Si \mathbb{A} es un matriz cuadrada no singular, entonces:

$$A_j^i x^j = c^i \Rightarrow A_j^i = L_k^i U_j^k,$$

las matrices L_k^i y U_j^k serán únicas.

Este método es básicamente una versión de el método de Gauss-Jordan, pero es más eficiente a la hora de ser implementado en algoritmos computacionales tanto algebraicos como numéricos.

Para matrices 3×3 el método se implementa de la siguiente manera.

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_1^2 & 1 & 0 \\ L_1^3 & L_2^3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^1 & U_2^1 & U_3^1 \\ 0 & U_2^2 & U_3^2 \\ 0 & 0 & U_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^1 & U_2^1 & U_3^1 \\ L_1^2 U_1^1 & L_1^2 U_2^1 + U_2^2 & L_1^2 U_3^1 + U_3^2 \\ L_1^3 U_1^1 & L_1^3 U_2^1 + L_2^3 U_2^2 & L_1^3 U_3^1 + L_2^3 U_3^2 + U_3^3 \end{pmatrix},$$

las nueve incógnitas se obtienen igualando con las componentes conocidas de la matriz \mathbb{A} . Con \mathbb{L} y \mathbb{U} determinadas tenemos entonces que

$$L_k^i U_j^k x^j = c^i,$$

por lo tanto, se debe realizar los cálculos en dos partes:

$$\text{primero } L_k^i y^k = c^i \text{ y luego } U_m^k x^m = y^k.$$

Con la matrices L_k^i y U_m^k se puede calcular el determinante de la matriz A_j^i de una manera más directa. Es fácil ver que como $\det |\mathbb{L}| = 1$, tenemos que

$$\det |\mathbb{A}| = \det |\mathbb{L}| \det |\mathbb{U}| = \det |\mathbb{U}| = \prod_{i=1}^n U_i^i.$$

Es decir, $\det |\mathbb{A}|$ es igual al producto de los elementos diagonales de la matriz triangular superior.

Ejemplo 4.22 Resolver el mismo sistema de ecuaciones anteriormente estudiado:

$$2x^1 + 4x^2 + 3x^3 = 4, \quad x^1 - 2x^2 - 2x^3 = 0, \quad -3x^1 + 3x^2 + 2x^3 = -7.$$

Pero utilizando el método de factorización \mathbb{LU} .

La matriz de los coeficientes es:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Cálculo de L_k^i y U_j^k

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^1 & U_2^1 & U_3^1 \\ L_1^2 U_1^1 & L_1^2 U_2^1 + U_2^2 & L_1^2 U_3^1 + U_3^2 \\ L_1^3 U_1^1 & L_1^3 U_2^1 + L_2^3 U_2^2 & L_1^3 U_3^1 + L_2^3 U_3^2 + U_3^3 \end{pmatrix},$$

Con los valores de inicio: $U_1^1 = 2$, $U_2^1 = 4$, $U_3^1 = 3$ se procede a resolver las ecuaciones:

$$\begin{aligned} L_1^2 U_1^1 &= 1 & L_1^3 U_1^1 &= -3, \\ L_1^2 U_2^1 + U_2^2 &= -2 & L_1^2 U_3^1 + U_3^2 &= -2, \\ L_1^3 U_2^1 + L_2^3 U_2^2 &= 3 & L_1^3 U_3^1 + L_2^3 U_3^2 + U_3^3 &= 2. \end{aligned}$$

por lo tanto

$$A_j^i = L_k^i U_j^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3/2 & -9/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -7/2 \\ 0 & 0 & -11/8 \end{pmatrix}.$$

- Resolvemos primero $L_k^i U_j^k = c^i$, lo cual es bastante fácil

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -3/2 & -9/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4, \\ 0, \\ -7. \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y^1 = 4, \\ y^2 = -2, \\ y^3 = -\frac{11}{2}. \end{cases}$$

- Con este resultado resolvemos: $U_m^k x^m = y^k$, y obtenemos la solución

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -7/2 \\ 0 & 0 & -11/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -11/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = 2, \\ x^2 = -3, \\ x^3 = 4. \end{cases}$$

△

4.4.4 Método de Cramer

Un método alternativo para resolver sistemas de ecuaciones lineales es la conocida *regla de Cramer*. El funcionamiento del método lo podemos ilustrar con un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{aligned} A_1^1 x^1 + A_2^1 x^2 + A_3^1 x^3 &= c^1, \\ A_1^2 x^1 + A_2^2 x^2 + A_3^2 x^3 &= c^2, \\ A_1^3 x^1 + A_2^3 x^2 + A_3^3 x^3 &= c^3, \end{aligned}$$

Como mencionamos anteriormente, el determinante de una matriz,

$$\det |\mathbb{A}| = \det \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix},$$

no cambia bajo la operación, por ejemplo, de sumarle a la primera columna las cantidades:

$$\det |\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} A_1^1 + (x^2/x^1)A_1^1 + (x^3/x^1)A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 + (x^2/x^1)A_2^1 + (x^3/x^1)A_2^1 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 + (x^2/x^1)A_3^1 + (x^3/x^1)A_3^1 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix},$$

lo cual es igual a:

$$\det |\mathbb{A}| = \frac{1}{x^1} \det \begin{vmatrix} c^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ c^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ c^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{x^1} \det |\Delta_1|.$$

Se puede hacer lo mismo con las otras dos columnas para obtener:

$$x^1 = \frac{\det |\Delta_1|}{\det |\mathbb{A}|}, \quad x^2 = \frac{\det |\Delta_2|}{\det |\mathbb{A}|}, \quad x^3 = \frac{\det |\Delta_3|}{\det |\mathbb{A}|}.$$

Donde los determinantes, $\det |\Delta_n|$, son los determinantes de Cramer:

$$\det |\Delta_1| = \det \begin{vmatrix} c^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ c^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ c^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}, \quad \det |\Delta_2| = \det \begin{vmatrix} A_1^1 & c^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & c^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & c^3 & A_3^3 \end{vmatrix}, \quad \det |\Delta_3| = \det \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & c^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & c^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

Se puede demostrar que si $\det |\mathbb{A}| \neq 0$, entonces la solución así obtenida es única.

Ejemplo 4.23 Resolver, nuevamente, el sistema de ecuaciones:

$$2x^1 + 4x^2 + 3x^3 = 4, \quad x^1 - 2x^2 - 2x^3 = 0, \quad -3x^1 + 3x^2 + 2x^3 = -7.$$

Utilizando ahora los determinantes de Cramer.

Esto es:

$$A_j^i x^j = c^i, \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det |A| = 11.$$

Los diferentes determinantes de Cramer son:

$$\det |\Delta_1| = \det \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ -7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 22, \quad \det |\Delta_2| = \det \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & -7 & 2 \end{vmatrix} = -33,$$

y

$$\det |\Delta_3| = \det \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 44.$$

de manera que

$$x^1 = \frac{22}{11} = 2, \quad x^2 = -\frac{33}{11} = -3, \quad x^3 = \frac{44}{11} = 4.$$



Practicando con SymPy

1. Resolvemos el siguiente sistema se ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} 2x^1 + 4x^2 + 3x^3 &= 4 \\ x^1 - 2x^2 - 2x^3 &= 0 \\ -3x^1 + 3x^2 + 2x^3 &= -7 \end{aligned}$$

```
[1]: import sympy
from sympy import *
init_printing()
```

Introducimos el sistema de ecuaciones:

```
[2]: # Definimos las variables simbólicas
x1, x2, x3 = symbols('x1 x2 x3')
ec1=Eq(2*x1+4*x2+3*x3,4)
ec2=Eq(x1-2*x2-2*x3,0)
ec3=Eq(-3*x1+3*x2+2*x3,-7)
ec1,ec2,ec3
```

[2]: $(2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4, x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -7)$

Construimos la matriz de coeficientes y la denominaremos A

```
[3]: A = Matrix([[2, 4, 3], [1, -2, -2], [-3, 3, 2]])
A
```

[3]:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Le agregamos la columna con los elementos independientes

[4]:

```
M = A.col_insert(3, Matrix([4, 0, -7]))
M
```

[4]:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Calculamos la forma escalonada de la matriz

[5]:

```
M.rref()
```

[5]:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, (0, 1, 2) \right)$$

De la última fila es fácil determinar que $x^3 = 4$. Los otros dos valores que resultan son $x^2 = -3$ y $x^1 = 2$.

Por supuesto podemos recurrir al cálculo directo:

[6]:

```
sol = linsolve([ec1,ec2,ec3], (x1, x2, x3))
sol
```

[6]:

$$\{(2, -3, 4)\}$$

2. Resolvamos nuevamente el mismo sistema pero ahora por el método de la matriz inversa.

La matriz inversa de A la denominaremos $Ainv$, y la calcularemos de la manera siguiente

[7]:

```
Ainv =A.inv()
Ainv
```

[7]:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{13}{11} & \frac{7}{11} \\ -\frac{3}{11} & -\frac{18}{11} & -\frac{8}{11} \end{bmatrix}$$

La matriz con los términos inhomogéneos la llamaremos C :

[8]:

```
C = Matrix([4, 0, -7])
C
```

[8]:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Para que finalmente podamos hacer la siguiente multiplicación de matrices:

[9]:

```
Ainv*C
```

[9]:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto: $x^1 = 2$, $x^2 = -3$, $x^3 = 4$.

3. Vamos ahora a resolver el mismo sistema pero usando la técnica de factorización LU.

Le podemos pedir al programa que intente factorizar la matriz A . Consultar el manual de SymPy para más detalles.

[10]: `A.LUdecomposition()`

$$[10]: \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{8} \end{bmatrix}, [] \right)$$

[11]: `L, U, _ = A.LUdecomposition()`

[12]: `L, U`

$$[12]: \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{9}{4} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{11}{8} \end{bmatrix} \right)$$

Podemos resolver entonces la primera parte, $\mathbb{L}\mathbb{Y} = \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{Y} = \mathbb{L}^{-1}\mathbb{C}$:

[13]: `Y = L.inv()*C`

`Y`

$$[13]: \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -\frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

Y ahora $\mathbb{U}\mathbb{X} = \mathbb{Y}$:

[14]: `X = U.inv()*Y`

`X`

$$[14]: \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Por lo que resulta que: $x^1 = 2$, $x^2 = -3$, $x^3 = 4$.

Notemos que:

[15]: `A.det() == L.det()*U.det()`

[15]: `True`

4. Utilicemos ahora los determinantes de Cramer. Para tal fin, construiremos las matrices eliminando las columnas correspondientes.

[16]: `# Extraemos las columnas de la matriz A`
`A1 = A.col(0)`
`A2 = A.col(1)`
`A3 = A.col(2)`
`A1, A2, A3`

[16]:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

Construimos las nuevas matrices con las matrices columnas anteriores

```
[17]: D1 = Matrix.hstack(C, A2, A3)
D2 = Matrix.hstack(A1, C, A3)
D3 = Matrix.hstack(A1, A2, C)
D1,D2,D3
```

[17]:

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ -7 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & -7 \end{bmatrix} \right)$$

```
[18]: # Calculamos los determinantes
x1 = D1.det() / A.det()
x2 = D2.det() / A.det()
x3 = D3.det() / A.det()
x1, x2, x3
```

[18]: $(2, -3, 4)$

SymPy puede resolver el sistema $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{C}$ usando directamente la eliminación de Gauss Jordan.

```
[19]: sol, param = A.gauss_jordan_solve(C)
sol
```

[19]:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Si el sistema está subdeterminado (por ejemplo, \mathbb{A} tiene más columnas que filas), son posibles infinitas soluciones, en términos de parámetros arbitrarios. Estos parámetros arbitrarios se devuelven como matriz de parámetros.

5. Existen entonces algunas consideraciones a tomar en cuenta.

- El sistema puede contener más incógnitas que ecuaciones, por ejemplo:

```
[20]: x, y, z = symbols('x y z')
ecu1= Eq(x+y+z,1)
ecu2= Eq(x+2*y+z,0)
ec1,ecu2
```

[20]: $(2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4, x + 2y + z = 0)$

```
[21]: sol = linsolve([ecu1,ecu2], (x, y, z))
sol
```

[21]: $\{(2 - z, -1, z)\}$

El programa nos está señalando que las soluciones en este caso son infinitas. Una solución

puede ser entonces la siguiente: $\{x = 2, y = -1, z = 0\}$.

Podemos también hacer lo siguiente:

```
[22]: # La matriz de coeficientes
A = Matrix([[1, 1, 1], [1, 2, 1]])
# La matriz de los coeficientes inhomogéneos
C = Matrix([1, 0])
```



```
[23]: sol, param = A.gauss_jordan_solve(C)
sol, param
```

[23]:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 - \tau_0 \\ -1 \\ \tau_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tau_0 \end{bmatrix} \right)$$

- El sistema tiene más ecuaciones que incógnitas, por ejemplo:

```
[24]: ecu1= Eq(x+y,5)
ecu2= Eq(x+2*y,8)
ecu3= Eq(3*x+y,9)
ecu1,ecu2,ecu3
```

[24]: $(x + y = 5, x + 2y = 8, 3x + y = 9)$

```
[25]: sol = linsolve([ecu1,ecu2,ecu3], (x, y))
sol
```

[25]: $\{(2, 3)\}$

Aquí, SymPy encuentra una solución al eliminar una de las ecuaciones dependientes.

```
[26]: # La matriz de coeficientes
A = Matrix([[1, 1], [1, 2], [3, 1]])
# La matriz de los coeficientes inhomogéneos
C = Matrix([5, 8, 9])
sol, param = A.gauss_jordan_solve(C)
sol, param
```

[26]:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

- El sistema no tiene solución, por ejemplo:

```
[27]: ecu1= Eq(x+y,5)
ecu2= Eq(x+2*y,8)
ecu3= Eq(3*x+y,10)
ecu1,ecu2,ecu3
```

[27]: $(x + y = 5, x + 2y = 8, 3x + y = 10)$

```
[28]: sol = linsolve([ecu1,ecu2,ecu3], (x, y))
sol
```

[28] : \emptyset

Si intentamos resolver el problema utilizando “Gauss_jordan_solve” el programa dará un mensaje de error “ValueError: Linear system has no solution”

4.4.5 Ejercicios

1. Resuelva, utilizando dos de los métodos anteriormente vistos, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11, \\ x + y + z &= 6, \\ 5x - y + 10z &= 34. \end{aligned}$$

2. Resuelva, utilizando el método de la matriz inversa, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= 1, \\ 3x^1 + 4x^2 + 5x^3 &= 2, \\ x^1 + 3x^2 + 4x^3 &= 3. \end{aligned}$$

3. Demuestre que el siguiente sistema sólo tiene solución si $\eta = 1$ o $\eta = 2$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + 2y + 4z &= \eta, \\ x + 4y + 10z &= \eta^2. \end{aligned}$$

4. Encuentre las condiciones sobre η para que al resolver el sistema

$$\begin{aligned} x^1 + \eta x^2 &= 1, \\ x^1 - x^2 + 3x^3 &= -1, \\ 2x^1 - 2x^2 + \eta x^3 &= -2. \end{aligned}$$

- (a). tenga una solución ,
- (b). no tenga solución ,
- (c). tenga infinitas soluciones .

Encuentre todas las soluciones que puedan existir.

5. Encuentre la factorización LU de las siguientes matrices:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 16 \end{pmatrix}, \quad B_m^k = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & -3 \\ 5 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Resuelva $A_j^i x^j = c^i$, cuando: $c_k = (21 \ 9 \ 28)$ y $c_j = (21 \ 7 \ 22)$.
- Resuelva $B_m^k x^m = c^k$ cuando: $c_l = (-4 \ 1 \ 8 \ -5)$ y $c_m = (-10 \ 0 \ -3 \ -24)$.

6. Utilizando la regla de Cramer resuelva el siguiente sistema:

$$13x^1 + 22x^2 - 13x^3 = 4,$$

$$10x^1 - 8x^2 - 10x^3 = 44,$$

$$9x^1 - 18x^2 - 9x^3 = 72.$$

7. Utilizando cualquiera de los métodos anteriores resuelva:

$$x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 7,$$

$$3x^1 + 2x^2 + x^3 + x^4 - 3x^5 = -2,$$

$$x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 6x^5 = 23,$$

$$5x^1 + 4x^2 + 3x^3 + 3x^4 - x^5 = 12.$$

8. Determine el rango de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. ¿Cuál es la condición para que las siguientes rectas se intercepten en un mismo punto?

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0.$$

4.5 Autovectores y autovalores

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo de la Mecánica Cuántica es una ecuación, que escrita en la forma de operadores, tiene la siguiente forma:

$$\mathbb{H}|\Psi_E\rangle = E|\Psi_E\rangle,$$

donde \mathbb{H} es un operador diferencial de segundo orden llamado el hamiltoniano y Ψ_E la función de onda, en este caso representada por $|\Psi_E\rangle$, *un estado propio* de \mathbb{H} que corresponde a *un valor propio* de la energía E .

Por tratarse de un espacio de Hilbert, es decir, un espacio vectorial con un producto interno bien definido, resulta de interés buscar soluciones en lo que se denomina el estado ligado de la ecuación de Schrödinger. Esto significa buscar los $|\Psi_E\rangle$ en el espacio de las funciones de cuadrado integrable introduciendo una base unidimensional para representar Ψ_E y una matriz para representar \mathbb{H} , en otras palabras: buscar una representación matricial para la ecuación de Schrödinger.

Los vectores propios, $|\Psi_E\rangle$, autovectores o “eigenvectores” de un operador lineal \mathbb{H} son los vectores no nulos que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar E recibe el nombre de valor propio, autovalor, valor característico o “eigenvalor”. De manera que una transformación queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios. Un espacio propio, autoespacio, “eigenespacio” o subespacio fundamental asociado al valor propio E es el conjunto de vectores propios con un valor propio común.

De manera general, llamaremos a $|\psi\rangle$ un autovector del operador \mathbb{A} si se cumple que

$$\mathbb{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle, \tag{4.19}$$

en este caso λ (que, en general será un número complejo) se denomina el autovalor correspondiente al

autovector $|\psi\rangle$. La ecuación (4.19) es conocida en la literatura como la ecuación de autovalores y se cumple para algunos valores particulares de los autovalores λ y, obviamente esto conduce a algunos vectores $|\psi\rangle$, los autovectores. Al conjunto de los autovalores se le denomina el espectro del operador \mathbb{A} .

Nótese que si $|\psi\rangle$ es autovector de \mathbb{A} para un determinado autovalor λ entonces $|\phi\rangle = \alpha|\psi\rangle$ (un vector proporcional a $|\psi\rangle$, con α un número complejo) también es un autovector para el mismo autovalor. Esto representa una incómoda ambigüedad: dos autovectores corresponden al mismo autovalor. Un intento de eliminarla es **siempre** considerar vectores $|\psi\rangle$ normalizados, i.e. $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Sin embargo, no deja de ser un intento que no elimina la ambigüedad del todo porque siempre queda el ángulo de fase arbitrario. Esto es, el vector $e^{i\theta}|\psi\rangle$, con θ un número real arbitrario, tiene la misma norma del vector $|\psi\rangle$. Sin embargo esta arbitrariedad es inofensiva y en Mecánica Cuántica las predicciones obtenidas con $|\psi\rangle$ son las mismas que con $e^{i\theta}|\psi\rangle$.

A continuación mostramos varios ejemplos donde la ecuación de autovalores se aplica en variados ámbitos.

Ejemplo 4.24 Reflexión respecto al plano xy . Si $\mathbb{R} : \mathbf{V}^3 \rightarrow \mathbf{V}^3$ es tal que $\mathbb{R}|\psi\rangle = |\tilde{\psi}\rangle$ donde se ha realizado una reflexión en el plano xy . Esto es

$$\mathbb{R}|i\rangle = |i\rangle; \quad \mathbb{R}|j\rangle = |j\rangle; \quad \mathbb{R}|k\rangle = -|k\rangle,$$

con $|i\rangle, |j\rangle, |k\rangle$ los vectores unitarios cartesianos. Es claro que cualquier vector en el plano xy será autovector de \mathbb{R} con un autovalor $\lambda = 1$, mientras que cualquier otro vector $|\psi\rangle \in \mathbf{V}^3$ y que no esté en el mencionado plano cumple con $|\psi\rangle = c|k\rangle$ y también será autovector de \mathbb{R} pero esta vez con un autovalor $\lambda = -1$.

Ejemplo 4.25 Dos visiones de rotaciones de ángulo fijo θ . La rotaciones de un vector en el plano pueden verse de dos maneras.

1. Se considera el plano como un espacio vectorial *real* V^2 con una base cartesiana canónica:

$$|i\rangle = (1, 0), \quad |j\rangle = (0, 1), \text{ esto es, si:}$$

$$\mathbb{R}|a\rangle = \lambda|a\rangle \Rightarrow \text{el ángulo de rotación} = n\pi, \quad \text{con } n \text{ entero.}$$

2. Igualmente si consideramos el plano complejo unidimensional, expresemos cualquier vector en el plano en su forma polar $|z\rangle = re^{i\theta}$ por lo cual:

$$\mathbb{R}|z\rangle = re^{i(\theta+\alpha)} = e^{i\alpha}|z\rangle,$$

si queremos $\lambda = e^{i\alpha}$ reales, necesariamente $\alpha = n\pi$ con n entero.

Ejemplo 4.26 El operador diferenciación. $\mathbb{D}|f\rangle \rightarrow D(f) = f'$. Los autovectores del operador diferenciación necesariamente deben satisfacer la ecuación:

$$\mathbb{D}|f\rangle = \lambda|f\rangle \rightarrow D(f)(x) = f'(x) = \lambda f(x),$$

la solución a esta ecuación será una exponencial. Esto es, $|f\rangle \rightarrow f(x) = ce^{\lambda x}$, con $c \neq 0$, y donde las $f(x)$ se denominarán *autofunciones* del operador.

Ejemplo 4.27 Proyectores: autovalores y autovectores. Es interesante plantearse la ecuación de autovalores con la definición del proyector para un determinado *autoespacio*. Esto es, dado $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$

si este proyector cumple con una ecuación de autovalores para un $|\varphi\rangle$ supuestamente arbitrario

$$P_\psi|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle \Rightarrow P_\psi|\varphi\rangle = (|\psi\rangle\langle\psi|)|\varphi\rangle \Rightarrow |\varphi\rangle \propto |\psi\rangle,$$

es decir, necesariamente $|\varphi\rangle$ es colineal con $|\psi\rangle$. Más aún, si ahora el $|\varphi\rangle$ no es tan arbitrario sino que es ortogonal a $|\psi\rangle$, $\langle\psi|\varphi\rangle = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, entonces el espectro del operador $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ es 0 y 1, el primero de los cuales es infinitamente degenerado y el segundo es simple. Esto nos lleva a reflexionar que si existe un autovector de un determinado operador, entonces su autovalor es distinto de cero, pero pueden existir autovalores nulos que generan un autoespacio infinitamente degenerado. Esta reflexión, sobre los autoespacios la consideraremos en la próxima sección.

4.5.1 Autovalores, autovectores e independencia lineal

La relación que existe entre los autovalores e independencia lineal de los autovectores asociados con cada autovalor es una de las herramientas más útiles que disponemos. Expondremos a continuación dos teoremas que establecen esta relación.

Teorema 4.1

Sean $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$ autovectores del operador $\mathbb{A} : V^m \rightarrow V^n$. Supongamos que existen k autovalores: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$, distintos correspondientes a cada uno de los autovectores $|\psi_j\rangle$, entonces $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$ es linealmente independiente.

Demostración La demostración de este teorema es por inducción y resulta elegante y sencilla.

- Primeramente demostramos para $j = 1$.

Obvio que el resultado se cumple y es trivial para el caso $k = 1$ (un autovector $|\psi_1\rangle$ que corresponde a un autovalor λ_1 es obvia y trivialmente linealmente independiente).

- Seguidamente supondremos que se cumple para $j = k - 1$.

Si existen $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_{k-1}\rangle\}$ autovectores de \mathbb{A} correspondientes a $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}\}$ entonces los $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_{k-1}\rangle\}$ son linealmente independientes.

- Ahora lo probaremos para $j = k$.

Por lo cual si tenemos k autovectores $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$, podremos construir una combinación lineal con ellos, y si esa combinación lineal se anula serán linealmente independientes.

$$c^j|\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, k,$$

al aplicar el operador \mathbb{A} a esa combinación lineal, obtenemos: $c^j\mathbb{A}|\psi_j\rangle = 0 \Rightarrow c^j\lambda_j|\psi_j\rangle = 0$, multiplicando por λ_k y restando miembro a miembro resulta:

$$c^j(\lambda_j - \lambda_k)|\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, k - 1,$$

(nótese que el último índice es $k - 1$) pero, dado que los $k - 1$ vectores $|\psi_j\rangle$ son linealmente independientes, entonces tendremos $k - 1$ ecuaciones $c^j(\lambda_j - \lambda_k) = 0$, una para cada $j = 1, 2, \dots, k - 1$. Dado que $\lambda_j \neq \lambda_k$ necesariamente llegamos a que $c^j = 0$ para $j = 1, 2, \dots, k - 1$ y dado que:

$$c^j|\psi_j\rangle = 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, k \Rightarrow c^j \neq 0,$$

con lo cual si $c^j|\psi_j\rangle = 0 \Rightarrow c^j = 0$ con $j = 1, 2, \dots, k$, y los $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$ son linealmente independientes y queda demostrado el teorema. ◀

Es importante acotar que este teorema nos recalca que si $\mathbb{A} : \mathbf{V}^m \rightarrow \mathbf{V}^n$ y \mathbb{A} tiene $k \leq n$ autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ entonces existirán, **cuando menos**, $k \leq n$ autovectores $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_k\rangle\}$ linealmente independientes, uno para cada autovalor. Hacemos énfasis en ese **cuando menos**, $k \leq n$ autovectores linealmente independientes, porque significa que el espacio \mathbf{V}^m no podrá ser expandido por los autovectores de \mathbb{A} . Ese punto lo analizaremos en la sección 4.20.

El inverso de este teorema no se cumple. Esto es, si $\mathbb{A} : \mathbf{V}^m \rightarrow \mathbf{V}^n$ tiene $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ autovectores linealmente independientes, no se puede concluir que existan n autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ distintos correspondientes a cada uno de los autovectores $|\psi_j\rangle$.

4.5.2 El polinomio característico, autovalores y autovectores de un operador

Nos toca ahora generar un método para calcular los autovalores $\{\lambda_j\}$, con $k = 1, 2, \dots, k \leq n$ para un operador lineal $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ suponiendo que existe una base ortonormal $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$. Entonces la ecuación (4.19) nos ilustra la representación matricial de la ecuación de autovalores:

$$\langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle \langle e^j | \psi \rangle = \lambda \langle e^i | \psi \rangle \Rightarrow A_j^i c^j = \lambda c^i \Rightarrow (A_j^i - \lambda \delta_j^i) c^j = 0,$$

con $j = 1, 2, \dots, n$. El conjunto de ecuaciones: $(A_j^i - \lambda \delta_j^i) c^j = 0$, puede ser considerado un sistema (lineal y homogéneo) de ecuaciones con n incógnitas c^j , el cual tendrá solución si el determinante de los coeficientes se anula. Tendremos entonces que $(A_j^i - \lambda \delta_j^i) c^j = 0 \Rightarrow \det |\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}| = 0$, es decir:

$$P(\lambda) = \det |A_j^i - \lambda \delta_j^i| = 0. \quad (4.20)$$

Esta ecuación se denomina ecuación característica (o secular) y a partir de ella emergen los autovalores (el espectro) del operador \mathbb{A} , esto es:

$$\det |A_j^i - \lambda \delta_j^i| = \begin{vmatrix} A_1^1 - \lambda & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 - \lambda & & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \\ A_1^n & A_2^n & & A_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Es importante señalar que el polinomio característico será independiente de la base a la cual esté referida la representación matricial $\langle e^i | \mathbb{A} | u_j \rangle$ del operador \mathbb{A} , porque hereda del determinante, esa invariancia de la representación matricial tal y como vimos en la página 299.

El resultado será un polinomio de grado n (el polinomio característico). Las raíces de este polinomio serán los autovalores que estamos buscando. Es claro que estas raíces podrán ser reales y distintas, algunas reales e iguales y otras imaginarias.

Para el caso de raíces reales, tendremos el mismo número de raíces que el grado del polinomio, generado por la representación matricial del operador con ese mismo grado. Es decir, tendremos un operador \mathbb{A} con una representación matricial de dimensión $n \times n$, con n autovalores distintos, que estará asociados a n autovectores que serán linealmente independientes y que generarán una representación matricial diagonal.

Ejemplo 4.28 Todos los autovalores reales son distintos. Hemos presentado y analizado en la sección 4.5.1 tres teoremas que discuten la relación entre los autovalores, y la independencia lineal de los autovectores asociados con éstos. En esta sección ilustraremos el caso que surge cuando las raíces del polinomio característico (4.20) son reales y distintas.

Consideremos la siguiente representación matricial de un operador \mathbb{A} en la base canónica

$$\langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \det |A_j^i - \lambda \delta_j^i| = \det \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 3 & 20 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

con lo cual el polinomio característico (4.20) queda expresado como:

$$\lambda^3 - 24\lambda^2 + 65\lambda - 42 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 21) = 0,$$

y es claro que tiene 3 raíces distintas.

Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores (4.19) para cada autovalor. Esto es:

- $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{lcl} 2x^1 + x^2 + 3x^3 & = & x^1, \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 & = & x^2, \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 & = & x^3, \end{array}$$

que constituye un sistema de ecuaciones algebraicas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Resolviendo el sistema tendremos el primer autovector:

$$|\psi\rangle_{\lambda_1=1} = |\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con α un número distinto de cero. Este α indica la indeterminación que discutimos a comienzos de la sección 4.5 correspondiente a esa ambigüedad que impone la presencia de una constante arbitraria de proporcionalidad.

- $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{lcl} 2x^1 + x^2 + 3x^3 & = & 2x^1, \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 & = & 2x^2, \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 & = & 2x^3. \end{array}$$

Resolviendo el sistema se tiene el segundo autovector

$$|\psi\rangle_{\lambda_2} = |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda_3 = 21$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 21 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{lcl} 2x^1 + x^2 + 3x^3 & = & 21x^1, \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 & = & 21x^2, \\ 3x^1 + 3x^2 + 20x^3 & = & 21x^3. \end{array}$$

Al resolver este sistema el tercer autovector

$$|\psi\rangle_{\lambda_3} = |\psi_3\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Como hemos dicho, podemos eliminar la ambigüedad de la fase arbitraria si normalizamos los autovectores:

$$|\hat{\psi}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\hat{\psi}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\hat{\psi}_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\langle \hat{\psi}^i | \hat{\psi}_j \rangle = \delta_j^i$, es decir la base de autovectores es, necesariamente, ortonormal.



4.5.3 El caso degenerado

Sea el operador lineal $\mathbb{A} : V^n \rightarrow V^n$ y calculamos el polinomio característico de grado n a partir de (4.20). Se puede dar el caso de que al menos una de las raíces del polinomio característico presenten algún grado de multiplicidad. Entonces el polinomio característico se podrá factorizar de la forma:

$$P(\lambda) = \det |A_j^i - \lambda \delta_j^i| = (\lambda - \lambda_1)^k (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_m). \quad (4.21)$$

Entonces existirán $m = n - k$ raíces simples que podrán ser asociadas con $n - k$ autovectores linealmente independientes y una raíz, λ_1 , con multiplicidad k que podrá ser asociada con 1, 2, … hasta k autovectores linealmente independientes con los anteriores. Es decir, ese autovalor estará asociado a un subespacio vectorial, denominado autoespacio S_{λ_1} tal que $\dim(S_{\lambda_1}) \leq$ grado de multiplicidad del autovalor λ_1 ¹⁷. La demostración general de la afirmación anterior queda fuera de los alcances de esta obra. Más adelante, cuando analicemos el caso particular de los autovalores para las matrices hermíticas en la sección 4.6.1, retomaremos la relación de la multiplicidad del autovalor y la dimensión del autoespacio que genera este autovalor degenerado. En particular en la sección 4.6.2 demostraremos que para matrices hermíticas la multiplicidad algebraica coincide con la geométrica. Es decir, dado un autovalor degenerado λ_0 de orden k , entonces existirán k autovectores linealmente independientes asociados con ese autovalor. Completaremos esta sección con varios ejemplos que ilustran algunas relaciones entre la multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica.

Ejemplo 4.29 Multiplicidad geométrica igual a multiplicidad algebraica. Consideremos una matriz real 3×3

$$\langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det |A_j^i - \lambda \delta_j^i| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 & 1 \\ 4 & -1 - \lambda & 0 \\ 1 & 7 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

con lo cual el polinomio característico queda expresado como:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

y es claro que tiene 2 raíces iguales y una distinta. En este caso $\lambda = 1$ es un autovalor degenerado de orden 2.

Ahora resolveremos la ecuación de autovalores para cada autovalor.

- $\lambda_1 = -3$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{lcl} 4x^1 - 3x^2 + x^3 & = & -3x^1, \\ 4x^1 - x^2 & = & -3x^2, \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 & = & -3x^3. \end{array}$$

$$\text{Resolviendo } |\psi\rangle_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow |\hat{\psi}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{174}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

¹⁷Este problema se conoce en la literatura como la relación entre la multiplicidad algebraica del autovalor y la multiplicidad geométrica del autoespacio.

- $\lambda_2 = 1$ (autovalor degenerado de orden 2).

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{lcl} 4x^1 - 3x^2 + x^3 & = & x^1, \\ 4x^1 - x^2 & = & x^2, \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 & = & x^3. \end{array}$$

Resolviendo el sistema tendremos el segundo autovector

$$|\psi\rangle_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\hat{\psi}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Claramente $\{|\hat{\psi}_1\rangle, |\hat{\psi}_2\rangle\}$ son linealmente independientes como nos los había anunciado el teorema 1 en la sección 4.5.1, sin embargo, esos autovectores no presentan ninguna relación de ortogonalidad $\langle \hat{\psi}^i | \hat{\psi}_j \rangle \neq \delta_j^i$. Más, aún, este autovector puede descomponerse en infinitas parejas de vectores linealmente independientes que expenden el subespacio $\mathbb{S}_{\lambda=1}$, asociado con $\lambda = 1$, el autovalor degenerado de multiplicidad $k = 2$. Una posible combinación lineal podría ser:

$$|\psi\rangle_{\lambda_2} = \alpha|\psi_1\rangle_{\lambda_2} + \beta|\psi_2\rangle_{\lambda_2} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la multiplicidad geométrica –la dimensión del autoespacio, $S_{\lambda_2=1}$, asociado con el autovalor degenerado $\lambda = 1$ – coincide con la multiplicidad algebraica del autovalor $\lambda = 1$ como raíz del polinomio característico. Es decir, podemos determinar la dimensión del subespacio que alberga al vector $|\psi\rangle_{\lambda_2}$. Es importante recalcar que ninguno de los (infinitos) dos vectores linealmente independientes, será autovector de \mathbb{A} por separado. Unicamente lo será la combinación lineal en la que resulta $|\psi\rangle_{\lambda_2}$.

△

Ejemplo 4.30 Multiplicidad geométrica menor a multiplicidad algebraica. Consideremos, para ilustrar este caso la siguiente matriz real 3×3

$$\langle e^i | \mathbb{A} | e_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det |A_j^i - \lambda \delta_j^i| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

En este caso, el polinomio característico es:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Una vez más, el polinomio característico tiene 2 raíces iguales y una distinta y, como en el caso anterior, $\lambda = 1$ es un autovalor degenerado de orden 2. Pasemos a resolver la ecuación de autovalores para cada autovalor.

- $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{lcl} x^1 + x^2 + 2x^3 & = & 2x^1, \\ x^2 + 3x^3 & = & 2x^2, \\ 2x^3 & = & 2x^3. \end{array}$$

Resolviendo el sistema obtenemos al primer autovector: $|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\lambda_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{lcl} x^1 + x^2 + 2x^3 & = & x^1, \\ x^2 + 3x^3 & = & x^2, \\ 2x^3 & = & x^3. \end{array}$$

Con el correspondiente segundo autovector: $|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Una vez más los dos vectores NO son ortogonales, $\langle\psi^i|\psi_j\rangle \neq \delta_j^i$, pero SI linealmente independientes. En este caso, asociado al autovalor $\lambda_2 = 1$, tenemos además del autovector $|\psi_2\rangle$, el autovector nulo y esto genera una imposibilidad de determinar la dimensión del autoespacio. Los autovectores siguen siendo linealmente independientes, pero aquí la dimensión del autoespacio es NECESARIAMENTE 1, $\dim(\mathbf{S}_{\lambda_2=1}) = 1$, por lo tanto ilustra que la multiplicidad geométrica es menor que la multiplicidad aritmética de las raíces del polinomio característico.

Ejemplo 4.31 Vamos ilustrar un tercer ejemplo que se presenta para uno de los autovalores degenerados. Consideraremos entonces otra matriz 3×3 con autovalores repetidos

$$\langle e^i | A | e_j \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det |A_j^i - \lambda \delta_j^i| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

con lo cual el polinomio característico es:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda - 7)(\lambda - 1)^2 = 0,$$

que tiene 2 raíces iguales y una distinta. En este caso $\lambda = 1$ vuelve a ser un autovalor degenerado de orden 2. Volvemos a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor

- $\lambda_1 = 7$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{lcl} 2x^1 + x^2 + x^3 & = & 7x^1, \\ 2x^1 + 3x^2 + 3x^3 & = & 7x^2, \\ 3x^1 + 3x^2 + 4x^3 & = & 7x^3. \end{array}$$

Al resolver el sistema

$$|\psi\rangle_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda_2 = 1$. En este caso el autovalor degenerado de orden 2 presenta una pequeña patología. Veamos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{lcl} 2x^1 + x^2 + x^3 & = & x^1, \\ 2x^1 + 3x^2 + 2x^3 & = & x^2, \\ 3x^1 + 3x^2 + 4x^3 & = & x^3. \end{array}$$

Resolviendo

$$|\psi\rangle_{\lambda_2} = \begin{cases} |\psi_1\rangle_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ |\psi_2\rangle_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

con lo cual el autovector $|\psi\rangle_{\lambda_2}$ correspondiente al autovalor $\lambda_2 = 1$, está asociado con a dos vectores linealmente independientes $\{|\psi_1\rangle_{\lambda_2}, |\psi_2\rangle_{\lambda_2}\}$ y, por lo tanto aquí también la multiplicidad aritmética coincide con la multiplicidad geométrica. Una vez más los autovectores, correspondientes a distintos autovalores no son ortogonales pero si linealmente independientes.

Ejemplo 4.32 Consideremos una matriz 3×3 con un autovalor real y dos autovalores complejos

$$\langle e^i | A | e_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det |A_j^i - \lambda \delta_j^i| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 3 & 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

con lo cual el polinomio característico queda expresado como:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 15\lambda - 18 = (\lambda - 6)(\lambda^2 + 3\lambda + 3) = 0.$$

En este caso $\lambda_1 = 6$ es un autovalor real. Adicionalmente existen dos autovalores complejos, uno el complejo conjugado del otro: $\lambda_2 = -\frac{1}{2}(3 + i\sqrt{3})$ y $\lambda_3 = -\frac{1}{2}(3 - i\sqrt{3})$. Para proceder a calcular los autovectores correspondientes a cada autovalor resolvemos la ecuación de autovalores para cada autovalor real. En este caso existe **un único** autovalor real $\lambda = 6$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{lcl} 4x^1 - 3x^2 + x^3 & = & 6x^1, \\ 4x^1 - x^2 & = & 6x^2, \\ x^1 + 7x^2 - 4x^3 & = & 6x^3. \end{array}$$

Tendremos que para $\lambda = 6$

$$|\psi\rangle_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.33 Dada la representación matricial de dos operadores

$$(\mathbb{A})_j^i \equiv A_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (\mathbb{B})_j^i \equiv B_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Evaluemos $[\mathbb{A}, \mathbb{B}]$.

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_j^i \equiv A_k^i B_j^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbb{B}\mathbb{A})_j^i \equiv B_k^i A_j^k \Rightarrow [\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0.$$

2. Vamos a mostrar que \mathbb{A} tiene por autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$, con λ_1 un autovalor degenerado.

Construyamos luego la base de autovectores para \mathbb{A} .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Entonces para:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)\lambda - (1-\lambda) = (\lambda^2 - 1)(1-\lambda) = 0,$$

se tienen dos autovalores: $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$. Para el caso de $\lambda = -1$ se cumple que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} z = -x, \\ y = -y, \\ x = -z. \end{array}$$

con lo cual el autovector asociado con el autovalor $\lambda = -1$ tendrá la forma de:

$$|u\rangle_{-1} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda = 1$ se cumple:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} z = x, \\ y = y, \\ x = z. \end{array}$$

hay dos vectores linealmente independientes asociados con $\lambda = 1$, a saber:

$$|u\rangle_{1a} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |u\rangle_{1b} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } y \text{ arbitrario.}$$

Nótese que estos tres autovectores: $\{|u\rangle_{1a}, |u\rangle_{1b}, |u\rangle_{-1}\}$ son ortogonales entre si.

3. ¿Cuál es la representación matricial de \mathbb{A} en la base de autovectores?

Veamos lo siguiente:

$$\tilde{A}_j^i = \begin{pmatrix} \langle u^1 | \mathbb{A} | u_1 \rangle & \langle u^1 | \mathbb{A} | u_2 \rangle & \langle u^1 | \mathbb{A} | u_3 \rangle \\ \langle u^2 | \mathbb{A} | u_1 \rangle & \langle u^2 | \mathbb{A} | u_2 \rangle & \langle u^2 | \mathbb{A} | u_3 \rangle \\ \langle u^3 | \mathbb{A} | u_1 \rangle & \langle u^3 | \mathbb{A} | u_2 \rangle & \langle u^3 | \mathbb{A} | u_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ya que los autovectores forman una base ortogonal. Obviamente se cumple que:

$$\det|\mathbb{A}| = \det|\tilde{\mathbb{A}}| = -1 \quad \text{y} \quad \text{Tr}(\mathbb{A}) = \text{Tr}(\tilde{\mathbb{A}}) = 1.$$

4. A partir de los autovectores de \mathbb{A} vamos a calcular los autovalores y autovectores de \mathbb{B} .

Claramente $\mathbb{B}|u_{-1}\rangle = -|u_{-1}\rangle$ con lo cual tenemos el primer autovector de \mathbb{B} asociado al autovalor $\lambda = -1$. Para encontrar los otros autovectores tendremos:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Practicando con SymPy

En este ejercicio aprenderemos a resolver el problema de autovalores y autovectores. Primeros lo haremos de manera indirecta, realizando los cálculos por pasos, y luego utilizando las funciones específicas del programa.

```
[1]: import sympy
from sympy import *
init_printing()
```

- Dada la matriz A del primer ejemplo anteriormente resuelto:

```
[2]: A = Matrix([[2, 1, 3], [1, 2, 3], [3, 3, 20]])
A
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{bmatrix}$$

Generamos la matriz identidad 3×3 .

```
[3]: I = eye(3)
I
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escribimos la ecuación de autovalores de manera matricial y la llamaremos M .

```
[4]: λ = symbols('λ')
M= A-λ*I
M
```

$$\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 3 & 20 - \lambda \end{bmatrix}$$

El determinante nos dará el polinomio característico, luego resolvemos para λ .

```
[5]: M.det()
```

$$-\lambda^3 + 24\lambda^2 - 65\lambda + 42$$

```
[6]: solve(_,λ)
```

$$[1, 2, 21]$$

Los autovalores son: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 21$.

Para cada autovalor evaluaremos una matriz correspondiente:

```
[7]: M1=M.subs(λ,1)
M2=M.subs(λ,2)
M3=M.subs(λ,21)
```

M1, M2, M3

[7]: $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 19 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -19 & 1 & 3 \\ 1 & -19 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \right)$

Necesitamos ahora resolver, para cada autovalor, la ecuación de autovectores: $A\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}$. Así que podemos escribir las siguientes matrices:

[8]:

```
x,y,z = symbols('x y z')
M1=M1*Matrix([x, y,z])
M1
```

[8]: $\begin{bmatrix} x + y + 3z \\ x + y + 3z \\ 3x + 3y + 19z \end{bmatrix}$

[9]:

```
M2=M2*Matrix([x, y,z])
M3=M3*Matrix([x, y,z])
M2,M3
```

[9]: $\left(\begin{bmatrix} y + 3z \\ x + 3z \\ 3x + 3y + 18z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -19x + y + 3z \\ x - 19y + 3z \\ 3x + 3y - z \end{bmatrix} \right)$

Debemos resolver cada uno de los sistemas de ecuaciones.

Para $\lambda_1 = 1$:

[10]:

```
ec1 =Eq(M1[0,0],0)
ec2= Eq(M1[1,0],0)
ec3= Eq(M1[2,0],0)
ec1,ec2,ec3
```

[10]: $(x + y + 3z = 0, x + y + 3z = 0, 3x + 3y + 19z = 0)$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

[11]:

```
sol = linsolve([ec1,ec2,ec3], (x, y, z))
sol
```

[11]: $\{(-y, y, 0)\}$

De las infinitas soluciones escogemos alguna de las más simples: $(1, -1, 0)$.

Repetimos los cálculos para el segundo autovalor, es decir, $\lambda_2 = 2$:

[12]:

```
ec1 =Eq(M2[0,0],0)
ec2= Eq(M2[1,0],0)
ec3= Eq(M2[2,0],0)
ec1,ec2,ec3
```

[12]: $(y + 3z = 0, x + 3z = 0, 3x + 3y + 18z = 0)$

```
[13]: sol = linsolve([ec1,ec2,ec3], (x, y, z))
sol
```

[13]: $\{(-3z, -3z, z)\}$

Por lo tanto un autovector puede ser: $(1, 1, -1/3)$.

Finalmente, para $\lambda_3 = 21$:

```
[14]: ec1 = Eq(M3[0,0],0)
ec2= Eq(M3[1,0],0)
ec3= Eq(M3[2,0],0)
ec1,ec2,ec3
```

[14]: $(-19x + y + 3z = 0, x - 19y + 3z = 0, 3x + 3y - z = 0)$

```
[15]: sol = linsolve([ec1,ec2,ec3], (x, y, z))
sol
```

[15]: $\left\{\left(\frac{z}{6}, \frac{z}{6}, z\right)\right\}$

Podemos tomar como autovector a: $(1, 1, 6)$.

2. Sympy ofrece la posibilidad de resolver el problema de autovalores a través de un determinado número de funciones propias. Para hallar el polinomio característico podemos escribir:

```
[16]: poli_car = A.charpoly()
poli_car
```

[16]: PurePoly ($\lambda^3 - 24\lambda^2 + 65\lambda - 42, \lambda, domain = \mathbb{Z}$)

```
[17]: A.charpoly().as_expr()
```

[17]: $\lambda^3 - 24\lambda^2 + 65\lambda - 42$

```
[18]: factor(_)
```

[18]: $(\lambda - 21)(\lambda - 2)(\lambda - 1)$

El programa también permite obtener los autovalores directamente de la matriz problema.

Para encontrar los valores propios de una matriz, se utiliza “eigenvals”, esto devuelve un diccionario de valores propios: pares algebraicos_multiplicidad (similar a la salida de raíces).

```
[19]: A.eigenvals()
```

[19]: $\{1: 1, 2: 1, 21: 1\}$

Para encontrar los vectores propios de una matriz, se utiliza “eigenvects” que devuelve una lista de tuplas de la forma: (autovector, multiplicidad_algebraica, [vectores propios]).

```
[20]: A.eigenvects()
```

[20]: $\left[\left(1, 1, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \left(2, 1, \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \left(21, 1, \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right]$

3. Consideremos otro de los ejemplos tratado anteriormente. Dada la matriz:

[21]: `B = Matrix([[4, -3, 1], [4, -1, 0], [1, 7, -4]])`
`B`

[21]:
$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

[22]: `B.charpoly().as_expr().factor()`

[22]: $(\lambda - 1)^2 (\lambda + 3)$

[23]: `B.eigenvals()`

[23]: $\{-3 : 1, 1 : 2\}$

[24]: `B.eigenvects()`

[24]:
$$\left(\left(-3, 1, \begin{bmatrix} -\frac{1}{13} \\ \frac{2}{13} \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left(1, 2, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right)$$

Notemos que sólo se obtienen dos autovectores.

4. Consideremos la matriz:

[25]: `D = Matrix([[1, 2, 3], [3, 1, 2], [2, 3, 1]])`
`D`

[25]:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

[26]: `D.charpoly().as_expr().factor()`

[26]: $(\lambda - 6) (\lambda^2 + 3\lambda + 3)$

[27]: `D.eigenvals()`

[27]:
$$\left\{ 6 : 1, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} : 1, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} : 1 \right\}$$

[28]: `D.eigenvects()`

[28]:
$$\left[\left(6, 1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}, 1, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}, 1, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]$$

4.5.4 Ejercicios

- Si $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ son autovectores del operador lineal \mathbb{A} que corresponden a distintos autovalores. Muestre que $\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle$ ($\alpha \neq 0, \beta \neq 0$) no puede ser un autovector de \mathbb{A} .

2. Demuestre que si todo vector de un espacio vectorial V es un autovector del operador lineal \mathbb{A} , entonces $\mathbb{A} = \lambda\mathbb{I}$. Donde \mathbb{I} es el operador identidad.
3. Demuestre que si el operador lineal \mathbb{A} conmuta con todos operadores que actúan en un determinado espacio vectorial, entonces $\mathbb{A} = \lambda\mathbb{I}$.
4. Si un operador lineal \mathbb{A} tiene un autovector $|v_0\rangle$ con autovalor λ_0 . Demuestre que $|v_0\rangle$ es también un autovector del operador \mathbb{A}^2 con autovalor λ_0^2 .
5. Aun si un operador lineal \mathbb{A} no tiene autovectores el operador \mathbb{A}^2 puede llegar a tenerlos. Demuestre que si \mathbb{A}^2 tiene un autovector con un autovalor no degenerado $\lambda_0 = \mu^2$, entonces \mathbb{A} tiene un autovector.
6. Encuentre los autovalores y autovectores de las siguientes matrices:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, B_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}, C_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y la matriz $(\mathbb{E})_j^i = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$. Verifique si los autovectores son ortogonales entre ellos.

7. Demuestre que la matriz

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

no tiene tres autovectores linealmente independientes y que cualquier autovector tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 3\lambda - 2\nu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

8. Retomemos el caso del tensor de inercia que discutimos en la sección 3.3.3. Para ello construimos un sistema con tres partículas, de masa m_i rígidamente unidas, colocadas en tres puntos distintos de la siguiente forma:

$$m_1 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad m_2 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad m_3 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (a). Encuentre la matriz del tensor de inercia.
- (b). Diagonalice esa matriz y encuentre los ejes principales de inercia.
9. En Mecánica Cuántica, el problema del oscilador armónico simple puede ser representado por un problema de autovalores

$$\mathbb{L}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow \langle x|\mathbb{L}|\psi\rangle = \lambda\langle x|\psi\rangle \Leftrightarrow \mathbb{L}\psi(x) = \lambda\psi(x), \quad \text{donde: } \mathbb{L} \leftrightarrow \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}.$$

Si construimos un par de operadores:

$$\mathbb{L}_+ = \frac{x}{2} + \frac{d}{dx} \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_- = \frac{x}{2} - \frac{d}{dx},$$

utilice los resultados del problema anterior y construya las nuevas autofunciones de \mathbb{L} con sus autovalores.

10. Considere las siguiente representación matricial para dos operadores:

$$\langle u^i | \mathbb{A} | u_j \rangle = A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \langle u^m | \mathbb{B} | u_n \rangle = B_n^m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a). Muestre como actúan \mathbb{A} y \mathbb{B} sobre un vector genérico $|\psi\rangle$ expandido en esa base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ (vale decir $|\psi\rangle = \alpha|u_1\rangle + \beta|u_2\rangle$).
- (b). Muestre que los autovalores de \mathbb{A} son degenerados para $\delta = 0$ y que sus autovectores son ortogonales para $\delta \neq 0$ e incluso para $\delta \rightarrow 0$.
- (c). Muestre que también \mathbb{B} tiene autovalores degenerados para $\delta = 0$ y encuentre la expresión (en función de $0 \leq \delta \leq 1$) para el coseno del ángulo entre dos autovectores.

11. Dada la siguiente representación matricial de un operador en la base canónica:

$$\langle u^i | \mathbb{M} | u_j \rangle = M_j^i = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad |u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a). Encuentre los autovectores $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$ para ese operador en la base canónica.
- (b). Encuentre las representaciones matriciales de los operadores proyección sobre los autoespacios, $\mathbb{P}_{|\varphi_i\rangle} = |\varphi_i\rangle\langle\varphi^i|$, en esa misma base canónica.
- (c). Encuentre las representaciones matriciales de los operadores proyección sobre los complementos ortogonales de los autoespacios $U_m^n = |\varphi_m\rangle\langle\varphi^n|$ en esa misma base y con ella calcule $M = M_j^i U_i^j$.

12. Una vez más consideremos las matrices de Pauli :

$$(\sigma_x)_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_y)_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_z)_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\mathbb{I})_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

las hemos visto en varios momentos de estas notas: como cuaterniones en los ejercicios 2.2.4 y como operadores lineales en los ejercicios 4.6.6.

- (a). Muestre si los operadores de Pauli $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, conjuntamente con el operador identidad, \mathbb{I} forman un grupo respecto a la siguiente operación:

$$\sigma_j \odot \sigma_k \equiv \sigma_j \sigma_k = i\epsilon_{jkm} \sigma^m + \delta_{jk} \mathbb{I} \quad \text{con } j, k, m = x, y, z$$

donde ϵ_{jkm} es el símbolo de Levi-Civita y $i = \sqrt{-1}$.

- (b). Muestre si las matrices de Pauli $(\sigma_x)_j^i, (\sigma_y)_j^i, (\sigma_z)_j^i$, conjuntamente con la matriz identidad $(\mathbb{I})_j^i$ son linealmente independientes.
- (c). ¿Las matrices de Pauli forman base para un espacio vectorial de matrices complejas 2×2 ? ¿Por qué? Si forman una base exprese la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

en términos de esa base.

- (d). Derive la expresión general para el comutador $[\sigma_j, \sigma_k]$ utilizando la descripción de composición de los operadores de Pauli que presentamos arriba .
- (e). Como lo planteamos en el ejemplo 4.18, σ_z actúa de la siguiente forma:

$$\sigma_z |+\rangle = |+\rangle \quad \text{y} \quad \sigma_z |-\rangle = -|-\rangle, \quad \text{con} \quad |+\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre la expresión para los autovalores y autovectores de los otros operadores de Pauli:

$$\sigma_x |+\rangle_x = \lambda_{+x} |+\rangle_x, \quad \sigma_x |-\rangle_x = \lambda_{-x} |-\rangle_x, \quad \sigma_y |+\rangle_y = \lambda_{+y} |+\rangle_y, \quad \sigma_y |-\rangle_y = \lambda_{-y} |-\rangle_y.$$

- (f). Muestre que cualquier representación matricial de un operador hermítico genérico \mathbb{M} puede ser expresado como combinación lineal de las matrices de Pauli.

(g). El polinomio característico para ese operador hermítico genérico \mathbb{M} se puede expresar como

$$P_\lambda = \lambda^2 - \lambda \text{Tr}(\mathbb{M}) + \det|\mathbb{M}|,$$

donde los λ son sus autovalores.

4.6 Autovalores y autovectores de matrices importantes

Consideremos la ecuación de autovalores (4.19) y la definición de operadores adjuntos que hemos discutido en la sección 4.2.3. Podemos afirmar sin perder generalidad que dado un conjunto de vectores $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_n\rangle\}$ y de cantidades $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ que cumplan con $\mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle$ con $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle \Rightarrow \langle u^j|\mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i\langle u^j|u_i\rangle \\ \langle u^j|\mathbb{A}^\dagger = \lambda_j^*\langle u^j| \Rightarrow \langle u^j|\mathbb{A}^\dagger|u_i\rangle = \lambda_j^*\langle u^j|u_i\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \langle u^j|\mathbb{A} - \mathbb{A}^\dagger|u_i\rangle = (\lambda_i - \lambda_j^*)\langle u^j|u_i\rangle. \quad (4.22)$$

Vale decir, hemos proyectado las ecuaciones de autovalores de un operador genérico y su adjunto a lo largo de los vectores y las formas correspondientes, $\langle u^j|$ y $|u_i\rangle$, para luego restar esas expresiones miembro a miembro.

Es evidente que si no conocemos el tipo de operador, poco se puede decir de sus autovectores y autovalores. Hay que imponer algunas restricciones sobre el tipo de operador para poder sacar algunas conclusiones respecto al tipo de autovalores y autovectores que ese operador pueda tener. Por ejemplo:

- Si \mathbb{A} es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son distintos, ($i \neq j$) entonces de la ecuación (4.22) se deduce que esos autovectores serán ortogonales, $\langle u^j|u_i\rangle \propto \delta_i^j$.
- Si \mathbb{A} es hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ y autovectores son los mismos, ($i = j$) entonces los autovalores son reales: $\lambda_i = \lambda_i^*$.

Este caso lo analizaremos en la próxima sección.

4.6.1 Autovalores y autovectores de matrices hermíticas y unitarias

Tal y como mencionamos en la sección 4.2.4 un operador hermítico o autoadjunto cumple con $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$ y luego en la sección 4.3.2.2, comprobamos que su representación matricial es igual a su traspuesta conjugada. Por lo tanto, la representación matricial de un operador autoadjunto es una matriz simétrica con números reales en su diagonal. Veamos ahora cómo se comportan sus autovalores.

Teorema 4.2

Supongamos un operador lineal $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$, hermítico: $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$, con autovalores: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Entonces:

- Los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ son reales.
- Los autovectores $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$, correspondientes a cada uno de los autovalores, serán ortogonales.

Demostración:

- Para demostrar que los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ son reales, proyectamos la ecuación de autovalores en cada uno de los autovectores:

$$\mathbb{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \Rightarrow \langle \psi|\mathbb{A}|\psi\rangle = \lambda\langle \psi|\psi\rangle.$$

Ahora bien, dado que $\langle \psi | \psi \rangle$ es real, si demostramos que $\langle \psi | \mathbb{A} | \psi \rangle$ es real, estará demostrado que λ lo será también. Pero como \mathbb{A} es hermítico:

$$\langle \psi | \mathbb{A} | \psi \rangle^* = \langle \psi | \mathbb{A}^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi | \mathbb{A} | \psi \rangle \Rightarrow \langle \psi | \mathbb{A} | \psi \rangle \in \mathbb{R},$$

por consiguiente los autovalores $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ son reales. Más aún, si \mathbb{A} es hermítico, y como sus autovalores son reales entonces:

$$\langle \psi | \mathbb{A}^\dagger = \lambda^* \langle \psi | = \lambda \langle \psi | \Rightarrow \langle \psi | \mathbb{A} | \phi \rangle = \lambda \langle \psi | \phi \rangle.$$

- Para demostrar que los autovectores $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ son ortogonales, consideremos dos autovectores con sus correspondientes autovalores de tal forma que se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\mathbb{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad \text{y} \quad \mathbb{A}|\varphi\rangle = \mu|\varphi\rangle,$$

pero como \mathbb{A} es hermítico entonces se cumple que: $\langle \varphi | \mathbb{A} = \mu \langle \varphi |$, multiplicando a la izquierda por $|\psi\rangle$ y a $\langle \psi | \mathbb{A} = \lambda \langle \psi |$ por $\langle \varphi |$ a la derecha:

$$\left. \begin{array}{l} (\langle \varphi | \mathbb{A} = \mu \langle \varphi |) |\psi\rangle \\ \langle \varphi | (\mathbb{A} | \psi \rangle = \lambda | \psi \rangle) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \langle \varphi | \mathbb{A} | \psi \rangle = \mu \langle \varphi | \psi \rangle \\ \langle \varphi | \mathbb{A} | \psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow (\lambda - \mu) \langle \varphi | \psi \rangle = 0,$$

y como hemos supuesto que $\lambda \neq \mu$ con lo cual $\langle \varphi | \psi \rangle = 0$, los autovectores correspondientes a dos autovalores son ortogonales. ◀

Es importante señalar el hecho de que si la matriz \mathbb{A} es real, entonces $\mathbb{A} = \mathbb{P} \check{\mathbb{A}} \mathbb{P}^T$, con $\check{\mathbb{A}}$ diagonal y \mathbb{P} ortogonal: $\mathbb{P}^T = \mathbb{P}^{-1}$.

En resumen, si $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ es un operador lineal hermítico entonces:

- Sus autovalores son reales.
- Los autovectores correspondientes a cada autovalor son ortogonales.
- Los autovectores de \mathbb{A} resultan ser una base ortonormal del espacio vectorial \mathbf{V}^n .

Ejemplo 4.34 Consideremos una vez más la transformación $\text{Diag} = \mathbb{S}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{S}$, descrita en la ecuación (4.24), donde Diag es un operador diagonal cuya representación matricial será

$$\text{Diag} = \mathbb{S}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{S} \iff \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \equiv \lambda_j \delta_j^i = (S^{-1})_k^i A_m^k S_j^m,$$

con $A_m^k = \langle u^k | \mathbb{A} | u_m \rangle$. Tal y como hemos comentado en la sección 4.6, debe haber restricciones sobre el operador \mathbb{A} para que sea diagonalizable. En particular, allí pudimos comprobar que si \mathbb{A} era hermítico, su representación matricial en la base de autovectores era diagonal. Entonces para este caso supondremos que \mathbb{A} es diagonalizable mediante la transformación (4.24). Claramente esto implica que

$$\text{Diag} = \mathbb{S}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{S} \Rightarrow \mathbb{S} \text{Diag} = \mathbb{A} \mathbb{S} \iff S_m^i \lambda_j \delta_j^m = A_m^i S_j^m \Rightarrow A_m^i S_j^m = \lambda_j S_j^i,$$

y esta última ecuación sugiere una ecuación de autovalores fijando un valor particular para j . Esto es:

$$A_m^i S_1^m = \lambda_1 S_1^i; \quad A_m^i S_2^m = \lambda_2 S_2^i; \quad A_m^i S_3^m = \lambda_3 S_3^i; \quad \dots A_m^i S_j^m = \lambda_j S_j^i \dots \quad A_m^i S_n^m = \lambda_n S_n^i.$$

Cada una de estas ecuaciones es una ecuación de autovalores para autovectores $S_1^i, S_2^i, S_3^i, \dots, S_n^i$. Vale decir la matriz de transformación S_j^m está construida por columnas de autovectores. Con lo cual al resolver la ecuación de autovalores para la matriz \mathbb{A} es inmediato construir la matriz de transformación \mathbb{S} a partir de los autovectores de \mathbb{A} .

Ejemplo 4.35 Para ejemplificar numéricamente el ejemplo anterior, consideremos la siguiente matriz

real y simétrica:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores y autovectores para \mathbb{A} son respectivamente:

$$P(\lambda) = -(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -2,$$

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |u_3\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El lector debe verificar que este conjunto de vectores son mutuamente ortogonales porque claramente la matriz es simétrica. Por lo tanto, la matriz \mathbb{A} se puede diagonalizar a través de la transformación $\mathbb{C}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{C}$, donde \mathbb{C} se construye con los autovectores normalizados de \mathbb{A} como columnas.

$$C_j^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, a pesar que los autovalores de \mathbb{A} son degenerados ($\lambda = 4, -2, -2$) sus tres autovectores son linealmente independientes, y se tiene que:

$$(\mathbb{C}^{-1})_m^i (\mathbb{A})_n^m (\mathbb{C})_j^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.36 La siguiente matriz es un ejemplo de una matriz hermítica o autoadjunta:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & -1+2i & i \\ -1-2i & 2 & -1 \\ -i & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}.$$

Los autovalores de esta matriz son:

$$P(\lambda) = -(\lambda - 4)(\lambda^2 - 2\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1 + \sqrt{5}, \lambda_3 = 1 - \sqrt{5}.$$

Los tres autovalores *reales* generan los siguientes autovectores:

$$\lambda_1 = 4 \Rightarrow |u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow |u_2\rangle = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 - \sqrt{5}i \\ -\sqrt{5} - 2 - (1 + \sqrt{5})i \end{pmatrix}, \quad \text{y}$$

$$\lambda_3 = 1 - \sqrt{5} \Rightarrow |u_3\rangle = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 + \sqrt{5}i \\ \sqrt{5} - 2 - (1 - \sqrt{5})i \end{pmatrix}.$$

Estos vectores normalizados son:

$$|\hat{u}_1\rangle = \frac{|u_1\rangle}{\sqrt{\langle u_1|u_1\rangle}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\hat{u}_2\rangle = \frac{|u_2\rangle}{\sqrt{\langle u_2|u_2\rangle}} = \frac{3}{\sqrt{30+6\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1-\sqrt{5}i \\ -\sqrt{5}-2-(1+\sqrt{5})i \end{pmatrix},$$

$$|\hat{u}_3\rangle = \frac{|u_3\rangle}{\sqrt{\langle u_3|u_3\rangle}} = \frac{3}{\sqrt{30-6\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1+\sqrt{5}i \\ \sqrt{5}-2-(1-\sqrt{5})i \end{pmatrix}.$$

Se puede demostrar que los autovectores son ortogonales:

$$\langle u_1|u_2\rangle = (u_1)^\dagger u_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1-\sqrt{5}i \\ -\sqrt{5}-2-(1+\sqrt{5})i \end{pmatrix} = 0,$$

$$\langle u_1|u_3\rangle = (u_1)^\dagger u_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1+\sqrt{5}i \\ \sqrt{5}-2-(1-\sqrt{5})i \end{pmatrix} = 0, \text{ y}$$

$$\langle u_2|u_3\rangle = (u_2)^\dagger u_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1+\sqrt{5}i & -\sqrt{5}-2+(1+\sqrt{5})i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1+\sqrt{5}i \\ \sqrt{5}-2-(1-\sqrt{5})i \end{pmatrix} = 0.$$

La matriz \mathbb{A} es entonces diagonalizable si construimos la siguiente matriz a partir de los autovectores normalizados:

$$(\mathbb{P})_j^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{\sqrt{30+6\sqrt{5}}} & \frac{9}{\sqrt{30-6\sqrt{5}}} \\ \frac{-1-i}{2} & \frac{3(1-\sqrt{5}i)}{\sqrt{30+6\sqrt{5}}} & \frac{3(1+\sqrt{5}i)}{\sqrt{30-6\sqrt{5}}} \\ \frac{1}{2} & \frac{3(-\sqrt{5}-2-(1+\sqrt{5})i)}{\sqrt{30+6\sqrt{5}}} & \frac{3(\sqrt{5}-2-(1-\sqrt{5})i)}{\sqrt{30-6\sqrt{5}}} \end{pmatrix}.$$

Si elegimos la matriz diagonal a partir de los autovalores:

$$(\text{Diag})_j^i = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

entonces resulta que es posible factorizar la matriz \mathbb{A} de la siguiente forma (Para el lector se deja la comprobación) $\mathbb{A} = \mathbb{P} \text{Diag} \mathbb{P}^\dagger$.



4.6.2 Autoespacios y autovalores degenerados

Una vez más, como hicimos en la sección 4.5.3, consideraremos el caso autovalores degenerados, pero ahora únicamente para operadores hermíticos o autoadjuntos. El siguiente teorema garantiza la existencia de al menos un subespacio $S(\lambda_0) \subset \mathbb{V}^n$ y que la multiplicidad geométrica coincide con la algebraica.

Teorema 4.3

Sea un operador lineal $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$, hermítico, con una representación matricial $n \times n$, tal que su polinomio característico $\mathcal{P}(\lambda) = \det |A_j^i - \lambda\delta_j^i| = 0$ tiene al menos una raíz degenerada $\lambda = \lambda_0$, de orden $k \leq n$. Entonces existen k autovectores, no triviales, que cumplen con: $\mathbb{A}|\psi_j\rangle = \lambda_0|\psi_j\rangle$ para $j = 1, 2, \dots, k$.

Demostración: Supondremos que $\lambda = \lambda_0$ es una raíz degenerada de orden k de un operador hermítico \mathbb{A} . En este caso el polinomio característico de \mathbb{A} es $\mathcal{P}(\lambda) = \det |A_j^i - \lambda\delta_j^i| \equiv (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{F}(\lambda) = 0$ y k representa la multiplicidad algebraica del autovalor λ_0 . Donde $\mathcal{F}(\lambda)$ representa un polinomio con raíces distintas a $\lambda = \lambda_0$. En el caso de que todas las otras raíces sean simples se podrá factorizar como $\mathcal{F}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n-k} (\lambda - \lambda_i)$. Probaremos que, para $\lambda = \lambda_0$ de multiplicidad k , existen k autovectores $|\psi_j\rangle$, no triviales, linealmente independientes.

Para ello, primero probamos que se cumple para $j = 1$. Es decir, si existe un λ_0 de multiplicidad 1 se cumple el teorema y esa afirmación es obvia. Si existe un $\lambda = \lambda_0$ existe un $|\psi_j\rangle$, tal que cumple con la ecuación $\mathbb{A}|\psi_j\rangle = \lambda_0|\psi_j\rangle$ y es linealmente independiente con él mismo. Claramente al menos para un caso se cumple el teorema.

Seguidamente suponemos que el teorema se cumple para $1 \leq j = m \leq k$. Vale decir que supondremos que existen m autovectores $|\psi_j\rangle$ linealmente independientes, asociados al autovalor λ_0 , que cumplen $\mathbb{A}|\psi_j\rangle = \lambda_0|\psi_j\rangle$. Entonces podemos construir un subespacio $S_{\lambda_0} = S(\lambda_0) \subset \mathbf{V}^n$ de tal forma que:

$$|\psi_j\rangle \in S_{\lambda_0} \quad / \quad \mathbb{A}|\psi_j\rangle = \lambda_0|\psi_j\rangle \Rightarrow |\psi_j\rangle \in S_{\lambda_0} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, m.$$

La dimensión de S_{λ_0} es m y representa la multiplicidad geométrica de la raíz λ_0 . Además, podremos separar \mathbf{V}^n como una suma directa entre el subespacio S_{λ_0} y su complemento ortogonal \mathcal{N} :

$$\mathbf{V}^n = S_{\lambda_0} \oplus \mathcal{N} \quad / \quad \mathbb{A}|\psi_j\rangle = \lambda_0|\psi_j\rangle \quad \wedge \quad |\phi\rangle \in \mathcal{N} \quad \Rightarrow \quad \langle \phi | \psi_j \rangle = 0,$$

claramente S_{λ_0} es un subespacio invariante de \mathbb{A} por cuanto la acción de \mathbb{A} se circumscribe dentro del mismo subespacio S_{λ_0} .

Ahora bien, para operadores hermíticos (no es verdad en general) se cumple que :

$$\left. \begin{array}{l} \langle \phi | \psi_j \rangle = 0 \\ \wedge \\ \mathbb{A}|\psi_j\rangle = \lambda_0|\psi_j\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \psi_j | \phi \rangle = 0 = \langle \psi_j | \mathbb{A}^\dagger | \phi \rangle = \langle \psi_j | \mathbb{A} | \phi \rangle.$$

Comprobamos que $\mathbb{A}|\phi\rangle \in \mathcal{N}$ y esto implica que \mathcal{N} también es un espacio invariante del operador hermítico \mathbb{A} .

Entonces, como el espacio \mathbf{V}^n puede expresarse como una suma directa de los dos subespacios invariantes respecto al operador lineal \mathbb{A} , la representación matricial de \mathbb{A} en la base de autovectores tendrá la forma de una matriz diagonal a bloques:

$$\langle \psi^j | \mathbb{A} | \psi_i \rangle = A_i^j \rightarrow \begin{pmatrix} Q_1^1 & \cdots & Q_m^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ Q_1^m & & Q_m^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & R_{m+1}^{m+1} & \cdots & R_n^{m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & R_{m+1}^n & \cdots & R_n^n \end{pmatrix},$$

donde Q_β^α y R_v^μ son matrices $m \times m$ y $(n-m) \times (n-m)$, respectivamente. Note que la matriz Q_β^α opera en S_{λ_0} mientras que R_v^μ actúa sobre el complemento ortogonal \mathcal{N} .

El polinomio característico de \mathbb{A} puede expresarse como:

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det |A_j^i - \lambda \delta_j^i| = 0 \Rightarrow \mathcal{P}(\lambda) = \det |Q_j^i - \lambda \delta_j^i| \det |R_j^i - \lambda \delta_j^i| = 0 \quad \text{y ,}$$

como $\lambda = \lambda_0$ es la raíz múltiple del polinomio característico que anula el $\det |Q_j^i - \lambda \delta_j^i|$, tendremos que

$$\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m \mathcal{R}(\lambda), \quad \text{con } \mathcal{R}(\lambda_0) \neq 0,$$

donde λ_0 no es raíz del polinomio $\mathcal{R}(\lambda)$. Ahora bien, como dijimos que se cumplía para $j = k$, el polinomio característico debe ser

$$j = k \Rightarrow \mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}(\lambda) \Rightarrow (\lambda - \lambda_0)^m \mathcal{F}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \mathcal{R}(\lambda).$$

Otra vez, λ_0 no es raíz del polinomio $\mathcal{R}(\lambda)$ y tampoco de $\mathcal{F}(\lambda)$. Como la ecuación anterior se cumple para todo λ , (en particular para $\lambda = \lambda_0$) tendremos que, necesariamente $k = m$, es decir:

$$1 = (\lambda - \lambda_0)^{k-m} \frac{\mathcal{R}(\lambda)}{\mathcal{F}(\lambda)} \Rightarrow k = m.$$

También lo podemos ver de la siguiente manera. Definimos el operador $\mathbb{A}_\lambda = \mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}$. Donde \mathbb{I} es el operador identidad. Ahora bien, como \mathbb{A} es hermítico, los autovectores para distintos autovalores son ortogonales. Entonces podemos expresar \mathbf{V}^n como la suma directa del autoespacio de \mathbb{A}_λ y su complemento ortogonal,

$$\mathbf{V}^n = S(\mathbb{A}_\lambda) \oplus S^\perp(\mathbb{A}_\lambda) \Leftrightarrow n = \underbrace{\dim(\mathfrak{N}(\mathbb{A}_\lambda))}_{=k} + \dim(\text{rank}(\mathbb{A}_\lambda)),$$

donde

- $S(\mathbb{A}_\lambda)$ es el autoespacio correspondiente al autovalor λ_0 , y los autovectores $\{|\psi_j\rangle\}$ conforman el núcleo $\mathfrak{N}(\mathbb{A}_\lambda)$, o espacio nulo, del operador \mathbb{A}_λ , ya que $\mathbb{A}_\lambda |\psi_j\rangle \equiv (\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) |\psi_j\rangle = |0\rangle$,
- $S^\perp(\mathbb{A}_\lambda)$ es el subespacio ortogonal al autoespacio $S(\mathbb{A}_\lambda)$,
- $\dim(\text{rank}(\mathbb{A}_\lambda))$ es la dimensión del rango de \mathbb{A}_λ como lo vimos en la sección 4.2.1,
- como la multiplicidad de λ_0 es k entonces, $\dim(\mathfrak{N}(\mathbb{A}_\lambda)) = k$.

Ahora bien, como la dimensión de nucleo $\mathfrak{N}(\mathbb{A}_\lambda)$ es k , existirán k autovectores que $|\psi_j\rangle$ linealmente independientes que expandan $S(\mathbb{A}_\lambda)$.

Ejemplo 4.37 Dada una matriz de la forma

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{A}|v_i\rangle = \lambda_i|v_i\rangle,$$

con α y β números complejos distintos de cero. Vamos a encontrar:

1. Las relaciones que deben cumplir α y β para que λ_i sea real. El polinomio característico y la condición para que λ sea real es:

$$(1 - \lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - \alpha\beta) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow \alpha\beta > 0 \wedge \alpha\beta \in \mathbb{R}^+.$$

2. Las relaciones que deben cumplir α y β para que $\langle v^j | v_i \rangle = \delta_i^j$. Los autovalores y autovectores para esta matriz serán:

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow |v_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow |v_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\lambda_3 = 1 + \sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow |v_3\rangle = \begin{pmatrix} \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con lo cual: $\langle v^2 | v_3 \rangle = 0 \Rightarrow \frac{\beta^2}{\alpha\beta} = 1 \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$.

3. Supongamos que \mathbb{A} es hermítico, encontremos las relaciones que deben cumplir α y β .

Si \mathbb{A} es hermítico, entonces $\alpha^* = \beta$, con lo cual se cumplen automáticamente ambas aseveraciones.

Ejemplo 4.38 Dada la siguiente matriz:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

aquí también se cumple que $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, con lo cual se puede diagonalizar. Calculemos nuevamente una matriz C_j^i que permita diagonalizar a la matriz A_j^i .

Primeramente procedemos a calcular los autovalores de \mathbb{A} .

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & -2 \\ 2 & -1 - \lambda & 4 \\ -2 & 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 6) = 0.$$

- Para $\lambda = -6$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 14x^1 + 2x^2 - 2x^3 = 0, \\ 2x^1 + 11x^2 + 4x^3 = 0, \\ -2x^1 + 4x^2 + 11x^3 = 0. \end{cases}$$

Un autovector puede ser:

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\hat{u}_1\rangle = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Para el autovalor degenerado $\lambda = 3$, tenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x^1 + 2x^2 - 2x^3 = 0, \\ 2x^1 - 7x^2 + 4x^3 = 0, \\ -2x^1 + 4x^2 - 7x^3 = 0. \end{cases}$$

En este caso podemos tomar como autovectores:

$$|u_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\hat{u}_2\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad |u_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\hat{u}_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El lector debe comprobar que en este caso los autovectores NO son mutuamente ortogonales.

Construimos la matriz \mathbb{C} :

$$C_j^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

De manera que:

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^{-1})_m^i (\mathbb{A})_n^m (\mathbb{C})_j^n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4\sqrt{5}}{9} & \frac{\sqrt{5}}{9} & -\frac{\sqrt{5}}{9} \\ \frac{2\sqrt{2}}{9} & \frac{5\sqrt{2}}{9} & \frac{4\sqrt{2}}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.6.3 Autovalores y autovectores de matrices unitarias

Para finalizar esta sección volvamos a considerar la ecuación de autovalores (4.19) y la definición de operadores adjuntos que hemos discutido en la sección 4.2.3. Entonces, si un operador \mathbb{U} es unitario, se cumple que $\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{U}^{-1}$ entonces si $|\psi_j\rangle$ es un autovector, normalizado del operador \mathbb{U} , correspondiente a un autovalor λ_j tendremos que la norma al cuadrado de $\mathbb{U}|\psi_j\rangle$ será igual a:

$$\mathbb{U}|\psi_j\rangle = \lambda_j|\psi_j\rangle \Rightarrow \langle\psi^j|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|\psi_j\rangle = 1 = \lambda_j^*\lambda_j\langle\psi^j|\psi_j\rangle = \lambda_j^*\lambda_j \Rightarrow \lambda_j = e^{i\varphi_j},$$

con φ_u una función real.

Podemos concluir que, necesariamente, los autovalores de los operadores unitarios serán números complejos de módulo 1. Cuando los autovalores son diferentes, digamos $k \neq j$, entonces esta condición implica que $\langle\psi^k|\psi_j\rangle = 0$, con lo cual los autovectores de un operador unitario son ortogonales.

Ejemplo 4.39 Sean \mathbb{A} y \mathbb{B} dos operadores hermíticos, con autovalores no degenerados y un operador unitario definido como: $\mathbb{U} = \mathbb{A} + i\mathbb{B}$. Vamos a mostrar que:

- Si \mathbb{A} y \mathbb{B} conmutan, $[\mathbb{B}, \mathbb{A}] = 0$, los autovectores de \mathbb{A} también lo son de \mathbb{B} .

Si $\{|u_i\rangle\}$ son autovectores de \mathbb{A} entonces

$$\mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle \Rightarrow \mathbb{B}\mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i\mathbb{B}|u_i\rangle, \quad \text{como } [\mathbb{B}, \mathbb{A}] = 0, \quad \text{entonces } \mathbb{A}\mathbb{B}|u_i\rangle = \lambda_i\mathbb{B}|u_i\rangle.$$

Por lo tanto, $\mathbb{B}|u_i\rangle$ es un autovector de \mathbb{A} . Pero la solución para la ecuación de autovectores $(\mathbb{A} - \lambda_i\mathbb{I})|u_i\rangle = 0$ es única, por lo cual todos los autovectores de \mathbb{A} son proporcionales. Esto es: $\mathbb{B}|u_j\rangle = \mu_j|u_j\rangle$, con lo cual queda demostrado que los autovectores de \mathbb{A} son autovectores de \mathbb{B} .

- Si $\mathbb{U}|v_i\rangle = \mu_i|v_i\rangle$, entonces $|\mu_i| = 1$.

Es claro que: $\langle v^j|\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U}|v_i\rangle = \langle v^j|\mathbb{I}|v_i\rangle \Rightarrow \mu_j^*\mu_i\langle v^j|v_i\rangle = \langle v^j|\mathbb{I}|v_i\rangle \Rightarrow \mu_i^2 = 1$.

Ejemplo 4.40 Dada la matriz:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es unitaria, ya que: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}^{-1}$ y los autovalores se obtienen de la manera usual:

$$P(\lambda) = (\lambda - i) \left[2\lambda^2 - \sqrt{2}(1+i)\lambda + 2i \right] = 0,$$

es decir:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}(1+i) - 2\sqrt{-3i}}{4}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}(1+i) + 2\sqrt{-3i}}{4}, \lambda_3 = i.$$

Notemos que los valores propios están normalizados a la unidad:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \lambda_1^* &= \left(\frac{\sqrt{2}(1+i) - 2\sqrt{-3i}}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{2}(1-i) - 2\sqrt{3i}}{4} \right) = 1, \\ \lambda_2 \lambda_2^* &= \left(\frac{\sqrt{2}(1+i) + 2\sqrt{-3i}}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{2}(1-i) + 2\sqrt{3i}}{4} \right) = 1, \\ \lambda_3 \lambda_3^* &= i(-i) = 1.\end{aligned}$$

Estos tres autovalores generan los siguientes autovectores:

$$|u_1\rangle_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i-\sqrt{-6i}-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, |u_2\rangle_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i+\sqrt{-6i}-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, |u_3\rangle_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se puede demostrar que los autovectores son ortogonales:

$$\begin{aligned}\langle u_1 | u_2 \rangle &= (u_1)^\dagger u_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-i-\sqrt{6i}-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i+\sqrt{-6i}-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\ \langle u_1 | u_3 \rangle &= (u_1)^\dagger u_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-i-\sqrt{6i}-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{y} \\ \langle u_2 | u_3 \rangle &= (u_2)^\dagger u_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-i+\sqrt{6i}-1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.\end{aligned}$$

Con los autovectores normalizados construimos la matriz U_j^i , que también será unitaria, y la matriz diagonal D_j^i con los autovalores.

$$U_j^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}} & 0 \\ -\frac{(1-i)(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{3+\sqrt{3}}} & \frac{(1-i)(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{3-\sqrt{3}}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_j^i = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}(1+i)-2\sqrt{-3i}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}(1+i)+2\sqrt{-3i}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

△

4.6.4 Autovalores y autovectores de matrices similares

Como discutimos en la sección 4.3.3, dos operadores \tilde{A} y A que están relacionados por una transformación de similaridad. La ecuación (4.15), $\tilde{A} = S^{-1}AS$, conecta las distintas representaciones matriciales de un mismo operador, las cuales tendrán la misma traza y el mismo determinante, independientemente de su representación matricial. Tal y como se desprende de ecuación (4.13) la representación matricial de los operadores S corresponde a la matriz de productos internos de los vectores base $\langle \tilde{e}^i | e_k \rangle$.

A continuación presentamos un teorema que ilustra como se construye la transformación de similaridad

Teorema 4.4

Un operador lineal $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ tendrá un máximo de n autovalores distintos. Adicionalmente, si \mathbb{A} tiene precisamente n autovalores: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, entonces los n autovectores, $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ (uno para cada autovalor), forman una base para \mathbf{V}^n y existirá una transformación de similaridad \mathbb{S} que diagonaliza \mathbb{A} de la forma

$$\mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} = \tilde{\mathbb{A}}_{\text{diag}} \equiv \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (4.23)$$

y la transformación es la matriz con los autovectores como columnas $[|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle]$,

Si construimos una matriz con las componentes n autovectores como columnas y la denotamos como $\mathbb{S} = [|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle]$, claramente

$$\mathbb{A}[|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle] = [\lambda_1|\psi_1\rangle, \lambda_2|\psi_2\rangle, \dots, \lambda_n|\psi_n\rangle] = [|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle] \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Esto se ve mejor en el lenguaje matricial

$$\mathbb{A}|\psi\rangle_k = \lambda_k|\psi\rangle_k \xrightarrow{\{\langle e_i|\}\} \langle e^i|\mathbb{A}|e_j\rangle\langle e^j|\psi\rangle_k = \lambda_k\langle e^i|\psi\rangle_k \Rightarrow A_j^i\psi_k^j = \lambda_k\psi_k^i \equiv \psi_k^i\delta_m^k\lambda_m \Leftrightarrow \mathbb{A}\mathbb{S} = \mathbb{S}\tilde{\mathbb{A}}_{\text{diag}},$$

Note que hemos representado $\mathbb{S} \leftrightarrow \psi_k^i$, como una matriz con los autovectores como columnas, además, como dijimos anteriormente, índices repetidos “arriba y abajo” indican suma, pero los índices en el mismo nivel no. Adicionalmente, hemos denotado como $\tilde{\mathbb{A}}_{\text{diag}}$ a la matriz diagonal con de los autovalores, $\tilde{\mathbb{A}}_{\text{diag}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ del mismo modo que en la sección 4.3.2.1.

Finalmente, como \mathbb{S} es invertible porque los autovectores son linealmente independientes tendremos

$$\mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} = \tilde{\mathbb{A}}_{\text{diag}} \equiv \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Es decir, como lo presentamos en la sección 4.3.3, existe una transformación de similaridad que lleva \mathbb{A} a su representación diagonal $\tilde{\mathbb{A}}_{\text{diag}}$, donde los n autovalores ocupan la diagonal.

Ahora nos toca identificar otra propiedad fundamental inherente al operador y no a su representación matricial. Para ello complementaremos los teoremas expuestos allá con el siguiente.

Teorema 4.5

Dos matrices, A_l^k y \tilde{A}_j^i , $n \times n$, similares tienen el mismo polinomio característico y con ello el mismo conjunto de autovalores.

Demostración: Es inmediato verificar que: $\tilde{\mathbb{A}} - \lambda\mathbb{I} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} - \lambda\mathbb{I} = \mathbb{S}^{-1}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbb{S}$, y dado que

$$\det|\tilde{\mathbb{A}} - \lambda\mathbb{I}| = \det|\mathbb{S}^{-1}(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I})\mathbb{S}| = \det|\mathbb{S}^{-1}|\det|\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}|\det|\mathbb{S}| = \det|\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}|.$$

Por lo tanto, ambos operadores $\tilde{\mathbb{A}}$ y \mathbb{A} , tendrán el mismo polinomio característico y con ello el mismo conjunto de autovalores. ◀

Haremos una lista de todas la propiedades para los autovalores y autovectores de operadores, expuestas en ésta y en la sección anterior.

Sea un operador lineal $\mathbb{A} : \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^n$ con un polinomio característico que tiene n raíces distintas: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Entonces tendremos que:

- Los diferentes autovectores $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ correspondientes a los $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, formarán una base para \mathbf{V} .
 - que los autovectores del operador \mathbb{A} no son necesariamente ortogonales. Solo los autovectores de operadores hermíticos serán ortogonales. Eso lo mostramos con detalle en la sección 4.6.1.
- En este caso la representación matricial del operador $\langle\psi^k|\mathbb{A}|\psi_m\rangle$ en la base de autovectores

$\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$, será diagonal:

$$(\mathbb{A}_{\text{diag}})_m^k = \langle \psi^k | \mathbb{A} | \psi_m \rangle = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_j^m.$$

- Cualquier otra representación matricial, $\langle u^k | \mathbb{A} | u_m \rangle$, del operador \mathbb{A} en otra base de V , estará relacionada con la representación diagonal mediante una transformación de similaridad:

$$\mathbb{A}_{\text{diag}} = \mathbb{S}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{S} \iff \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = S_k^i \langle u^k | \mathbb{A} | u_m \rangle (S^{-1})_j^m, \quad (4.24)$$

donde $S_j^m = \psi_j^m$ es una matriz construida con las componentes de los autovectores como columnas.

- Los autovalores de un operador son independientes de la base en la cual se represente el operador. Vale decir, al igual que la traza y el determinante, los autovalores etiquetan al operador independiente de su representación matricial.
- Los dos teoremas que presentamos se cumplen también para cualquier función del operador, construida en el sentido que presentamos en la sección 4.1.5. Esto es, los autovalores y autovectores de un operador \mathbb{A} también lo serán para cualquier función de éste:

$$\mathbb{F}(\mathbb{A})|\psi\rangle_k = \lambda_k |\psi\rangle_k \Rightarrow \mathbb{S}^{-1} \mathbb{F}(\mathbb{A}) \mathbb{S} = \mathbb{F}(\tilde{\mathbb{A}}_{\text{diag}}) \equiv \mathbb{F}(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n))$$

- Considere $|\tilde{\phi}_i\rangle = \mathbb{U}|\phi_i\rangle$, es decir un vector transformado con un operador unitario $\mathbb{U}^\dagger = \mathbb{U}^{-1}$. Además suponga $\mathbb{A}|\phi_i\rangle = \lambda_i|\phi_i\rangle$ entonces $\tilde{\mathbb{A}}|\tilde{\phi}_i\rangle = \lambda_i|\tilde{\phi}_i\rangle$, con $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{U}\mathbb{A}\mathbb{U}^\dagger$. Los operadores transformados mediante matrices unitarias tienen los mismos autovalores y autovectores transformados un del otro.

4.6.5 Conjunto completo de observables que comutan

Como hemos dicho en varias oportunidades los autovalores pueden ser degenerados con variados grados de multiplicidad. En ese caso el operador hermítico \mathbb{A} no tendrá una representación diagonal. A lo más tendrá una representación diagonal a bloques tal y como la presentamos en la sección 4.12. En estos casos, construiremos otro operador hermítico \mathbb{B} tal que $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$, y podremos encontrar una base que diagonalice a ambos. La intención será etiquetar, de manera única, con los autovalores de ambos a los autovectores que serán comunes a ambos operadores.

Comencemos con una definición de observable común en Física

Definición 4.3

Diremos que un operador $\mathbb{A} : V^n \rightarrow V^n$ es un *observable* si el conjunto de autovectores $\{|u_{i(\mu)}\rangle\}$ de un operador hermítico \mathbb{A} , forman una base de V^n .

$$\mathbb{A}|u_{i(\mu)}\rangle = \lambda_i|u_{i(\mu)}\rangle \Rightarrow |u_{i(\mu)}\rangle \langle u^{i(\mu)}| = 1 \iff \langle u^{i(\mu)} | u_{j(\nu)} \rangle = \delta_j^i \delta_\nu^\mu,$$

donde el índice μ indica el grado de degeneración del autovalor λ_i .

En términos matemáticos esta definición no es obvia. Estamos pidiendo que el operador sea hermítico y que los autovectores, correspondientes a autovalores degenerados, sean ortonormales entre sí y con los no degenerados. Como vimos en la sección 4.5.3, esa condición no necesariamente se cumple para cualquier matriz real. La calificación de observable para este tipo de operadores se hereda de la Mecánica Cuántica, en particular de la interpretación probabilística de la función de onda de Max Born. Esta interpretación relaciona la norma de la función de onda con las densidades de probabilidad, reforzando el concepto de que la mecánica cuántica trata fundamentalmente con observables en un sentido estadístico.

Un ejemplo trivial (y extremo) de un observable lo constituyen los proyectores, tal y como lo ilustramos en el Ejemplo 4.27, $\mathbb{P}_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi|$, con $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Claramente, la ecuación de autovalores

para un proyector obliga a que tenga dos autovalores 0 y 1. El autovalor nulo es infinitamente degenerado y está asociado a todos los vectores ortogonales a $|\psi\rangle$, mientras que el autovalor 1 corresponde a un autovalor simple y está asociado a todos los vectores colineales al mismo vector $|\psi\rangle$. Esto es:

$$\mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad \text{y} \quad \mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle = 0 \quad \text{si } \langle\psi|\phi\rangle = 0.$$

Más aún, sea un vector arbitrario $|\varphi\rangle \in V^n$, siempre se podrá expresar como:

$$|\varphi\rangle = \mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle + (\mathbb{I} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle})|\varphi\rangle \Rightarrow \mathbb{P}_{|\psi\rangle}(|\varphi\rangle = \mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle + (\mathbb{I} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle})|\varphi\rangle),$$

por lo tanto:

$$\mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle = \mathbb{P}_{|\psi\rangle}(\mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle) + (\mathbb{P}_{|\psi\rangle} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle}^2)|\varphi\rangle = \mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle \implies \mathbb{P}_{|\psi\rangle}(\mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle) = \mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle,$$

ya que $\mathbb{P}_{|\psi\rangle}^2 = \mathbb{P}_{|\psi\rangle}$, por definición de proyector. Entonces, se deduce que $\mathbb{P}_{|\psi\rangle}|\varphi\rangle$ es un autovector de $\mathbb{P}_{|\psi\rangle}$ con autovalor 1. Igualmente $(\mathbb{I} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle})|\varphi\rangle$ es un autovector de $\mathbb{P}_{|\psi\rangle}$ con autovalor 0, y la demostración es inmediata:

$$\mathbb{P}_{|\psi\rangle}(\mathbb{I} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle})|\varphi\rangle = (\mathbb{P}_{|\psi\rangle} - \mathbb{P}_{|\psi\rangle}^2)|\varphi\rangle = 0.$$

Para el caso de autoespacios correspondientes a autovalores degenerados se puede definir un observable \mathbb{A} de la forma:

$$\mathbb{A} = \sum_i a_i \mathbb{P}_i \quad \text{con: } \mathbb{P}_i = \left(|\psi_{(\mu)}\rangle \langle \psi^{(\mu)}| \right)_i \quad \text{para: } \mu = 1, 2, \dots, k.$$

Ejemplo 4.41 Dadas las siguientes matrices:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}, \quad B_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}, \quad C_j^i = \begin{pmatrix} -9 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}, \quad G_j^i = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Determinemos cuáles comutan entre ellas y busquemos la base de autovectores comunes.

Notamos que: $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = [\mathbb{A}, \mathbb{G}] = [\mathbb{G}, \mathbb{B}] = 0$, y

$$([\mathbb{A}, \mathbb{C}])_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad ([\mathbb{B}, \mathbb{C}])_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad ([\mathbb{G}, \mathbb{C}])_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los autovectores comunes a $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{G}$, serán:

$$|u_1\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |u_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para los observables que comutan se tienen los siguientes teoremas:

Teorema 4.6

Si dos operadores lineales \mathbb{A} y \mathbb{B} , hermíticos, comutan, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$, y $|\psi\rangle$ es autovector de \mathbb{A} con autovalor σ , entonces $\mathbb{B}|\psi\rangle$ también será autovector de \mathbb{A} con el mismo autovalor σ .

Demostración: La demostración es sencilla:

$$\mathbb{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle \Rightarrow \mathbb{B}(\mathbb{A}|\psi\rangle = \sigma|\psi\rangle) \Rightarrow \mathbb{B}\mathbb{A}|\psi\rangle = \mathbb{A}(\mathbb{B}|\psi\rangle) = \sigma(\mathbb{B}|\psi\rangle).$$

Ahora bien, de esta situación se puede distinguir un par de casos:

- si el autovalor σ es no degenerado los autovectores asociados con este autovalor son, por definición, colineales con $|\psi\rangle$. Por lo tanto, $\mathbb{B}|\psi\rangle$ será necesariamente colineal con $|\psi\rangle$. La conclusión a esta afirmación es que NECESARIAMENTE $|\psi\rangle$ es autovector de \mathbb{B} .
- si el autovalor σ es degenerado, $\mathbb{B}|\psi\rangle \in S_\sigma$, es decir $\mathbb{B}|\psi\rangle$ está en el autoespacio S_σ con lo cual S_σ es globalmente invariante bajo la acción de \mathbb{B} .

Teorema 4.7

Si dos observables \mathbb{A} y \mathbb{B} conmutan, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$, y si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son autovectores de \mathbb{A} para autovalores distintos, entonces el elemento de matriz $\langle\psi^1|\mathbb{B}|\psi_2\rangle = 0$.

Demostración: Si $\mathbb{A}|\psi_1\rangle = \sigma_1|\psi_1\rangle$ y $\mathbb{A}|\psi_2\rangle = \sigma_2|\psi_2\rangle$ entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\psi^1|[\mathbb{A}, \mathbb{B}]|\psi_2\rangle = \langle\psi^1|\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}|\psi_2\rangle = (\langle\psi^1|\mathbb{A})\mathbb{B}|\psi_2\rangle - \langle\psi^1|\mathbb{B}(\mathbb{A}|\psi_2)\rangle \\ &= \sigma_1\langle\psi^1|\mathbb{B}|\psi_2\rangle - \sigma_2\langle\psi^1|\mathbb{B}|\psi_2\rangle = (\sigma_1 - \sigma_2)\langle\psi^1|\mathbb{B}|\psi_2\rangle \Rightarrow \langle\psi^1|\mathbb{B}|\psi_2\rangle = 0. \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

Teorema 4.8

Si dos observables \mathbb{A} y \mathbb{B} , son hermíticos, y conmutan, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$, los autovectores $\{|\psi_i\rangle\}$ comunes a \mathbb{A} y \mathbb{B} constituyen una base ortonormal para V^n .

Demostración: Denotemos los autovectores de \mathbb{A} como $|\psi_{i(\mu)}\rangle$, de tal modo que:

$$\mathbb{A}|\psi_{i(\mu)}\rangle = \sigma_i|\psi_{i(\mu)}\rangle \quad \text{donde } i = 1, 2, \dots, n - k_n + 1 \quad \text{y} \quad \mu = 1, 2, \dots, k_n,$$

k_n indica el orden de la degeneración de un determinado autovalor σ_n .

Dado que \mathbb{A} es un observable, los $|\psi_{i(\mu)}\rangle$ forman una base, claramente:

$$\langle\psi^{i(\mu)}|\psi_{j(\nu)}\rangle = \delta_j^i \delta_\nu^\mu.$$

Además como los elementos de la matriz cumplen $\langle\psi^{i(\nu)}|\mathbb{B}|\psi_{j(\nu)}\rangle = \delta_j^i$, entonces esto quiere decir que los elementos $B_{j(\nu)}^{i(\mu)} = \langle\psi^{i(\mu)}|\mathbb{B}|\psi_{j(\nu)}\rangle$ serán nulos para $i \neq j$, pero no podemos decir nada *a priori* para el caso $\mu \neq \nu$ y $i = j$. En general, al ordenar la base:

$$|\psi_{1(1)}\rangle, |\psi_{1(2)}\rangle, \dots, |\psi_{1(k_1)}\rangle, |\psi_{2(1)}\rangle, |\psi_{2(2)}\rangle, \dots, |\psi_{2(k_2)}\rangle, \dots, |\psi_{3(1)}\rangle, \dots, |\psi_{n-k_n(1)}\rangle,$$

para el caso que consideraremos será:

$$|\psi_{1(1)}\rangle, |\psi_{1(2)}\rangle, |\psi_{1(3)}\rangle, |\psi_{2(1)}\rangle, |\psi_{2(2)}\rangle, |\psi_{3(1)}\rangle, |\psi_{4(1)}\rangle, |\psi_{4(2)}\rangle, |\psi_{5(1)}\rangle.$$

La representación matricial de \mathbb{B} en esa base, $\langle\psi^{i(\mu)}|\mathbb{B}|\psi_{j(\nu)}\rangle$, tendrá la forma de una matriz diagonal a bloques de la forma,

$$\left(\begin{array}{cccccc} B_{1(1)}^{1(1)} & B_{1(2)}^{1(1)} & B_{1(3)}^{1(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{1(2)}^{1(2)} & B_{1(1)}^{1(2)} & B_{1(3)}^{1(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{1(3)}^{1(3)} & B_{1(2)}^{1(3)} & B_{1(1)}^{1(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{1(1)}^{1(1)} & B_{1(1)}^{1(2)} & B_{1(1)}^{1(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{2(1)}^{2(1)} & B_{2(2)}^{2(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{2(2)}^{2(2)} & B_{2(1)}^{2(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{3(1)}^{3(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{4(1)}^{4(1)} & B_{4(2)}^{4(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{4(2)}^{4(2)} & B_{4(1)}^{4(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{5(1)}^{5(1)} & & & & & & & \end{array} \right).$$

Tal y como hemos mencionado, los subespacios: E_1 , E_2 , y E_4 corresponden a los autovalores degenerados σ_1 , σ_2 , y σ_4 (de orden 3, 2 y 2 respectivamente).

Una vez más surgen dos casos a analizar:

- Si σ_n es un autovalor no degenerado, entonces existe un único autovector asociado a este autovalor (la dimensión del autoespacio es $1 \rightarrow k_j = 1$, y no hace falta). Esto corresponde al ejemplo hipotético anterior para los autovalores simples σ_3 , y σ_5 .
- Si σ_n es un autovalor degenerado, entonces existe un conjunto de autovectores asociados a este

autovalor σ_n (en este caso la dimensión del autoespacio es k_n). Como los $|\psi_{j(\mu)}\rangle$ son autovectores de \mathbb{A} su representación matricial será diagonal a bloques. Ahora bien, como el autoespacio S_a es globalmente invariante bajo la acción de \mathbb{B} y $B_j^{i(\mu)} = \langle\psi^{i(\mu)}|\mathbb{B}|\psi_{j(\mu)}\rangle$ es hermítico, por ser \mathbb{B} hermítico, entonces \mathbb{B} es diagonalizable dentro del bloque que lo define. Es decir, se podrá conseguir una base $|\chi_{j(\mu)}\rangle$ tal que la representación matricial de \mathbb{B} en esa base, para ese bloque, es diagonal

$$B_j^{i(\mu)} = \langle\psi^{i(\mu)}|\mathbb{B}|\psi_{j(\mu)}\rangle \implies \langle\chi^{i(\mu)}|\mathbb{B}|\chi_{j(\mu)}\rangle = \tilde{B}_{j(\mu)}^{i(\mu)} = \beta_{j(\mu)}\delta_j^i,$$

que no será otra cosa que los vectores $|\chi_{j(\mu)}\rangle$ serán autovectores de \mathbb{B}

$$\mathbb{B}|\chi_{j(\mu)}\rangle = \beta_{j(\mu)}|\chi_{j(\mu)}\rangle. \blacksquare$$

Es importante recalcar que los autovectores $|\psi_{j(\mu)}\rangle$ de \mathbb{A} asociados con un autovalor degenerado NO son necesariamente autovectores de \mathbb{B} . Sólo que como \mathbb{B} es hermítico puede ser diagonalizado dentro del autoespacio.

De ahora en adelante denotaremos los autovectores comunes a dos operadores \mathbb{A} y \mathbb{B} con distintos autovalores como $|u_{i|j(\mu)}\rangle$ tal que

$$\mathbb{A}|u_{n|m(\mu)}\rangle = \sigma_n|u_{n|m(\mu)}\rangle \quad \text{y} \quad \mathbb{B}|u_{n|m(\mu)}\rangle = \beta_m|u_{n|m(\mu)}\rangle,$$

donde hemos dejado “espacio” para permitir una degeneración etiquetada con el índice μ .

La prueba del inverso del teorema anterior es bien simple.

Teorema 4.9

Si existe una base de autovectores $\{|u_{j(\mu)}\rangle\}$ comunes a \mathbb{A} y \mathbb{B} , entonces \mathbb{A} y \mathbb{B} conmutan, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$.

Demostración: Es claro que:

$$\mathbb{A}\mathbb{B}|u_{n|m(\mu)}\rangle = \beta_m\mathbb{A}|u_{n|m(\mu)}\rangle = \beta_m\sigma_n|u_{n|m(\mu)}\rangle,$$

$$\mathbb{B}\mathbb{A}|u_{n|m(\mu)}\rangle = \sigma_n\mathbb{B}|u_{n|m(\mu)}\rangle = \sigma_n\beta_m|u_{n|m(\mu)}\rangle,$$

restando miembro a miembro obtenemos de manera inmediata

$$(\mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A})|u_{n|m(\mu)}\rangle = [\mathbb{A}, \mathbb{B}]|u_{n|m(\mu)}\rangle = (\beta_m\sigma_n - \sigma_n\beta_m)|u_{n|m(\mu)}\rangle = 0. \blacksquare$$

Definición 4.4

Los operadores: $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}, \dots\}$ constituye un conjunto completo de observables que conmutan si:

1. Los operadores del conjunto conmutan entre ellos:

$$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = [\mathbb{A}, \mathbb{C}] = [\mathbb{A}, \mathbb{D}] = [\mathbb{B}, \mathbb{C}] = [\mathbb{B}, \mathbb{D}] = [\mathbb{C}, \mathbb{D}] = \dots = 0.$$

2. Al determinar el conjunto de autovalores para los operadores

$$\{\alpha_n, \beta_m, \gamma_k, \delta_l, \dots\},$$

se especifica **de manera única** un único autovector común a todos estos operadores

$$\{\alpha_n, \beta_m, \gamma_k, \delta_l, \dots\} \Rightarrow |u_{n|m|k|l\dots(\mu)}\rangle.$$

Ejemplo 4.42 Considere que el espacio de estados para un determinado sistema físico viene expandido

por una base ortonormal $\{|\xi_1\rangle, |\xi_2\rangle, |\xi_3\rangle\}$ y se definen dos operadores \mathbb{L}_z y \mathbb{S} de la siguiente manera:

$$\mathbb{L}_z|\xi_1\rangle = |\xi_1\rangle, \quad \mathbb{L}_z|\xi_2\rangle = 0, \quad \mathbb{L}_z|\xi_3\rangle = -|\xi_3\rangle, \quad \mathbb{S}|\xi_1\rangle = |\xi_3\rangle, \quad \mathbb{S}|\xi_2\rangle = |\xi_2\rangle, \quad \mathbb{S}|\xi_3\rangle = |\xi_1\rangle.$$

Intentemos responder varias preguntas y con las respuestas vamos construyendo un ejemplo para un conjunto completo de observables que comutan para \mathbb{L}_z^2 y \mathbb{S} .

- ¿Cuál es la representación matricial de estos operadores en base ortonormal $\{|\xi_1\rangle, |\xi_2\rangle, |\xi_3\rangle\}$?

Las representaciones matriciales para $\mathbb{L}_z, \mathbb{L}_z^2, \mathbb{S}$ y \mathbb{S}^2 serán las siguientes:

$$\langle \xi^i | \mathbb{L}_z | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle \xi^i | \mathbb{L}_z^2 | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\langle \xi^i | \mathbb{S} | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \xi^i | \mathbb{S}^2 | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es claro que estas matrices son reales y simétricas y, por lo tanto, son hermíticas y, al ser el espacio de dimensión finita, deben ser diagonalizables y sus autovectores formarán base para ese espacio. Por lo tanto, $\mathbb{L}_z, \mathbb{L}_z^2, \mathbb{S}$ y \mathbb{S}^2 son observables.

- ¿Cuál es la forma más general para la representación matricial de un operador que comuta con \mathbb{L}_z ?

Notamos que los vectores de la base ortonormal $\{|\xi_1\rangle, |\xi_2\rangle, |\xi_3\rangle\}$ son autovectores para \mathbb{L}_z con autovalores $\{1, 0, -1\}$, con lo cual su representación matricial tiene que ser diagonal. Recuerde que si dos observables \mathbb{A} y \mathbb{B} comutan, $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$, y si $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son autovectores de \mathbb{A} para autovalores distintos, entonces el elemento de matriz $\langle \psi^1 | \mathbb{B} | \psi_2 \rangle = 0$, con lo cual:

$$[\mathbb{L}_z, \mathbb{M}] = 0 \iff \langle \xi^i | \mathbb{M} | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} M_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3^3 \end{pmatrix}.$$

Esto se desprende de manera directa de:

$$0 = \langle \xi^i | [\mathbb{L}_z, \mathbb{M}] | \xi_j \rangle = \langle \xi^i | \mathbb{L}_z \mathbb{M} - \mathbb{M} \mathbb{L}_z | \xi_j \rangle = (\lambda_i - \lambda_j) \langle \xi^i | \mathbb{M} | \xi_j \rangle, \quad \text{con } (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0 \text{ para } i \neq j.$$

- ¿Cuál es la forma más general para la representación matricial de un operador que comuta con \mathbb{L}_z^2 ?

Si nos planteamos la misma pregunta para \mathbb{L}_z^2 , vemos que sus autovalores son $\{1, 0\}$. Esto es:

$$\mathbb{L}_z^2|\xi_1\rangle = |\xi_1\rangle; \quad \mathbb{L}_z^2|\xi_2\rangle = 0; \quad \mathbb{L}_z^2|\xi_3\rangle = |\xi_3\rangle,$$

con lo cual tendremos que la representación matricial de ese operador que commute con \mathbb{L}_z^2 , no será diagonal, es decir:

$$[\mathbb{L}_z^2, \mathbb{N}] = 0 \iff \langle \xi^i | \mathbb{N} | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} N_1^1 & 0 & N_3^1 \\ 0 & N_2^2 & 0 \\ N_1^3 & 0 & N_3^3 \end{pmatrix},$$

ya que:

$$0 = \langle \xi^1 | [\mathbb{L}_z^2, \mathbb{N}] | \xi_3 \rangle \Rightarrow \langle \xi^1 | \mathbb{N} | \xi_3 \rangle = \langle \xi^1 | \mathbb{N} | \xi_3 \rangle,$$

y vale para cualquier elemento N_3^1 (y equivalentemente para N_1^3). Adicionalmente, si reordenamos

la base $\{|\xi_1\rangle, |\xi_2\rangle, |\xi_3\rangle\} \rightarrow \{|\xi_2\rangle, |\xi_1\rangle, |\xi_3\rangle\}$, la representación matricial de \mathbb{N} , queda como

$$\langle \xi^i | \mathbb{N} | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} N_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^1 & N_3^1 \\ 0 & N_1^3 & N_3^3 \end{pmatrix}.$$

Es decir, vemos que el operador \mathbb{N} tiene una representación matricial diagonal a bloques.

- Finalmente ¿cuál es la representación matricial, más general, de un operador que commute con \mathbb{S}^2 ?

Para este caso tendremos que,

$$[\mathbb{S}^2, \mathbb{P}] = 0 \Rightarrow \langle \xi^i | [\mathbb{S}^2, \mathbb{P}] | \xi_j \rangle = \langle \xi^i | \mathbb{S}^2 \mathbb{P} - \mathbb{P} \mathbb{S}^2 | \xi_j \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \xi^i | \mathbb{P} | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} 0 & P_2^1 & P_3^1 \\ P_2^2 & 0 & P_3^2 \\ P_1^3 & P_2^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- ¿Se puede construir una base de autovectores comunes a \mathbb{L}_z^2 y \mathbb{S} ?

Para ello notamos que $|\xi_2\rangle$ es un autovector común a \mathbb{L}_z^2 y \mathbb{S} , por lo tanto, existirá un subespacio expandido por: $\{|\xi_1\rangle, |\xi_3\rangle\}$ y las representaciones matriciales para \mathbb{L}_z^2 y \mathbb{S} , en ese subespacio serán:

$$\langle \xi^i | \mathbb{L}_z^2 | \xi_j \rangle_{S_{13}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \langle \xi^i | \mathbb{S} | \xi_j \rangle_{S_{13}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Acto seguido planteamos el problema de autovalores para \mathbb{S} , para ese subespacio utilizando la base $\{|\xi_1\rangle, |\xi_3\rangle\}$, esto es:

$$\mathbb{S} |q_j\rangle = \lambda_j |u_j\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\xi_1\rangle + |\xi_3\rangle) \\ |q_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\xi_1\rangle - |\xi_3\rangle) \end{cases}$$

con lo cual tendremos los resultados mostrados en la tabla 4.3. Es decir, hemos expresado los autovectores de \mathbb{S} , $|q_2\rangle$ y $|q_3\rangle$, como combinación lineal de la base $\{|\xi_1\rangle, |\xi_3\rangle\}$.

Adicionalmente, si ordenamos de otra forma la base de autovectores de \mathbb{L}_z^2 , como $\{|\xi_1\rangle, |\xi_3\rangle, |\xi_2\rangle\}$, tendremos entonces como representación matricial diagonal a bloques, correspondiente a un autovalor degenerado 1, a:

$$\langle \xi^i | \tilde{\mathbb{N}} | \xi_j \rangle = \begin{pmatrix} \tilde{N}_1^1 & \tilde{N}_3^1 & 0 \\ \tilde{N}_1^3 & \tilde{N}_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N}_2^2 \end{pmatrix}.$$

Autovectores	Autovalor \mathbb{L}_z^2	Autovalor \mathbb{S}
$ q_1\rangle = \xi_2\rangle$	0	1
$ q_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_1\rangle + \xi_3\rangle)$	1	1
$ q_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_1\rangle - \xi_3\rangle)$	1	-1

Figura 4.3: Dado que no hay líneas repetidas \mathbb{L}_z^2 y \mathbb{S} forman un CCOC.

Es costumbre representar esta base común de autovectores de \mathbb{L}_z^2 y \mathbb{S} haciendo referencia a los autovalores asociados a los operadores

$$|q_1\rangle \Leftrightarrow |0; 1\rangle, \quad |q_2\rangle \Leftrightarrow |1; 1\rangle, \quad |q_3\rangle \Leftrightarrow |1; -1\rangle,$$

y claramente la dupla de autovalores que etiquetan los autovectores es única.

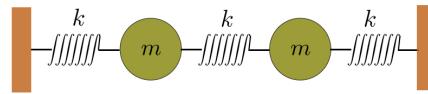
Ejemplo 4.43 Consideremos otro ejemplo proveniente de la Mecánica Clásica. Se trata de dos osciladores armónicos, de igual masa, acoplados con resortes con la misma constante elástica k .

Podremos expresar estas ecuaciones en forma de operadores:

$$\mathbb{D}|x\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m \frac{d^2}{dt^2} + 2k & -k \\ -k & m \frac{d^2}{dt^2} + 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = 0.$$

La ecuaciones de movimiento para este sistema son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + kx_1 - k(x_2 - x_1) &= 0, \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 + k(x_2 - x_1) &= 0, \end{aligned}$$



Si pensamos esta ecuación como una ecuación de autovalores, el autovalor es claramente $\lambda = 0$.

Como las masas y las constantes elásticas son iguales podemos intercambiar las partículas y la física (las ecuaciones de movimiento) no cambian. Es decir, si intercambiamos $x_1 \leftrightarrow x_2$ las ecuaciones de movimiento quedan inalteradas. Esto se puede expresar matemáticamente como el operador permutación de las partículas:

$$(\mathbb{P})_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato comprobar que $[\mathbb{D}, \mathbb{P}] = 0$, con lo cual existirá una combinación lineal de autovectores de \mathbb{D} (asociados con el autovalor $\lambda = 0$) los cuales también serán autovectores de \mathbb{P} . Para ello procedamos a calcular los autovalores y autovectores de \mathbb{P} :

$$\mathbb{P}|x\rangle = \lambda|x\rangle \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda \pm 1 \Leftrightarrow |\hat{e}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\hat{e}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Fácilmente podemos expresar el vector posición como una combinación lineal de estos dos autovectores de \mathbb{P} , esto es:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \frac{\xi_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\xi_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \\ \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \end{cases}.$$

Es claro que

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

son autovectores de \mathbb{P} y \mathbb{D} .

Ejemplo 4.44 Si definimos los autovectores comunes a \mathbb{J}^2 y \mathbb{J}_z como $|j, m\rangle$ de la siguiente manera:

$$\mathbb{J}^2|j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j, m\rangle, \quad \mathbb{J}_z|j, m\rangle = m\hbar|j, m\rangle, \quad \text{con: } \langle j, m|j', m'\rangle = \delta_j^{j'}\delta_m^{m'},$$

y adicionalmente tenemos que:

$$\mathbb{J}_-|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|j, m-1\rangle, \quad \mathbb{J}_+|j, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|j, m+1\rangle.$$

Si se supone (es fácil demostrarlo) que $-j \leq m \leq j$. Esto quiere decir que dado algún valor j , las m varían entre $-j$ y j de uno en uno. Esto es, $m = -j, -j+1, -j+2, \dots, j-2, j-1, j$.

- Supongamos ahora que $j = \frac{1}{2}$ y busquemos, la representación matricial para: $\mathbb{J}_z, \mathbb{J}_-, \mathbb{J}_+, \mathbb{J}^2$, en la base de autovectores de \mathbb{J}_z y \mathbb{J}^2 . Si $|j, m\rangle$ son autovectores de \mathbb{J}^2 y \mathbb{J}_z su representación matricial será diagonal y como m varía entre $-j$ y j con incrementos de 1 tendremos que serán matrices 2×2 . La base ortogonal de autovectores será: $\left\{ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right\}$.

$$\begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}_z | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}_z | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}_z | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}_z | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \equiv \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}^2 | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}^2 | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \equiv \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La representación matricial para \mathbb{J}_- , \mathbb{J}_+ obviamente no será diagonal:

$$\begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \equiv \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \mathbb{J}_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \mathbb{J}_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} \equiv \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calculemos los autovalores y autovectores para: \mathbb{J}_z , \mathbb{J}_- , \mathbb{J}_+ , \mathbb{J}^2 . Otra vez, $\{|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle\}$ son autovectores de \mathbb{J}^2 y \mathbb{J}_z . En el caso de \mathbb{J}^2 con un autovalor de $\frac{3}{4}\hbar^2$ para ambos autovectores y en el caso de \mathbb{J}_z los autovalores serán $\pm\frac{\hbar}{2}$ respectivamente. Para \mathbb{J}_- , \mathbb{J}_+ no tendrán autovalor distinto de cero en esta base.



Practicando con SymPy

```
[1]: import sympy
from sympy import *
init_printing()
```

- Dada la matriz \mathbb{A} del primer ejemplo anteriormente resuelto:

```
[2]: A = Matrix([[1, 0, 3], [0, -2, 0], [3, 0, 1]])
A
```

[2]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
[3]: A.charpoly().as_expr().factor()
```

[3]: $(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$

Se calculan los autovalores y autovectores y se asignan a una variable

```
[4]: autova_autove = A.eigenvects()
autova_autove
```

[4]:

$$\left[\left(-2, 2, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left(4, 1, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right]$$

Podemos imprimir estas cantidades por separado

```
[5]: for autovalor, multiplicidad, autovectores in autova_autove:
    print("Autovalor:", autovalor)
```

```
print("Autovectores:")
for autovector in autovectores:
    print(autovector)
```

Autovalor: -2
 Autovectores:
 $\text{Matrix}([[0], [1], [0]])$
 $\text{Matrix}([[-1], [0], [1]])$
 Autovalor: 4
 Autovectores:
 $\text{Matrix}([[1], [0], [1]])$

Es más conveniente aislar las cantidades para un uso posterior

[6]: $\lambda_1 = \text{autova_autove}[0][0]$
 λ_1

[6]: -2

[7]: $L_1 = \text{autova_autove}[0][2][0]$
 $L_2 = \text{autova_autove}[0][2][1]$
 L_1, L_2

[7]: $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

[8]: $\lambda_2 = \text{autova_autove}[1][0]$
 λ_2

[8]: 4

[9]: $L_3 = \text{autova_autove}[1][2][0]$
 L_3

[9]: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vamos ahora a normalizar los autovectores:

[10]: $V1 = L_1 / \sqrt{L_1 \cdot L_1}$
 $V2 = L_2 / \sqrt{L_2 \cdot L_2}$
 $V3 = L_3 / \sqrt{L_3 \cdot L_3}$
 $V1, V2, V3$

[10]: $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\right)$

Hacemos una lista con los vectores normalizados:

[11]: `L_vec=[[V1,V2,V3]]`

`L_vec`

$$[\left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \right]]$$

Y construimos la matriz C :

[12]: `C = Matrix(L_vec)`

`C`

$$[\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}]$$

Para finalmente comprobar:

[13]: `C.T*A*C`

$$[\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}]$$

Para diagonalizar una matriz también se puede utilizar la opción “diagonalize()”, lo que devuelve una tupla (P, D) , donde D es diagonal y $A = PDP^{-1}$.

[14]: `P, D = A.diagonalize()`

[15]: `P, D`

$$[\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right)]$$

[16]: `P*D*P.inv()`

$$[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}]$$

2. Consideremos ahora otro de los ejemplos, donde teníamos la siguiente matriz:

[17]: `A = Matrix([[1, 2*I-1, I], [-2*I-1, 2, -1], [-I, -1, 3]])`

`A`

$$[\begin{bmatrix} 1 & -1 + 2i & i \\ -1 - 2i & 2 & -1 \\ -i & -1 & 3 \end{bmatrix}]$$

Es fácil ver que se trata de una matriz hermítica

[18]: `A.C.T`

[18]:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 + 2i & i \\ -1 - 2i & 2 & -1 \\ -i & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculamos los autovalores y autovectores:

[19]: `autova_autove = A.eigenvecs()`
`autova_autove`

[19]:

$$\left(4, 1, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - i \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left(1 - \sqrt{5}, 1, \begin{bmatrix} \frac{1}{5} - \frac{8i}{5} + (-\frac{1}{5} + \frac{3i}{5})(1 - \sqrt{5}) \\ \frac{7}{5} + (-\frac{2}{5} + \frac{i}{5})(1 - \sqrt{5}) - \frac{i}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \right), \left(1 + \sqrt{5}, 1, \begin{bmatrix} \frac{1}{5} - \frac{8i}{5} + (\frac{7}{5} - \frac{i}{5} + (-\frac{2}{5} + \frac{i}{5})(1 + \sqrt{5})) \\ \frac{7}{5} - \frac{i}{5} + (\frac{7}{5} - \frac{i}{5} + (-\frac{2}{5} + \frac{i}{5})(1 + \sqrt{5})) \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

[20]: `λ_1= autova_autove[0][0]`
`λ_2= autova_autove[1][0]`
`λ_3= autova_autove[2][0]`
`λ_1, λ_2, λ_3`

[20]: $(4, 1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$

[21]: `L_1 = autova_autove[0][2][0]`
`L_2 = autova_autove[1][2][0]`
`L_3 = autova_autove[2][2][0]`
`L_1, L_2, L_3`

[21]:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 - i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{5} - \frac{8i}{5} + (-\frac{1}{5} + \frac{3i}{5})(1 - \sqrt{5}) \\ \frac{7}{5} + (-\frac{2}{5} + \frac{i}{5})(1 - \sqrt{5}) - \frac{i}{5} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{5} - \frac{8i}{5} + (-\frac{1}{5} + \frac{3i}{5})(1 + \sqrt{5}) \\ \frac{7}{5} - \frac{i}{5} + (-\frac{2}{5} + \frac{i}{5})(1 + \sqrt{5}) \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Los autovectores normalizados son:

[22]: `V1=L_1/sqrt(L_1.dot(L_1)).ratsimp()`
`V2=L_2/sqrt(L_2.dot(L_2)).ratsimp()`
`V3=L_3/sqrt(L_3.dot(L_3)).ratsimp()`
`V1, V2, V3`

[22]:

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2+2i}} \\ \frac{-1-i}{\sqrt{2+2i}} \\ \frac{1}{\sqrt{2+2i}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5 \cdot (\frac{1}{5} - \frac{8i}{5} + (-\frac{1}{5} + \frac{3i}{5})(1 - \sqrt{5}))}{\sqrt{-10\sqrt{5}-50i-20\sqrt{5}i}} \\ \frac{5 \cdot (\frac{7}{5} + (-\frac{2}{5} + \frac{i}{5})(1 - \sqrt{5}) - \frac{i}{5})}{\sqrt{-10\sqrt{5}-50i-20\sqrt{5}i}} \\ \frac{5}{\sqrt{-10\sqrt{5}-50i-20\sqrt{5}i}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5 \cdot (\frac{1}{5} - \frac{8i}{5} + (-\frac{1}{5} + \frac{3i}{5})(1 + \sqrt{5}))}{\sqrt{10\sqrt{5}-50i+20\sqrt{5}i}} \\ \frac{5 \cdot (\frac{7}{5} - \frac{i}{5} + (-\frac{2}{5} + \frac{i}{5})(1 + \sqrt{5}))}{\sqrt{10\sqrt{5}-50i+20\sqrt{5}i}} \\ \frac{5}{\sqrt{10\sqrt{5}-50i+20\sqrt{5}i}} \end{bmatrix} \right)$$

Estos vectores serán ortogonales, como podemos ver:

[23]: `V1.C.dot(V2).ratsimp(), V1.C.dot(V3).ratsimp(), V2.C.dot(V3).ratsimp()`

[23]: $(0, 0, 0)$

Ahora construimos la matriz C como hicimos anteriormente

[24]: `L_vec=[[V1,V2,V3]]`
`C = Matrix(L_vec)`

C

[24] :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2+2i}} & \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{8i}{5} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3i}{5}\right)(1-\sqrt{5})\right)}{\sqrt{-10\sqrt{5}-50i-20\sqrt{5}i}} & \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{8i}{5} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{3i}{5}\right)(1+\sqrt{5})\right)}{\sqrt{10\sqrt{5}-50i+20\sqrt{5}i}} \\ \frac{-1-i}{\sqrt{2+2i}} & \frac{5 \cdot \left(\frac{7}{5} - \frac{i}{5} + \left(-\frac{2}{5} + \frac{i}{5}\right)(1-\sqrt{5}) - \frac{i}{5}\right)}{\sqrt{-10\sqrt{5}-50i-20\sqrt{5}i}} & \frac{5 \cdot \left(\frac{7}{5} - \frac{i}{5} + \left(-\frac{2}{5} + \frac{i}{5}\right)(1+\sqrt{5})\right)}{\sqrt{10\sqrt{5}-50i+20\sqrt{5}i}} \\ \frac{1}{\sqrt{2+2i}} & \frac{5}{\sqrt{-10\sqrt{5}-50i-20\sqrt{5}i}} & \frac{5}{\sqrt{10\sqrt{5}-50i+20\sqrt{5}i}} \end{bmatrix}$$

Para finalmente poder calcular $C^{-1}AC$ y obtener:[25] : `simplify(C.inv()*A*C)`

[25] :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Como ya vimos se puede diagonalizar de manera directa

[26] : `P, D = A.diagonalize()`

[27] : P

[27] :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} - \frac{8i}{5} - \frac{(1-\sqrt{5})(1-3i)}{5} & \frac{1}{5} - \frac{8i}{5} - \frac{(1+\sqrt{5})(1-3i)}{5} \\ -1 - i & \frac{(2-i)(2+\sqrt{5}+i)}{5} & \frac{(2-i)(-\sqrt{5}+2+i)}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[28] : D

[28] :

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

4.6.6 Ejercicios

1. Encuentre los autovalores y autovectores de las matrices:

(a).

$$\mathbb{A} \Leftrightarrow A_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} \Leftrightarrow B_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

(b).

$$\mathbb{A} \Leftrightarrow A_j^i = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} \Leftrightarrow B_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2i \\ 1-i & 5 & -3 \\ -2i & -3 & 0 \end{pmatrix};$$

(c).

$$\mathbb{A} \Leftrightarrow A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} \Leftrightarrow B_j^i = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Además.

- (a). Para cada caso encuentre las matrices de transformación que las lleven a su representación diagonal.
- (b). Para la primera pareja de operadores lineales, muestre si es posible, encontrar una base de autovectores comunes que los diagonalice.
2. Demuestre que la matriz

$$\mathbb{C} \Rightarrow C_j^i = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix},$$

es igual a $\mathbb{C} = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3$. Donde las matrices σ_i son las matrices de Pauli. Encuentre los autovalores y autovectores de esta matriz.

3. Considere dos operadores genéricos que commutan: \mathbb{A} y \mathbb{B} tal que $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = 0$, definidos $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ cuya representaciones matriciales en la base canónica $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ son

$$\mathbb{A} \Leftrightarrow A_j^i = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{B} \Leftrightarrow B_j^i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -i\sqrt{2} & i \\ i\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ -i & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine si es posible encontrar una base común de autovectores. Para ello, repase la sección 4.6.5 e insírese en el ejercicio de la página 352 y siga los siguientes pasos

- (a). Resuelva el problema de autovalores $\mathbb{A}|u_i\rangle = \lambda_i|u_i\rangle$.
- (b). Si alguno de los autovalores λ_i es degenerado utilice el hecho que existe un segundo operador \mathbb{B} que commuta con \mathbb{A} y encuentre la representación matricial, diagonal a bloques, del operador \mathbb{B} en la base de autovectores $\{|u_i\rangle\}$.
- (c). Resuelva el problema de autovalores para el autoespacio degenerado. Esto es diagonalice el bloque 2×2 , para encontrar una base común de autovectores que diagonalice a ambos, \mathbb{A} y \mathbb{B} .
- (d). Identifique la base de los tres autovectores comunes y las tres parejas de autovalores de $\mathbb{A} \leftrightarrow \lambda_i$ y $\mathbb{B} \leftrightarrow \mu_i$ que etiquetan cada uno de esos autoestados.
4. Como lo vimos en la sección 3.4.2, las transformaciones de Lorentz se pueden escribir de manera matricial como

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\gamma v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\gamma v/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

con $\gamma = (\sqrt{1 - v^2/c^2})^{-1}$ ¿será ortogonal? ¿será unitaria? Encuentre sus autovalores y autovectores.

5. Dado un observable \mathbb{A} y un vector de estado $|\psi\rangle$ general, definiremos el valor esperado de \mathbb{A} a la cantidad $\langle \mathbb{A} \rangle = \langle \psi | \mathbb{A} | \psi \rangle$, y la relación de dispersión de \mathbb{A} como:

$$\langle (\Delta \mathbb{A})^2 \rangle = \langle (\mathbb{A} - \langle \mathbb{A} \rangle \mathbb{I})^2 \rangle = \langle \mathbb{A}^2 \rangle - \langle \mathbb{A} \rangle^2 \equiv \langle \psi | \mathbb{A}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \mathbb{A} | \psi \rangle^2,$$

donde \mathbb{I} es el operador identidad. Nótese que el valor esperado es un número que representa la dispersión de un observable y tiene la misma estructura e interpretación de la varianza en estadística.

- (a). Muestre que la dispersión siempre es positiva, i.e $\langle (\Delta \mathbb{A})^2 \rangle \geq 0$. Para ello:

I. Inicie mostrando que para cualquier operador hermítico \mathbb{C} se cumple $\langle \mathbb{C}^2 \rangle \geq 0$.

II. Termine mostrando que $\mathbb{A} - \langle \mathbb{A} \rangle \mathbb{I}$ es un operador hermítico.

- (b). Muestre que la dispersión se anula para el caso en que $|\psi\rangle$ es autovector de \mathbb{A} con autovalor $\langle \mathbb{A} \rangle$.
- (c). Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz muestre que las relaciones de dispersión entre dos observables \mathbb{A} y \mathbb{B} siempre cumplen con:

$$\langle (\Delta \mathbb{A})^2 \rangle \langle (\Delta \mathbb{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [\mathbb{A}, \mathbb{B}] \rangle|^2 \quad \text{con} \quad [\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A}.$$

Esta es la forma general de la relación de incertidumbre.¹⁸

- (d). En Mecánica Cuántica se define el operador de spin como $\mathbb{S}_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$, donde las σ_i son las matrices de Pauli y los valores de $i = 1, 2, 3$ representan las direcciones x, y, z , respectivamente.

- I. Encuentre la expresión para el comutador: $[\mathbb{S}_i, \mathbb{S}_j]$, con $i, j = 1, 2, 3$.
- II. Considere un vector de estado general $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$, donde a y b son números complejos que cumplen con: $a^2 + b^2 = 1$ y $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ la base de autovectores de \mathbb{S}_z . Muestre que:

$$\langle (\Delta \mathbb{S}_z)^2 \rangle \langle (\Delta \mathbb{S}_x)^2 \rangle \geq \hbar^4 [\text{Im}(ab^*)]^2,$$

con $\text{Im}(\circ)$ la parte imaginaria del argumento.

6. Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & q & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2q & 2^2 & q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 4(2^2) & q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4(N-3)^2 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 4(N-2)^2 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 4(N-1)^2 \end{pmatrix},$$

encuentre los autovalores y autovectores cuando $q = 1$ y $N = 10$.

¹⁸Para detalles de las implicaciones de este problema se puede consultar Dumitru, S. (2005) "On the uncertainty relations and quantum measurements: conventionalities, short comings, reconsideration". arXiv preprint quant-ph/0504058 . Y también Dumitru, S. (2006) "A possible general approach regarding the conformability of angular observables with mathematical rules of Quantum Mechanics". arXiv preprint quant-ph/0602147 .

Bibliografía

- [1] Arfken, G. B., Weber, H., y Weber, H.J. (2000) *Mathematical Methods for Physicists* 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)
- [2] Borisenko, A.I, y Tarapov I.E. (1968) *Vector and Tensor Analisys* (Dover Publications Inc, Nueva York)
- [3] Cushing, J. T. (1975). *Applied analytical mathematics for physical scientists.* (John Wiley & Sons, New York).
- [4] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. y Laloë, F., (1977) *Quantum Mechanics vol 1* iHermann, Paris.
- [5] Dennery, P. y Krzywicki, A. (1995) *Mathematics for Physicists* (Dover Publications Inc, Nueva York)
- [6] Harper, C. (1971) *Introduction to Mathematical Physics* (Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J:)
- [7] Hassani, S. (1991) *Foundations of Mathematical Physics* (Prentice Hall, International Edition, London:
- [8] Jordan, T. F. (1997). *Linear operators for quantum mechanics,* (Dover Publications Inc, Nueva York).
- [9] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) *Mathematical Methods for Physics and Engineering* (Cambridge University Press, Londres)
- [10] Roman, P. (1975). *Some modern mathematics for physicists and other outsiders: an introduction to algebra, topology, and functional analysis. Vol 2.* (Pergamon Press, Nueva York).
<https://doi.org/10.1016/C2013-0-05671-X>.
- [11] Schutz, B. (1980) *Geometrical Methods in Mathematical Physics* (Cambridge University Press, Londres)
- [12] Svozil, K. (2020) *Mathematical methods of theoretical physics*, (World Scientific, Singapore) y también Arxiv <https://arxiv.org/abs/1203.4558>.
- [13] Tsukada, M., Kobayashi, Y. Kaneko, H., Takahasi, S.E. Shirayanagi, S-E., Noguchi, M. (2023) *Linear Algebra with Python, Theory and Applications* Springer Undergrad. Texts Math. Technol.
<https://doi.org/10.1007/978-981-99-2951-1>.