

Campos y análisis vectorial

La ruta de este capítulo

Comenzaremos este capítulo señalando el hecho de que al derivar cantidades vectoriales, por ejemplo con respecto al tiempo, es necesario considerar que esta dependencia temporal puede estar indicada no solamente en las componentes del vector sino en los vectores base en el cual se representa. Extenderemos esta idea para estudiar la representación de curvas expresadas de manera paramétrica. En la sección 5.1 introduciremos las coordenadas curvilíneas generalizadas, resaltando la utilidad que particularmente tienen las coordenadas curvilíneas ortogonales. En la sección 5.1.6 construiremos las expresiones de vectores y tensores a partir de sus leyes de transformación para luego introducir los conceptos de campos tensoriales, sección 5.1.7, y los diferentes operadores vectoriales en coordenadas generalizadas, sección 5.2. En las secciones 5.3 - 5.4 desarrollaremos un estudio sobre la integración de campos vectoriales y los principales teoremas integrales que permiten relacionar las variaciones de un campo vectorial con las fuentes que lo producen. En el siguiente enlace se encuentran los códigos SymPy <https://github.com/nunezluis/CodigosLibroMatematicas/tree/main/Capitulo05>.

5.1 Coordenadas curvilíneas generalizadas y campos tensoriales

Tal y como discutimos en la sección 3.2.8, siempre es posible definir un sistema de coordenadas generalizadas (q^1, q^2, q^3) tales que

$$q^{i'} = q^{i'}(q^j) \Leftrightarrow q^i = q^i(q^{j'}), \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3.$$

Donde, no hemos hecho otra cosa que re-escribir la ecuación (3.9), para el caso tridimensional y con una notación más cercana al análisis vectorial que nos compete en este capítulo.

Entonces, nuestro vector posición en la base canónica o, equivalentemente en coordenadas cartesianas¹, se puede escribir como

$$|r\rangle \equiv \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3) = x(q^1, q^2, q^3) |e_x\rangle + y(q^1, q^2, q^3) |e_y\rangle + z(q^1, q^2, q^3) |e_z\rangle \quad (5.1)$$

y el vector desplazamiento infinitesimal, no es otra cosa que el diferencial total del vector \mathbf{r} , vale decir:

$$d\mathbf{r} \equiv |dr\rangle = \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} dq^3. \quad (5.2)$$

¹Nótese que estamos representando la base cartesiana como $|e_x\rangle = \hat{\mathbf{i}}$, $|e_y\rangle = \hat{\mathbf{j}}$ y $|e_z\rangle = \hat{\mathbf{k}}$.

Como presentamos en la sección 3.2.7, para una base genérica, $\{|u_i\rangle\}$, el desplazamiento infinitesimal puede expresarse como: (3.8), como

$$ds^2 \equiv \langle dr | dr \rangle = \left(\frac{\partial \langle r |}{\partial q_j} dq^j \right) \cdot \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial q^i} dq^i \right) = g_{ij} dq^i dq^j, \quad (5.3)$$

donde:

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \langle r |}{\partial q^j} \right) \cdot \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial q^i} \right), \quad h_j = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \right\|, \quad |e_j\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \quad \text{y} \quad \langle e^j | = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q_j} \right\|} \frac{\partial \langle r |}{\partial q_j},$$

con: $i, j = 1, 2, 3..$

Es importante hacer notar el papel fundamental que juega expresar el vector posición en coordenadas cartesianas (ecuación (5.1)), para luego generar el vector desplazamiento diferencial (5.2) en función de las coordenadas generalizadas y, finalmente, determinar los factores de escala, la métrica y los vectores base asociados al nuevo sistema de coordenadas (ecuaciones (5.3)).

Más adelante, en la sección 5.1.5, mostraremos un método para construir sistemas de coordenadas sin necesidad de la intermediación de las coordenadas cartesianas. Construiremos los sistemas de coordenadas adaptados a las curvas parametrizadas con alguna cantidad.

Hay que señalar que, tal y como lo hicimos en la ecuación (3.7), aquí hemos denotado la base generalizada para vectores como $\left\{ \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^j} \right\}$, mientras $\left\{ \frac{\partial \langle r |}{\partial q^i} \right\}$ será la base para los covectores o 1-formas asociados a los vectores antes mencionados. Al final, en la sección 5.1.6 analizaremos con detalle las 1-formas y los tensores en coordenadas curvilíneas.

Para fijar ideas y porque lo utilizaremos en los casos particulares de las próximas secciones, escribiremos explícitamente, tal y como lo discutimos en la sección 3.2.7: los vectores base, los factores de escala y la métrica de un sistema generalizado de coordenadas ortogonales de la siguiente forma:

- la tríada de vectores base $\{|e_j\rangle\}$ ortonormales:

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1}; \quad |e_2\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2}; \quad \text{y} \quad |e_3\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3};$$

que corresponden a los vectores tangentes a las curvas que definen al radio vector $|r\rangle$, como veremos con detalles en la sección 5.1.5.

- la tríada de 1-formas base $\{\langle e^j | \}$ ortonormales:

$$\langle e^1 | = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q_1} \right\|} \frac{\partial \langle r |}{\partial q_1}; \quad \langle e^2 | = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q_2} \right\|} \frac{\partial \langle r |}{\partial q_2}; \quad \text{y} \quad \langle e^3 | = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q_3} \right\|} \frac{\partial \langle r |}{\partial q_3};$$

- los factores de escala:

$$h_1 = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^1} \right\|; \quad h_2 = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^2} \right\|; \quad \text{y} \quad h_3 = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial q^3} \right\|;$$

- el elemento de línea (3.8) en términos de las coordenadas generalizadas como

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j = (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2;$$

donde, como en 3.5, hemos identificado los factores de escala con las componentes del tensor métrico como: $h_1 = \sqrt{g_{11}}$, $h_2 = \sqrt{g_{22}}$ y $h_3 = \sqrt{g_{33}}$.

En la figura 5.1 hemos representado algunos de los sistemas coordenados y su relación con las expresiones que generan las transformaciones de coordenadas, que discutimos con detalle en la sección 3.2.8, y en las secciones que siguen haremos explícitos algunos casos particulares.

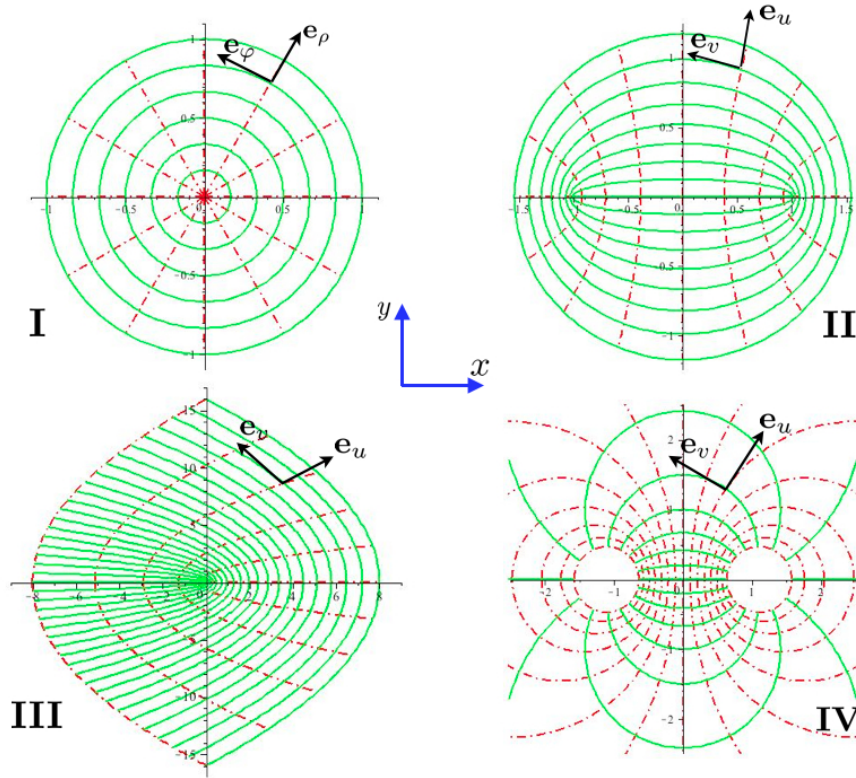


Figura 5.1: Algunas coordenadas curvilíneas en 2D. Podemos apreciar algunos ejemplos de sistemas de coordenadas: en el cuadrante I coordenadas polares: $x = \rho \cos(\varphi)$; $y = \rho \sin(\varphi)$. En el cuadrante II coordenadas elípticas: $x = a \cosh(u) \cos(v)$; $y = a \sinh(u) \sin(v)$. En III coordenadas parabólicas: $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$; $y = uv$ y en el cuadrante IV coordenadas bipolares: $x^2 + [y - a \cot(u)]^2 = a^2 \csc^2(u)$; $\left[x - a \frac{\sinh(v)}{\cosh(v)}\right]^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2(v)}$.

5.1.1 Coordenadas cartesianas

El primer caso particular lo constituyen las coordenadas cartesianas, $(q^1, q^2, q^3) \iff (x, y, z)$, y el vector posición lo construimos a partir de la ecuación (5.1) como:

$$|r\rangle = x |e_x\rangle + y |e_y\rangle + z |e_z\rangle \iff \mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}},$$

mientras que el vector desplazamiento diferencial también será inmediato a partir de (5.2)

$$d\mathbf{r} \Rightarrow |dr\rangle = \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial z}\right) dz = dx |e_x\rangle + dy |e_y\rangle + dz |e_z\rangle,$$

y, consecuentemente, los factores de escala quedan definidos como

$$h_1 = h_x = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial x} \right\| = 1, \quad h_2 = h_y = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial y} \right\| = 1, \quad h_3 = h_z = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial z} \right\| = 1,$$

mientras que la trípada ortonormal es

$$|e_x\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial x} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial x}, \quad |e_y\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial y} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial y}, \quad |e_z\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial z} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial z}.$$

Finalmente, el elemento de línea viene definido a partir de (5.3) como

$$(ds)^2 = (h_1 dx)^2 + (h_2 dy)^2 + (h_3 dz)^2 \iff ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

y el tensor métrico será $g_{11} = g_{xx} = 1$; $g_{22} = g_{yy} = 1$; y $g_{33} = g_{zz} = 1$.

5.1.2 Coordenadas cilíndricas

El segundo caso en complejidad son las coordenadas cilíndricas, $(q^1, q^2, q^3) \iff (\rho, \varphi, z)$. Este caso ya lo consideramos en el ejemplo 3.15 de transformación de coordenadas. Sus vectores base y su métrica se construyen a partir de las ecuaciones (5.1), (5.2) y (5.3) expresándolas como función de las nuevas coordenadas. Esto es

$$|r\rangle = x(\rho, \varphi) |e_x\rangle + y(\rho, \varphi) |e_y\rangle + z |e_z\rangle \iff \mathbf{r} = x(\rho, \varphi)\hat{\mathbf{i}} + y(\rho, \varphi)\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}},$$

con: $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ y $-\infty < z < \infty$.

Las componentes de x, y, z del vector posición expresada en las nuevas coordenadas pueden ser identificadas a partir de las leyes de transformación respecto a las coordenadas cartesianas:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\rho, \varphi) = \rho \cos(\varphi) \\ y &= y(\rho, \varphi) = \rho \sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} dx &= \cos(\varphi)d\rho - \rho \sin(\varphi)d\varphi, \\ dy &= \sin(\varphi)d\rho + \rho \cos(\varphi)d\varphi, \\ dz &= dz. \end{aligned}$$

Por lo que el vector posición en estas coordenadas es: $|r\rangle = \rho \cos(\varphi) |e_x\rangle + \rho \sin(\varphi) |e_y\rangle + z |e_z\rangle$, donde es fácil identificar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} x(\rho, \varphi) &= \cos(\varphi), & \frac{\partial}{\partial \rho} y(\rho, \varphi) &= \sin(\varphi), & \frac{\partial}{\partial \rho} z &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} x(\rho, \varphi) &= -\rho \sin(\varphi), & \frac{\partial}{\partial \varphi} y(\rho, \varphi) &= \rho \cos(\varphi), & \frac{\partial}{\partial \varphi} z &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} x(\rho, \varphi) &= 0, & \frac{\partial}{\partial z} y(\rho, \varphi) &= 0, & \frac{\partial}{\partial z} z &= 1, \end{aligned}$$

y de allí calcular los respectivos factores de escala:

$$\begin{aligned} h_\rho &= \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \rho} \right\| = \left\| \frac{\partial [x(\rho, \varphi) |e_x\rangle + y(\rho, \varphi) |e_y\rangle + z |e_z\rangle]}{\partial \rho} \right\| = \left\| \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \rho} |e_x\rangle + \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \rho} |e_y\rangle \right\|, \\ &= \|\cos(\varphi) |e_x\rangle + \sin(\varphi) |e_y\rangle\| = 1. \end{aligned}$$

Del mismo modo

$$h_\varphi = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} \right\| = \rho; \quad h_z = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial z} \right\| = 1.$$

Mientras que los vectores unitarios serán

$$|e_\rho\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \rho} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial \rho} = \frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \rho} |e_x\rangle + \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \rho} |e_y\rangle = \cos(\varphi) |e_x\rangle + \sin(\varphi) |e_y\rangle,$$

$$|e_\varphi\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial x(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} |e_x\rangle + \frac{\partial y(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} |e_y\rangle \right) = -\sin(\varphi) |e_x\rangle + \cos(\varphi) |e_y\rangle,$$

$$|e_z\rangle = \frac{1}{\left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial z} \right\|} \frac{\partial |r\rangle}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z} |e_z\rangle = |e_z\rangle.$$

Claramente, el sistema de coordenadas, para el caso 2D ($z = 0$) se reduce al sistema de coordenadas polares que ilustramos en el cuadrante I de la figura 5.1.

El caso 3D lo ilustramos en la figura 5.2, izquierda y puede apreciarse que el vector unitario $|e_\rho\rangle$ es un vector normal a las superficies cilíndricas y apunta en la dirección donde crece el radio ρ . El vector unitario $|e_\varphi\rangle$ es tangente a las superficies cilíndricas, perpendicular a los planos $\varphi = \text{constante}$ y apunta

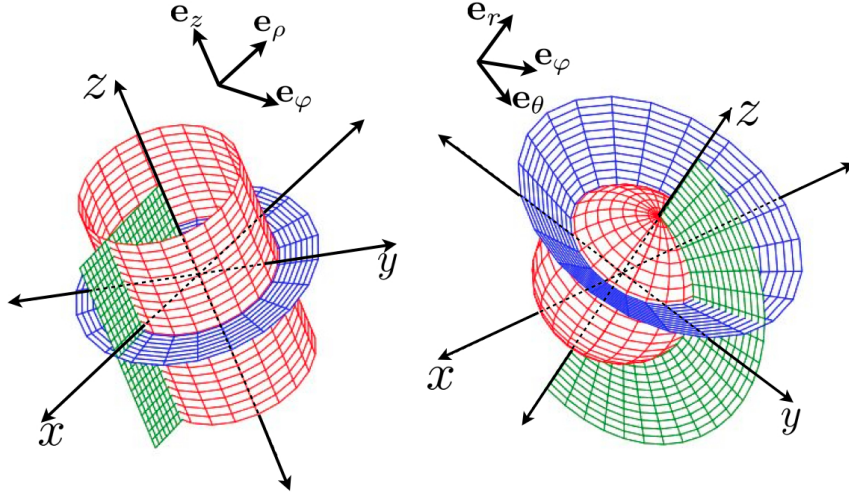


Figura 5.2: Coordenadas cilíndricas y esféricas. Para el caso de las coordenadas cilíndricas (figura izquierda), el vector unitario $|e_\rho\rangle$ es un vector normal a las superficies cilíndricas y apunta en la dirección donde crece el radio ρ . El vector unitario $|e_\varphi\rangle$ es tangente a las superficies cilíndricas, perpendicular a los planos $\varphi = \text{constante}$ y apunta en la dirección donde aumenta el ángulo azimutal φ . El vector $|e_z\rangle$ es el mismo vector cartesiano $\hat{\mathbf{k}}$.

en la dirección donde aumenta el ángulo azimutal φ . El vector $|e_z\rangle$ es el mismo vector cartesiano $\hat{\mathbf{k}}$.

La expresión para el vector desplazamiento infinitesimal será

$$d|r\rangle = \frac{\partial |r\rangle}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial |r\rangle}{\partial z} dz = d\rho |e_\rho\rangle + \rho d\varphi |e_\varphi\rangle + dz |e_z\rangle.$$

Notemos que en este caso, y a diferencia de las coordenadas cartesianas, si φ varía en una cantidad $d\varphi$, con ρ y z constantes, entonces el desplazamiento no será $d\varphi$ sino $\rho d\varphi$.

El elemento de línea viene definido como

$$ds^2 = (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2 \iff ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

y el tensor métrico:

$$g_{11} = g_{\rho\rho} = 1; \quad g_{22} = g_{\varphi\varphi} = \rho^2; \quad g_{33} = g_{zz} = 1.$$

5.1.3 Coordenadas esféricas

Para construir el sistema de coordenadas esféricas tenemos:

$$(q^1, q^2, q^3) \iff (r, \theta, \varphi),$$

$$|r\rangle = x(r, \theta, \varphi) |\hat{\mathbf{i}}\rangle + y(r, \theta, \varphi) |\hat{\mathbf{j}}\rangle + z(r, \theta, \varphi) |\hat{\mathbf{k}}\rangle \iff \mathbf{r} = x(r, \theta, \varphi) \hat{\mathbf{i}} + y(r, \theta, \varphi) \hat{\mathbf{j}} + z(r, \theta, \varphi) \hat{\mathbf{k}}.$$

Con: $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$. A la coordenada r se le denomina la coordenada radial, a θ la coordenada polar y a φ la coordenada azimutal.

Tendremos entonces:

$$d\mathbf{r} \Rightarrow |dr\rangle = \frac{\partial |r\rangle}{\partial r} dr + \frac{\partial |r\rangle}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Estas cantidades pueden ser identificadas de las leyes de transformación respecto a las coordenadas

cartesianas

$$\left. \begin{aligned} x &= x(r, \theta, \varphi) = r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ y &= y(r, \theta, \varphi) = r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z &= z(r, \theta, \varphi) = r \cos(\theta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} dx &= \cos(\varphi) \sin(\theta) dr - r \sin(\varphi) \sin(\theta) d\varphi + r \cos(\varphi) \cos(\theta) d\theta, \\ dy &= \sin(\varphi) \sin(\theta) dr + r \cos(\varphi) \sin(\theta) d\varphi + r \sin(\varphi) \cos(\theta) d\theta, \\ dz &= \cos(\theta) dr - r \sin(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

El vector posición es de la forma

$$|r\rangle = r \sin(\theta) \cos(\varphi) |e_x\rangle + r \sin(\theta) \sin(\varphi) |e_y\rangle + r \cos(\theta) |e_z\rangle.$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(r, \theta, \varphi)}{\partial r} &= \cos(\varphi) \sin(\theta), & \frac{\partial y(r, \theta, \varphi)}{\partial r} &= \sin(\varphi) \sin(\theta), & \frac{\partial z(r, \theta, \varphi)}{\partial r} &= \cos(\theta), \\ \frac{\partial x(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} &= r \cos(\varphi) \cos(\theta), & \frac{\partial y(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} &= r \sin(\varphi) \cos(\theta), & \frac{\partial z(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} &= -r \sin(\theta), \\ \frac{\partial x(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} &= -r \sin(\varphi) \sin(\theta), & \frac{\partial y(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} &= r \cos(\varphi) \sin(\theta), & \frac{\partial z(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Los factores de escala son los siguientes:

$$\begin{aligned} h_r &= \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial r} \right\| = \|\cos(\varphi) \sin(\theta) |e_x\rangle + \sin(\varphi) \sin(\theta) |e_y\rangle + \cos(\theta) |e_z\rangle\|, \\ &= \sqrt{\cos^2(\varphi) \sin^2(\theta) + \sin^2(\varphi) \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)} = 1, \\ h_\theta &= \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \theta} \right\| = \|r \cos(\varphi) \cos(\theta) |e_x\rangle + r \sin(\varphi) \cos(\theta) |e_y\rangle - r \sin(\theta) |e_z\rangle\|, \\ &= \sqrt{(r \cos(\varphi) \cos(\theta))^2 + (r \sin(\varphi) \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} = r, \\ h_\varphi &= \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} \right\| = \|-r \sin(\varphi) \sin(\theta) |e_x\rangle + r \cos(\varphi) \sin(\theta) |e_y\rangle\|, \\ &= \sqrt{(r \sin(\varphi) \sin(\theta))^2 + (r \cos(\varphi) \sin(\theta))^2} = r \sin(\theta). \end{aligned}$$

Mientras que para los vectores unitarios tenemos

$$\begin{aligned} |e_r\rangle &= \frac{1}{h_r} \frac{\partial |r\rangle}{\partial r} = \cos(\varphi) \sin(\theta) |e_x\rangle + \sin(\varphi) \sin(\theta) |e_y\rangle + \cos(\theta) |e_z\rangle, \\ |e_\theta\rangle &= \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial |r\rangle}{\partial \theta} = \cos(\varphi) \cos(\theta) |e_x\rangle + \sin(\varphi) \cos(\theta) |e_y\rangle - \sin(\theta) |e_z\rangle, \\ |e_\varphi\rangle &= \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} = -\sin(\varphi) |e_x\rangle + \cos(\varphi) |e_y\rangle. \end{aligned}$$

El desplazamiento infinitesimal en estas coordenadas es de la forma

$$d|r\rangle = \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial \theta} \right) d\theta + \left(\frac{\partial |r\rangle}{\partial \varphi} \right) d\varphi = dr |e_r\rangle + r d\theta |e_\theta\rangle + r \sin(\theta) d\varphi |e_\varphi\rangle.$$

Por lo tanto, para el elemento de línea tenemos

$$(ds)^2 = (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2 \iff ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2.$$

Y para el tensor métrico

$$g_{11} = g_{rr} = 1; \quad g_{22} = g_{\theta\theta} = r^2; \quad g_{33} = g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2(\theta).$$

5.1.4 Otros sistemas coordenados

Por completitud, enumeraremos algunos otros sistemas de coordenadas y dejaremos al lector la labor de calcular los vectores unitarios y la métrica del espacio expresada en esas coordenadas.

• Coordenadas toroidales

$$(q^1, q^2, q^3) \Longleftrightarrow (\sigma, \tau, \phi)$$

$$|r\rangle = x(\sigma, \tau, \phi) |e_x\rangle + y(\sigma, \tau, \phi) |e_y\rangle + z(\sigma, \tau, \phi) |e_z\rangle \Longleftrightarrow \mathbf{r} = x(\sigma, \tau, \phi) \hat{\mathbf{i}} + y(\sigma, \tau, \phi) \hat{\mathbf{j}} + z(\sigma, \tau, \phi) \hat{\mathbf{k}}.$$

Con $0 \leq \sigma < 2\pi$, $0 \leq \tau < \infty$ y $0 \leq \phi < 2\pi$.

La transformación de coordenadas está definida de la siguiente forma (con a constante)

$$x = a \frac{\sinh(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)} \cos(\phi), \quad y = a \frac{\sinh(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)} \sin(\phi), \quad z = a \frac{\sin(\sigma)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)}.$$

Las superficies τ constante representan toros alrededor del eje z ; las superficies σ constante son esferas con centro sobre el eje z y finalmente las superficies ϕ constante son planos que contienen al eje z .

La métrica en estas coordenadas es:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (h_1 dq^1)^2 + (h_2 dq^2)^2 + (h_3 dq^3)^2, \\ &= \left(\frac{a}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)} \right)^2 d\sigma^2 + \left(\frac{a}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)} \right)^2 d\tau^2 + \left(\frac{a \sinh(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)} \right)^2 d\phi^2. \end{aligned}$$

• Coordenadas elipsoidales

Dados tres números a, b y c , con $a > b > c > 0$, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2 + \alpha} + \frac{y^2}{b^2 + \alpha} + \frac{z^2}{c^2 + \alpha} = 1,$$

representa las superficies cuádricas² homofocales (con el mismo foco u origen en $(x = 0, y = 0, z = 0)$).

Dependiendo del valor del parámetro α , estas ecuaciones representarán superficies

Elipsoides	si	$\alpha > -c^2$
Hiperboloides de una hoja	si	$-c^2 > \alpha > -b^2$
Hiperboloides de dos hojas	si	$-b^2 > \alpha > -c^2$

Esto quiere decir que por cada punto (x, y, z) del espacio, pasan tres superficies cuádricas (dependiendo del valor de α). Conocidos a, b y c y el punto, $(x = x_0, y = y_0, z = z_0)$, los valores de α vienen dados por las raíces de la ecuación cúbica

$$\frac{x^2}{a^2 + \alpha} + \frac{y^2}{b^2 + \alpha} + \frac{z^2}{c^2 + \alpha} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^3 + \Delta \alpha^2 + \Phi \alpha + \Omega = 0,$$

con

$$\begin{aligned} \Delta &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - a^2 - b^2 - c^2, \\ \Phi &= (b^2 + c^2) x_0^2 + (a^2 + c^2) y_0^2 + (a^2 + b^2) z_0^2 - a^2 b^2 - (a^2 + b^2) c^2, \\ \Omega &= x_0^2 b^2 c^2 + y_0^2 a^2 c^2 + z_0^2 a^2 b^2 - a^2 b^2 c^2. \end{aligned}$$

Las raíces de esta ecuación ($\alpha_1 = \lambda$; $\alpha_2 = \mu$; $\alpha_3 = \nu$) definen las coordenadas elipsoidales del punto $(x, y, z) = (x(\lambda, \mu, \nu), y(\lambda, \mu, \nu), z(\lambda, \mu, \nu))$.

Tenemos entonces:

$$(q^1, q^2, q^3) \Longleftrightarrow (\lambda, \mu, \nu),$$

²Nótese que la proyección de estas superficies en el plano xy representan curvas cónicas homofocales.

$$|r\rangle = x(\lambda, \mu, \nu) |e_x\rangle + y(\lambda, \mu, \nu) |e_y\rangle + z(\lambda, \mu, \nu) |e_z\rangle \leftrightarrow \mathbf{r} = x(\lambda, \mu, \nu) \hat{\mathbf{i}} + y(\lambda, \mu, \nu) \hat{\mathbf{j}} + z(\lambda, \mu, \nu) \hat{\mathbf{k}}.$$

Y la ley de transformación:

$$x = \sqrt{\frac{[a^2 + \lambda][a^2 + \mu][a^2 + \nu]}{[a^2 - b^2][a^2 - c^2]}}, y = \sqrt{\frac{[b^2 + \lambda][b^2 + \mu][b^2 + \nu]}{[b^2 - a^2][b^2 - c^2]}}, z = \sqrt{\frac{[c^2 + \lambda][c^2 + \mu][c^2 + \nu]}{[c^2 - b^2][c^2 - a^2]}},$$

por lo cual la métrica será

$$ds^2 = \frac{[\lambda - \mu][\lambda - \nu] d\lambda^2}{4[a^2 + \lambda][b^2 + \lambda][c^2 + \lambda]} + \frac{[\mu - \lambda][\mu - \nu] d\mu^2}{4[a^2 + \mu][b^2 + \mu][c^2 + \mu]} + \frac{[\nu - \mu][\nu - \lambda] d\nu^2}{4[a^2 + \nu][b^2 + \nu][c^2 + \nu]}.$$

Cerramos esta sección con cuatro ejemplos que cubren varias aplicaciones de los sistemas coordenados. Calculamos la velocidad en un sistema curvilíneo y exploramos las consecuencias de las transformaciones de coordenadas.

Ejemplo 5.1 Velocidades y aceleraciones. Para fijar conceptos repasaremos los cálculos de las expresiones de las velocidades y las aceleraciones, que expusimos en la sección 1.5.3, solo que ahora los desarrollaremos en coordenadas generalizadas. Para ello recordamos que los vectores velocidad y aceleración se representan como

$$|v\rangle = v^j |e_j\rangle = \dot{x}^j |e_j\rangle = v^{j'} |e_{j'}\rangle = \dot{x}^{j'} |e_{j'}\rangle \quad \text{y} \quad |a\rangle = a^j |e_j\rangle = \ddot{x}^j |e_j\rangle = a^{j'} |e_{j'}\rangle = \ddot{x}^{j'} |e_{j'}\rangle,$$

respectivamente.

Para determinar estos vectores en cualquier sistema de coordenadas, es suficiente con encontrar las expresiones de sus componentes covariantes o contravariantes. Como sabemos, podremos encontrar una a partir de las otras con la ayuda de la métrica del sistema de coordenadas.

Entonces, el vector velocidad en la base cartesiana se puede expresar como

$$|v\rangle = v_x |e_x\rangle + v_y |e_y\rangle + v_z |e_z\rangle = \dot{x} |e_x\rangle + \dot{y} |e_y\rangle + \dot{z} |e_z\rangle = \dot{x}^j |e_j\rangle,$$

con: $|e_1\rangle = |e_x\rangle, |e_2\rangle = |e_y\rangle$ y $|e_3\rangle = |e_z\rangle$.

Claramente las componentes contravariantes del vector velocidad en un sistema generalizado de coordenadas son $v^j = \dot{q}^j$.

Recordamos que para cualquier base generalizada de vectores o formas las componentes covariantes se expresan en término de la base cartesiana (de vectores o formas) como

$$|e_{j'}\rangle = \frac{\partial x^i}{\partial q^{j'}} |e_i\rangle \quad \text{y} \quad \langle e^{i'}| = \frac{\partial q^{i'}}{\partial x^j} \langle e^j|.$$

Entonces, las componentes covariantes del vector velocidad en una base generalizada serán

$$v_{j'} = \langle v | e_{j'} \rangle = \left(\dot{x}_{m'} \langle e^{m'} | \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^{j'}} |e_i\rangle \right) = \dot{x}_{m'} \frac{\partial x^{m'}}{\partial q^{j'}} = \dot{x}_{m'} \frac{\frac{\partial x^{m'}}{\partial t}}{\frac{\partial q^{j'}}{\partial t}} = \dot{x}_{m'} \frac{\partial \dot{x}^{m'}}{\partial \dot{q}^{j'}} = \frac{\partial \left(\frac{v_{m'} v^{m'}}{2} \right)}{\partial \dot{q}^{j'}}.$$

Resulta fácil expresar las componentes covariantes una vez que conocemos el módulo del vector expresado en ese sistema de coordenadas, el cual siempre viene escrito a partir del diferencial

$$d|r\rangle \Rightarrow \frac{d|r\rangle}{dt}.$$

Para encontrar la expresión para la aceleración se procede de manera análoga.

$$a_{j'} = \langle a | e_{j'} \rangle = \left(\ddot{x}_{m'} \langle e^{m'} | \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^{j'}} |e_i\rangle \right) = \ddot{x}_{m'} \frac{\partial x^{m'}}{\partial q^{j'}} \equiv \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_{m'} \frac{\partial x^{m'}}{\partial q^{j'}} \right) - \dot{x}_{m'} \frac{\partial \dot{x}^{m'}}{\partial q^{j'}},$$

y otra vez

$$\frac{\partial x^{m'}}{\partial q^{j'}} = \frac{\partial \dot{x}^{m'}}{\partial \dot{q}^{j'}} \Rightarrow a_{j'} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}^{m'} \frac{\partial \dot{x}^{m'}}{\partial \dot{q}^{j'}} \right) - \dot{x}^{m'} \frac{\partial \dot{x}^{m'}}{\partial q^{j'}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^{j'}} \left(\frac{\dot{x}^{m'} \dot{x}^{m'}}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q^{j'}} \left(\frac{\dot{x}^{m'} \dot{x}^{m'}}{2} \right),$$

para finalmente

$$a_{j'} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^{j'}} \left(\frac{v_{m'} v^{m'}}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q^{j'}} \left(\frac{v_{m'} v^{m'}}{2} \right).$$

Ejemplo 5.2 Calculemos las componentes cartesianas del vector que, en coordenadas cilíndricas, tiene las siguientes componentes: $(1, \pi/3, 3)$.

Ese vector en coordenadas cilíndricas se puede escribir como: $\mathbf{v} = |e_r\rangle + \frac{\pi}{3} |e_\varphi\rangle + 3 |e_z\rangle$. En general, las componentes de los vectores transforman como

$$a^{i'} = \frac{\partial \tilde{x}^{i'}(x^m)}{\partial x^k} a^k \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^{1'} = \frac{\partial x^{1'}(x^m)}{\partial x^k} a^k \\ a^{2'} = \frac{\partial x^{2'}(x^m)}{\partial x^k} a^k \\ a^{3'} = \frac{\partial x^{3'}(x^m)}{\partial x^k} a^k \end{array} \right\} \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} x^{1'} = x \\ x^{2'} = y \\ x^{3'} = z \end{array} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} x^1 = r \\ x^2 = \varphi \\ x^3 = z \end{array} \right\}$$

y la ley de transformación entre coordenadas cartesianas y coordenadas cilíndricas es

$$x = x(r, \varphi) = r \cos(\varphi); \quad y = y(r, \varphi) = r \sin(\varphi) \quad \text{y} \quad z = z,$$

con lo cual es fácil identificar

$$\frac{\partial x(r, \varphi)}{\partial r} = \cos(\varphi), \quad \frac{\partial x(r, \varphi)}{\partial \varphi} = -r \sin(\varphi), \quad \frac{\partial x(r, \varphi)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y(r, \varphi)}{\partial r} = \sin(\varphi), \quad \frac{\partial y(r, \varphi)}{\partial \varphi} = r \cos(\varphi), \quad \frac{\partial y(r, \varphi)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

Por lo tanto

$$a^{1'} = \frac{\partial x^{1'}(x^m)}{\partial x^k} a^k = \frac{\partial \tilde{x}^{1'}(x^m)}{\partial x^1} a^1 + \frac{\partial x^{1'}(x^m)}{\partial x^2} a^2 + \frac{\partial x^{1'}(x^m)}{\partial x^3} a^3,$$

$$a^{1'} = \frac{\partial x(r, \varphi)}{\partial r} (1) + \frac{\partial x(r, \varphi)}{\partial \varphi} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \cos(\varphi) - r \sin(\varphi) \left(\frac{\pi}{3} \right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - (1) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(\frac{\pi}{3} \right),$$

$$a^{1'} = \frac{\sqrt{3} - \pi}{2\sqrt{3}},$$

del mismo modo

$$a^{2'} = \frac{\partial y(r, \varphi)}{\partial r} (1) + \frac{\partial y(r, \varphi)}{\partial \varphi} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \sin(\varphi) + r \cos(\varphi) \left(\frac{\pi}{3} \right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + (1) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$a^{2'} = \frac{\sqrt{27} + \pi}{6},$$

$$a^{3'} = 3.$$

Con lo cual

$$\mathbf{v} = |e_r\rangle + \frac{\pi}{3} |e_\varphi\rangle + 3 |e_z\rangle = \frac{\sqrt{3} - \pi}{2\sqrt{3}} |\hat{\mathbf{i}}\rangle + \frac{\sqrt{27} + \pi}{6} |\hat{\mathbf{j}}\rangle + 3 |\hat{\mathbf{k}}\rangle.$$

Ejemplo 5.3 Dado el siguiente vector en coordenadas cilíndricas $\mathbf{a} = -2|\mathbf{e}_\rho\rangle + 5|\mathbf{e}_\varphi\rangle + 4|\mathbf{e}_z\rangle$. Vamos a ver como queda expresado en coordenadas esféricas.

La primera forma de hacerlo es transformando las componentes al conocer como transforman las coordenadas. Es decir conociendo $x^i = x^i(x^{m'})$ y $x^{j'} = x^{j'}(x^m)$ expresar $a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} a^k$. Dado que

$$\begin{aligned}x(\rho, \tilde{\varphi}) &= \rho \cos(\tilde{\varphi}) = x(r, \varphi, \theta) = r \cos(\varphi) \sin(\theta), \\y(\rho, \tilde{\varphi}) &= \rho \sin(\tilde{\varphi}) = y(r, \varphi, \theta) = r \sin(\varphi) \sin(\theta), \\z &= z = r \cos(\theta).\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\rho = r \sin(\theta), \quad \tilde{\varphi} = \varphi, \quad z = r \cos(\theta) \Rightarrow r = \sqrt{\rho^2 + z^2}; \quad \theta = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right); \quad \varphi = \tilde{\varphi}.$$

En forma matricial:

$$\begin{aligned}a^{i'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} a^k = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \rho} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \rho} & \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\partial \rho} & \frac{\partial \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial \arctan(\frac{\rho}{z})}{\partial \rho} & \frac{\partial \arctan(\frac{\rho}{z})}{\partial \varphi} & \frac{\partial \arctan(\frac{\rho}{z})}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} & 0 & \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{z}{\rho^2 + z^2} & 0 & \frac{-\rho}{\rho^2 + z^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Resultando que, en esféricas

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \sin(\theta) + 4 \cos(\theta) \\ 5 \\ \frac{-2 \cos(\theta)}{r} - \frac{4 \sin(\theta)}{r} \end{pmatrix} = (-2 \sin(\theta) + 4 \cos(\theta)) |\mathbf{e}_r\rangle + 5 |\mathbf{e}_\varphi\rangle - \left(\frac{2 \cos(\theta)}{r} + \frac{4 \sin(\theta)}{r} \right) |\mathbf{e}_\theta\rangle.$$

La otra forma es expresar la base ortonormal cilíndrica en términos de la base ortonormal esférica. Otra vez, utilizamos la base cartesiana como intermediaria. Esto es:

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{e}_\rho\rangle &= \cos(\tilde{\varphi}) |\hat{\mathbf{i}}\rangle + \sin(\tilde{\varphi}) |\hat{\mathbf{j}}\rangle, \\ |\mathbf{e}_\varphi\rangle &= -\sin(\tilde{\varphi}) |\hat{\mathbf{i}}\rangle + \cos(\tilde{\varphi}) |\hat{\mathbf{j}}\rangle, \\ |\mathbf{e}_z\rangle &= |\hat{\mathbf{k}}\rangle \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} |\hat{\mathbf{i}}\rangle &= \cos(\tilde{\varphi}) |\mathbf{e}_\rho\rangle - \sin(\tilde{\varphi}) |\mathbf{e}_\varphi\rangle, \\ |\hat{\mathbf{j}}\rangle &= \sin(\tilde{\varphi}) |\mathbf{e}_\rho\rangle + \cos(\tilde{\varphi}) |\mathbf{e}_\varphi\rangle, \\ |\hat{\mathbf{k}}\rangle &= |\mathbf{e}_z\rangle. \end{aligned} \right.$$

Mientras que en esféricas, donde

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}_r\rangle &= \cos(\varphi) \sin(\theta) |\hat{\mathbf{i}}\rangle + \sin(\varphi) \sin(\theta) |\hat{\mathbf{j}}\rangle + \cos(\theta) |\hat{\mathbf{k}}\rangle, \\ |\mathbf{e}_\varphi\rangle &= -\sin(\varphi) |\hat{\mathbf{i}}\rangle + \cos(\varphi) |\hat{\mathbf{j}}\rangle, \\ |\mathbf{e}_\theta\rangle &= \cos(\varphi) \cos(\theta) |\hat{\mathbf{i}}\rangle + \sin(\varphi) \cos(\theta) |\hat{\mathbf{j}}\rangle - \sin(\theta) |\hat{\mathbf{k}}\rangle, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{i}}\rangle &= \cos(\varphi) \sin(\theta) |\mathbf{e}_r\rangle + \cos(\varphi) \cos(\theta) |\mathbf{e}_\theta\rangle - \sin(\varphi) |\mathbf{e}_\varphi\rangle, \\ |\hat{\mathbf{j}}\rangle &= \sin(\varphi) \sin(\theta) |\mathbf{e}_r\rangle + \sin(\varphi) \cos(\theta) |\mathbf{e}_\theta\rangle + \cos(\varphi) |\mathbf{e}_\varphi\rangle, \\ |\hat{\mathbf{k}}\rangle &= \cos(\theta) |\mathbf{e}_r\rangle - \sin(\theta) |\mathbf{e}_\theta\rangle. \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
 |e_\rho\rangle &= \cos(\varphi) [\cos(\varphi) \sin(\theta) |e_r\rangle + \cos(\varphi) \cos(\theta) |e_\theta\rangle - \sin(\varphi) |e_\varphi\rangle] \\
 &+ \sin(\varphi) [\sin(\varphi) \sin(\theta) |e_r\rangle + \sin(\varphi) \cos(\theta) |e_\theta\rangle + \cos(\varphi) |e_\varphi\rangle], \\
 &= \sin(\theta) |e_r\rangle + \cos(\theta) |e_\theta\rangle, \\
 |e_\varphi\rangle &= |e_\varphi\rangle, \\
 |e_z\rangle &= \cos(\theta) |e_r\rangle - \sin(\theta) |e_\theta\rangle,
 \end{aligned}$$

entonces

$$\mathbf{a} = -2 |e_\rho\rangle + 5 |e_\varphi\rangle + 4 |e_z\rangle = -2 (\sin(\theta) |e_r\rangle + \cos(\theta) |e_\theta\rangle) + 5 |e_\varphi\rangle + 4 (\cos(\theta) |e_r\rangle - \sin(\theta) |e_\theta\rangle).$$

Finalmente

$$\mathbf{a} = (-2 \sin(\theta) + 4 \cos(\theta)) |e_r\rangle + 5 |e_\varphi\rangle - (2 \cos(\theta) + 4 \sin(\theta)) |e_\theta\rangle.$$

Ejemplo 5.4

Dado el sistema de coordenadas parabólicas

$$x = \xi \eta \cos(\varphi); \quad y = \xi \eta \sin(\varphi); \quad z = \frac{1}{2} (\eta^2 - \xi^2),$$

vamos a calcular el diferencial de volumen $dv = dx dy dz$ en estas coordenadas.

Hay varias maneras de abordar este problema. Una de las más intuitivas es aprovechar que las coordenadas parabólicas forman un sistema de coordenadas ortogonales. Esto es

$$ds^2 = g_{nu} dq^n dq^u = g_{11} (dq^1)^2 + g_{22} (dq^2)^2 + g_{33} (dq^3)^2 \Rightarrow \begin{cases} ds_{\rightarrow 1}^2 = g_{11} (dq^1)^2, \\ ds_{\rightarrow 2}^2 = g_{22} (dq^2)^2, \\ ds_{\rightarrow 3}^2 = g_{33} (dq^3)^2, \end{cases}$$

por consiguiente

$$dv = (ds_{\rightarrow 1}) (ds_{\rightarrow 2}) (ds_{\rightarrow 3}) = \sqrt{g_{11}} dq^1 \sqrt{g_{22}} dq^2 \sqrt{g_{33}} dq^3 = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3,$$

con

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \right\| = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} \right)^2}, \\
 h_2 &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \right\| = \sqrt{g_{22}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} \right)^2}, \\
 h_3 &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right\| = \sqrt{g_{33}} = \sqrt{\left(\frac{\partial x(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial y(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3} \right)^2},
 \end{aligned}$$

por lo cual, dado que $\mathbf{r} = x(\eta, \xi, \varphi) \hat{\mathbf{i}} + y(\eta, \xi, \varphi) \hat{\mathbf{j}} + z(\eta, \xi) \hat{\mathbf{k}}$, entonces

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \right\| = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{(\eta \cos(\varphi))^2 + (\eta \sin(\varphi))^2 + \xi^2} = \sqrt{(\eta^2 + \xi^2)}, \\
 h_2 &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \right\| = \sqrt{g_{22}} = \sqrt{(\xi \cos(\varphi))^2 + (\xi \sin(\varphi))^2 + (-\eta)^2} = \sqrt{(\eta^2 + \xi^2)}, \\
 h_3 &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right\| = \sqrt{g_{33}} = \sqrt{(-\xi \eta \sin(\varphi))^2 + (\xi \eta \cos(\varphi))^2 + (0)^2} = \xi \eta,
 \end{aligned}$$

y finalmente

$$dv = h_1 h_2 h_3 d\xi d\eta d\varphi = \xi \eta (\eta^2 + \xi^2) d\xi d\eta d\varphi.$$

La otra forma de resolverlo, también intuitiva, es hacer el producto mixto de los tres vectores ortogonales base sin normalizar. Esto es

$$dv = \left\| \left(dq^1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \right) \cdot \left(dq^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \times dq^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right) \right\| = dq^1 dq^2 dq^3 \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \right) \right\|.$$

En general

$$dv = dq^1 dq^2 dq^3 \left(\det \begin{vmatrix} \frac{\partial x(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} & \frac{\partial y(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} & \frac{\partial z(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^1} \\ \frac{\partial x(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} & \frac{\partial y(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} & \frac{\partial z(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^2} \\ \frac{\partial x(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3} & \frac{\partial y(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3} & \frac{\partial z(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^3} \end{vmatrix} \right),$$

$$= dq^1 dq^2 dq^3 \det |J(x(q^1, q^2, q^3), y(q^1, q^2, q^3), z(q^1, q^2, q^3))|,$$

donde $J(x(q^1, q^2, q^3), y(q^1, q^2, q^3), z(q^1, q^2, q^3))$ es la matriz jacobiana de la transformación. Este tipo de transformación ya la hemos visto en la sección 3.2.8 y aquí la tratamos con mas detalle. Entonces

$$dv = d\xi d\eta d\varphi \left(\det \begin{vmatrix} \eta \cos(\varphi) & \eta \sin(\varphi) & \xi \\ \xi \cos(\varphi) & \xi \sin(\varphi) & -\eta \\ -\xi \eta \sin(\varphi) & \xi \eta \cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} \right) = \xi \eta (\eta^2 + \xi^2) d\xi d\eta d\varphi.$$

En general, el diferencial del volumen viene expresado como un producto mixto de la base ortonormal $\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle\}$

$$dv = \|(dq^1 |q_1\rangle) \cdot (dq^2 |q_2\rangle \times dq^3 |q_3\rangle)\| = dq^1 dq^2 dq^3 \||q_1\rangle \cdot (|q_2\rangle \times |q_3\rangle)\|$$

$$dv = dq_n \langle q^n | (\epsilon^{123} dq_2 dq_3 |q_1\rangle) = g_{nu} dq^u g_{22} dq^2 g_{33} dq^3 \underbrace{\langle q^n | q_1 \rangle}_{\delta_1^n} = g_{11} dq^1 g_{22} dq^2 g_{33} dq^3.$$

5.1.5 Curvas y parámetros

Tal y como se expuso en la sección 1.5, los vectores podrán ser constantes o variables y, esa característica se verificará tanto en las componentes como en la base. En esta sección lo mostramos para el caso de los vectores 3D, pero el concepto es generalizable a cualquier dimensión. Esto quiere decir que, cuando un vector es variable podrán variar su módulo, su dirección, su sentido, todo junto o por separado. Obviamente, esta variabilidad del vector dependerá de la base en la cual se exprese, por lo cual un mismo vector podrá tener una componente constante en una base y variable en otra, es decir

$$|a\rangle_{(t)} = a^k(t) |e_k\rangle_{(t)} = a^{k'} |e_{k'}\rangle_{(t)} = a^{\hat{k}}(t) |e_{\hat{k}}\rangle. \quad (5.4)$$

De esta manera, cuando uno considera un vector variable, $|a\rangle_{(t)} \iff \mathbf{a}(t)$, podemos establecer un cociente incremental:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|a\rangle_{(t+\Delta t)} - |a\rangle_{(t)}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta |a\rangle_{(t)}}{\Delta t} = \frac{d|a\rangle_{(t)}}{dt}.$$

La misma propuesta se cumplirá para las formas diferenciales $_{(t)}\langle a|$.

Como siempre, las propiedades de esta diferenciación serán:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(|a\rangle_{(t)} + |b\rangle_{(t)} \right) &= \frac{d|a\rangle_{(t)}}{dt} + \frac{d|b\rangle_{(t)}}{dt}, \\ \frac{d}{dt} \left(\alpha(t) |a\rangle_{(t)} \right) &= \frac{d\alpha(t)}{dt} |a\rangle_{(t)} + \alpha(t) \frac{d|a\rangle_{(t)}}{dt} \quad y \\ \frac{d}{dt} \left({}_{(t)}\langle a | b \rangle_{(t)} \right) &= \frac{d({}_{(t)}\langle a |)}{dt} |b\rangle_{(t)} + {}_{(t)}\langle a | \frac{d|b\rangle_{(t)}}{dt}.\end{aligned}$$

Reproducimos aquí la ecuación (1.6), de la sección 1.5.2, ahora en notación de Dirac:

$$|a\rangle_{(t)} = a^k(t) |e_k\rangle_{(t)} \Rightarrow \frac{d|a\rangle_{(t)}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(a^k(t) |e_k\rangle_{(t)} \right) = \frac{da^k(t)}{dt} |e_k\rangle_{(t)} + a^k(t) \frac{d|e_k\rangle_{(t)}}{dt}, \quad (5.5)$$

con lo cual, como dijimos en 1.5.2, hay que tener cuidado al derivar vectores y cerciorarse de la dependencia funcional de la base y componentes. Habrá sistemas de coordenadas (bases de vectores) que serán constantes y otros variables.

Podemos generalizar la ecuación (5.5) si consideramos una curva descrita por un radio vector $|r\rangle$ función de un parámetro λ , de manera que el vector posición, **en coordenadas cartesianas**, queda escrito como $|r\rangle = \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$, donde las funciones: $\{x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)\}$ son las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por el vector posición \mathbf{r} .

Para el vector desplazamiento infinitesimal $|dr\rangle = (dx(\lambda), dy(\lambda), dz(\lambda))$, a lo largo de la curva descrita por el parámetro λ , resulta:

$$|dr\rangle = d\mathbf{r}(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)) = \frac{d(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} d\lambda = \left[\frac{dx}{d\lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \frac{dy}{d\lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + \frac{dz}{d\lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right] d\lambda,$$

con lo cual podemos hacer la siguiente asociación:

$$\frac{d(\quad)}{d\lambda} \Leftrightarrow \frac{dx}{d\lambda} \frac{\partial(\quad)}{\partial x} + \frac{dy}{d\lambda} \frac{\partial(\quad)}{\partial y} + \frac{dz}{d\lambda} \frac{\partial(\quad)}{\partial z},$$

y considerar a las cantidades $\left(\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dy}{d\lambda}, \frac{dz}{d\lambda} \right)$ como las componentes del vector $d\mathbf{r}(\lambda)$ (y, en general, del operador $\frac{d(\quad)}{d\lambda}$) tangente a la trayectoria parametrizada con λ . Más aún, podemos asociar a las cantidades: $\left(\frac{\partial(\quad)}{\partial x}, \frac{\partial(\quad)}{\partial y}, \frac{\partial(\quad)}{\partial z} \right)$ con los vectores base en esas coordenadas. Este tipo de parametrización es la que hemos usado en los cursos de mecánica, allí el parámetro utilizado ha sido el tiempo.

Otra forma alternativa de parametrizar el vector posición es a través de funciones que representen la curva espacial:

$$|r\rangle = \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}(\lambda, f(\lambda), g(\lambda)),$$

o por medio de la intersección de superficies $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$. En la figura 5.3 representamos una curva $f(\lambda = t)$ mediante un radiovector posición $\mathbf{r}(t)$.

Por otro lado, el cuadrado de la distancia infinitesimal recorrida es:

$$(ds)^2 = d\mathbf{r}(\lambda) \cdot d\mathbf{r}(\lambda) = \frac{d(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} \cdot \frac{d(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} (d\lambda)^2 = (dx(\lambda))^2 + (dy(\lambda))^2 + (dz(\lambda))^2,$$

entonces

$$\left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 = \frac{d(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} \cdot \frac{d(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda},$$

por lo tanto, la longitud de arco entre dos puntos sobre la curva $\mathbf{r}(\lambda)$ será

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\frac{d(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} \cdot \frac{d(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} \right]^{1/2} d\lambda.$$

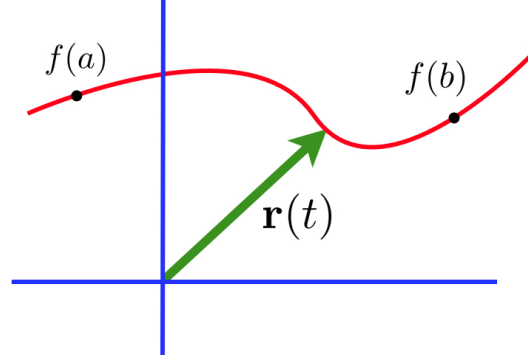


Figura 5.3: Vector posición $\mathbf{r}(t)$, en \mathbb{R}^2 , que describe paramétricamente una curva. En esta representación hemos parametrizado la curva con $\mathbf{r}(\lambda = t)$, vale decir $|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t, f(t))$

Consideramos ahora un conjunto de coordenadas generalizadas: $(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda))$, tendremos

$$|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}(q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)),$$

por lo tanto

$$d\mathbf{r}(q^i(\lambda)) = \frac{dq^1}{d\lambda} d\lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} + \frac{dq^2}{d\lambda} d\lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} + \frac{dq^3}{d\lambda} d\lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = \underbrace{\frac{dq^1}{d\lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}}_{\mathbf{u}_1} + \underbrace{\frac{dq^2}{d\lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}}_{\mathbf{u}_2} + \underbrace{\frac{dq^3}{d\lambda} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3}}_{\mathbf{u}_3},$$

donde: $\{\mathbf{u}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}, \mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}, \mathbf{u}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^3}\}$, son la base del vector $\frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda}$ tangente a la curva descrita por $\mathbf{r}(\lambda)$.

Como sabemos, el módulo del vector $\|d\mathbf{r}(\lambda)\|$ representará la longitud de arco ds para esa curva. Por consiguiente

$$\begin{aligned} (ds)^2 = d\mathbf{r}(\lambda) \cdot d\mathbf{r}(\lambda) &= \frac{d(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} \cdot \frac{d(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} (d\lambda)^2 = \frac{dq^i}{d\lambda} \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^i} \cdot \frac{dq^j}{d\lambda} \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^j} (d\lambda)^2 \\ &= \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^j} \underbrace{\frac{dq^i}{d\lambda} d\lambda \frac{dq^j}{d\lambda} d\lambda}_{dq^i dq^j} = \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^j} dq^i dq^j. \end{aligned}$$

Dado que

$$(ds)^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \tilde{g}_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j = \bar{g}_{ij} dq^i dq^j = \underbrace{\frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^j}}_{\bar{g}_{ij}} dq^i dq^j,$$

identificamos claramente a las componentes del tensor g_{ij} :

$$g_{ij} \equiv \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial(\mathbf{r}(\lambda))}{\partial q^j}.$$

Por otro lado, cuando $\mathbf{r}(\lambda)$ describe una curva Γ en el espacio, en cada punto de ésta curva podemos asociar un vector $d\mathbf{r}(\lambda)/d\lambda$, esto es, un vector que es tangente a la curva Γ en un punto dado y apuntando en la dirección en la que aumenta λ .

Si el parámetro a utilizar es la propia longitud de arco s , entonces, $d\mathbf{r}(s)/ds$ es un vector unitario tangente a la curva Γ y lo denotaremos por $\hat{\tau}$

$$\hat{\tau} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}.$$

Como el vector $\hat{\tau}$ es de magnitud constante, $d\hat{\tau}/ds$ será un vector perpendicular a $\hat{\tau}$. Al vector unitario en la dirección perpendicular a $\hat{\tau}$ lo denotaremos \hat{n} .

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \left| \frac{d\hat{\tau}}{ds} \right| \hat{n} = \kappa \hat{n}.$$

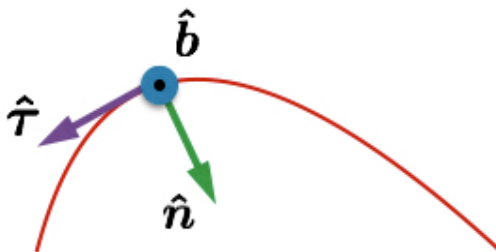


Figura 5.4: La tríada de vectores unitarios $\{\hat{\tau}, \hat{n}, \hat{b}\}$ para una curva en el plano. Con dos vectores coplanares, $\hat{\tau}$ tangente a la trayectoria y \hat{n} , perpendicular a $\hat{\tau}$, se puede construir un tercero perpendicular tanto a $\hat{\tau}$ como a \hat{n} , que denominaremos vector *binormal*: $\hat{b} = \hat{\tau} \times \hat{n}$. El vector \hat{n} indica la curvatura y \hat{b} la torsión.

A κ se le denomina la *curvatura* de la curva Γ y a la cantidad $\rho = 1/\kappa$ *radio de curvatura*. De manera intuitiva, la curvatura nos indica que lejos está una curva de ser una línea recta. Con este par de vectores coplanares se puede construir un tercero perpendicular tanto a $\hat{\tau}$ como a \hat{n} , que denominaremos vector *binormal* a Γ , esto es: $\hat{b} = \hat{\tau} \times \hat{n}$. Tenemos entonces la tríada $\{\hat{\tau}, \hat{n}, \hat{b}\}$ al que podemos anclar un sistema de coordenadas cartesiano en cada punto de Γ . Es claro que este conjunto de vectores irá cambiando a medida que r va cambiando al variar el parámetro. Este sistema de coordenadas, no inercial, estará rotando constantemente a medida que el observador se mueve a lo largo de la curva en el espacio.

Continuando con el razonamiento anterior, por ser \hat{b} de magnitud constante, entonces

$$\hat{b} \perp \frac{d\hat{b}}{ds} \quad \wedge \quad \frac{d\hat{b}}{ds} \perp \hat{\tau}, .$$

Al ser $d\hat{b}/ds$ perpendicular tanto a $\hat{\tau}$ como a \hat{b} , entonces será proporcional a \hat{n} :

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau \hat{n} \quad \Rightarrow \quad \tau = -\hat{n} \cdot \frac{d\hat{b}}{ds},$$

esta constante de proporcionalidad se denomina la *torsión* de la curva Γ en un punto dado, y a $1/\tau$ el radio de torsión. Intuitivamente, la *torsión* mide que lejos está una curva de permanecer en un plano.

Para finalizar, a partir del hecho de que $\hat{n} = \hat{b} \times \hat{\tau}$:

$$\frac{d\hat{n}}{ds} = \frac{d\hat{b}}{ds} \times \hat{\tau} + \hat{b} \times \frac{d\hat{\tau}}{ds} = -\tau(\hat{n} \times \hat{\tau}) + \kappa(\hat{b} \times \hat{n}) = \tau \hat{b} - \kappa \hat{\tau}.$$

A las ecuaciones

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \kappa \hat{n}, \quad \frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau \hat{n}, \quad \frac{d\hat{n}}{ds} = \tau \hat{b} - \kappa \hat{\tau}.$$

se les conoce como las fórmulas de Frenet-Serret de la geometría diferencial.

Ejemplo 5.5 Para una curva en el plano xy dada por $y = y(x)$ y $z = 0$ podemos escribir

$$|r\rangle = \mathbf{r}(\lambda) = \lambda |e_x\rangle + y(\lambda) |e_y\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = |e_x\rangle + \frac{dy}{d\lambda} |e_y\rangle \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = 1 + \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2,$$

al hacer $\lambda = x$ se tiene

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\frac{d(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} \cdot \frac{d(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} \right]^{1/2} d\lambda = \int_{x_1}^{x_2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx.$$

Ejemplo 5.6 Vamos a considerar el siguiente arco de hélice: $C(t) = [2 \cos(t), 2 \sin(t), 4t]$, con $t \in [0, 2\pi]$. Podemos calcular la parametrización en s de la siguiente manera

$$\dot{C}(t) = \frac{d(\mathbf{r}(t))}{dt} = [-2 \sin(t), 2 \cos(t), 4],$$

entonces

$$s = \int_0^t \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]^{1/2} d\bar{t} = \int_0^t \sqrt{4 \sin^2(\bar{t}) + 4 \cos^2(\bar{t}) + 16} d\bar{t} = \int_0^t 2\sqrt{5} d\bar{t} = 2\sqrt{5}t.$$

Por lo tanto $t = s/2\sqrt{5}$ y la curva parametrizada con s es

$$C(s) = \mathbf{r}(s) = 2 \left[\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), \sin\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), \frac{s}{\sqrt{5}} \right].$$

Al derivar se tiene que

$$\hat{\tau} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[-\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), \cos\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), 2 \right]$$

con $s \in [0, 4\sqrt{5}\pi]$.

La curvatura es simplemente

$$\kappa = \left| \frac{d\hat{\tau}}{ds} \right| = \sqrt{\frac{1}{10^2} \cos^2\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{10^2} \sin^2\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{10^2}} = \frac{1}{10}.$$

Es decir, la curvatura es constante y el radio de curvatura es $\rho = 10$. El vector normal unitario \hat{n} que resulta es

$$\hat{n} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{\tau}}{ds} = \left[-\cos\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), -\sin\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), 0 \right].$$

Los vectores $\hat{\tau}$ y \hat{n} se encuentran en un plano, el plano osculador, del cual podemos construir el vector unitario binormal:

$$\hat{b} = \hat{\tau} \times \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[2 \sin\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), 2 \cos\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right), 1 \right].$$

Calculemos ahora la torsión

$$\tau = -\hat{n} \cdot \frac{d\hat{b}}{ds} = \frac{1}{5} \sin^2\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{5} \cos^2\left(\frac{s}{2\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{5}.$$

Dejamos al lector la demostración de que se satisfacen las fórmulas de Frenet-Serret.

5.1.6 Covectores, tensores y coordenadas curvilíneas

Retomemos los conceptos que expresamos en la sección 3.1.3, de tal forma que podemos expresar vectores y formas como

$$|a\rangle = a^i |e_i\rangle = a^x |e_x\rangle + a^y |e_y\rangle + a^z |e_z\rangle \equiv a^\rho |e_\rho\rangle + a^\varphi |e_\varphi\rangle + a^z |e_z\rangle$$

y equivalentemente para las 1-formas

$$\langle a| = a^i \langle e_i| = a^x \langle e_x| + a^y \langle e_y| + a^z \langle e_z| \equiv a^\rho \langle e_\rho| + a^\varphi \langle e_\varphi| + a^z \langle e_z|,$$

en ambos casos hemos hecho la comparación entre un sistema de coordenadas cartesiana y uno cilíndrico. Lo que es importante notar es lo que insistimos en la sección 3.1.3, que los vectores y 1-formas, se expresan

de forma equivalente en los distintos sistemas de coordenadas.

Siguiendo la misma lógica argumental que en la sección 3.2.2 construimos tensores en cualquier sistema de coordenadas curvilíneo a partir del producto tensorial de vectores y formas:

$$\mathcal{T} = T^{ij} |e_i\rangle \otimes |\tilde{e}_j\rangle, \quad T_j^i |\tilde{e}_i\rangle \otimes \langle e^j|, \quad T_i^j \langle e^i| \otimes |\tilde{e}_j\rangle \quad \text{o} \quad T_{ij} \langle e^i| \otimes \langle \tilde{e}^j|.$$

Nótese T^{ij} , constituyen **las componentes** contravariantes de un tensor; T_i^j las componentes mixtas de un tensor y, finalmente, las componentes covariantes de ese tensor. Es importante recalcar que el tensor \mathcal{T} es un objeto geométrico que se expresa en una base (tensorial) particular y que las base de vectores $\{|e_i\rangle\}$ y 1-formas $\{|\tilde{e}^j|\}$, en principio, no necesariamente pueden ser las mismas, vale decir:

$$\mathcal{T} = T^{x\rho} |e_x, e_\rho\rangle + T^{x\varphi} |e_x, e_\varphi\rangle + T^{xz} |e_x, e_z\rangle + T^{y\rho} |e_y, e_\rho\rangle + T^{y\varphi} |e_y, e_\varphi\rangle + T^{yz} |e_y, e_z\rangle + \dots + T^{zz} |e_z, e_z\rangle,$$

donde hemos desarrollado el caso particular de un tensor bizarro parte cartesiano y parte cilíndrico. Este tipo de objetos es solo un ejemplo. Nótese que estamos utilizando la notación $|e_i, e_j\rangle \equiv |e_i\rangle \otimes |\tilde{e}_j\rangle$.

Solo para fijar ideas vamos a extender algunos conceptos que presentamos en la sección 1.2.6.1:

5.1.6.1 Producto escalar

El producto escalar es independiente de la base en la cual se exprese

$$\langle a|b\rangle = a_i b^i = a_{j'} b^{j'} = g_{ij} a^i b^j = g_{i'j'} a^{i'} b^{j'}$$

donde, como es de esperar, las leyes de transformación entre el sistema de coordenadas cartesianas $x^i = x^i(q^j)$ y un sistema de coordenadas curvilíneas $q^j = q^j(x^i)$ permiten la traducción de las componentes de vectores, formas y tensores como:

$$b^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^{k'}} b^{k'}, \quad a_j = \frac{\partial q^{k'}}{\partial x^j} a_{k'}, \quad \text{y} \quad g_{ij} = \frac{\partial q^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial q^{m'}}{\partial x^j} g_{k'm'}.$$

5.1.6.2 Producto vectorial

El producto vectorial tal y como lo construimos la sección 1.2.6.2 se expresa como

$$|c\rangle = c^i |e_i\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = \epsilon^{ijk} a_j b_k |e_i\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |c'\rangle = c^{i'} |e_{i'}\rangle = |a'\rangle \times |b'\rangle = \epsilon^{i'j'k'} a_{j'} b_{k'} |e_{i'}\rangle.$$

Donde ϵ^{ijk} es el tensor de Levi-Civita en coordenadas cartesianas definido en la sección 1.4.1 y que luego generalizamos en la sección 4.3.5. Es decir, queremos construir la versión del producto vectorial que tenga la misma forma que en el caso cartesiano pero en cualquier sistema de coordenadas. De la relación anterior es claro que, el tensor de Levi-Civita transformará como un tensor, es decir

$$\epsilon^{i'j'k'} = \epsilon^{lmn} \frac{\partial q^{i'}}{\partial x^l} \frac{\partial q^{j'}}{\partial x^m} \frac{\partial q^{k'}}{\partial x^n} = J \epsilon^{ijk} = \sqrt{g} \epsilon^{ijk}$$

donde J es el determinante de la matriz jacobiana, que discutimos en 3.2.8 y g el determinante de la métrica. Por lo tanto,

$$|c\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = a_j b_k \epsilon^{ijk} |e_i\rangle = \epsilon^{ijk} a_{l'} \frac{\partial q^{l'}}{\partial x^j} b_{m'} \frac{\partial q^{m'}}{\partial x^k} \frac{\partial q^{n'}}{\partial x^i} |e_{n'}\rangle = \epsilon^{ijk} \frac{\partial q^{l'}}{\partial x^j} \frac{\partial q^{m'}}{\partial x^k} \frac{\partial q^{n'}}{\partial x^i} a_{l'} b_{m'} |e_{n'}\rangle,$$

con lo cual

$$|c\rangle = |a\rangle \times |b\rangle = \underbrace{a_j b_k}_{c^i} \epsilon^{ijk} |e_i\rangle = \underbrace{a_{m'} b_{n'}}_{c^{i'}} \epsilon^{l'm'n'} |e_{l'}\rangle = J \epsilon^{l'm'n'} a_{m'} b_{n'} |e_{l'}\rangle = \sqrt{g} \epsilon^{l'm'n'} a_{m'} b_{n'} |e_{l'}\rangle$$

5.1.7 Campos tensoriales

En la sección 5.1.5, cuando avanzamos en la derivación de vectores vimos vectores que dependían de un parámetro. Ahora podemos generalizar este concepto a tensores que dependen de una variable.³ Cuando discutimos los vectores variables en la sección 1.5.1 vimos que la dependencia funcional de un vector se puede concretar en la variación de sus componentes, cuando la base es constante; la dependencia de los vectores base manteniendo constante las componentes y, finalmente la variación de ambas: base y componentes.

Del mismo modo, podemos generalizarlo para los tensores. Así distinguimos los mismos tres casos: bases constantes y componentes variables

$$T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t) \langle w^i(1) | \otimes \langle w^j(2) | \otimes \dots \otimes \langle v^k(m) | \otimes |x_m(1)\rangle \otimes |y_n(2)\rangle \otimes \dots \otimes |z_l(n)\rangle ;$$

bases variables y componentes constantes

$$\tilde{T}_{ij\dots k}^{mn\dots l} \langle \tilde{w}^i(1) |_{(t)} \otimes \langle \tilde{w}^j(2) |_{(t)} \otimes \dots \otimes \langle \tilde{v}^k(m) |_{(t)} \otimes |\tilde{x}_m(1)\rangle_{(t)} \otimes |\tilde{y}_n(2)\rangle_{(t)} \otimes \dots \otimes |\tilde{z}_l(n)\rangle_{(t)} ,$$

y, finalmente ambas (bases y componentes) variables

$$T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t) \langle \tilde{w}^i(1) |_{(t)} \otimes \langle \tilde{w}^j(2) |_{(t)} \otimes \dots \otimes \langle \tilde{v}^k(m) |_{(t)} \otimes |\tilde{x}_m(1)\rangle_{(t)} \otimes |\tilde{y}_n(2)\rangle_{(t)} \otimes \dots \otimes |\tilde{z}_l(n)\rangle_{(t)} .$$

Al igual que los vectores, la dependencia funcional de los tensores variará con la base en la cual se exprese.

Así, tendremos tensores cuyas componentes, en una determinada base, serán variables y en otra no. Mientras que una de las bases puede ser variable y otra no.

Igualmente, recurriremos al cociente incremental para conocer la velocidad de variación:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}[\circ, \dots; \bullet, \dots]_{(t+\Delta t)} - \mathbf{T}[\circ, \dots; \bullet, \dots]_{(t)}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{T}[\circ, \dots; \bullet, \dots]_{(t)}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{T}[\circ, \dots; \bullet, \dots]_{(t)} \right)$$

Si la base es constante, la dependencia funcional y su variación (derivada) recae sobre sus componentes. Así podemos construir la derivada de las componentes como

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t + \Delta t) - T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t)}{\Delta t} = \frac{d(T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t))}{dt} .$$

Siguiendo con el proceso de generalización, podemos pensar en una dependencia funcional multilineal. Esto es que en vez de que el tensor dependa de un solo parámetro t , i.e. $\mathbf{T}[\circ, \circ, \dots; \bullet, \bullet, \dots]_{(t)}$, podemos pensar que el argumento de la “función” tensorial sea otro tensor: $\mathbf{T}[\circ, \circ, \dots; \bullet, \bullet, \dots]_{(\mathbf{G}[\circ, \circ, \dots; \bullet, \bullet, \dots])}$.

A ese objeto se le llama *Campo Tensorial*, pero vamos con calma y analicemos los casos más simples que son los verdaderamente útiles.

Como era de esperarse, tendremos varios casos que se pueden construir a partir de esta idea:

- Campos homogéneos:

$$\text{Función} : \varphi = \varphi(t) ,$$

$$\text{Vector} : |r\rangle_{(t)} \iff \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \rightsquigarrow r^i(t) ,$$

$$\text{Tensor} : \mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(t)} \rightsquigarrow T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(t) .$$

³Por simplicidad y, desviaciones profesionales de físico utilizaremos un parámetro t que nos recuerda al tiempo.

- Campos constantes o estacionarios:

$$\text{Campo Escalar} : \varphi = \varphi(\mathbf{r}),$$

$$\text{Campo Vectorial} : |a\rangle_{(|r\rangle)} \iff \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \rightsquigarrow a^i(\mathbf{r}),$$

$$\text{Campo Tensorial} : \mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(|r\rangle)} \rightsquigarrow T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(\mathbf{r}).$$

- Campos variables o no estacionarios

$$\text{Campo Escalar Variable} : \varphi = \varphi(\mathbf{r}(t), t),$$

$$\text{Campo Vectorial} : |a\rangle_{(|r\rangle)} \iff \mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}(t), t) \rightsquigarrow a^i(\mathbf{r}(t), t),$$

$$\text{Campo Tensorial} : \mathbf{T} = \mathbf{T}[\circ, \circ, \dots, \circ; \bullet, \bullet, \dots, \bullet]_{(|r\rangle)} \rightsquigarrow T_{ij\dots k}^{mn\dots l}(\mathbf{r}(t)).$$

La idea de los campos escalares, vectoriales, tensoriales, con argumento vectorial, es la de asociar un valor de la componente (escalar, vectorial o tensorial) a cada punto del espacio (si el vector está en \mathbb{R}^3). Obviamente, los campos escalares asocian un número a cada posición y los campos vectoriales, además del número (módulo) asocian una dirección y un sentido.

Ejemplos de campos escalares serán las distribuciones de densidad $\rho(\mathbf{r}(t))$, presiones $P(\mathbf{r}(t))$ y temperaturas $T(\mathbf{r}(t))$ de la atmósfera terrestre, o la distribución de intensidades del campo eléctrico en una superficie.

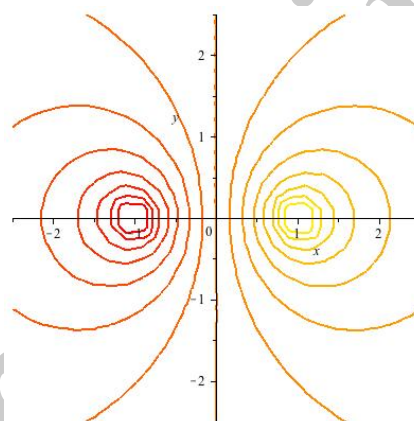


Figura 5.5: Ejemplo de campo escalar $\phi = \phi(\mathbf{r})$.

Podemos, por ejemplo, considerar el potencial eléctrico:

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y) = \ln((x+1)^2 + y^2) - \ln((x-1)^2 + y^2).$$

La representación de este campo escalar se puede apreciar en la figura 5.5.

5.1.7.1 Campos escalares y superficies

En la figura 5.6 se ilustra el campo escalar de temperaturas para la siguiente función:

$$T = T(x, y) = 70 + 180e^{-(x-3)^2/10 - (y-2)^2/10}.$$

Por lo tanto, por un campo escalar entenderemos a toda función escalar de argumento vectorial, es decir, la función que asociará cada punto del espacio con un número. Esto es:

$$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\phi = \phi(\mathbf{r}) \Rightarrow \phi = \phi(x^i) = \phi(\tilde{x}^i).$$

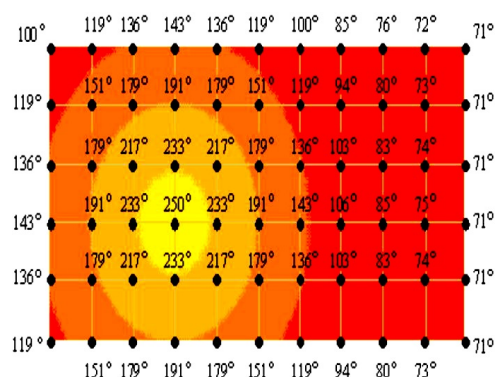


Figura 5.6: Campo escalar $T = T(x, y)$.

Estamos enfatizando el hecho que un campo escalar no variará bajo cambios de las coordenadas en su argumento. Adicionalmente recalcamos que es indistinto hablar de vectores $\phi = \phi(\mathbf{r})$ o sus coordenadas $\phi = \phi(x^i)$.

En un mapa o diagrama de temperaturas, es posible unir los diferentes puntos con igual temperatura, y así tendremos las curvas isotermas, tal y como se observa en la figura 5.7.

Por otra parte, un campo escalar $\phi = \phi(x^1, x^2)$ definirá diferentes superficies si la representamos en \mathbb{R}^3 de la forma: $x^3 = \phi(x^1, x^2)$. De esta manera tendremos curvas de nivel o isocurvas las cuales se corresponden a las soluciones de $\phi = \phi(x^i) = \text{cte}$. Tal y como se ilustra en la figura 5.8, los diferentes planos para $z = \text{cte}$, cortan la superficie dada por la función z y definen las diferentes curvas de nivel $g(x, y) = k$.

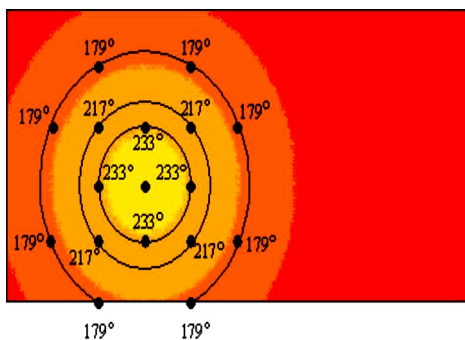


Figura 5.7: Curvas Isotermas
 $T = T(x, y) = \text{cte}$.

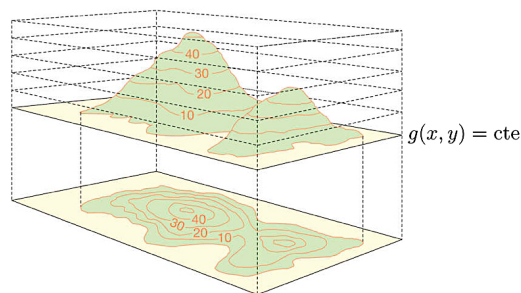


Figura 5.8: Curvas de nivel para una función
 $z = g(x, y) = \text{cte}$.

5.1.7.2 Campos vectoriales y curvas integrales

Consideremos ahora un campo vectorial $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ y estudiemos su representación, y lo que es más importante, su variación. Los campos vectoriales vienen a ser funciones vectoriales de varias variables en la que a cada punto del espacio o dominio se le asigna el vector, es decir: $\mathbf{a}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Tal y como hemos dicho y volvemos a representar en la figura 5.9, los campos vectoriales asocian un vector (con su módulo dirección y sentido) a cada punto del espacio. Comúnmente, nos referimos a campos vectoriales según el caso: *campos de fuerza* (el vector del campo es una fuerza), *campo de velocidades* (el vector del campo es una velocidad).

Del mismo modo, a aquellas líneas a las cuales los vectores son tangentes se les denominan *líneas de campo*, *curvas integrales* o simplemente *líneas de flujo* o de *corriente*. A las trayectorias ortogonales a estas líneas, vale decir, a aquellas líneas cuyos vectores tangentes son ortogonales al campo, se les denominarán *líneas equipotenciales*.

El ejemplo más emblemático lo constituye el gradiente de un campo escalar $\nabla\phi(x, y)$. Las *líneas equipotenciales* las define el campo escalar mismo, $\phi(x, y) = z = \text{cte}$ (curva de nivel) y construimos un campo vectorial con su gradiente, $\nabla\phi(x, y)$. Como el gradiente es perpendicular a la curva de nivel tendremos que las *curvas integrales*, (líneas de flujo o líneas de corriente) del campo vectorial $\nabla\phi(x, y)$ serán *trayectorias ortogonales* a las *curvas equipotenciales*.

Consideremos el caso bidimensional⁴ en coordenadas cartesianas, y tomemos el desplazamiento diferencial $d\mathbf{r}$ en la dirección del campo vectorial \mathbf{a} , es fácil convencerse que:

$$d\mathbf{r} \propto \mathbf{a}(x, y) = a_x(x, y)\hat{\mathbf{i}} + a_y(x, y)\hat{\mathbf{j}} \Rightarrow \frac{dx}{a_x(x, y)} = \frac{dy}{a_y(x, y)},$$

⁴El caso tridimensional sólo añade complicaciones técnicas y no riqueza conceptual.

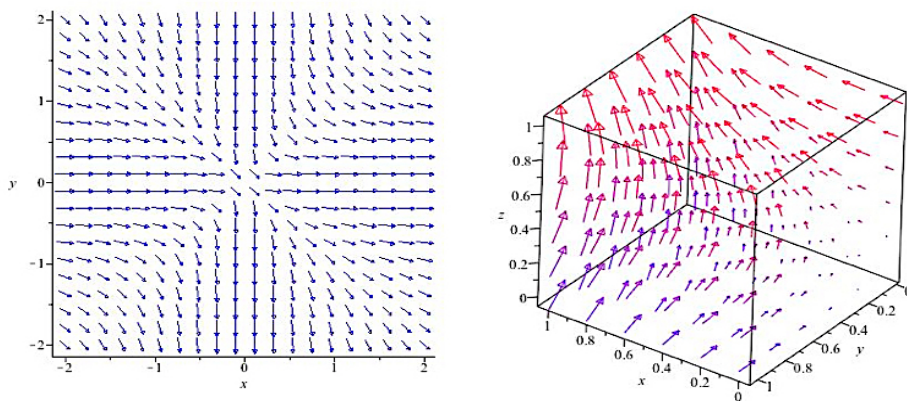


Figura 5.9: Campos vectoriales

con lo cual encontramos las *líneas de flujo* o *curvas integrales* $y(x)$ del campo $\mathbf{a}(x, y)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_y(x, y)}{a_x(x, y)} \Rightarrow y(x) = \int \frac{a_y(x, y)}{a_x(x, y)} dx.$$

Otra forma, equivalente de ver lo anterior es que si $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x(t), y(t), z(t), t)$, entonces:

$$d\mathbf{r} \propto \mathbf{a} \Rightarrow d\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ dx & dy & dz \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0.$$

Por lo cual $[a_z dy - a_y dz] \hat{\mathbf{i}} + [a_x dz - a_z dx] \hat{\mathbf{j}} + [a_y dx - a_x dy] \hat{\mathbf{k}} = 0$, para que finalmente

$$\frac{dx}{a_x(x(t), y(t), z(t), t)} = \frac{dy}{a_y(x(t), y(t), z(t), t)} = \frac{dz}{a_z(x(t), y(t), z(t), t)}.$$

La integral de estas ecuaciones definirán las *líneas de flujo* o *curvas integrales*.

5.1.7.3 Trayectorias ortogonales a las líneas de flujo

Para encontrar las *trayectorias ortogonales* al campo vectorial o las *líneas equipotenciales* construimos un campo vectorial $\mathbf{a}^\perp(x, y)$ que sea ortogonal en todo punto a $\mathbf{a}(x, y)$:

$$\mathbf{a}^\perp(x, y) \cdot \mathbf{a}(x, y) = 0 \Rightarrow a_x(x, y)a_x^\perp(x, y) + a_y(x, y)a_y^\perp(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{a_x(x, y)}{a_y(x, y)} = -\frac{a_y^\perp(x, y)}{a_x^\perp(x, y)},$$

donde $\mathbf{a}^\perp(x, y) = a_x^\perp(x, y)\hat{\mathbf{i}} + a_y^\perp(x, y)\hat{\mathbf{j}}$, y ahora procedemos del mismo modo pero con el campo vectorial $\mathbf{a}^\perp(x, y)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_y^\perp(x, y)}{a_x^\perp(x, y)} \Rightarrow y(x) = -\int \frac{a_y^\perp(x, y)}{a_x^\perp(x, y)} dx.$$

Ejemplo 5.7 Consideremos el campo vectorial definido por: $\mathbf{a} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$. La ecuación diferencial para las líneas de flujo se obtiene de:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Integrando ambos lados, obtenemos:

$$\ln|x| = \ln|y| + C \Rightarrow |x| = e^C|y| \Rightarrow x = D y,$$

donde $D = \pm e^C$ es una constante determinada por las condiciones iniciales.

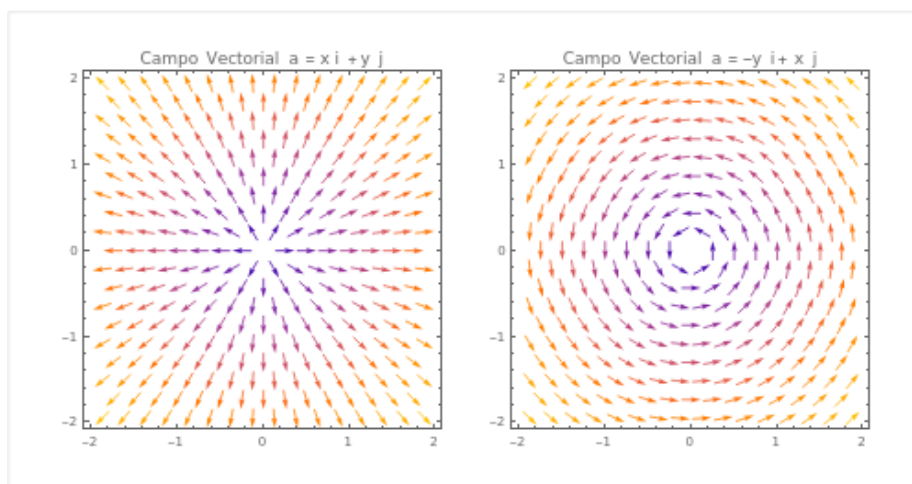


Figura 5.10: Líneas de flujo y líneas perpendiculares de flujo. En la gráfica de la izquierda se presentan las líneas de flujo del campo $\mathbf{a} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$. En la gráfica de la derecha se ilustran las líneas de flujo del campo perpendicular.

Ejemplo 5.8 Para calcular las trayectorias ortogonales a las líneas de flujo del ejemplo anterior, construimos su campo ortogonal e integramos. Eso es para $\mathbf{a}^\perp = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}$ integramos

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow \ln|x| = -\ln|y| + C \Rightarrow |x| = \frac{e^C}{|y|} \text{ y finalmente } x^2 + y^2 = D$$

donde $D = e^{2C}$ es una constante que depende de las condiciones iniciales, representando el radio cuadrado de un círculo centrado en el origen. En la figura de arriba se muestran ambas trayectorias. En la gráfica de la izquierda se presentan las líneas de flujo del campo $\mathbf{a} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$. En la gráfica de la derecha se ilustran las líneas de flujo del campo perpendicular.

Ejemplo 5.9 A continuación mostraremos como afectan las transformaciones de coordenadas a los tensores. Tal y como expresamos en la sección 3.2.8, el mismo esquema de transformación que tienen las componentes de los vectores (y de las formas) son los que se requieren para transformar a los tensores. Obviamente habrá que cuidar que tipo de componentes (covariantes o contravariantes) del tensor estamos transformando.

Consideremos el siguiente tensor

$$T_j^i = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ en la base: } \{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\} \equiv \{|\hat{\mathbf{i}}\rangle, |\hat{\mathbf{j}}\rangle, |\hat{\mathbf{k}}\rangle\}.$$

Es un tensor que hemos expresado en coordenadas cartesianas y queremos ahora pasarlo a cilíndricas. Como recién mencionamos:

$$T_{m'}^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} T_j^i \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}} \Rightarrow T_{m'}^{k'} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\frac{\sin(\varphi)}{\rho} & \frac{\cos(\varphi)}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_j^i \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sustituyendo el tensor y multiplicando las matrices

$$T_{m'}^{k'} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\frac{\sin(\varphi)}{\rho} & \frac{\cos(\varphi)}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se obtiene

$$T_{m'}^{k'} = \begin{pmatrix} -\cos^2(\varphi) + 3\cos(\varphi)\sin(\varphi) + 3 & \rho \sin(\varphi)\cos(\varphi) - 2\rho + 3\rho\cos^2(\varphi) & 3\cos(\varphi) + 4\sin(\varphi) \\ \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi) + 3\cos^2(\varphi) - 1}{\rho} & -3\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos^2(\varphi) + 2 & -3\frac{\sin(\varphi)}{\rho} + 4\frac{\cos(\varphi)}{\rho} \\ \cos(\varphi) + 2\sin(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) + 2\rho\cos(\varphi) & 2 \end{pmatrix}.$$

Si suponemos que el origen del sistema de coordenadas cilíndrico está indicado por el vector $|a\rangle = 3|\hat{i}\rangle + 4|\hat{j}\rangle + 3|\hat{k}\rangle$. Esto es

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \\ \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right), \end{cases}$$

entonces

$$T_{m'}^{k'} = \begin{pmatrix} \frac{102}{25} & -\frac{11}{5} & 5 \\ \frac{14}{125} & \frac{23}{25} & 0 \\ \frac{11}{25} & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5.10 Definimos una transformación ortogonal (una transformación de un sistema de coordenadas ortogonales a otro ortogonal también) si se cumple

$$x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} x^k + a^{i'}; \quad x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} x^{k'} + a^i; \quad \text{donde } \det\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}}\right) = \det\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\right) = \pm 1.$$

con

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{l'}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} = \delta_l^k.$$

Vamos a demostrar que las transformaciones de Galileo en 2 dimensiones

$$\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{o\tilde{o}}^1 t \\ v_{o\tilde{o}}^2 t \end{pmatrix},$$

son transformaciones ortogonales. Notemos que $v_{o\tilde{o}}^1$, y $v_{o\tilde{o}}^2$ son las velocidades en la dirección 1 y 2, respectivamente, del observador \tilde{O} con coordenadas $x^{i'}$ respecto al observador O con coordenadas x^i , mientras t es el tiempo medido por ambos observadores.

Una vez más, identificando

$$x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} x^k + a^{i'} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix},$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} &= \cos(\theta), \quad \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} = -\sin(\theta), \quad a^1 = v_{oo}^1 t, \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} &= \sin(\theta), \quad \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} = \cos(\theta), \quad a^2 = v_{oo}^2 t, \end{aligned} \quad \det \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Ejemplo 5.11 Las transformaciones de Galileo nos permiten relacionar las posiciones de una partícula respecto a dos observadores los cuales se encuentran en movimiento, uno respecto al otro. Consideremos entonces el movimiento de una partícula visto desde el sistema de coordenadas x^i tal que

$$x = v_{0x} t; \quad y = v_{0y} t - g \frac{t^2}{2}.$$

Vamos a expresar el vector velocidad \mathbf{v} de esta partícula visto del sistema de coordenadas $x^{i'}$. Tendremos que

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x = v_{0x} t \\ x^2 &= y = v_{0y} t - g \frac{t^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} v^1 &= v_x = \frac{dx^1}{dt} = v_{0x}, \\ v^2 &= v_y = \frac{dx^2}{dt} = v_{0y} - gt, \end{aligned}$$

por lo cual

$$\begin{pmatrix} v^{1'} \\ v^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{oo}^1 t \\ v_{oo}^2 t \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$\mathbf{v} = v^{1'} \hat{\mathbf{i}} + v^{2'} \hat{\mathbf{j}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} v^{1'} = v^1 \cos(\theta) - v^2 \sin(\theta) + v_{oo}^1 t, \\ v^{2'} = v^1 \sin(\theta) + v^2 \cos(\theta) + v_{oo}^2 t. \end{cases}$$

Ejemplo 5.12 Considere ahora la siguiente transformación de coordenadas

$$\tilde{x}^\alpha = L_\beta^\alpha x^\beta + a^\alpha; \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^i v_i}}; \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3; \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

y

$$L_0^0 = \gamma, \quad L_0^i = L_i^0 = \gamma v^i, \quad L_j^i = L_i^j = \delta_j^i + v^i v_j \frac{(\gamma - 1)}{v^k v_k}.$$

Las L_β^α son los impulsos (*boost*) de Lorentz, que consideramos en el ejemplo 3.16 y donde las v^k son las componentes tridimensionales de la velocidad relativa entre los observadores \tilde{O} y O con coordenadas \tilde{x}^α y x^β , respectivamente. La coordenada x^0 representa el tiempo medido por el observador O mientras que las x^j representan las coordenadas espaciales x, y, z para el mismo observador O con $i, j = 1, 2, 3$ respectivamente. Nótese que $0 \leq v^k v_k < 1$. Supongamos, por facilidad, que el movimiento es en una dimensión: $\alpha, \beta = 0, 1$ y $i, j = 1$.

Esto implica

$$L_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{L}_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}^0 \\ \tilde{x}^1 \end{pmatrix}.$$

1. Otra vez, vamos a mostrar que los tiempos se alargan cuando son medidos por observadores en movimiento⁵. Tenemos que $\Delta t = t_2 - t_1 = x_2^0 - x_1^0$ medido por el observador en reposo y equivalentemente: $\Delta \tilde{t} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \tilde{x}_2^0 - \tilde{x}_1^0$ medido por el observador en movimiento.

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{t} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = \tilde{x}_2^0 - \tilde{x}_1^0 &= (L_{\beta}^0 x_2^{\beta} + a^0) - (L_{\beta}^0 x_1^{\beta} + a^0) = L_{\beta}^0 x_2^{\beta} - L_{\beta}^0 x_1^{\beta} = L_{\beta}^0 (x_2^{\beta} - x_1^{\beta}), \\ &= L_0^0 (x_2^0 - x_1^0) + L_1^0 (x_2^1 - x_1^1) = \frac{(x_2^0 - x_1^0)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned}$$

Claramente

$$\lim_{v \rightarrow 1} \Delta \tilde{t} = \infty.$$

Nótese que hemos supuesto que el reloj que marca el Δt y que está en reposo respecto al sistema x^{β} se encuentra en la misma posición espacial $x_2^0 = x_1^0$.

2. Demostremos ahora como las distancias se acortan cuando son medidas por observadores en movimiento. Igualmente la distancia entre dos puntos espaciales será

$$l = x_2^1 - x_1^1 = (\tilde{L}_{\beta}^1 \tilde{x}_2^{\beta} + a^1) - (\tilde{L}_{\beta}^1 \tilde{x}_1^{\beta} + a^1) = \tilde{L}_{\beta}^1 (\tilde{x}_2^{\beta} - \tilde{x}_1^{\beta}) = \tilde{L}_0^1 (\tilde{x}_2^0 - \tilde{x}_1^0) + \tilde{L}_1^1 (\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_1^1).$$

Si suponemos que la distancia en el sistema en movimiento \tilde{x}^{β} la medimos en el mismo tiempo, entonces $\tilde{x}_2^0 = \tilde{x}_1^0$ con lo cual

$$l = \tilde{L}_1^1 (\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_1^1) = \frac{(\tilde{x}_2^1 - \tilde{x}_1^1)}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\tilde{l}}{\sqrt{1-v^2}} \Rightarrow \tilde{l} = \sqrt{1-v^2} l \Rightarrow \lim_{v \rightarrow 1} \sqrt{1-v^2} l = 0.$$

Esto último indica que, a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, la longitud observada se contrae significativamente, acercándose a cero.



Practicando con SymPy

1. Mostraremos algunas aplicaciones de tensores y también que existe la posibilidad de trabajar con tensores de manera abstracta

```
[1]: import sympy
from sympy import *
from sympy.vector import CoordSys3D
init_printing()
```

Consideremos la siguiente transformación de coordenadas esféricas a cartesianas:

⁵Ver ejemplo 3.17, para mas detalles.

```
[2]: r, θ, φ = symbols('r θ φ', positive=True)
      N = CoordSys3D('N')
      x = r*cos(φ)*sin(θ)
      y = r*sin(φ)*sin(θ)
      z = r*cos(θ)
      display(x,y,z)
```

$$r \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$r \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$r \cos(\theta)$$

Escribamos los vectores base de nuestras coordenadas esféricas en términos de los vectores base cartesianos:

```
[3]: e_r = x.diff(r) * N.i + y.diff(r) * N.j + z.diff(r) * N.k
      e_th = x.diff(θ) * N.i + y.diff(θ) * N.j + z.diff(θ) * N.k
      e_ph = x.diff(φ) * N.i + y.diff(φ) * N.j + z.diff(φ) * N.k
      display(e_r)
      display(e_th)
      display(e_ph)
```

$$(\sin(\theta) \cos(\phi)) \hat{\mathbf{i}}_N + (\sin(\theta) \sin(\phi)) \hat{\mathbf{j}}_N + (\cos(\theta)) \hat{\mathbf{k}}_N$$

$$(r \cos(\theta) \cos(\phi)) \hat{\mathbf{i}}_N + (r \sin(\phi) \cos(\theta)) \hat{\mathbf{j}}_N + (-r \sin(\theta)) \hat{\mathbf{k}}_N$$

$$(-r \sin(\theta) \sin(\phi)) \hat{\mathbf{i}}_N + (r \sin(\theta) \cos(\phi)) \hat{\mathbf{j}}_N$$

Ahora calculamos la longitud al cuadrado de los vectores de base esférica:

```
[4]: display(e_r.dot(e_r).simplify())
      display(e_th.dot(e_th).simplify())
      display(e_ph.dot(e_ph).simplify())
```

$$1$$

$$r^2$$

$$r^2 \sin^2(\theta)$$

El tensor métrico:

```
[5]: g = Matrix([ [e_r.dot(e_r).simplify(), 0, 0], \
                  [0, e_th.dot(e_th).simplify(), 0], \
                  [0, 0, e_ph.dot(e_ph).simplify()] ])
      g
```

$$[5]: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

La métrica inversa:

```
[6]: g_inv = g.inv()
      g_inv
```


[6]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación, ecuaciones (5.4), se obtiene así:

[7]:

```
Mt = Matrix( [ [x.diff(r), x.diff(theta), x.diff(phi)], \
                [y.diff(r), y.diff(theta), y.diff(phi)], \
                [z.diff(r), z.diff(theta), z.diff(phi)] ] )
Mt
```

[7]:

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) & r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

El vector posición:

[8]:

```
rp=r*sin(theta)*cos(phi)*N.i + r*sin(theta)*sin(phi)*N.j + r*cos(theta)*N.k
rp
```

[8]:

$$(r \sin(\theta) \cos(\phi)) \hat{\mathbf{i}}_N + (r \sin(\theta) \sin(\phi)) \hat{\mathbf{j}}_N + (r \cos(\theta)) \hat{\mathbf{k}}_N$$

Los factores de escala:

[9]:

```
hr=rp.diff(r).magnitude().simplify()
hth=rp.diff(theta).magnitude().simplify()
hpi=rp.diff(phi).magnitude().simplify()
display(hr,hth,hpi)
```

$$\begin{aligned} &1 \\ &r \\ &r |\sin(\theta)| \end{aligned}$$

Para finalizar, veamos a continuación como obtener la métrica y los factores de escala para las coordenadas toroidales. (Ver 5.1.4)

[10]:

```
a, phi, theta, phi = symbols('a phi theta phi ', positive=True)
x=(a*sinh(phi)*cos(phi))/(cosh(phi)-cos(phi))
y=(a*sinh(phi)*sin(phi))/(cosh(phi)-cos(phi))
z=a*sin(phi)/(cosh(phi)-cos(phi))
```

[11]:

```
e_ta = x.diff(phi).trigsimp() * N.i + y.diff(phi).trigsimp() * N.j + z.
      diff(phi).trigsimp() * N.k
e_pi = x.diff(theta).trigsimp() * N.i + y.diff(theta).trigsimp() * N.j + z.
      diff(theta).trigsimp() * N.k
e_si = x.diff(phi).trigsimp() * N.i + y.diff(phi).trigsimp() * N.j + z.
      diff(phi).trigsimp() * N.k
```

```
[12]: g = Matrix( [ [e_ta.dot(e_ta).simplify(), 0, 0], \
                    [0, e_pi.dot(e_pi).simplify(), 0], \
                    [0, 0, e_si.dot(e_si).simplify()] ])
g
```

$$[12]: \begin{bmatrix} -\frac{a^2(\sin^2(\phi) + 2\cos(\phi)\cosh(\phi) - \cosh^2(\phi) - 1)}{(\cos(\phi) - \cosh(\phi))^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2\sinh^2(\phi)}{(\cos(\phi) - \cosh(\phi))^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a^2(\sin^2(\phi) + 2\cos(\phi)\cosh(\phi) - \cosh^2(\phi) - 1)}{(\cos(\phi) - \cosh(\phi))^4} \end{bmatrix}$$

```
[13]: h1= sqrt(g[0,0]).trigsimp()
h2= sqrt(g[1,1]).trigsimp()
h3= sqrt(g[2,2]).trigsimp()
h1,h2,h3
```

$$[13]: \left(\frac{a}{|\cos(\phi) - \cosh(\phi)|}, \frac{a \sinh(\phi)}{|\cos(\phi) - \cosh(\phi)|}, \frac{a}{|\cos(\phi) - \cosh(\phi)|} \right)$$

2. Dado el segmento de la hélice

$$C(t) = [2\cos(t), 2\sin(t), 4t]$$

```
[14]: t, s = symbols('t s', positive=True)
C = Matrix([2*cos(t), 2*sin(t), 4*t])
C
```

$$[14]: \begin{bmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 4t \end{bmatrix}$$

```
[15]: dC=C.diff(t)
dC
```

$$[15]: \begin{bmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 4 \end{bmatrix}$$

Buscamos la relación entre los parámetros s y t

```
[16]: p=integrate(sqrt(dC.dot(dC)),(t,0,t)).simplify()
```

Por lo tanto, en función del parámetro s el vector posición es:

```
[17]: rs=Matrix([2*cos(s/(2*sqrt(5))), 2*sin(s/(2*sqrt(5))), 2*s/sqrt(5)])
rs
```

$$[17]: \begin{bmatrix} 2\cos\left(\frac{\sqrt{5}s}{10}\right) \\ 2\sin\left(\frac{\sqrt{5}s}{10}\right) \\ \frac{2\sqrt{5}s}{5} \end{bmatrix}$$

El vector tangente a la curva es

```
[18]: τ=rs.diff(s)
      τ
```

[18]:
$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5} \sin\left(\frac{\sqrt{5}s}{10}\right)}{5} \\ \frac{\sqrt{5} \cos\left(\frac{\sqrt{5}s}{10}\right)}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

La curvatura:

```
[19]: κ = sqrt(φ.diff(s).dot(φ.diff(s))).simplify()
      κ
```

[19]:
$$\frac{1}{10}$$

El vector normal

```
[20]: n = 1/κ*τ.diff(s)
      n
```

[20]:
$$\begin{bmatrix} -\cos\left(\frac{\sqrt{5}s}{10}\right) \\ -\sin\left(\frac{\sqrt{5}s}{10}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y el binormal:

```
[21]: b = simplify(τ.cross(n))
      b
```

[21]:
$$\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5} \sin\left(\frac{\sqrt{5}s}{10}\right)}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5} \cos\left(\frac{\sqrt{5}s}{10}\right)}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

La torsión:

```
[22]: tor=-n.dot(b.diff(s)).simplify()
      tor
```

[22]:
$$\frac{1}{5}$$

Podemos comprobar que cada uno de los vectores es unitario.

```
[23]: sqrt(τ.dot(τ)).simplify() , sqrt(n.dot(n)).simplify() , sqrt(b.dot(b)).
      ↪simplify()
```

[23]: (1, 1, 1)

Y que se satisfacen las fórmulas de de Frenet-Serret.

```
[24]: τ.diff(s)-κ*n , b.diff(s)+tor*n, n.diff(s)-tor*b + κ*τ
```

[24]:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

3. Consideremos el siguiente tensor en coordenadas cartesianas

$$T_j^i = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y nuestro deseo es escribirlo en coordenadas cilíndricas. Escribamos el jacobiano de la transformación

```
[25]: ρ, φ = symbols('ρ φ ', positive=True)
x= ρ*cos(φ)
y= ρ*sin(φ)
z=z
```

```
[26]: J = Matrix( [ [x.diff(ρ), x.diff(φ),0], \
                    [y.diff(ρ), y.diff(φ), 0], \
                    [z.diff(ρ), z.diff(φ), 1] ])
J
```

[26]:

$$\begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\rho \sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \rho \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escribimos la matriz

```
[27]: T = Matrix([ [ 2,1,3], [2,3, 4],[ 1, 2,2] ])
T
```

[27]:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$T_{m'}^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} T_j^i \frac{\partial x^j}{\partial x^{m'}}$$

```
[28]: simplify(J.inv()*(T)*J)
```

[28]:

$$\begin{bmatrix} \frac{3 \sin(\phi) + 3 \sin(3\phi) + 9 \cos(\phi) - \cos(3\phi)}{4 \cos(\phi)} & \rho \left(-\frac{\sin^3(\phi)}{\cos(\phi)} - 3 \sin^2(\phi) + \tan(\phi) + 1 \right) & \frac{-3 \sin^2(\phi) + 2 \sin(2\phi) + 3}{\cos(\phi)} \\ \frac{\sin(2\phi) + 3 \cos(2\phi) + 1}{2\rho} & -\frac{3 \sin(2\phi)}{2} + \frac{\cos(2\phi)}{2} + \frac{5}{2} & \frac{-3 \sin(\phi) + 4 \cos(\phi)}{\rho} \\ 2 \sin(\phi) + \cos(\phi) & \rho (-\sin(\phi) + 2 \cos(\phi)) & 2 \end{bmatrix}$$

Podemos evaluar el resultado anterior para algún punto en particular

```
[29]: ((_) .subs({φ:atan(S(4)/3),ρ:5})).evalf()
```

[29]:

$$\begin{bmatrix} 4.08 & -2.2 & 5.0 \\ 0.112 & 0.92 & 0 \\ 2.2 & 2.0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

SymPy tiene una librería de Geometría Diferencial que permite definir una variedad matemática.

```
[30]: from sympy.diffgeom import *
      m = Manifold('M', 3)
      m.dim
```

[30]:

3

Un parche de coordenadas, también denominado carta de coordenadas, es un conjunto abierto y simplemente conexo alrededor de un punto en una variedad. En una variedad pueden existir múltiples parches de coordenadas que, en general, no abarcan toda la variedad. Dentro de cada parche, se define una carta de coordenadas que permite parametrizar cualquier punto del parche mediante una tupla de números reales, conocidas como coordenadas.

```
[31]: p = Patch('P', m)
      p.dim
```

[31]:

3

Veamos como definir un sistema de coordenadas cartesiano tridimensional y un sistema de coordenadas polares.

```
[32]: x, y, z = symbols('x y z', real=True)
      ρ, θ, ζ = symbols('ρ θ ζ', nonnegative=True)
      relation_dict = {
        ('Car3D', 'Pol'): [(x, y, z), (sqrt(x**2 + y**2), atan(y/x), z)],
        ('Pol', 'Car3D'): [(ρ, θ, ζ), (ρ*cos(θ), ρ*sin(θ), ζ)]
      }
      Car3D = CoordSystem('Car3D', p, (x, y, z), relation_dict)
      Pol = CoordSystem('Pol', p, (ρ, θ, ζ), relation_dict)
```

La función “transformation()” devuelve la función de transformación de un sistema de coordenadas a otro. Mientras “transform()” devuelve las coordenadas transformadas.

```
[33]: display(Car3D.transformation(Pol), Car3D.transform(Pol), Car3D.
      ↪transform(Pol, [1, 2, 3]))
```

$$\left((x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ \operatorname{atan}(2) \\ 3 \end{bmatrix}$$

La función “jacobian()” devuelve la matriz jacobiana de la transformación de coordenadas entre dos sistemas. Mientras “jacobian_determinant()” devuelve el determinante jacobiano de la transformación de coordenadas entre dos sistemas.

```
[34]: Pol.jacobian(Car3D), Pol.jacobian(Car3D, [1, pi/2, pi/3])
```

$$[34]: \left(\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

```
[35]: Car3D.jacobian_determinant(Pol), Car3D.jacobian_determinant(Pol, [1, pi/2, pi/3])
```

$$[35]: \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{2}{\sqrt{4 + \pi^2}} \right)$$

4. Dado un sistema genérico de coordenadas oblicuas

$$|e_1\rangle = a|\hat{i}\rangle + b|\hat{j}\rangle; \quad |e_2\rangle = c|\hat{i}\rangle + d|\hat{j}\rangle$$

```
[36]: a,b,c,d = symbols('a,b,c,d')
e_1 = a*N.i + b*N.j + 0*N.k
e_2 = c*N.i + d*N.j + 0*N.k
display(e_1)
display(e_2)
```

$$(a)\hat{i}_N + (b)\hat{j}_N$$

$$(c)\hat{i}_N + (d)\hat{j}_N$$

```
[37]: g = Matrix([ [e_1.dot(e_1).simplify(), e_1.dot(e_2).simplify()], \
                  [e_2.dot(e_1).simplify(), e_2.dot(e_2).simplify()]])
g
```

$$[37]: \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

```
[38]: factor(g.inv())
```

$$[38]: \begin{bmatrix} \frac{c^2 + d^2}{a^2 d^2 - 2abcd + b^2 c^2} & \frac{-ac - bd}{a^2 d^2 - 2abcd + b^2 c^2} \\ \frac{-ac - bd}{a^2 d^2 - 2abcd + b^2 c^2} & \frac{a^2 + b^2}{a^2 d^2 - 2abcd + b^2 c^2} \end{bmatrix}$$

```
[39]: L = Matrix([ [d/(a*d-b*c), -c/(a*d-b*c)], \
                  [-b/(a*d-b*c), a/(a*d-b*c)] ])
L
```

$$[39]: \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{c}{ad-bc} \\ -\frac{b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

```
[40]: L.inv()
```

$$[40]: \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$


```
[41]: T = Matrix([[4,2],[1,4]])
      T
```

```
[41]:  $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ 
```

```
[42]: Tnew=simplify(g*L*T*L.inv())
      Tnew
```

```
[42]:  $\begin{bmatrix} 4a^2 + 3ab + 4b^2 & 4ac + 2ad + bc + 4bd \\ 4ac + ad + 2bc + 4bd & 4c^2 + 3cd + 4d^2 \end{bmatrix}$ 
```

```
[43]: Tnew.subs({a:1,b:0,c:sqrt(2)/2,d:sqrt(2)/2}).factor()
```

```
[43]:  $\begin{bmatrix} 4 & 3\sqrt{2} \\ \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$ 
```

5. A continuación, aprovecharemos la ocasión para mostrar algunas opciones que tienen que ver con los opciones para graficar curvas de nivel para el campo de temperaturas

$$T = T(x, y) = 70 + 180e^{-(x-3)^2/10 - (y-2)^2/10}$$

La vida será mucho más fácil si usamos las siguientes librerías

```
[44]: import numpy as np
      import matplotlib.pyplot as plt
```

Definimos el campo escalar:

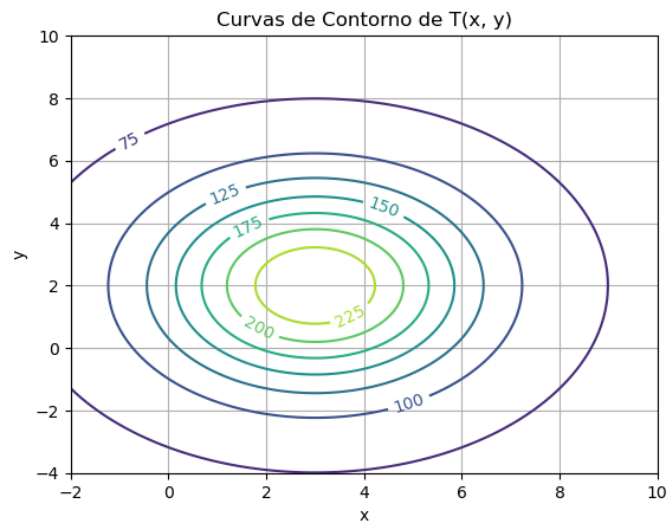
```
[45]: def T(x, y):
      return 70 + 180*np.exp(-(x-3)**2/10 - (y-2)**2/10)
```

El gráfico más simple que podemos realizar es el siguiente

```
[46]: # Definimos los ejes
      x = np.linspace(-2, 10, 400)
      y = np.linspace(-4, 10, 400)
      X, Y = np.meshgrid(x, y)
      Z = T(X, Y)

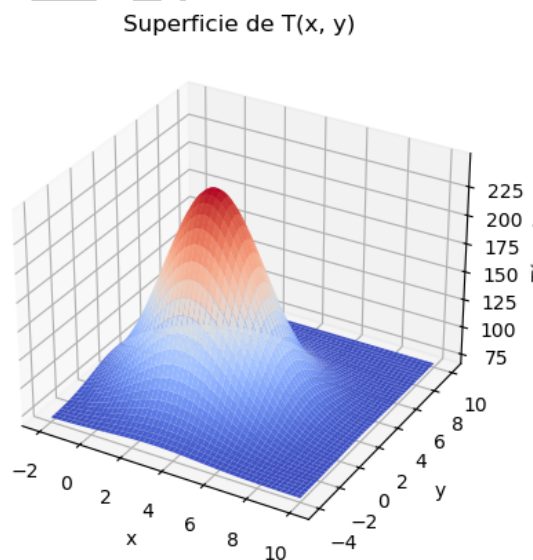
      # Definimos la curva de contorno
      CS = plt.contour(X, Y, Z)
      plt.clabel(CS, inline=1, fontsize=10)
      plt.title('Curvas de Contorno de T(x, y)')
      plt.grid(True)
      plt.xlabel('x')
      plt.ylabel('y')
      plt.show()
```

```
[46]:
```



Otra perspectiva es

```
[47]: from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
# Graficar la función en 3D
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='coolwarm')
ax.set_title('Superficie de T(x, y)')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('T(x, y)')
plt.show()
```



También se pueden resaltar las curvas de nivel

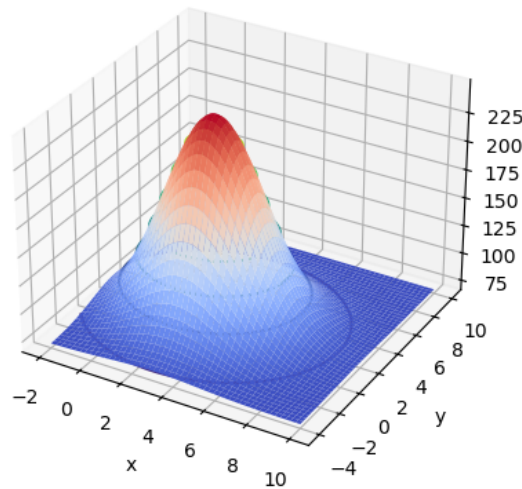
```
[48]: fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='coolwarm')
```

```

ax.contour(X, Y, Z, cmap='viridis')
ax.set_title('Superficie de T(x, y) con curvas de contorno')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('T(x, y)')
plt.show()

```

Superficie de T(x, y) con curvas de contorno

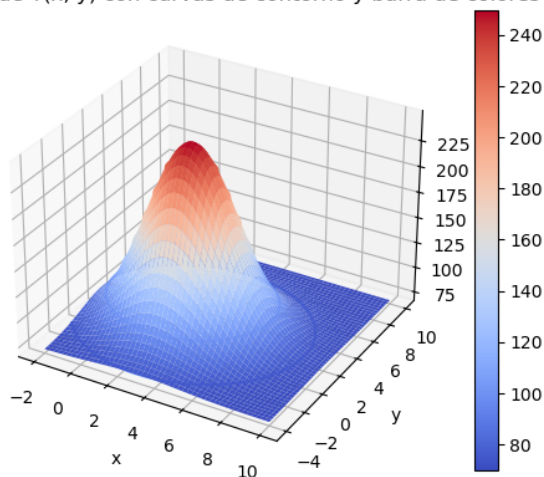


Y si queremos agregar una barra de colores

```

[49]: # Graficar la superficie tridimensional
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='coolwarm')
# Graficar curvas de contorno sobre la superficie
ax.contour(X, Y, Z, cmap='coolwarm')
# Agregar una barra de colores
fig.colorbar(surf)
# Configuración de etiquetas y título
ax.set_title('Superficie de T(x, y) con curvas de contorno y barra de_
↳colores')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('T(x, y)')
plt.show()

```

Superficie de $T(x, y)$ con curvas de contorno y barra de colores

5.1.8 Ejercicios

1. Exprese el vector

$$\mathbf{r} = yz\hat{\mathbf{i}} - y\hat{\mathbf{j}} + xz^2\hat{\mathbf{k}}$$

en coordenadas cilíndricas. Nota: Antes, se deben expresar los vectores base $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ en términos de los vectores base $\{\xi_\rho, \xi_\varphi, \xi_z\}$.

2. Exprese los vectores base $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ en término de los vectores base $\{\xi_r, \xi_\theta, \xi_\varphi\}$.
3. Encuentre las componentes de la velocidad y aceleración, en coordenadas esféricas, de una partícula en movimiento.
4. Calcule los factores de escala, la métrica y los vectores base para los siguientes sistemas de coordenadas:

- (a). cilíndricas parabólicas (u, v, φ) definidas por

$$x = uv \cos(\varphi), \quad y = uv \sin(\varphi), \quad z = \frac{u^2 - v^2}{2}.$$

- (b). hiperbólicas (u, v, φ) definidas por

$$x = \cosh(u) \cos(v) \cos(\varphi), \quad y = \cosh(u) \cos(v) \sin(\varphi), \quad z = \sinh(u) \sin(v).$$

5. Escriba el siguiente vector en coordenadas esféricas

$$|a\rangle = 2xy|\hat{\mathbf{i}}\rangle - x|\mathbf{e}_y\rangle + 3x|\hat{\mathbf{k}}\rangle.$$

Encuentre las componentes covariantes y contravariantes del vector $|a\rangle$ en términos de: r, θ, φ .

6. Diga si la siguiente transformación de coordenadas es ortogonal

$$x = 2uv, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = w.$$

7. El siguiente tensor está expresado en coordenadas cartesianas.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Escriba sus componentes en coordenadas esféricas.

8. Demuestre que la aceleración de una partícula que se mueve siguiendo la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ viene dada por

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{r}} + \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}}.$$

¿Cuál es el significado del término v^2/ρ ?

9. La siguiente curva: $F(x, y, z) = y^3 + 27axz - 81a^2y = 0$ viene parametrizada por

$$x = au(3 - u^2), \quad y = 3au^2, \quad z = au(3 + u^2).$$

Encuentre:

- ds/du , si s es la distancia sobre la curva medida desde el origen.
 - La longitud de la curva desde el origen al punto cartesiano $(2a, 3a, 4a)$.
 - El radio de curvatura en el punto u .
 - La torsión y la curvatura para todo punto de la curva.
 - Escriba las expresiones que resultan de usar las fórmulas de Frenet-Serret.
10. Encuentre las curvas integrales y las trayectorias ortogonales de los siguientes campos vectoriales
- $\mathbf{f}(x, y) = -\frac{x}{2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{y}{2}\hat{\mathbf{j}}$,
 - $\mathbf{f}(x, y) = xy\hat{\mathbf{i}} + 2x\hat{\mathbf{j}}$,
 - $\mathbf{f}(x, y) = x^2\hat{\mathbf{i}} - y\hat{\mathbf{j}}$.
11. El vector área para una superficie s se define como $\mathbf{s} = \iint_s d\mathbf{s}$, encuentre el vector área de la superficie: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con $z \leq 0$. Utilice el hecho de que en coordenadas esféricas $d\mathbf{s} = a^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{\mathbf{e}}_r$.

5.2 La fauna de los operadores diferenciales vectoriales

A partir del concepto de campo escalar, presentaremos ahora una variedad de objetos diferenciales en el espacio tridimensional. Salvo que se diga lo contrario, utilizaremos el sistema de coordenadas cartesianas, que discutimos en la sección 5.1.1 en la página 366.

5.2.1 Derivada direccional de campos escalares

Para analizar los cambios en los campos escalares requerimos comparar dos “instantes de tiempo”, para ello, parametrizamos las componentes del vector: $z = \phi(\mathbf{r}(t)) = g(x(t), y(t))$, por lo tanto:

$$\frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial\phi(x(t), y(t))}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial\phi(x(t), y(t))}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt} = \nabla\phi(x(t), y(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt};$$

donde hemos representado

$$\nabla\phi(x(t), y(t)) = \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\phi(x, y)}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{\mathbf{j}}.$$

A $\nabla\phi(x^i(t))$ lo llamaremos el *gradiente* del campo escalar $\phi(x^i(t))$, y también son muy comunes otras notaciones para el gradiente:

$$\nabla\phi(x(t), y(t)) = \phi_x(x, y)\hat{\mathbf{i}} + \phi_y(x, y)\hat{\mathbf{j}} = \partial^i\phi(x, y)\hat{\mathbf{i}}_i = \phi^{,i}(x, y)\hat{\mathbf{i}}_i,$$

El gradiente de un campo escalar es uno de los objetos más útiles del cálculo vectorial, el cual lo hemos utilizado de manera operacional y no nos hemos detenido a reflexionar sobre sus propiedades.

Es claro que cuando se tienen curvas de nivel $g(x, y) = z = \phi(\mathbf{r}(t)) = k = \text{cte}$, obtenemos

$$\frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = \frac{dk}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi(x(t), y(t))}{dt} = 0 = \nabla\phi(x(t), y(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt},$$

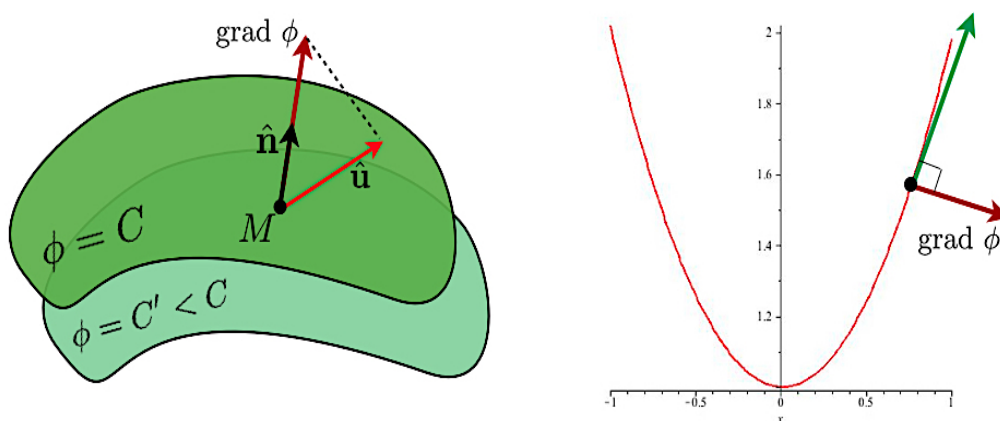


Figura 5.11: Dirección de máxima variación en una función. Gradiente y tangente de una función.

con lo cual, dado que $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ es la tangente a la curva, entonces, el gradiente es perpendicular a la curva, tal y como se muestra en la figura 5.11.

Si se da el caso de que la función dependa de manera explícita del parámetro t , $\phi = \phi(x^i(t), t)$ tendremos que

$$\phi = \phi(x(t), y(t), z(t), t) \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi(x^i(t), t)}{\partial t} = \nabla \phi(x^i(t), t) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt},$$

y, en el caso particular en que el parámetro es la longitud de arco λ a lo largo de la curva, la derivada total de ϕ con respecto a λ a lo largo de la curva vendrá dada por

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \nabla \phi(x^i(\lambda), \lambda) \cdot \hat{\tau}, \quad (5.6)$$

donde $\hat{\tau}$ es el vector unitario tangente a la curva en el punto dado.

Por otro lado, la derivada direccional indicará la tasa de cambio del campo escalar en la dirección que apuntemos. Es una generalización de la idea que surge de parametrizar la curva o de la derivada total respecto al tiempo. Dados dos puntos M y M' definiremos la derivada en la dirección de un vector unitario $\hat{\mathbf{u}} \leftrightarrow \overrightarrow{M'M}$ como se muestra a continuación:

$$\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}} \phi \equiv \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\phi(M') - \phi(M)}{|\overrightarrow{M'M}|} = \frac{d\phi}{d\lambda} = \nabla \phi(x, y) \cdot \hat{\mathbf{u}}. \quad (5.7)$$

Tal y como se puede apreciar en la figura 5.12 la derivada direccional está representada por la pendiente de la recta tangente a la curva que surge como intersección entre la superficie $\phi(x, y) = z = k = cte$, el plano vertical formado por el eje z y el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$.

En este punto, varias reflexiones se pueden derivar del concepto de derivada total.

- La primera es que dado que, la derivada direccional a lo largo de $\hat{\mathbf{u}}$ es

$$\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}} \phi = \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\nabla \phi| \cos(\widehat{\nabla \phi, \hat{\mathbf{u}}}),$$

(donde hemos denotado por $\widehat{\nabla \phi, \hat{\mathbf{u}}}$ como el ángulo que forman los vectores $\nabla \phi$ y $\hat{\mathbf{u}}$), el valor máximo de la derivada direccional será

$$\mathbb{D}_{\hat{\mathbf{u}}} \phi_{\max} = |\nabla \phi| = \sqrt{\partial^i \phi \partial_i \phi} \equiv \sqrt{\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}} \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^3}\right)^2}.$$

Es decir, cuando $\hat{\mathbf{u}}$ apunta en la dirección del gradiente o, lo que es lo mismo, en la dirección de la mayor tasa de cambio; el valor máximo lo indica la dirección del gradiente. O dicho de otro modo,

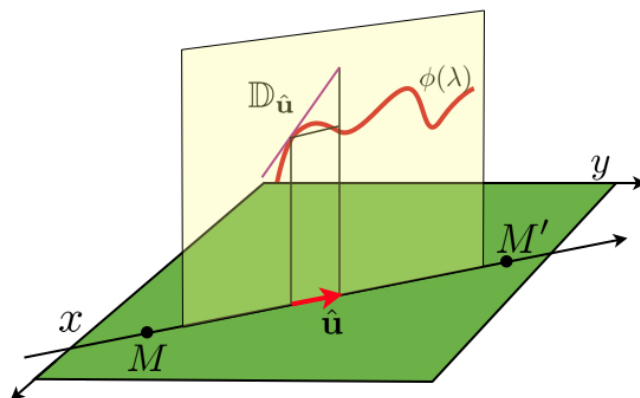


Figura 5.12: Derivada direccional

en un determinado punto M de la superficie $\phi(x, y) = z$ el vector $\nabla\phi$ apunta en la dirección de la máxima tasa de cambio, tal y como podemos apreciar en la figura 5.11 panel izquierdo.

- La segunda es que el gradiente es perpendicular a la superficie $z = \phi(x, y)$. En general, si hacemos $\phi(x^i(\lambda), \lambda) = k = cte$, como $\frac{dr(\lambda)}{d\lambda} = \hat{\tau}$ tangente a esta superficie en algún punto, es claro que $d\phi/d\lambda = 0$ en esa dirección y $\nabla\phi \cdot \hat{\tau} = 0$. Por lo tanto, $\nabla\phi$ será normal a la superficie $\phi(x^i(\lambda), \lambda) = k$ (ver figura 5.11 panel derecho).
- La tercera reflexión es, dado que el gradiente es ortogonal a la superficie, los vectores perpendiculares a él conformarán el plano tangente a la superficie en un determinado punto.
- Finalmente, la cuarta emerge de la misma definición (5.7), es claro que la derivada direccional es un escalar, por lo tanto, como \hat{u} es un vector, $\nabla\phi(x, y)$ debe ser una 1-forma. Vale decir, como veremos con mas detalle en las secciones 5.2.1.2 y 5.2.2

$$\mathbf{grad} \phi = \nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial q^1} \langle e^1 | + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial q^2} \langle e^2 | + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial q^3} \langle e^3 | = \frac{\langle e^i |}{h_i} \frac{\partial\phi}{\partial q^i} = \frac{\langle e^i |}{h_i} \partial_i \phi.$$

Donde denotamos $h_i = \left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q^i} \right\| = \sqrt{g_{ii}}$ los factores de escala que acompaña a la base $\langle e^i |$ generalizada.

5.2.1.1 Gradiente y flujo de un campo vectorial

Podemos utilizar la idea de flujo de un campo vectorial y generalizar la definición de gradiente para que sea independiente de las coordenadas.

$$\nabla\phi = \mathbf{grad} \phi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) ds = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) \hat{n}_s ds.$$

Supongamos que construimos un campo vectorial de la forma siguiente

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{c} \phi(x, y, z), \quad \text{con } \mathbf{c} = cte,$$

con lo cual

$$f = \iint_s \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot ds = \iint_s \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot \hat{n}_s ds.$$

Es claro que esta expresión vale para todos los sistemas de coordenadas. En particular, para un sistema de coordenadas cartesianas construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los

ejes coordenados. Entonces se tiene que las caras del cubo serán

$$\begin{aligned} d\mathbf{s}_{x+} &= (dy \, dz) \hat{\mathbf{i}}; & d\mathbf{s}_{x-} &= -(dy \, dz) \hat{\mathbf{i}}; & d\mathbf{s}_{y+} &= (dx \, dz) \hat{\mathbf{j}}; & d\mathbf{s}_{y-} &= -(dx \, dz) \hat{\mathbf{j}}; \\ d\mathbf{s}_{z+} &= (dx \, dy) \hat{\mathbf{k}}; & d\mathbf{s}_{z-} &= -(dx \, dy) \hat{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

con lo cual, el flujo por las seis caras es

$$\begin{aligned} df &= \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}_{x+} + \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}_{x-} + \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}_{y+} \\ &+ \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}_{y-} + \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}_{z+} + \mathbf{c} \phi(x, y, z) \cdot d\mathbf{s}_{z-}, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} df &= \mathbf{c} [\phi(x+dx, y, z) dy \, dz - \phi(x, y, z) dy \, dz + \phi(x, y+dy, z) dx \, dz - \phi(x, y, z) dx \, dz \\ &+ \phi(x, y, z+dz) dx \, dy - \phi(x, y, z) dx \, dy], \\ &= \mathbf{c} [\{\phi(x+dx, y, z) - \phi(x, y, z)\} dy \, dz + \{\phi(x, y+dy, z) - \phi(x, y, z)\} dx \, dz + \\ &+ \{\phi(x, y, z+dz) - \phi(x, y, z)\} dx \, dy]. \end{aligned}$$

Como estamos considerando un “cubo diferencial” podemos desarrollar por Taylor hasta primer orden, por lo que:

$$\begin{aligned} \phi(x+dx, y, z) &\approx \phi(x, y, z) + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} dx, & \phi(x, y+dy, z) &\approx \phi(x, y, z) + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} dy, \\ \phi(x, y, z+dz) &\approx \phi(x, y, z) + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} dx \, dy \, dz + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} dy \, dx \, dz + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} dz \, dx \, dy, \\ &= \left(\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \right) dV \Rightarrow dF = \mathbf{grad} \, \phi \, dV, \end{aligned}$$

entonces

$$\mathbf{grad} \, \phi = \frac{dF}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{f_2 - f_1}{v_2 - v_1} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) d\mathbf{s} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(x, y, z) \hat{\mathbf{n}} \, dS.$$

Nótese que hemos supuesto que $\Delta V \equiv v_2 \equiv V$ y que $f_2 = \iint_s \phi(x, y, z) d\mathbf{s}$, lo que quiere decir que cuando $v_1 \sim 0$ el flujo $f_1 \sim 0$.

5.2.1.2 Gradiente y coordenadas curvilíneas

La generalización de la expresión del gradiente en coordenadas curvilíneas es inmediata a partir de diferencial total de una función $\phi(q^1, q^2, q^3)$. Esto es

$$\phi(q^1, q^2, q^3) = \phi(q^j) \Rightarrow d\phi = \frac{\partial \phi(q^1, q^2, q^3)}{\partial q^j} dq^j,$$

con

$$\mathbf{grad} \, \phi(q^i) = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q^1} \right\|} \frac{\partial \phi}{\partial q^1} \langle e^1 | + \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q^2} \right\|} \frac{\partial \phi}{\partial q^2} \langle e^2 | + \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q^3} \right\|} \frac{\partial \phi}{\partial q^3} \langle e^3 |,$$

y

$$\langle dr | = \frac{\partial \langle r |}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial \langle r |}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial \langle r |}{\partial q^3} dq^3 \equiv \left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q^1} \right\| \langle e^1 | dq^1 + \left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q^2} \right\| \langle e^2 | dq^2 + \left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q^3} \right\| \langle e^3 | dq^3,$$

ya que, al igual que en el caso de los vectores, la base del espacio dual se construye como

$$\langle e^1 | = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q^1} \right\|} \frac{\partial \langle r |}{\partial q^1}; \quad \langle e^2 | = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q^2} \right\|} \frac{\partial \langle r |}{\partial q^2}; \quad y \quad \langle e^3 | = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q^3} \right\|} \frac{\partial \langle r |}{\partial q^3}.$$

Es decir, la forma general del gradiente para un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales es

$$\mathbf{grad} \phi = \nabla \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q^1} \langle e^1 | + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q^2} \langle e^2 | + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q^3} \langle e^3 | = \frac{\langle e^i |}{h_{\tilde{i}}} \frac{\partial \phi}{\partial q^i} = \frac{\langle e^i |}{h_{\tilde{i}}} \partial_i \phi.$$

Donde denotamos $h_{\tilde{i}} = \left\| \frac{\partial \langle r |}{\partial q^i} \right\| = \sqrt{g_{ii}}$ el factor de escala que acompaña a la base $\{\langle e^i | \}$ y **debe quedar claro** que en el lado derecho de la ecuación (5.2.1.2) la suma es únicamente sobre los índices de $|e_i\rangle$ y ∂_i . La tilde en el índice \tilde{i} es para indicar que simplemente replica el valor que toma el índice i .

Ejemplo 5.13 Para el campo escalar $\phi = x^2 y + yz$, en el punto $M = (-1, 2, 1)$, tenemos que el gradiente es

$$\nabla \phi = 2xy \hat{\mathbf{i}} + (x^2 + z) \hat{\mathbf{j}} + y \hat{\mathbf{k}} \Rightarrow \nabla \phi(-1, 2, 1) = -4 \hat{\mathbf{i}} + 2 \hat{\mathbf{j}} + 2 \hat{\mathbf{k}}.$$

en ese punto, la tasa de cambio en la dirección del vector $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}} + 2 \hat{\mathbf{j}} + 3 \hat{\mathbf{k}}$ será:

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{u}} = (2xy \hat{\mathbf{i}} + (x^2 + z) \hat{\mathbf{j}} + y \hat{\mathbf{k}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} (\hat{\mathbf{i}} + 2 \hat{\mathbf{j}} + 3 \hat{\mathbf{k}}) \Big|_M = \frac{6}{\sqrt{14}}.$$

Por lo tanto, en el punto $M = (-1, 2, 1)$ la tasa de cambio $d\phi/ds$ máxima se produce en la dirección $\nabla \phi = -4 \hat{\mathbf{i}} + 2 \hat{\mathbf{j}} + 2 \hat{\mathbf{k}}$ con un valor de $|\nabla \phi| = \sqrt{24}$.

5.2.2 Divergencia y flujo en campos vectoriales

Revisando con un poco más de cuidado la expresión para el gradiente podemos ver que

$$\mathbf{grad} \phi = \left(\frac{\langle e_1 |}{h_1} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{h_2} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3 |}{h_3} \frac{\partial}{\partial q^3} \right) \phi,$$

es decir, con esta inspiración podemos construir un funcional lineal

$$\nabla \equiv \frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial q^3},$$

donde: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(h_1, h_2, h_3)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(h_1, h_2, h_3)$ y $\mathcal{G} = \mathcal{G}(h_1, h_2, h_3)$.

Con lo cual, si cuidamos el orden de operación, podremos realizar un “producto interno entre una 1-forma, ∇ y un vector \mathbf{a} ” de la forma

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &\equiv \left[\frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}} \frac{\partial}{\partial q^2} + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial q^3} \right] \cdot [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle], \\ &= \frac{\langle e_1 |}{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle]}{\partial q^1} + \frac{\langle e_2 |}{\mathcal{F}} \cdot \frac{\partial [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle]}{\partial q^2}, \\ &\quad + \frac{\langle e_3 |}{\mathcal{G}} \cdot \frac{\partial [a^1 |e_1\rangle + a^2 |e_2\rangle + a^3 |e_3\rangle]}{\partial q^3}. \end{aligned}$$

Aquí es importante tener cuidado con la posible variación de los vectores base. Notemos que si consideramos el caso de coordenadas cartesianas: $\{q^i\} \rightarrow (x, y, z)$, donde la base $\{|e_i\rangle\} \rightarrow \{|e_x\rangle, |e_y\rangle, |e_z\rangle\}$ es constante, entonces tendremos de forma inmediata:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a^i(x^j)}{\partial x^i} \equiv \partial_i a^i(x^j) = \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z}.$$

5.2.2.1 Divergencia como medida de flujo

El significado físico de la divergencia puede comprenderse si consideramos la siguiente definición, independiente del sistema de coordenadas

$$\mathbf{div} \mathbf{a} = \frac{df}{dV} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s a_{\hat{\mathbf{n}}} dS.$$

Es decir, el flujo por unidad de volumen. Otra vez, para un sistema de coordenadas cartesianas construimos un cubo diferencial con aristas que coincidan con los ejes coordenados. Entonces se tiene que las caras del cubo son como las describimos anteriormente, ver ecuaciones (5.2.1.1). El flujo por las seis caras será

$$df = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}_{x+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}_{x-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}_{y+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}_{y-} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}_{z+} + \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}_{z-},$$

con lo cual

$$\begin{aligned} df &= a_x(x+dx, y, z) dy dz - a_x(x, y, z) dy dz + a_y(x, y+dy, z) dx dz - a_y(x, y, z) dx dz \\ &+ a_z(x, y, z+dz) dx dy - a_z(x, y, z) dx dy, \\ &= [a_x(x+dx, y, z) - a_x(x, y, z)] dy dz + [a_y(x, y+dy, z) - a_y(x, y, z)] dx dz \\ &+ [a_z(x, y, z+dz) - a_z(x, y, z)] dx dy. \end{aligned}$$

Desarrollando por Taylor otra vez, tendremos

$$\begin{aligned} a_x(x+dx, y, z) &\approx a_x(x, y, z) + \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} dx; \quad a_y(x, y+dy, z) \approx a_y(x, y, z) + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} dy; \\ a_z(x, y, z+dz) &\approx a_z(x, y, z) + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Para obtener

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} dz dx dy, \\ &= \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} \right) dV. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$f = \iiint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z} \right) dV \equiv \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV.$$

La primera conclusión es que podemos convertir una integral de superficie cerrada de un campo vectorial, en una integral de volumen encerrada por esa misma superficie. Lo hemos demostrado para el caso de coordenadas cartesianas, pero como el flujo $F = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}$ es un escalar, esta afirmación vale para **cualquier sistema de coordenadas**.

Esto se conoce como el *Teorema de la Divergencia* el cual veremos más adelante (ver sección 5.3.4.1 en la página 444). A partir de este teorema tenemos que si la divergencia de un campo vectorial es positiva, lo interpretaremos como flujo hacia afuera (saliente) del volumen V encerrado por la superficie, S , y si la divergencia del campo es negativa tendremos flujo entrante. Como ilustración puede ver el ejemplo de la página 407.

5.2.2.2 Divergencia y coordenadas curvilíneas

Para encontrar una expresión para la divergencia en coordenadas curvilíneas generalizadas, $q^i = (q^1, q^2, q^3)$, partimos de la definición invariante de sistema de coordenadas

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S a_{\hat{\mathbf{n}}} dS.$$

Al igual que procedimos en coordenadas cartesianas, ahora consideraremos un “paralelepípedo curvilíneo” con tres de sus aristas alineadas con el sistema ortogonal curvilíneo. Las caras de este “paralelepípedo

curvilíneo podrán ser representadas como

$$\begin{aligned} ds_{q^1+} &= (ds_{\rightarrow q^2} ds_{\rightarrow q^3})_{dq^1} |e_1\rangle, ds_{q^1-} = - (ds_{\rightarrow q^2} ds_{\rightarrow q^3}) |e_1\rangle, \\ ds_{q^2+} &= (ds_{\rightarrow q^3} ds_{\rightarrow q^1})_{dq^2} |e_2\rangle, ds_{q^2-} = - (ds_{\rightarrow q^3} ds_{\rightarrow q^1}) |e_2\rangle, \\ ds_{q^3+} &= (ds_{\rightarrow q^1} ds_{\rightarrow q^2})_{dq^3} |e_3\rangle, ds_{q^3-} = - (ds_{\rightarrow q^1} ds_{\rightarrow q^2}) |e_3\rangle, \end{aligned}$$

donde denotamos $ds_{\rightarrow q^i}$ el arco de curva a lo largo de la coordenadas curvilíneas generalizada q^i . Los paréntesis $(\cdot)_{dq^i}$ indican que esta superficie es evaluada en $q^i + dq^i$. Adicionalmente, es de hacer notar que

$$ds_{\rightarrow q^i} = \sqrt{g_{ii}} dq^i = h_i dq^i, \quad \text{aquí los índices repetidos NO indican suma.}$$

Ahora bien, dado que $|a\rangle \equiv \mathbf{a} = a^i(q^j) |e_i\rangle$, el flujo por las seis caras será

$$df = (\mathbf{a} \cdot ds_{q^1+}) + (\mathbf{a} \cdot ds_{q^1-}) + (\mathbf{a} \cdot ds_{q^2+}) + (\mathbf{a} \cdot ds_{q^2-}) + (\mathbf{a} \cdot ds_{q^3+}) + (\mathbf{a} \cdot ds_{q^3-}).$$

Para comenzar vemos que es el flujo del campo vectorial, $a^i(q^j)$, lo que está siendo evaluado en dos puntos distintos:

$$\mathbf{a} \cdot ds_{q^1-} = a^1(q^i) h_2 h_3 dq^2 dq^3, \quad \mathbf{a} \cdot ds_{q^2-} = a^2(q^i) h_3 h_1 dq^3 dq^1, \quad \mathbf{a} \cdot ds_{q^3-} = a^3(q^i) h_1 h_2 dq^1 dq^2.$$

Con lo cual es el flujo lo que debemos desarrollar por Taylor.

$$\begin{aligned} a^1(q^1 + dq^1, q^2, q^3) h_2 h_3 &= a^1(q^i) h_2 h_3 + \frac{\partial (a^1(q^i) h_2 h_3)}{\partial q^1} dq^1, \\ a^2(q^1, q^2 + dq^2, q^3) h_3 h_1 &= a^2(q^i) h_3 h_1 + \frac{\partial (a^2(q^i) h_3 h_1)}{\partial q^2} dq^2, \\ a^3(q^1, q^2, q^3 + dq^3) h_1 h_2 &= a^3(q^i) h_1 h_2 + \frac{\partial (a^3(q^i) h_1 h_2)}{\partial q^3} dq^3. \end{aligned}$$

Nótese que en el caso cartesiano no se hizo explícito este hecho por cuanto $h_3 = h_2 = h_1 = 1$. Entonces el flujo diferencial para el caso de coordenadas curvilíneas será

$$df = \frac{\partial (a^1(q^i) h_2 h_3)}{\partial q^1} dq^1 dq^2 dq^3 + \frac{\partial (a^2(q^i) h_3 h_1)}{\partial q^2} dq^2 dq^3 dq^1 + \frac{\partial (a^3(q^i) h_1 h_2)}{\partial q^3} dq^3 dq^1 dq^2.$$

Recordamos que el diferencial de volumen es

$$dV = (ds_{\rightarrow q^1}) (ds_{\rightarrow q^2}) (ds_{\rightarrow q^3}) = \sqrt{g_{11}} dq^1 \sqrt{g_{22}} dq^2 \sqrt{g_{33}} dq^3 = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3,$$

donde denotamos a $ds_{\rightarrow q^i}$ el arco de curva a lo largo de las coordenadas curvilíneas generalizadas q^i .

Con lo cual identificamos la forma genérica de la divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales

$$\text{div } \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{df}{dV} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (a^1(q^i) h_2 h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial (a^2(q^i) h_3 h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial (a^3(q^i) h_1 h_2)}{\partial q^3} \right].$$

Si hacemos $h = h_1 h_2 h_3$, entonces podemos escribir la divergencia de manera más compacta

$$\text{div } \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial q^i} \left[\frac{a^i(q^j) h}{h_i} \right],$$

pero **siempre teniendo en cuenta** que la suma es sobre los índices de a^i y $\partial/\partial q^i$, por lo que queda indicado que \hat{i} simplemente replica el valor que tome el índice i .

Consideremos con más cuidado el caso en el cual la superficie S **contiene** el origen de coordenadas. Es claro que si el volumen contenido entre dos esferas de distintos radio $\tilde{r} < r$, centradas en el origen y con superficies \tilde{S} y S respectivamente no contiene al origen entonces el flujo será nulo

$$f = \iiint_V \text{div } \mathbf{a} dV = 0 = \iint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS + \iint_{\tilde{S}} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\tilde{s}} d\tilde{S}.$$

El campo vectorial sobre la superficie \tilde{S} de la esfera de radio \tilde{r} es

$$\mathbf{a} = \frac{q}{\tilde{r}^2} \hat{\mathbf{e}}_r, \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{n}}_{\tilde{s}} \equiv -\hat{\mathbf{e}}_r,$$

con lo cual

$$\iint_{\tilde{S}} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\tilde{s}} d\tilde{S} = \iint_{\tilde{S}} \frac{q}{\tilde{r}^2} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot (-\hat{\mathbf{e}}_r) d\tilde{S} = - \iint_{\tilde{S}} \frac{q}{\tilde{r}^2} ds_{\rightarrow\theta} ds_{\rightarrow\varphi},$$

es decir,

$$\iint_{\tilde{S}} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\tilde{s}} d\tilde{S} = \iint_{\tilde{S}} \frac{q}{\tilde{r}^2} ds_{\rightarrow\theta} ds_{\rightarrow\varphi} = \iint_{\tilde{S}} \frac{q}{\tilde{r}^2} \tilde{r}^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = q \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi q,$$

ya que: $d\tilde{S} = h_\theta d\theta h_\varphi d\varphi \equiv \tilde{r} d\theta \tilde{r} \sin(\theta) d\varphi$.

Tenemos entonces que el flujo de un campo singular en un punto (el origen de coordenadas), digamos: $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$, a través de una superficie que encierra ese punto singular, no es nulo y es igual a $4\pi q$. El campo vectorial $\mathbf{a}(\mathbf{r})$, se denominará campo de una partícula fuente si $q > 0$ y campo de un sumidero si $q < 0$.

Ejemplo 5.14 Dos ejemplos en teorías de campos

1. **La ecuación de continuidad** Consideremos una superficie cerrada S que encierra un volumen V . Esta superficie está inmersa en un fluido, de densidad $\rho(\mathbf{r}, t)$ que fluye con un campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Supondremos además que el volumen V que encierra la superficie S no cambia de posición, con lo cual, la variación de masa del fluido contenido en este volumen es

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \iiint_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV.$$

Entonces, la variación de la cantidad de fluido encerrada por la superficie S será igual a la cantidad de fluido que escapa (o ingresa) a través de esa superficie. Esto es

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV = - \iint_S \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = - \iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}, t)) dV,$$

con lo cual

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}, t)) \right] dV = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}, t)) = 0,$$

y esta última representa la ecuación de continuidad en dinámica de fluidos.

2. **Fuentes y sumideros** Consideremos un campo vectorial de la forma

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = q \frac{\mathbf{r}}{r^3} \equiv \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r.$$

La divergencia, en coordenadas esféricas ($h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r \sin(\theta)$), es:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \left[\frac{\partial (a_r(r, \theta, \varphi) h_\theta h_\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial (a_\theta(r, \theta, \varphi) h_\varphi h_r)}{\partial \theta} + \frac{\partial (a_\varphi(r, \theta, \varphi) h_r h_\theta)}{\partial \varphi} \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{q}{r^2} r^2 \sin(\theta) \right] = 0. \end{aligned}$$

Nótese que el origen del sistema coordenado (el punto $r = 0$) no está definido porque no lo estaba en el campo vectorial original $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$. Con lo cual, se tiene que si la superficie S **no** encierra a $r = 0$, entonces el flujo a través de esa superficie será nulo

$$f = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = 0.$$

Es decir, todo lo que entra sale. Sin embargo, si el volumen **contiene** al origen de coordenadas no podemos decir nada por cuanto hay una indeterminación en la expresión de la divergencia.

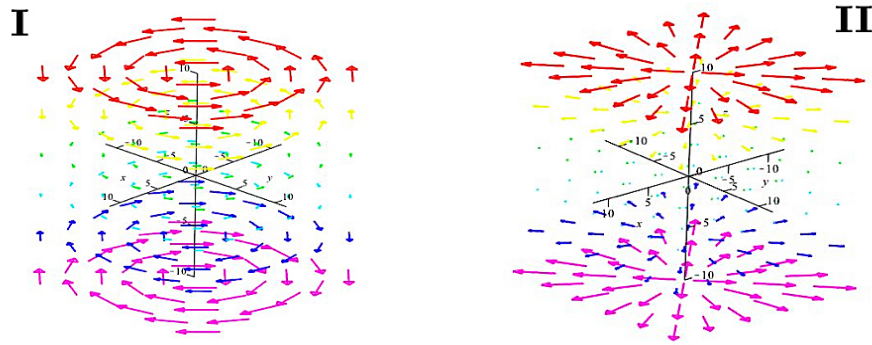


Figura 5.13: Rotacionales de un campo vectorial, líneas de torbellino.

5.2.3 Rotacionales, líneas de torbellino y circulación

Del mismo modo como hemos venido procediendo, haremos otra operación vectorial con el operador nabla ∇ . Tendremos entonces el *rotacional* actuando u operando sobre un campo vectorial $\text{rot } \mathbf{a} \equiv \nabla \times \mathbf{a}$. En coordenadas cartesianas podremos expresar esta operación como

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} &= \varepsilon^{ijk} \partial_j a_k \mathbf{i}_i \equiv \varepsilon^{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x^j} \mathbf{i}_i = (\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) \mathbf{i}_1 + (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) \mathbf{i}_2 + (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) \mathbf{i}_3 \\ &= (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \hat{\mathbf{i}} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \hat{\mathbf{j}} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \hat{\mathbf{k}} \equiv \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

El rotacional de un campo vectorial genera otro campo (*pseudo*) vectorial llamado *campo rotacional* del campo vectorial. Por razones que serán evidentes enseguida, las curvas integrales de este *campo rotacional* se denominan *líneas de torbellino*.

5.2.3.1 Líneas de torbellino

Tal y como se detalló en la sección 5.1.7.2 de la página 383 las *líneas de flujo* se construyen a partir de un vector diferencial paralelo al campo vectorial en cada punto. Esto es, si

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (\partial_y a_z - \partial_z a_y) \hat{\mathbf{i}} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z) \hat{\mathbf{j}} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x) \hat{\mathbf{k}},$$

tendremos que $d\mathbf{r} \propto \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$ determina las líneas (de *torbellino*) perpendiculares al campo $\mathbf{a}(x, y, z)$.

$$\frac{dx}{b_x(x, y, z)} = \frac{dy}{b_y(x, y, z)} = \frac{dz}{b_z(x, y, z)} = d\lambda = \frac{dx}{(\partial_y a_z - \partial_z a_y)} = \frac{dy}{(\partial_z a_x - \partial_x a_z)} = \frac{dz}{(\partial_x a_y - \partial_y a_x)},$$

donde hemos parametrizado la curva con λ .

5.2.3.2 Superficies ortogonales a las líneas de torbellino

Uno también puede plantearse encontrar el conjunto de superficies ortogonales a las líneas de flujo del campo vectorial, $\mathbf{a}(x, y, z)$. Para ello procedemos como lo hicimos en la sección 5.1.7.3 y suponemos que existen estas superficies y que se representan, matemáticamente, como una función $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Por lo tanto:

$$\nabla \varphi \propto \mathbf{a} \propto d\mathbf{r} \Rightarrow \nabla \times [\varphi \mathbf{a}] = \nabla \varphi \times \mathbf{a} + \varphi \nabla \times \mathbf{a} = 0,$$

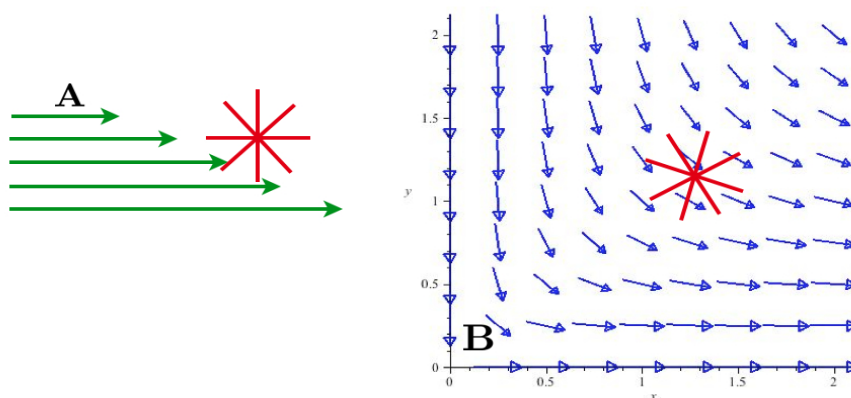


Figura 5.14: Idea sobre el significado físico del rotacional.

es decir, $\nabla\varphi$ es proporcional al campo $\mathbf{a}(x, y, z)$ y al aplicar el rotacional a ambos miembros y proyectar sobre el mismo vector \mathbf{a} la ecuación de la derecha nos queda

$$\mathbf{a} \cdot [\nabla\varphi \times \mathbf{a}] + \mathbf{a} \cdot [\varphi \nabla \times \mathbf{a}] = 0,$$

ambos sumandos se anulan por definición de producto vectorial, pero el segundo sumando $\mathbf{a} \cdot [\varphi \nabla \times \mathbf{a}] = 0$, impone una condición sobre el campo independiente de la función de proporcionalidad.

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que las líneas de flujo de un campo vectorial $\mathbf{a}(x, y, z)$ sean perpendiculares a un conjunto de superficies $\varphi = \varphi(x, y, z)$ es

$$\mathbf{a} \cdot [\nabla\varphi \times \mathbf{a}] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot [\varphi \nabla \times \mathbf{a}] = 0.$$

Ambas pueden ser utilizadas para identificar las superficies ortogonales $\varphi = \varphi(x, y, z)$.

Ejemplificamos su utilidad a través de un ejemplo físico. Si $\mathbf{a}(x, y, z)$ fuese un campo de fuerza, digamos para el caso de un fluido en equilibrio estático

$$\nabla p = \rho \mathbf{f},$$

entonces, esta ecuación nos permite determinar como estaría estratificada la presión en el fluido. Al tomar

$$\nabla \times [\rho \mathbf{f}] \Rightarrow \mathbf{f} \cdot [\rho \nabla \times \mathbf{f}] = 0,$$

por lo tanto, \mathbf{f} será siempre ortogonal al rotacional de la fuerza en todo punto del campo, es decir, el equilibrio sólo es posible si las líneas de fuerza \mathbf{f} de siempre son ortogonales a las trayectorias de $\nabla \times \mathbf{f}$.

5.2.3.3 Circulación de un campo vectorial

El concepto (y el nombre de *rotacional*) surge de la idea de rotación (¿circulación?) que este operador descubre al ser “aplicado” a un campo vectorial. Como se muestra en la figura 5.14, la idea intuitiva es colocar un “detector” de rotación inmerso en el campo. En este caso es un par de aspas e imaginamos que el campo vectorial representa un campo de velocidades de un fluido. Si el fluido hace girar las aspas en sentido horario (tirabuzón o sacacorchos derecho hacia arriba) diremos que el campo tiene una “circulación” positiva y el rotacional del campo siempre será positivo en esa región. Si es a la inversa, diremos que el campo tiene una “circulación” negativa y el rotacional también lo será en esa región. Finalmente, si el par de aspas no rota, el campo tendrá una circulación nula o no tendrá circulación y su rotacional será también nulo en esa región.

En esta sección haremos una breve introducción al concepto de circulación y dejamos para la sección 5.3 un desarrollo más detallado.

La idea de circulación se puede generalizar si tomamos un campo vectorial genérico

$$\mathbf{a} = a_x(x, y, z)\hat{\mathbf{i}} + a_y(x, y, z)\hat{\mathbf{j}} + a_z(x, y, z)\hat{\mathbf{k}},$$

con lo cual, la integral de línea cerrada a lo largo de una circunferencia de radio, r , en el plano xy , será

$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} [a_x(x, y, z)\hat{\mathbf{i}} + a_y(x, y, z)\hat{\mathbf{j}} + a_z(x, y, z)\hat{\mathbf{k}}] \cdot [-r \sin(\varphi)\hat{\mathbf{i}} + r \cos(\varphi)\hat{\mathbf{j}}] d\varphi,$$

y suponiendo $r \ll 1$ podemos desarrollar por Taylor las componentes del campo vectorial en el plano xy alrededor del origen de coordenadas $r_{x,y} \sim 0$. Esto es,

$$\begin{aligned} a_x(x, y, 0) &= a_x|_{r=0} + x \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + y \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots \\ &= a_x|_{r=0} + r \cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + r \sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots \\ a_y(x, y, 0) &= a_y|_{r=0} + x \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + y \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots \\ &= a_y|_{r=0} + r \cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + r \sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} + \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral de línea nos queda como

$$\begin{aligned} \Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} - \left[a_x|_{r=0} + r \cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{r=0} + r \sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} \right] r \sin(\varphi) d\varphi + \\ &+ \int_0^{2\pi} \left[a_y|_{r=0} + r \cos(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} + r \sin(\varphi) \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{r=0} \right] r \cos(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \pi r^2 \left\{ \left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} - \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} \right\} + O(r^3).$$

Finalmente vemos que la componente del rotacional en el origen del plano xy es igual al límite de la circulación a lo largo de una curva cerrada, dividida entre el área de la superficie que encierra la curva cerrada.

$$\left. \frac{\partial a_y}{\partial x} \right|_{r=0} - \left. \frac{\partial a_x}{\partial y} \right|_{r=0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\pi r^2}.$$

Hasta aquí desarrollamos el caso particular para la circulación del campo $\mathbf{a}(x, y, z)$ en el plano xy , pero como demostraremos en la sección 5.3.4.2, en general podremos expresar la relación entre circulación y rotacional como

$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS.$$

Esta relación constituye el Teorema de Stokes y será considerada en detalle en la sección 5.3.4.2.

5.2.3.4 Rotacionales y velocidades angulares

Considere un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Entonces la velocidad tangencial de un punto P , con una posición \mathbf{r} medida a un origen O situado en ese eje, siempre es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}(\omega_y z - \omega_z y) + \hat{\mathbf{j}}(\omega_z x - \omega_x z) + \hat{\mathbf{k}}(\omega_x y - \omega_y x),$$

y su rotacional será

$$\nabla \times \mathbf{v} = (\partial_y v_z - \partial_z v_y) \hat{\mathbf{i}} + (\partial_z v_x - \partial_x v_z) \hat{\mathbf{j}} + (\partial_x v_y - \partial_y v_x) \hat{\mathbf{k}} \equiv \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

es decir, por ser un cuerpo rígido la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es independiente de \mathbf{r} ; o lo que es lo mismo, todo el cuerpo rígido tiene la misma velocidad angular. Con ello tendremos que

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{v})^i &= \varepsilon^{ijk} \partial_j (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_k = \varepsilon^{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \omega^l r^m = \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{lmk} \partial_j (\omega^l r^m) = (\delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j) \partial_j (\omega^l r^m) \\ &= (\delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j) \omega^l \partial_j r^m = (\delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j) \omega^l \delta_j^m = \delta_l^i \delta_m^j \omega^l \delta_j^m - \delta_m^i \delta_l^j \omega^l \delta_j^m \\ &= 3\omega^i - \omega^i = 2\omega^i. \end{aligned}$$

por lo tanto $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$.

Si no hubiésemos utilizado la notación de índices tendríamos

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{v})_x &= (\partial_y v_z - \partial_z v_y) = \partial_y (\omega_x y - \omega_y x) - \partial_z (\omega_z x - \omega_x z) = 2\omega_x, \\ (\nabla \times \mathbf{v})_y &= (\partial_z v_x - \partial_x v_z) = \partial_z (\omega_y z - \omega_z y) - \partial_x (\omega_x y - \omega_y x) = 2\omega_y, \\ (\nabla \times \mathbf{v})_z &= (\partial_x v_y - \partial_y v_x) = \partial_x (\omega_z x - \omega_x z) - \partial_y (\omega_y z - \omega_z y) = 2\omega_z. \end{aligned}$$

Otra vez, el rotacional de un campo de velocidades de un cuerpo (que rota) “detecta” su velocidad angular.

5.2.3.5 Rotacionales y coordenadas curvilíneas

Una vez más recurrimos a una definición para el rotacional independiente del sistemas de coordenadas

$$\nabla \times \mathbf{a} \equiv \text{rot } \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint \mathbf{ds} \times \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint \hat{\mathbf{n}}_s \times \mathbf{a} \, ds,$$

y del mismo modo que calculamos el flujo a través de las distintas capas de un volumen podremos (no lo haremos y se lo dejaremos al lector) demostrar que para un sistema de coordenadas ortogonales generalizado tendremos:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{|\mathbf{e}_1\rangle}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 a^3)}{\partial q^2} - \frac{\partial (h_2 a^2)}{\partial q^3} \right] + \frac{|\mathbf{e}_2\rangle}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial (h_1 a^1)}{\partial q^3} - \frac{\partial (h_3 a^3)}{\partial q^1} \right] + \frac{|\mathbf{e}_3\rangle}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 a^2)}{\partial q^1} - \frac{\partial (h_1 a^1)}{\partial q^2} \right].$$

De manera más compacta

$$\text{rot } \mathbf{a} \equiv \nabla \times \mathbf{a} = [\nabla \times \mathbf{a}]^i |\mathbf{e}_i\rangle = \frac{1}{h_j h_k} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial (h_k a^k)}{\partial q^j} |\mathbf{e}_i\rangle = \frac{1}{h} \begin{vmatrix} h_1 |\mathbf{e}_1\rangle & h_2 |\mathbf{e}_2\rangle & h_3 |\mathbf{e}_3\rangle \\ \frac{\partial}{\partial q^1} & \frac{\partial}{\partial q^2} & \frac{\partial}{\partial q^3} \\ h_1 a^1 & h_2 a^2 & h_3 a^3 \end{vmatrix},$$

donde los índices repetidos i, j, k indican suma; mientras que los índices \hat{j} y \hat{k} no indican suma sino que replican los valores de los índices j, k y $h = h_1 h_2 h_3$.

Ejemplo 5.15 Consideremos el siguiente campo vectorial en coordenadas cilíndricas para $z \geq 0$

$$\mathbf{a} = z \hat{\mathbf{e}}_\varphi = z [-\sin(\varphi) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\varphi) \hat{\mathbf{j}}] = -\frac{zy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\mathbf{i}} + \frac{zx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\mathbf{j}},$$

con lo cual el campo rotacional del campo vectorial \mathbf{a} será

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a} = \nabla \times \left[-\frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{j}} \right] = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{k}}.$$

Es claro que el campo vectorial y su campo rotacional son ortogonales

$$\left[-\frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{j}} \right] \cdot \left[-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{\mathbf{k}} \right] = 0.$$

Por lo tanto,

$$d\lambda = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dx = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}dy = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}dz.$$

Las dos primeras ecuaciones proveen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y(x) = xC_1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\lambda} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \tilde{C}_1 \Rightarrow x(\lambda) = \lambda\tilde{C}_1, \\ \frac{dy}{d\lambda} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \tilde{C}_2 \Rightarrow y(\lambda) = \lambda\tilde{C}_2, \end{cases}$$

con

$$C_1 = cte; \quad \tilde{C}_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+(C_1)^2}} = cte; \quad \tilde{C}_2 = -\frac{C_1}{\sqrt{1+(C_1)^2}} = C_1\tilde{C}_1 = cte.$$

Finalmente,

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}dz = d\lambda \Rightarrow \frac{dz}{d\lambda} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{z}{x\sqrt{1+(C_1)^2}} = \frac{z}{\lambda\tilde{C}_1\sqrt{1+(C_1)^2}} = -\frac{z}{\lambda},$$

con lo cual

$$\frac{dz}{d\lambda} = -\frac{z}{\lambda} \Rightarrow z(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\tilde{C}_3.$$

Ejemplo 5.16 Supongamos una circunferencia con radio $r = 2$, la cual viene descrita paramétricamente por el radio vector

$$\mathbf{r}(\varphi) = 2\cos(\varphi)\hat{\mathbf{i}} + 2\sin(\varphi)\hat{\mathbf{j}} \Rightarrow d\mathbf{r} = 2[-\sin(\varphi)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\varphi)\hat{\mathbf{j}}]d\varphi,$$

y nos planteamos “hacer circular el campo” $\mathbf{a} = z(-\sin(\varphi)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\varphi)\hat{\mathbf{j}})$ a lo largo de la esa trayectoria.

Esto es, realizar la siguiente integral

$$\Gamma = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} z(-\sin(\varphi)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\varphi)\hat{\mathbf{j}}) \cdot 2(-\sin(\varphi)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\varphi)\hat{\mathbf{j}})d\varphi = 4\pi z,$$

primero el producto $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$ y luego se integra. El campo vectorial \mathbf{a} está representado en la figura 5.13.

Hemos utilizado el símbolo \oint para denotar la integral de línea en un circuito cerrado. Es la primera idea de integrales de campos vectoriales que veremos con más detalles en la sección 5.3. Es interesante comparar este resultado con el flujo del campo de rotacionales a través de la superficie que delimita la

circunferencia de radio $r = 2$. Vale decir

$$\begin{aligned}\iint (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s ds &= \iint \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\mathbf{i}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \hat{\mathbf{k}} dx dy, \\ &= z \iint \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = z \iint \frac{dr r d\theta}{r} = z \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi z.\end{aligned}$$

Esta “coincidencia” no es tal, corresponde a otro teorema integral para campos vectoriales, el *Teorema de Stokes* (sección 5.3.4.2, página 448) mediante el cual se convierte una integral cerrada de línea de un campo vectorial en el flujo del campo de rotacionales. Este teorema lo estudiaremos con detalle en la sección 5.3.4.2.

5.2.4 Formulario del operador *nabla*, ∇

El operador *nabla*, ∇ , en las fórmulas anteriores actúa como un funcional lineal, esto es, dadas $\varphi(\mathbf{r})$, $\chi(\mathbf{r})$ y $\psi(\mathbf{r})$ funciones escalares de variable vectorial o, \mathbf{a} y \mathbf{b} dos campos vectoriales cualesquiera, se puede generar el siguiente formulario, el cual deberá ser demostrado por el lector

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi + \chi\psi) &= \nabla\varphi + \nabla(\chi\psi) = \nabla\varphi + \psi\nabla\chi + \chi\nabla\psi, \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \nabla \cdot \mathbf{a} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{b} + \nabla\varphi \cdot \mathbf{b}, \\ \nabla \times (\mathbf{a} + \varphi\mathbf{b}) &= \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times (\varphi\mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla\varphi \times \mathbf{b} + \varphi\nabla \times \mathbf{b},\end{aligned}$$

pero si consideramos las cantidades $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ las cosas pueden cambiar mucho

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}, \\ \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} - (\nabla \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}, \\ \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}.\end{aligned}$$

Varias de estas identidades ya fueron demostradas en los ejemplos 1.18, 1.19 y 1.20 en la sección 1.5.5.

Por otro lado, es evidente que

$$\mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) \neq (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} \iff a^j (\partial^i b_i) \neq b_i (\partial^i a^j),$$

por cuanto en las partes izquierdas las derivadas actúan sobre las componentes de \mathbf{b} , mientras que en las partes derechas es sobre las componentes de \mathbf{a} .

Otros casos importantes se presentan cuando los campos escalares y/o vectoriales son a su vez funciones de un campo escalar. Es decir, funciones compuestas. Esto es

$$\psi = \psi(\chi(\mathbf{r})) \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})).$$

En este caso, tendremos

$$\nabla\psi(\chi(\mathbf{r})) = \frac{d\psi}{d\chi}\nabla\chi; \quad \nabla \cdot \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = \nabla\chi \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\chi}; \quad \nabla \times \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = (\nabla\chi) \times \frac{d\mathbf{a}}{d\chi}.$$

Para demostrar, por ejemplo, $\nabla \cdot \mathbf{a}(\chi(\mathbf{r})) = \nabla\chi \cdot \frac{d\mathbf{a}}{d\chi}$, utilizamos la estrategia de Taylor y expandimos el campo vectorial alrededor de un determinado punto, digamos $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ arbitrario. Esto es

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}_0) + \left. \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \right|_{\mathbf{r}_0} (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0)) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{a}}{d\chi^2} \right|_M (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0))^2 + \dots$$

aplicando la divergencia a ambos miembros queda como

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot [\mathbf{a}(\mathbf{r}_0)] + \nabla \cdot \left[\left. \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \right|_{\mathbf{r}_0} (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0)) \right] + \frac{1}{2} \nabla \cdot \left[\left. \frac{d^2\mathbf{a}}{d\chi^2} \right|_M (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0))^2 \right] + \dots$$

con lo cual

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \left. \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \right|_{\mathbf{r}_0} \cdot \nabla \chi(\mathbf{r}) + (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0)) \left. \frac{d^2\mathbf{a}}{d\chi^2} \right|_{\mathbf{r}_0} \cdot \nabla \chi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} (\chi(\mathbf{r}) - \chi(\mathbf{r}_0))^2 \left. \frac{d^3\mathbf{a}}{d\chi^3} \right|_{\mathbf{r}_0} \cdot \nabla \chi(\mathbf{r}) + \dots$$

Esta relación vale para todo \mathbf{r} , en particular para $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Con lo cual

$$\nabla \cdot \mathbf{a}|_{\mathbf{r}_0} = \left. \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \right|_{\mathbf{r}_0} \cdot \nabla \chi(\mathbf{r}_0) \implies \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \cdot \nabla \chi(\mathbf{r}),$$

ya que \mathbf{r}_0 es arbitrario, con lo cual queda demostrado.

Ejemplo 5.17 La fuerza de Lorentz $\mathbf{f} = q(\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b})$ es la fuerza sobre una partícula con carga q que se mueve con una velocidad \mathbf{v} en un campo eléctrico \mathbf{e} , y una inducción magnética \mathbf{b} . Queremos mostrar que

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f} &= q(\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}) \\ \mathbf{e} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{a} &= \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \implies \mathbf{f} = q \left[-\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \right].$$

Podemos ver

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}) = q \left(-\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \epsilon_{jkl} v^k \epsilon^{lmn} \partial_m a_n \mathbf{e}^j = \epsilon_{jkl} \epsilon^{mnl} v^k \partial_m a_n \mathbf{e}^j = (\delta_j^m \delta_k^n - \delta_k^m \delta_j^n) v^k \partial_m a_n \mathbf{e}^j \\ &= (v^k \partial_j a_k - v^k \partial_k a_j) \mathbf{e}^j, \end{aligned}$$

con lo cual

$$F^j = q \left(-\partial^j \phi - \frac{\partial a^j}{\partial t} + v^k \partial^j a_k - v^k \partial_k a^j \right) = q \left(-\partial^j \phi - \frac{\partial a^j}{\partial t} - v^k \partial_k a^j + \partial^j (v^k a_k) - a_k (\partial^j v^k) \right),$$

$$F^j = q \left(-\partial^j \phi - \frac{\partial a^j}{\partial t} - v^k \partial_k a^j + \partial^j (v^k a_k) \right) = q \left[-\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \right],$$

ya que

$$\frac{da^j}{dt} = \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial a^j}{\partial t} = v^i \partial_i a^j + \frac{\partial a^j}{\partial t}; \quad \partial^j v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^j} = 0 \quad \text{y} \quad v^k = v^k(t).$$

◀

Ejemplo 5.18 En coordenadas cilíndricas un campo vectorial tiene por componentes $(0, \sin(\varphi), z)$.

Calculemos:

1. La divergencia en coordenadas esféricas. Una vez más

$$(x^1, x^2, x^3) \equiv (r, \theta, \varphi) \quad \text{y} \quad (x^1, x^2, x^3) \equiv (\rho, \varphi, z),$$

por lo tanto

$$a^{1'} = \frac{\partial x^{1'}(x^m)}{\partial x^k} a^k; \quad a^{2'} = \frac{\partial x^{2'}(x^m)}{\partial x^k} a^k; \quad a^{3'} = \frac{\partial x^{3'}(x^m)}{\partial x^k} a^k,$$

entonces

$$r = \sqrt{z^2 + \rho^2}; \quad \theta = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right); \quad \varphi = \varphi \iff \rho = r \sin(\theta); \quad \varphi = \varphi; \quad z = r \cos(\theta),$$

con lo cual

$$a^{1'} = \frac{\partial x^{1'}(x^m)}{\partial x^k} a^k = \frac{\partial \sqrt{z^2 + \rho^2}}{\partial z} z = \frac{z^2}{\sqrt{(z^2 + \rho^2)}} = \frac{(r \cos(\theta))^2}{\sqrt{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2}} = r \cos^2 \theta,$$

$$a^{2'} = \frac{\partial x^{2'}(x^m)}{\partial x^k} a^k = \frac{\partial \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)}{\partial z} z = \frac{-\rho z}{z^2 + \rho^2} = \frac{-r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} = -\sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$a^{3'} = \sin(\varphi).$$

De modo que el campo vectorial, en esféricas es

$$(0, \sin(\varphi), z) \iff (r \cos^2 \theta, -\sin(\theta) \cos(\theta), \sin(\varphi)),$$

y la divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left[\frac{\partial (r^2 \sin(\theta) r \cos^2(\theta))}{\partial r} + \frac{\partial (r \sin(\theta) (-\sin(\theta) \cos(\theta)))}{\partial \theta} + \frac{\partial (r \sin(\varphi))}{\partial \varphi} \right],$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{3r \sin(\theta) \cos^2(\theta) - 3 \sin(\theta) \cos^2(\theta) + \sin(\theta) + \cos(\varphi)}{r \sin(\theta)}.$$

2. El rotacional en coordenadas cartesianas. Ahora

$$(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}) \iff (x, y, z) \quad \text{y} \quad (x^1, x^2, x^3) \iff (\rho, \varphi, z),$$

con

$$x = \rho \cos(\varphi); \quad y = \rho \sin(\varphi); \quad z = z \iff \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right); \quad z = z.$$

De allí se siguen para las componentes cilíndricas $\mathbf{a} \iff (0, \sin(\varphi), z)$

$$a_x = \frac{\partial (\rho \cos(\varphi))}{\partial \varphi} \sin(\varphi) = -\rho (1 + \cos^2(\varphi)) = -\sqrt{x^2 + y^2} \left[1 + \cos^2\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \right],$$

$$= -\frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$a_y = \frac{\partial \rho \sin(\varphi)}{\partial \varphi} \sin(\varphi) = \rho \cos(\varphi) \sin(\varphi) = \sqrt{x^2 + y^2} \cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \sin\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right),$$

$$= \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$a_z = z.$$

Y el rotacional

$$\nabla \times \mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{j}} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right),$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{\partial \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(-\frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{\partial y} \right) = \frac{2y^3 \hat{\mathbf{k}}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}.$$



5.2.5 Nabla dos veces y el laplaciano

Considerando a *Nabla*, ∇ , como un funcional surge la pregunta de su aplicación repetida sobre distintos objetos. Consideremos primero las siguientes expresiones en coordenadas cartesianas. Esto es

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \phi &= \nabla^2 \phi = \Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi, \\ \nabla \times \nabla \phi &= \left[\varepsilon^{ijk} \partial_j \partial_k \phi \right] \hat{\mathbf{i}}_i = 0, \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) &= \left[\partial^i (\partial^j a_j) \right] \hat{\mathbf{i}}_i = \left[\partial^j \partial^i a_j \right] \hat{\mathbf{i}}_i, \\ \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{a}) &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \left[\varepsilon^{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial^l a^m \right] \hat{\mathbf{i}}_i = \left[\left(\delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j \right) \partial_j \partial^l a^m \right] \hat{\mathbf{i}}_i, \\ &= \left[\partial^i \partial_j a^j \right] \hat{\mathbf{i}}_i - \left[\partial_j \partial^j a^i \right] \hat{\mathbf{i}}_i = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}.\end{aligned}$$

5.2.5.1 Laplaciano y campos escalares

Más allá de la gimnasia de índices para determinar la expresión de la relación vectorial, quizá la más importante de las aplicaciones es el laplaciano, $\nabla^2 \equiv \Delta$, el cual en \mathbb{R}^3 y en coordenadas cartesianas puede expresarse como:

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi.$$

La importancia del laplaciano reside en que la mayor parte (casi todas) de las ecuaciones de la física matemática son ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) de segundo orden y el laplaciano las genera en el espacio, como la solución a la ecuación armónica, o ecuación de Laplace:

$$\Delta \phi = \partial^i \partial_i \phi = \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi = 0,$$

que es de gran importancia en varias áreas de la Física: electrostática, electrodinámica, teoría de la gravitación, ondas, mecánica de fluidos, mecánica cuántica; por citar algunas.

Se puede demostrar fácilmente que el laplaciano cumple con

$$\Delta (\phi + C\psi) = \Delta \phi + C\Delta \psi, \quad \Delta (\phi\psi) = \phi\Delta\psi + \psi\Delta\phi + 2\nabla\psi \cdot \nabla\phi.$$

5.2.5.2 Laplaciano y campos vectoriales

Inspirado en la forma que toma un campo vectorial en coordenadas cartesianas, definiremos el laplaciano de un campo vectorial como la relación

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}).$$

Desarrollando esta expresión en coordenadas cartesianas tendremos que

$$\Delta \mathbf{a} = \left[\partial^i (\partial^j a_j) - (\partial^i \partial_j a^j - \partial_j \partial^j a^i) \right] \hat{\mathbf{i}}_i \implies \Delta \mathbf{a} = (\partial_j \partial^j a^i) \hat{\mathbf{i}}_i \equiv (\Delta a^i) \hat{\mathbf{i}}_i.$$

Es decir, que el laplaciano de un campo vectorial, **expresado en coordenadas cartesianas**, es igual al vector cuyas componentes son los laplacianos de las componentes del campo original. Es importante resaltar que la expresión $\Delta \mathbf{a} = (\Delta a^i) \hat{\mathbf{i}}_i$ se cumple únicamente en coordenadas cartesianas pero la definición que hemos propuesto al desarrollar $\Delta \mathbf{a}$, en una ecuación vectorial y es, por lo tanto, válida en cualquier sistema de coordenadas.

El laplaciano de campos vectoriales nos lleva construir un formulario de relaciones fácilmente demostrables

$$\Delta(\nabla\phi) = \nabla(\Delta\phi); \quad \nabla \cdot (\Delta\mathbf{a}) = \Delta(\nabla \cdot \mathbf{a}); \quad \nabla \times (\Delta\mathbf{a}) = \Delta(\nabla \times \mathbf{a}).$$

Un campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ se denomina un campo laplaciano si es

$$\text{irrotacional: } \nabla \times \mathbf{a} = 0 \quad \text{y} \quad \text{solenoidal: } \nabla \cdot \mathbf{a} = 0,$$

en todo punto del campo. De esta manera, un campo laplaciano es un potencial, es decir:

$$\nabla \times \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \nabla\phi.$$

Este campo queda completamente determinado por el potencial escalar que satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot \nabla\phi = \Delta\phi = 0.$$

A las soluciones de esta ecuación se les denomina soluciones armónicas. Este tipo de soluciones serán consideradas en detalle a lo largo de la sección 5.4.

5.2.5.3 Laplaciano y coordenadas curvilíneas

Considerando las expresiones para el gradiente y la divergencia en coordenadas curvilíneas

$$\text{grad } \phi = \nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial q^1} \langle \mathbf{e}^1 | + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial q^2} \langle \mathbf{e}^2 | + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial q^3} \langle \mathbf{e}^3 |,$$

y

$$\text{div } \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (a^1(q^i) h_2 h_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial (a^2(q^i) h_3 h_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial (a^3(q^i) h_1 h_2)}{\partial q^3} \right],$$

respectivamente, es fácil llegar a la expresión para el laplaciano en coordenadas curvilíneas

$$\nabla^2\phi \equiv \Delta\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(\frac{h_2 h_1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial q^3} \right) \right].$$

Antes de continuar con la siguiente sección, consideremos estos dos puntos importantes:

- De la divergencia (5.2.2.2) y el rotacional (5.2.3.5) tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} &= \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial q^i} \left[\frac{h}{h_i} [\nabla \times \mathbf{a}]^i \right] = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial q^i} \left[\frac{h}{h_i} \frac{1}{h_j h_k} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial (h_k a^k)}{\partial q^j} \right] = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial q^i} \left[\varepsilon^{ijk} \frac{\partial (h_k a^k)}{\partial q^j} \right], \\ &= \frac{1}{h} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial^2 (h_k a^k)}{\partial q^i \partial q^j} = 0, \end{aligned}$$

debido a la simetría para i y j en la segunda derivada y la antisimetría del Levi-Civita cuando se intercambia i por j . Por lo tanto:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} = 0.$$

- Del gradiente (5.2.1.2) y el rotacional (5.2.3.5) tenemos

$$\nabla \times \nabla\phi = \frac{1}{h_j h_k} \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial q^j} (h_k [\nabla\phi]^k) |\mathbf{e}_i\rangle = \frac{1}{h_j h_k} \varepsilon^{ijk} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial q^j \partial q^k} \right] |\mathbf{e}_i\rangle = 0.$$

Por la misma razón del caso anterior.

Entonces se tiene que

$$\nabla \times \nabla\phi = 0.$$

A los campos vectoriales con rotacional nulo se les denominan campos *irrotacionales*. Por (5.2.5.3)

se tiene entonces que el gradiente es irrotacional. Estos campos se pueden expresar siempre como el gradiente de una función escalar. Por ejemplo, para el campo electrostático, el hecho de que $\nabla \times \mathbf{e} = 0$ implica que $\mathbf{e} = -\nabla \phi$. Por otro lado, cuando un campo vectorial tiene divergencia nula, ecuación (5.2.5.3), este campo puede siempre expresarse como el rotacional de otro campo vectorial y se denominan campos *solenoidales*. Por ejemplo, el campo magnético por cumplir con $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ entonces también cumple con $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$.

Ejemplo 5.19 Demostremos la relación

$$\Delta \mathbf{a} \equiv (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{a} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}),$$

y a partir de ella encontraremos las componentes del Laplaciano $\Delta \mathbf{a}$ en coordenadas cilíndricas. Veamos, en coordenadas cartesianas tendremos que

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{a} &= \partial^i (\partial^j a_j) \mathbf{e}_i - \varepsilon^{ijk} \left[\partial_j (\varepsilon_{klm} \partial^l a^m) \right] \mathbf{e}_i = \left[\partial^i (\partial^j a_j) - (\delta_l^i \delta_m^j - \delta_l^j \delta_m^i) \partial_j (\partial^l a^m) \right] \mathbf{e}_i, \\ &= [\partial^i (\partial^j a_j) - \partial_j (\partial^i a^j) + \partial_j (\partial^j a^i)] \mathbf{e}_i = [\partial_j \partial^j a^i] \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Para encontrar la expresión del laplaciano de un vector en coordenadas cilíndricas tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{a} &= \Delta a_x \hat{\mathbf{i}} + \Delta a_y \hat{\mathbf{j}} + \Delta a_z \hat{\mathbf{k}} = \Delta a_x (\cos(\varphi) \mathbf{e}_r - \sin(\varphi) \mathbf{e}_\varphi) + \Delta a_y (\sin(\varphi) \mathbf{e}_r + \cos(\varphi) \mathbf{e}_\varphi) + \Delta a_z \mathbf{e}_z \\ &= (\Delta a_x \cos(\varphi) + \Delta a_y \sin(\varphi)) \mathbf{e}_r + (\Delta a_y \cos(\varphi) - \Delta a_x \sin(\varphi)) \mathbf{e}_\varphi + \Delta a_z \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

ya que

$$\hat{\mathbf{i}} = \cos(\varphi) \mathbf{e}_r - \sin(\varphi) \mathbf{e}_\varphi, \quad \hat{\mathbf{j}} = \sin(\varphi) \mathbf{e}_r + \cos(\varphi) \mathbf{e}_\varphi, \quad \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{e}_z; \quad x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi), \quad z = z.$$

Notemos que

$$\Delta a_x = \partial_j \partial^j a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}, \quad \Delta a_y = \partial_j \partial^j a_y = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2},$$

$$\Delta a_z = \partial_j \partial^j a_z = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}$$

son las componentes **cartesianas**.

Ejemplo 5.20 Las fuerzas de mareas corresponden a la atracción de la luna sobre las partículas (el agua) en la superficie de la tierra ¿Cuál es el potencial que corresponde a las fuerzas de marea?

Recordemos que la fuerza gravitacional que produce las mareas es

$$\mathbf{f} = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \hat{\mathbf{u}}_r,$$

donde r_{Mm} es la distancia (fija) entre los centros Luna y Tierra, y $\hat{\mathbf{u}}_r$ es el radio vector del centro de la Luna a la partícula que se ve afectada. Si ubicamos la Tierra en el centro de coordenadas y la Luna en el eje z tendremos:

$$\mathbf{f} = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \hat{\mathbf{u}}_r = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} (-x \hat{\mathbf{i}} - y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}) = -\nabla \phi,$$

donde:

$$-G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad -G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} 2z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Integrando nos queda

$$\phi = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \frac{x^2}{2} + \mathcal{G}(y, z) \Rightarrow -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{G}(y, z)}{\partial y} = -G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} y \Rightarrow \mathcal{G}(y, z) = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \frac{y^2}{2} + \mathcal{K}(z),$$

$$\phi = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \frac{x^2}{2} + G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \frac{y^2}{2} + \mathcal{K}(z) \Rightarrow -\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \mathcal{K}(z)}{\partial z} = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} 2z \Rightarrow \mathcal{K}(z) = -G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} z^2.$$

Por lo tanto:

$$\phi = G \frac{Mm}{r_{Mm}^3} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - z^2 \right].$$

5.2.6 Derivadas direccionales de campos vectoriales

En la sección 5.2.1 discutimos el concepto de derivada direccional de campos escalares. Ahora consideraremos este mismo concepto pero aplicado a campos vectoriales. Formalmente y como siempre, presentamos la idea de derivada como cociente incremental. Dados dos puntos M y M' y un vector \mathbf{u} que los une (va de $M \rightarrow M'$), entonces por definición

$$d_{|\mathbf{u}\rangle} |a\rangle \equiv \frac{d\mathbf{a}}{du} = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M)}{M' - M} \Rightarrow \left(\frac{d\mathbf{a}}{du} \right)^i = \left(\frac{da^i}{du} \right) = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{a^i(M') - a^i(M)}{M' - M},$$

por consiguiente, si \mathbf{a} tiene por componentes cartesianas (en general cualquier sistema de coordenadas ortogonales) (a_x, a_y, a_z) las componentes del vector derivado serán $\left(\frac{da_x}{du}, \frac{da_y}{du}, \frac{da_z}{du} \right)$.

De modo que inspirados en la derivada direccional de un campo escalar, i.e ecuación (5.7), podemos construir la expresión para la derivada direccional de cada una de las componentes del vector $\frac{d\mathbf{a}}{du}$, esto es

$$\frac{d\phi}{du} = d_{|\mathbf{u}\rangle} \phi = \nabla \phi \cdot \mathbf{u} = u^i \partial_i \phi \Rightarrow \frac{da^i}{du} = \mathbf{u} \cdot \nabla a^i = u^j \partial_j a^i \Rightarrow d_{|\mathbf{u}\rangle} |a\rangle \equiv \frac{d\mathbf{a}}{du} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a}.$$

Otra vez, en coordenadas cartesianas se tiene que

$$d_{|\mathbf{u}\rangle} \mathbf{a} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a} = (u^i \partial_i a^j) \mathbf{e}_j \Rightarrow d_{|\mathbf{u}\rangle} (\circ) \equiv \frac{d(\circ)}{du} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) (\circ) \equiv u^i \partial_i (\circ).$$

5.2.6.1 El campo de aceleraciones de un fluido

El ejemplo más estándar es la descripción del campo de aceleraciones de un fluido en movimiento. El campo de aceleraciones de un fluido, como de costumbre, es la variación del campo de velocidades respecto al tiempo. Esto es, $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Para escribir la expresión de este campo de aceleraciones, supongamos que un fluido se mueve y registra un campo de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ el cual, en general, será inhomogéneo y no estacionario. Identificamos una porción del fluido (partícula) cualquiera y observamos que en un intervalo de tiempo dt esa porción identificada se mueve de $M \rightarrow M'$ y registra un incremento en su velocidad de \mathbf{v} en M a $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ en M' :

$$\mathbf{v}(M) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}(M') \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt).$$

Tal y como ejemplificamos en la figura 5.15, este incremento proviene de dos contribuciones. Una, llamada local, debido a el cambio en la variable temporal y otra, por la comparación del vector velocidad, \mathbf{v} , en dos posiciones (traslación espacial o contribución convectiva).

$$d\mathbf{v}_t = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt \quad \text{y} \quad d\mathbf{v}_u = \frac{d\mathbf{v}}{du} du,$$

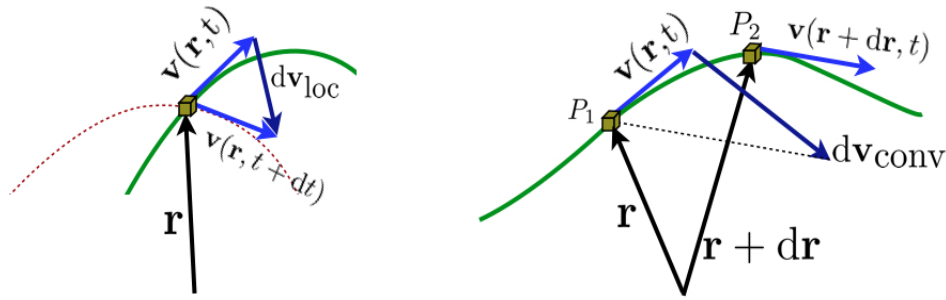


Figura 5.15: Contribuciones a la variación de la velocidad en un fluido. La contribución local proviene de la variación del vector (por la dependencia temporal) alrededor del punto, sin importar la dirección que sigue la partícula y la contribución convectiva proviene de la inhomogeneidad del campo de velocidades. Esto es de la variación del campo de velocidades según la dirección que siga la partícula.

Visto de otro modo un poco más informal, dado que el campo es función de dos variables y una de ellas vectorial

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \Rightarrow \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

De la discusión anterior es claro que $\frac{d\mathbf{v}}{du}$ es la derivada direccional del campo de velocidades a lo largo del vector unitario \mathbf{u} que apunta de $M \rightarrow M'$. Ahora bien, para este caso tenemos que:

$$du = \|d\mathbf{r}\|, \quad du = \|\mathbf{v}\| dt \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|},$$

con lo cual la derivada direccional queda como

$$\frac{d\mathbf{v}}{du} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

y finalmente la aceleración como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Rightarrow a^i = \left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \nabla \right) v^i + \frac{\partial v^i}{\partial t},$$

donde hemos representado las componentes cartesianas de los vectores velocidad y aceleración como v^i y a^i , respectivamente.

Es importante hacer una reflexión un poco más física de las contribuciones. La contribución local proviene de la variación del vector (por la dependencia temporal) alrededor del punto, sin importar la dirección que sigue la partícula y la contribución convectiva proviene de la inhomogeneidad del campo de velocidades. Esto es de la variación del campo de velocidades según la dirección que siga la partícula.

5.2.7 La derivada covariante

En un sistema de coordenadas generalizadas $\{q^i\}$, las bases locales $\{\mathbf{e}_i\}$ son funciones de las coordenadas,

$$|\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(q^1, q^2, q^3), \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{e}^i| \Leftrightarrow \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(q^1, q^2, q^3).$$

En esta sección vamos a adaptar nuestra notación de *bras* y *kets* a expresiones de vectores. Así, los vectores base serán los $\{\mathbf{e}_i\}$ y sus duales recíprocas corresponderán a $\{\mathbf{e}^j\}$. De este modo los campos vectoriales y duales serán

$$|\mathbf{a}\rangle = a^i |\mathbf{e}_i\rangle \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{a}| = a_j \langle \mathbf{e}^j| \Leftrightarrow \mathbf{a}^* = a_j \mathbf{e}^j,$$

respectivamente.

Si el campo vectorial es homogéneo, es decir, tiene magnitud y dirección constante, entonces construimos la variación de sus componentes y de los vectores base como

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i \Rightarrow (a^i + da^i)(\mathbf{e}_i + d\mathbf{e}_i) \equiv a^i \mathbf{e}_i + \underbrace{\mathbf{e}_i da^i + a^i d\mathbf{e}_i + da^i d\mathbf{e}_i}_{\approx \Delta a^i = 0},$$

si nos quedamos sólo con los términos a primer orden: $da = \mathbf{e}_i da^i + a^i d\mathbf{e}_i = 0$, esto significa que el diferencial de un campo vectorial homogéneo se anula,

$$da = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q^j} dq^j = 0.$$

Desde un punto de vista geométrico, un campo vectorial homogéneo se puede interpretar como el resultado de desplazar al vector \mathbf{a} paralelo a si mismo por todos los puntos del espacio, esto significa que la condición $\partial_j a^i = a^i_{;j} = 0$ podría ser considerada como la condición del desplazamiento paralelo.

En general el diferencial de cualquier campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ viene a ser:

$$da = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q^j} dq^j \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q^j} = \frac{\partial a^k}{\partial q^j} \mathbf{e}_k + a^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j} = \frac{\partial a^k}{\partial q^j} \mathbf{e}_k + a^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}.$$

Claramente en el primer término tenemos la componente $\frac{\partial a^k}{\partial q^j}$ de un campo vector, mientras que el segundo término $a^k \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q^j}$ es una mezcla de términos que tenemos que expresar en la misma base \mathbf{e}_i . Es decir, la variación de los vectores base respecto a las coordenadas se puede expresar como una combinación lineal de los vectores base de la forma

$$d\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j \equiv \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} = \left(\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} \right)^i \mathbf{e}_i \equiv \Gamma_{jk}^i \mathbf{e}_i \Rightarrow \Gamma_{jk}^i = \mathbf{e}^i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} \right) \equiv \mathbf{e}^i \cdot d\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j.$$

Nótese que la variación de la base respecto a las coordenadas es una derivada direccional de la base en la dirección de las coordenadas como lo expresamos en la sección 5.2.6. Igualmente hemos identificado, $\Gamma_{jk}^i = \mathbf{e}^i \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} \right)$, como la conexión (o *símbolos de Christoffel del segundo tipo*) y son las componentes de la variación de la base respecto a las coordenadas.

Del mismo modo podemos describir la variación de la base dual \mathbf{e}^j respecto a la base coordenadas como

$$d\mathbf{e}_k \mathbf{e}^j \equiv \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial q^k} = - \left(\frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial q^k} \right)_i \mathbf{e}^i \equiv -\Gamma_{ik}^j \mathbf{e}^i.$$

Es importante señalar que el signo menos surge de la dualidad de las bases ortonormales $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$, entonces

$$\frac{\partial (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j)}{\partial q^k} = \frac{\partial (\delta_i^j)}{\partial q^k} = 0 \Rightarrow \mathbf{e}^j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^k} + \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial q^k} = 0 \Rightarrow \mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial q^k} = -\mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial q^k}.$$

Por lo tanto, podemos escribir ahora la variación de un campo vectorial, \mathbf{a} , respecto a las coordenadas generalizadas como

$$d\mathbf{e}_j \mathbf{a} \equiv \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q^j} = a^i_{;j} \mathbf{e}_i = \left(\frac{\partial a^i}{\partial q^j} + \Gamma_{jk}^i a^k \right) \mathbf{e}_i = \left(\partial_j a^i + \Gamma_{jk}^i a^k \right) \mathbf{e}_i,$$

y equivalentemente para un campo vectorial dual \mathbf{a}^* ,

$$d\mathbf{e}_j \mathbf{a}^* \equiv \frac{\partial \mathbf{a}^*}{\partial q^j} = \frac{\partial a_k}{\partial q^j} \mathbf{e}^k + a_k \frac{\partial \mathbf{e}^k}{\partial q^j} = a_{i;j} \mathbf{e}^i = \left(\frac{\partial a_i}{\partial q^j} - \Gamma_{ij}^k a_k \right) \mathbf{e}^i.$$

Hemos denotado como $a^i_{;j}$ a la (componente de la) derivada covariante del campo vectorial \mathbf{a} . La derivada covariante de un campo vectorial toma en cuenta no sólo el cambio en el campo mismo, a medida que nos movemos a lo largo de las curvas coordenadas, sino que también da cuenta de como cambian las bases. Por lo tanto, si las bases no varían al pasar de un punto a otro (bases rectangulares

cartesianas) los símbolos de Christoffel se anulan y la derivada covariante no es más que la derivada normal. Es importante notar que la derivada covariante $a^i_{;j}$ transforma como un tensor, mientras que la derivada parcial $a^i_{,j} \equiv \partial_j a^i$ no lo hace.

Es fácil convencernos que la derivada covariante de un tensor mixto de rango 2, $\mathcal{T} = T^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$ se puede escribir como

$$d_{\mathbf{e}_k} \mathcal{T} \equiv T^i_{j;k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \left(\frac{\partial T^i_j}{\partial q^k} + \Gamma^i_{jm} T^m_k - \Gamma^m_{kj} T^i_m \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j.$$

Los *símbolos de Christoffel del segundo tipo* representan objetos, simétricos bajo el cambio de los dos índices inferiores, con 27 componentes, $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. También es posible definir *símbolos de Christoffel del primer tipo*, $\Gamma_{ijk} = g_{im} \Gamma^m_{kj}$, con la misma propiedad de simetría $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}$.

Para encontrar la expresión de los *símbolos de Christoffel* en términos de la métrica vamos proceder de una manera un tanto heurística. Es claro que para una base cartesiana $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \Leftrightarrow \{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ los *símbolos de Christoffel* se anulan porque los vectores bases son constantes en módulo, dirección y sentido. En este caso particular, la derivada covariante coincide con la derivada parcial $a^i_{;j} = a^i_{,j} \equiv \partial_j a^i$. La asociación entre derivadas covariantes y derivadas parciales es válida no solo para un campo vectorial sino para cualquier campo tensorial. Entonces tenemos que para el tensor métrico se cumple que $g_{ij;k} = g_{ij,k}$, pero en coordenadas cartesianas $g_{ij,k} = 0$, de forma que su derivada covariante también se anula y como $g_{ij;k} = 0$ es una ecuación tensorial, vale para cualquier sistema de coordenadas. En conclusión: la derivada covariante de la métrica se anula en todos los sistemas de coordenadas.

A partir de este resultado tenemos

$$g_{ij;k} = 0 \Rightarrow \begin{cases} g_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma^m_{kj} g_{im} - \Gamma^m_{ki} g_{jm} = 0 \Rightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma_{i kj} - \Gamma_{j ki} = 0, \\ g_{ki;j} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \Gamma^m_{ji} g_{km} - \Gamma^m_{kj} g_{im} = 0 \Rightarrow \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \Gamma_{k ji} - \Gamma_{i kj} = 0 \quad y \\ g_{jk;i} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \Gamma^m_{ki} g_{jm} - \Gamma^m_{ij} g_{km} = 0 \Rightarrow \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \Gamma_{j ki} - \Gamma_{k ij} = 0. \end{cases}$$

Seguidamente, despejamos $\Gamma_{i kj}$ y llegamos a la siguiente e importante relación:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left[\frac{\partial g_{lk}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^l} \right] \equiv \frac{1}{2} g^{il} \Gamma_{l kj}. \quad (5.8)$$

De ahora en adelante, podremos calcular los símbolos de Christoffel a partir de las derivadas de la métrica respecto a las coordenadas.

Revisemos ahora como transforman los símbolos de Christoffel del primer tipo bajo un cambio de coordenadas. Recordemos que un tensor debe trasformar de la siguiente manera

$$T_{i'j'k'} = \frac{\partial q^l}{\partial q^{i'}} \frac{\partial q^m}{\partial q^{j'}} \frac{\partial q^n}{\partial q^{k'}} T_{lmn}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i'j'k'} &= \mathbf{e}_{i'} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{j'}}{\partial q^{k'}} = \frac{\partial q^l}{\partial q^{i'}} \mathbf{e}_l \cdot \frac{\partial}{\partial q^m} \left(\frac{\partial q^n}{\partial q^{j'}} \mathbf{e}_n \right) \frac{\partial q^m}{\partial q^{k'}} \\ &= \frac{\partial q^l}{\partial q^{i'}} \frac{\partial q^m}{\partial q^{k'}} \frac{\partial q^n}{\partial q^{j'}} \mathbf{e}_l \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial q^m} + \frac{\partial q^l}{\partial q^{i'}} \frac{\partial q^m}{\partial q^{k'}} (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_n) \frac{\partial}{\partial q^m} \left(\frac{\partial q^n}{\partial q^{j'}} \right) \\ &= \frac{\partial q^l}{\partial q^{i'}} \frac{\partial q^m}{\partial q^{k'}} \frac{\partial q^n}{\partial q^{j'}} \Gamma_{lnm} + \frac{\partial q^l}{\partial q^{i'}} \frac{\partial q^m}{\partial q^{k'}} g_{ln} \frac{\partial}{\partial q^m} \left(\frac{\partial q^n}{\partial q^{j'}} \right), \end{aligned}$$

es decir, no transforma como un tensor. Nótese que hemos abusado de la notación haciendo $\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_n \rightarrow g_{ln}$.

Es importante tener en cuenta que la derivada covariante es un tensor, a pesar que la derivada parcial

y los símbolos de Christoffel que conforman la suma no lo son, es decir, la combinación de estos dos objetos que no son tensores forman un tensor.

Para fijar conceptos, y a modo de repaso listamos lo siguiente:

- Si tenemos un campo escalar $\phi = \phi(q^1, q^2, q^3)$, por gradiente entendemos a un vector cuyas componentes covariantes son

$$\frac{\partial \phi}{\partial q^i} \Rightarrow \mathbf{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial q^i} \mathbf{e}_i. \quad (5.9)$$

En el caso particular de la derivada direccional de ϕ en la dirección del vector \mathbf{s} se tiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{grad} \phi, \quad \text{con } \mathbf{s} = s^i \mathbf{e}_i.$$

- Si tenemos un campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(q^1, q^2, q^3)$, para la divergencia de \mathbf{a} tendremos que es la contracción de la derivada covariante de \mathbf{a} , esto es:

$$\mathbf{div} \mathbf{a} \equiv a^i_{;i} = \partial_i a^i + \Gamma^i_{ij} a^j. \quad (5.10)$$

Para el caso de las componentes covariantes de \mathbf{a} , tenemos

$$\mathbf{div} \mathbf{a} \equiv a^i_{;i} = (g^{ij} a_j)_{;i} = g^{ij} a_{j;i} = \partial_i a^i + \frac{\partial_i \sqrt{G}}{\sqrt{G}} a^i = \frac{\partial_i (\sqrt{G} a^i)}{\sqrt{G}}.$$

Para esta última expresión hemos utilizado que $g^{ij}_{;k} = 0 \Rightarrow g^{ij}_{;i} = 0$ y denotado el determinante de la métrica por $G \equiv \det[g_{ij}]$. Se dice que el tensor métrico es transparente a la derivada covariante, lo que se conoce como el Teorema de Ricci, vale decir que el tensor métrico es constante para la derivada covariante,

- El Laplaciano de un campo escalar $\phi = \phi(\mathbf{r})$ es la divergencia del gradiente, entonces

$$\Delta \phi = \mathbf{div} \cdot \mathbf{grad} \phi = \frac{\partial_i [\sqrt{G} (\mathbf{grad} \phi)^i]}{\sqrt{G}} = \frac{\partial_i [\sqrt{G} g^{ij} (\mathbf{grad} \phi)_j]}{\sqrt{G}} = \frac{\partial_i [\sqrt{G} g^{ij} \partial_j \phi]}{\sqrt{G}}. \quad (5.11)$$

Notemos que si se trata de un sistema de coordenadas ortogonal, entonces: $h_1 h_2 h_3 = \sqrt{G}$, $g^{ij} = 1/h_i^2$ si $i = j$, en caso contrario $g^{ij} = 0$. Por lo tanto, de la ecuación (5.11) resulta

$$\Delta \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \partial_i \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \partial_i \phi \right].$$

- A partir de un tensor de segundo rango podemos construir un tensor antisimétrico, $a_{[i;j]} = a_{i;j} - a_{j;i}$, entonces

$$a_{i;j} = \partial_j a_i - \Gamma^k_{ij} a_k \quad \text{y} \quad a_{j;i} = \partial_i a_j - \Gamma^k_{ji} a_k \Rightarrow a_{i;j} - a_{j;i} = \partial_j a_i - \partial_i a_j.$$

Otra vez, aunque las derivadas parciales de un vector no son tensores, su diferencia antisimétrica sí lo será. Adicionalmente, para el caso tridimensional esa diferencia antisimétrica corresponden con las componentes del rotacional, $(\mathbf{rot} A)_{ij} \equiv \partial_j a_i - \partial_i a_j$. De forma y manera que, para el caso de tres dimensiones, a este tensor de segundo orden antisimétrico le podemos asociar un vector con componentes contravariantes, de la siguiente forma

$$(\mathbf{rot} \mathbf{a})^i = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \varepsilon^{ijk} (\mathbf{rot} A)_{jk} = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \varepsilon^{ijk} [\partial_k a_j - \partial_j a_k] = \frac{1}{\sqrt{G}} \varepsilon^{ijk} \partial_j a_k, \quad (5.12)$$

con i, j, k una permutación cíclica de 1, 2, 3. Lo que concuerda perfectamente con nuestra definición de rotacional vista anteriormente en la sección 5.2.3.5.

- Finalmente, listamos las expresiones para las derivadas covariantes de un tensor de rango 2

$$\mathcal{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \Rightarrow T^{ij}_{;k} \equiv \frac{\partial T^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma_{kl}^i T^{lj} + \Gamma_{kl}^j T^{il} = T^{ij}_{,k} + \Gamma_{kl}^i T^{lj} + \Gamma_{kl}^j T^{il},$$

$$\mathcal{T} = T_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \Rightarrow T_{ij;k} \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma_{ik}^l T_{lj} - \Gamma_{jk}^l T_{il} = T_{ij,k} - \Gamma_{ik}^l T_{lj} - \Gamma_{jk}^l T_{il},$$

$$\mathcal{T} = T_j^i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \Rightarrow T_{j;k}^i \equiv \frac{\partial T_j^i}{\partial q^k} + \Gamma_{kl}^i T_j^l - \Gamma_{jk}^l T_l^i = T_{j,k}^i + \Gamma_{kl}^i T_j^l - \Gamma_{jk}^l T_l^i.$$

5.2.8 Derivadas absolutas y geodésicas

En las secciones anteriores discutimos como es el proceso de derivar tensores con respecto a las coordenadas, esto nos llevo a al concepto de la derivada covariante. El problema puede tener un enfoque diferente si consideramos el cálculo de la derivada de tensores a lo largo de una curva parametrizada por alguna variable.

Consideremos entonces el problema de encontrar la derivada de un tensor a lo largo de una curva $\mathbf{r}(\lambda)$ que varía respecto al parámetro λ . Para un sistema de coordenadas arbitrario $\{q^i\}$ con vectores base $\{\mathbf{e}_i\}$ un vector genérico se puede escribir como $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$. De manera que:

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} = \frac{da^i}{d\lambda} \mathbf{e}_i + a^i \frac{d\mathbf{e}_i}{d\lambda} = \frac{da^i}{d\lambda} \mathbf{e}_i + a^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^j} \frac{dq^j}{d\lambda} = \frac{da^i}{d\lambda} \mathbf{e}_i + \Gamma_{ij}^k a^j \frac{dq^k}{d\lambda} \mathbf{e}_k,$$

intercambiando los índices mudos i y k , resulta:

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} = \left[\frac{da^i}{d\lambda} + \Gamma_{kj}^i a^j \frac{dq^k}{d\lambda} \right] \mathbf{e}_i. \quad (5.13)$$

La expresión que está dentro de los corchetes suele denominarse la derivada absoluta o intrínseca de las componentes del vector \mathbf{a} , a lo largo de la curva descrita por el radio vector $\mathbf{r}(\lambda)$. Usualmente se denota por

$$\frac{\delta a^i}{\delta \lambda} \equiv \frac{da^i}{d\lambda} + \Gamma_{kj}^i a^j \frac{dq^k}{d\lambda} = a^i_{;j} \frac{dq^j}{d\lambda}.$$

De manera que

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} = \frac{\delta a^i}{\delta \lambda} \mathbf{e}_i = a^i_{;j} \frac{dq^j}{d\lambda} \mathbf{e}_i.$$

Por supuesto, se puede repetir los cálculos anteriores para obtener la derivada absoluta de las componentes covariantes:

$$\frac{\delta a_i}{\delta \lambda} \equiv a_{i;j} \frac{dq^j}{d\lambda}.$$

También se deriva de manera absoluta tensores de segundo orden, o orden superior, por ejemplo

$$\frac{\delta T_{ij}}{\delta \lambda} \equiv T_{ij;k} \frac{dq^k}{d\lambda}, \quad \frac{\delta T^{ij}}{\delta \lambda} \equiv T^{ij}_{;k} \frac{dq^k}{d\lambda}, \quad \frac{\delta T_j^i}{\delta \lambda} \equiv T_{j;k}^i \frac{dq^k}{d\lambda}.$$

Si consideramos que el parámetro es la longitud de arco s , y si adicionalmente exigimos que el vector tangente $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}(s)/ds$ a la curva descrita por el vector $\mathbf{r}(s)$ siempre apunte en la misma dirección⁶, entonces,

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \mathbf{0}.$$

Al introducir un sistema de coordenadas $\{q^i\}$ junto con una base $\{\mathbf{e}_i\}$, entonces $\boldsymbol{\tau} = \tau^i \mathbf{e}_i$, con $i = 1, 2, 3$.

⁶Lo que se conoce en la geometría diferencial como transporte paralelo de un vector.

Por lo tanto

$$\frac{d\tau}{ds} = \tau_{,j}^i \frac{dq^j}{ds} \mathbf{e}_i,$$

lo que significa que

$$\left[\frac{d\tau^i}{ds} + \Gamma_{kj}^i \tau^k \frac{dq^j}{ds} \right] \mathbf{e}_i = \mathbf{0},$$

como $\tau^i = dq^i/ds$, entonces:

$$\frac{d^2 q^i}{ds^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{dq^k}{ds} \frac{dq^j}{ds} = 0. \quad (5.14)$$

La ecuación (5.14) es la ecuación de la geodésica en el espacio tridimensional real, donde, como sabemos, la distancia mas corta entre dos puntos es una línea recta.

En resumen, una curva cuyo vector tangente es transportado paralelamente a lo largo de la curva se denomina curva geodésica y viene a estar representada por un conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden llamadas ecuaciones de la geodésica. La solución de este conjunto de ecuaciones da como resultado la ecuación paramétrica de la geodésica.

Ejemplo 5.21 El cálculo de los símbolos de Christoffel puede ser un trabajo tedioso, pero si el tensor métrico únicamente tiene elementos en la diagonal muchas de las combinaciones que aparecen en la ecuación (5.8) se anulan.

Consideremos nuevamente coordenadas cilíndricas $(q^1, q^2, q^3) = (\rho, \varphi, z)$, y donde las únicas componentes del tensor métrico diferentes de cero son:

$$g^{11} = g_{11} = 1, \quad g_{22} = \rho^2, \quad g^{22} = 1/\rho^2, \quad g^{33} = g_{33} = 1.$$

El cálculo de $\Gamma_{\rho\rho}^\rho$ se hace de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{1l} \left[\frac{\partial g_{l1}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{l1}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial q^l} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ g^{11} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1} \right] + g^{12} \left[\frac{\partial g_{21}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial q^2} \right] + g^{13} \left[\frac{\partial g_{31}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial q^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial q^3} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{11}}{\partial \rho} + \frac{\partial g_{11}}{\partial \rho} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \rho} \right] = 0. \end{aligned}$$

Para $\Gamma_{\varphi\varphi}^\rho$, resulta

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{1l} \left[\frac{\partial g_{l2}}{\partial q^2} + \frac{\partial g_{l2}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial q^l} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ g^{11} \left[\frac{\partial g_{12}}{\partial q^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} \right] + g^{12} \left[\frac{\partial g_{22}}{\partial q^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial q^2} \right] + g^{13} \left[\frac{\partial g_{32}}{\partial q^2} + \frac{\partial g_{32}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial q^3} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial \rho^2}{\partial \rho} \right] = \frac{1}{2} [-2\rho] = -\rho. \end{aligned}$$

Y los últimos dos diferentes de cero son $\Gamma_{\rho\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\rho}^\varphi$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} g^{2l} \left[\frac{\partial g_{l2}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{l2}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial q^l} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ g^{21} \left[\frac{\partial g_{12}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial q^1} \right] + g^{22} \left[\frac{\partial g_{22}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{22}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial q^2} \right] + g^{23} \left[\frac{\partial g_{32}}{\partial q^1} + \frac{\partial g_{32}}{\partial q^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial q^3} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial \rho^2}{\partial \rho} \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} [2\rho] = \frac{1}{\rho} = \Gamma_{21}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si tenemos el siguiente vector $\mathbf{a} = \frac{z}{\rho^2} \hat{\mathbf{e}}_\rho$, entonces, según las expresiones para la

derivada covariante

$$\begin{aligned} a_{;\rho}^{\rho} &= a_{;1}^1 = \frac{\partial a^1}{\partial q^1} + \Gamma_{1k}^1 a^k = \frac{\partial a^1}{\partial q^1} + \Gamma_{11}^1 a^1 + \Gamma_{12}^1 a^2 + \Gamma_{13}^1 a^3 = \frac{\partial \left(\frac{z}{\rho^2} \right)}{\partial \rho} = -\frac{2z}{\rho^3} \\ a_{;\varphi}^{\rho} &= a_{;2}^1 = \frac{\partial a^1}{\partial q^2} + \Gamma_{2k}^1 a^k = \frac{\partial a^1}{\partial q^2} + \Gamma_{21}^1 a^1 + \Gamma_{22}^1 a^2 + \Gamma_{23}^1 a^3 = 0 \\ a_{;z}^{\rho} &= a_{;3}^1 = \frac{\partial a^1}{\partial q^3} + \Gamma_{3k}^1 a^k = \frac{\partial a^1}{\partial q^3} + \Gamma_{31}^1 a^1 + \Gamma_{32}^1 a^2 + \Gamma_{33}^1 a^3 = \frac{\partial \left(\frac{z}{\rho^2} \right)}{\partial z} = \frac{1}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Y las derivadas del vector \mathbf{a} , ecuación son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q^1} &= a_{;1}^i \mathbf{e}_i = a_{;1}^1 \mathbf{e}_1 + a_{;1}^2 \mathbf{e}_2 + a_{;1}^3 \mathbf{e}_3 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \rho} = -\frac{2z}{\rho^3} \hat{\mathbf{e}}_{\rho} \\ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q^2} &= a_{;2}^i \mathbf{e}_i = a_{;2}^1 \mathbf{e}_1 + a_{;2}^2 \mathbf{e}_2 + a_{;2}^3 \mathbf{e}_3 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varphi} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q^3} &= a_{;3}^i \mathbf{e}_i = a_{;3}^1 \mathbf{e}_1 + a_{;3}^2 \mathbf{e}_2 + a_{;3}^3 \mathbf{e}_3 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} = \frac{1}{\rho^2} \hat{\mathbf{e}}_{\rho}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.22 En coordenadas cilíndricas, $(q^1, q^2, q^3) = (\rho, \varphi, z)$, y para el campo vectorial $\mathbf{a} = \frac{z}{\rho^2} \hat{\mathbf{e}}_{\rho}$, se tiene que según (5.10) la derivada covariante es

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} \equiv a_{;i}^i &= \partial_i a^i + \Gamma_{ij}^i a^j = \partial_1 a^1 + \Gamma_{1j}^1 a^j + \partial_2 a^2 + \Gamma_{2j}^2 a^j + \partial_3 a^3 + \Gamma_{3j}^3 a^j \\ &= \partial_1 a^1 + \Gamma_{21}^2 a^1 = \partial_{\rho} a^{\rho} + \Gamma_{\varphi \rho}^{\varphi} a^{\rho} = \partial_{\rho} \left(\frac{z}{\rho^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{z}{\rho^2} = -\frac{2z}{\rho^3} + \frac{z}{\rho^3} = -\frac{z}{\rho^3}. \end{aligned}$$

Y para las componentes del rotacional de \mathbf{a} , con: $G = \rho^2$ y $a_i = g_{ij} a^j$, tenemos:

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{a})^1 &= \frac{1}{\sqrt{G}} [\varepsilon^{123} \partial_2 a_3 + \varepsilon^{132} \partial_3 a_2] = 0 \\ (\operatorname{rot} \mathbf{a})^2 &= \frac{1}{\sqrt{G}} [\varepsilon^{213} \partial_1 a_3 + \varepsilon^{231} \partial_3 a_1] = \frac{1}{\rho} [\partial_z a_{\rho}] = \frac{1}{\rho^3} \\ (\operatorname{rot} \mathbf{a})^3 &= \frac{1}{\sqrt{G}} [\varepsilon^{312} \partial_1 a_2 + \varepsilon^{321} \partial_2 a_1] = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.23 En el caso de coordenadas cilíndricas, se tiene que los únicos símbolos de Christoffel diferentes de cero son:

$$\Gamma_{22}^1 = -\rho, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{\rho},$$

En esas coordenadas las ecuaciones (5.14) resultan ser

$$\frac{d^2 q^1}{ds^2} + \Gamma_{22}^1 \frac{dq^2}{ds} \frac{dq^2}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 q^2}{ds^2} + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dq^1}{ds} \frac{dq^2}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 q^3}{ds^2} = 0,$$

es decir:

$$\frac{d^2 \rho}{ds^2} - \rho \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0, \quad \frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \frac{d\phi}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = 0.$$

Practicando con SymPy

```
[1]: import sympy
      from sympy import *
      from sympy.vector import *
      init_printing()
```

1. Consideremos el siguiente campo escalar en coordenadas cartesianas:

$$f = 3x^2y + xz^3 - yz,$$

Los campos escalares y campos vectoriales que varían con la posición se pueden construir usando “BaseScalar” de la manera siguiente

```
[2]: R = CoordSys3D('R')
      f = 3*R.x**2*R.y+R.x*R.z**3-R.y*R.z
      f
```

```
[2]: 3xR2yR + xRzR3 - yRzR
```

El operador “Del()” puede funcionar como se muestra a continuación

```
[3]: delop = Del()
      gradient_field = delop(f)
      gradient_field
```

```
[3]: (∂/∂xR (3xR2yR + xRzR3 - yRzR)) îR + (∂/∂yR (3xR2yR + xRzR3 - yRzR)) ĵR +
      (∂/∂zR (3xR2yR + xRzR3 - yRzR)) k̂R
```

Con “.doit()” se ejecuta el cálculo que se había dejado indicado.

```
[4]: gradient_field.doit()
```

```
[4]: (6xRyR + zR3) îR + (3xR2 - zR) ĵR + (3xRzR2 - yR) k̂R
```

O utilizar directamente:

```
[5]: gradient(f)
```

```
[5]: (6xRyR + zR3) îR + (3xR2 - zR) ĵR + (3xRzR2 - yR) k̂R
```

El rotor de lo anterior es:

```
[6]: curl(_)
```

```
[6]: 0
```

Esto significa que el gradiente de la función f es un campo irrotacional.

Para el laplaciano de f podemos hacer

```
[7]: divergence(gradient(f))
```

```
[7]: 6xRzR + 6yR
```

2. Si queremos calcular el laplaciano del siguiente campo escalar

$$f = r \cos^2(\varphi) \cos(\theta) \sin^2(\theta),$$

en coordenadas esféricas.

Podemos definir el sistema de coordenadas de la manera siguiente:

```
[8]: s = CoordSys3D('s', transformation='spherical', variable_names=("r", "theta", "phi"))
s
```

```
[8]: CoordSys3D(s, spherical)
```

```
[9]: print(s.base_scalars())
```

```
(s.r, s.theta, s.phi)
```

Primero escribimos el campo escalar

```
[10]: f = s.r*cos(s.phi)**2*cos(s.theta)*sin(s.theta)**2
f
```

```
[10]: r_s sin^2(theta_s) cos^2(phi_s) cos(theta_s)
```

Luego calculamos el gradiente:

```
[11]: gradient(f).simplify()
```

```
[11]: (sin^2(theta_s) cos^2(phi_s) cos(theta_s)) i_s + ((2 - 3 sin^2(theta_s)) sin(theta_s) cos^2(phi_s)) j_s +
(-cos(2phi_s - 2theta_s)/4 + cos(2phi_s + 2theta_s)/4) k_s
```

La divergencia del gradiente es el laplaciano:

```
[12]: divergence(gradient(f)).simplify()
```

```
[12]: 2 * (5 sin^2(phi_s) sin^2(theta_s) - 5 sin^2(theta_s) + 1) cos(theta_s)
r_s
```

3. Queremos demostrar ahora la siguiente identidad:

$$\nabla \cdot [\nabla f \times \nabla g] = 0,$$

podemos proceder como se muestra a continuación.

```
[13]: f, g = symbols('f g', cls=Function)
ffield = f(R.x, R.y, R.z)
gfield = g(R.x, R.y, R.z)
```

```
[14]: grad_f = gradient(ffield)
grad_g = gradient(gfield)
divergence(grad_f.cross(grad_g))
```

```
[14]: 0
```

Esto es consecuencia directa de que el rotor del gradiente es nulo

4. También es posible manipular expresiones vectoriales, por ejemplo:

$$(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

```
[15]: a1, a2, a3 = symbols('a1 a2 a3', cls=Function)
Afield = a1(R.x, R.y, R.z)*R.i + a2(R.x, R.y, R.z)*R.j + a3(R.x, R.y, R.
↪z)*R.k
```

```
[16]: gradient(divergence(Afield))- curl(curl(Afield))
```

$$[16]: \left(\frac{\partial^2}{\partial x_R^2} a_1(x_R, y_R, z_R) + \frac{\partial^2}{\partial y_R^2} a_1(x_R, y_R, z_R) + \frac{\partial^2}{\partial z_R^2} a_1(x_R, y_R, z_R) \right) \hat{i}_R +$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_R^2} a_2(x_R, y_R, z_R) + \frac{\partial^2}{\partial y_R^2} a_2(x_R, y_R, z_R) + \frac{\partial^2}{\partial z_R^2} a_2(x_R, y_R, z_R) \right) \hat{j}_R +$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_R^2} a_3(x_R, y_R, z_R) + \frac{\partial^2}{\partial y_R^2} a_3(x_R, y_R, z_R) + \frac{\partial^2}{\partial z_R^2} a_3(x_R, y_R, z_R) \right) \hat{k}_R$$

5. SymPy contiene un paquete para geometría diferencial donde podemos definir una Variedad y sistemas de coordenadas (parches)

```
[17]: from sympy.diffgeom import *
m = Manifold('M', 3)
p = Patch('P', m)
m.dim, p.dim
```

```
[17]: (3, 3)
```

Mostramos aquí dos sistemas de coordenadas, el cartesiano y el esférico:

```
[18]: x, y, z = symbols('x y z', real=True)
r, theta, phi = symbols('r theta phi', nonnegative=True)
relation_dict = {
('car', 'esf'): [(x, y, z), (sqrt(x**2 + y**2+z**2), atan(y/
↪x), atan(sqrt(x**2+y**2)/z))],
('esf', 'car'): [(r, theta, phi), (r*cos(phi)*sin(theta), r*sin(phi)*sin(theta), r*cos(theta))]
}
car = CoordSystem('car', p, (x, y, z), relation_dict)
esf = CoordSystem('esf', p, (r, theta, phi), relation_dict)
```

```
[19]: esf.transformation(car) , car.transformation(esf)
```

$$[19]: \left(\left((r, \theta, \phi) \mapsto \begin{bmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{bmatrix} \right), \left((x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \\ \text{atan}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \end{bmatrix} \right) \right)$$

Consideremos la siguiente transformación de coordenadas esféricas a cartesianas:

```
[20]: esf.jacobian(car)
```

$$[20]: \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \sin(\theta) \cos(\phi) & r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

```
[21]: p = esf.point([1, pi/2, pi/2])
car.point_to_coords(p)
```

[21]:
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SymPy también tiene sus coordenadas R^n ya predefinidas así como las leyes de transformación entre ellos. Se puede acceder a las funciones de coordenadas como atributos de la variedad (por ejemplo, “R2.x”), como atributos de los sistemas de coordenadas (por ejemplo, “R2_r.x” y “R2_p.theta”), o usando la interfaz habitual “coord_sys.coord_function(index, name)”.

Por ejemplo “R3_r” se refiere a coordenadas cartesianas, “R3_s” a coordenadas esféricas y “R3_c” a coordenadas cilíndricas.

[22]:

```
from sympy.diffgeom.rn import R3, R3_r, R3_s
R3_s.jacobian(R3_r)
```

[22]:
$$\begin{bmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\phi) \cos(\theta) & -r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & r \sin(\phi) \cos(\theta) & r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}$$

[23]:

```
R3_r.base_scalars(), R3_r.base_vectors(), R3_r.base_oneforms()
```

[23]: $([x, y, z], [\partial_x, \partial_y, \partial_z], [dx, dy, dz])$

[24]:

```
fx, fy, fz = R3_r.base_scalars()
e_x, e_y, e_z = R3_r.base_vectors()
dx, dy, dz = R3_r.base_oneforms()
```

[25]:

```
R3_s.base_scalars(), R3_s.base_vectors(), R3_s.base_oneforms()
```

[25]: $([r, \theta, \phi], [\partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi], [dr, d\theta, d\phi])$

[26]:

```
fr, ft, fp = R3_r.base_scalars()
e_rho, e_theta, e_phi = R3_s.base_vectors()
dr, dt, dp = R3_s.base_oneforms()
```

El diferencial df of the 0-forma f se define para cualquier campo vectorial v como $df(v) = v(f)$

[27]:

```
g = Function('g')
v_field = g(fx, fy, fz)
dg = Differential(v_field)
dg
```

[27]: $d(g(x, y, z))$

El producto tensorial permite la creación de funcionales multilineales (es decir, tensores de orden superior) a partir de campos de orden inferior, por ejemplo, 1-formas y campos vectoriales. Sin embargo, los tensores superiores así creados carecen de las características interesantes que proporciona el otro tipo de producto, el producto en tensorial.

[28]:

```
TensorProduct(dx, dy)(e_x, e_y), TensorProduct(dx, dy)(e_y, e_x)
```

[28]: $(1, 0)$

```
[29]: TensorProduct(dx, fx*dy)(fx*e_x, e_y), TensorProduct(e_x, e_y)(fx**2, fy**2)
```

```
[29]: (x2, 4xy)
```

La métrica en coordenadas cartesianas:

```
[30]: TP = TensorProduct
metric = TP(dx, dx) + TP(dy, dy) + TP(dz, dz)
metric
```

```
[30]: dx ⊗ dx + dy ⊗ dy + dz ⊗ dz
```

```
[31]: metric.rcall(e_y)
```

```
[31]: dy
```

Los símbolos de Christoffel de primer y segundo tipo respectivamente

```
[32]: metric_to_Christoffel_1st(metric)
```

```
[32]:  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 
```

```
[33]: ch = metric_to_Christoffel_2nd(metric)
ch
```

```
[33]:  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 
```

Operador derivada covariante respecto de un vector base:

```
[34]: cvd = BaseCovarDerivativeOp(R3_r, 0, ch)
cvd(fx)
```

```
[34]: 1
```

```
[35]: cvd(fx*e_x)
```

```
[35]:  $\partial_x$ 
```

```
[36]: cvd = CovarDerivativeOp(fx*e_x, ch)
cvd(fx)
```

```
[36]: x
```

```
[37]: cvd(fx*e_x)
```

```
[37]:  $x\partial_x$ 
```

El tensor métrico en coordenadas esféricas

```
[38]: metric_s= TP(dr, dr) + R3_s.r**2*TP(dt, dt) + (R3_s.r*sin(R3_s.
      ↪theta))**2*TP(dp, dp)
metric_s
```

[38]: $\sin^2(\theta) \mathbf{r}^2 d\phi \otimes d\phi + \mathbf{r}^2 d\theta \otimes d\theta + dr \otimes dr$

```
[39]: ch = metric_to_Christoffel_2nd(metric_s)
ch
```

[39]:
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{r} & 0 \\ 0 & 0 & -\sin^2(\theta)\mathbf{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\mathbf{r}} & 0 \\ \frac{1}{\mathbf{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\mathbf{r}} \\ 0 & 0 & \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ \frac{1}{\mathbf{r}} & \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} & 0 \end{bmatrix}$$

```
[40]: metric_to_Christoffel_2nd(metric_s)[0, 1, 1], ↵
      ↪metric_to_Christoffel_2nd(metric_s)[0, 2, 2]
```

[40]: $(-\mathbf{r}, -\sin^2(\theta)\mathbf{r})$

```
[41]: metric_to_Christoffel_2nd(metric_s)[1, 1, 0], ↵
      ↪metric_to_Christoffel_2nd(metric_s)[1, 2, 2]
```

[41]: $\left(\frac{1}{\mathbf{r}}, -\sin(\theta)\cos(\theta)\right)$

```
[42]: metric_to_Christoffel_2nd(metric_s)[2, 2, 0], ↵
      ↪metric_to_Christoffel_2nd(metric_s)[2, 2, 1]
```

[42]: $\left(\frac{1}{\mathbf{r}}, \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$

5.2.9 Ejercicios

1. Dado el campo escalar $\varphi = x^2y + yz$. Encuentre la tasa de cambio con la distancia en la dirección del vector $\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ en el punto $(1, -2, 1)$. ¿En este mismo punto? ¿cuál es la dirección de la máxima tasa de cambio?
2. Encuentre el plano tangente y la línea normal a la superficie $\varphi = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el punto $(0, 0, a)$.
3. Encuentre el laplaciano de la función

$$\varphi = \frac{zx^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

en coordenadas cartesianas y en coordenadas esféricas. Luego, a partir de la expresión para el laplaciano obtenida en coordenadas cartesianas, escriba el laplaciano en esféricas realizando un cambio de coordenadas. Demuestre que el resultado es el mismo.

4. Demuestre que:
 - (a). $\nabla r = \frac{\hat{\mathbf{u}}_r}{r}$.
 - (b). $\nabla \frac{c}{r} = -\frac{c}{r^3} \hat{\mathbf{u}}_r$.
 - (c). $\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_r = 3$.
 - (d). $\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{u}}_r}{r^3} = 0$.

(e). $\nabla \times \hat{\mathbf{u}}_r = 0$.

5. Una partícula se mueve siguiendo el radio vector

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \cos(\omega t) + \mathbf{b} \sin(\omega t), \quad \text{donde } \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ y } \omega \text{ son constantes.}$$

Demuestre que la fuerza que actúa sobre la partícula es una fuerza central.

6. Encuentre el rotacional del campo vectorial

$$\mathbf{f} = (2xz)\hat{\mathbf{i}} + (2yz^2)\hat{\mathbf{j}} + (x^2 + 2y^2z - 1)\hat{\mathbf{k}},$$

Deducir la forma de ϕ para que $\mathbf{f} = \nabla\phi$.

7. Muestre que

(a). $\nabla [\nabla\phi(x, y, z) \times \nabla\phi(x, y, z)] = 0$.

(b). $\nabla \times [\phi(x, y, z)\nabla\phi(x, y, z)] = 0$.

(c). Si $x = r \sin(\theta) \cos(\phi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$, $z = r \cos(\theta)$. Encuentre, en este nuevo sistema de coordenadas (r, θ, ϕ) , las expresiones para: ∇f ; $\Delta = \nabla \cdot \nabla f$ y $\nabla \times \mathbf{v}$.

Considerando:

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial(\circ)}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial(\circ)}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial(\circ)}{\partial z}.$$

8. Muestre que se cumple la siguiente la relación

$$\Delta \mathbf{a} \equiv (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{a} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

y a partir de ella encuentre las componentes del laplaciano $\Delta \mathbf{a}$ en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.

9. Encuentre el vector normal a la superficie

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

en un punto cualquiera $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, luego encuentre la expresión para el ángulo que forma este vector con el eje. Encuentre el límite al cual tiende este ángulo cuando $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$.

10. La ecuación de equilibrio hidrostático en simetría esférica es

$$\nabla P(r) + \rho(r)\nabla\phi(r) = 0,$$

donde $P(r)$ es la presión, $\rho(r)$ la densidad y $\phi(r)$ el potencial gravitacional. Muestre que las normales a las superficies isóbaras y las normales a las superficies equipotenciales, son paralelas.

11. Dado $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ con $\|\mathbf{r}\| = r = \text{cte}$, $f(r)$ un campo escalar bien comportado, \mathbf{a} y \mathbf{c} vectores constantes. Muestre que

(a). $\nabla r = \hat{\mathbf{u}}_r \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}$; $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} f(r)) = \mathbf{a} f(r) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) f'(r) \hat{\mathbf{u}}_r$.

(b). $\nabla \cdot (\mathbf{r} f(r)) = 3f(r) + r f'(r)$;

$$\nabla \cdot ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{c}) = \nabla \cdot ((\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c});$$

$$\nabla \cdot ((\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{c}) = -2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}).$$

(c). Encuentre los enteros n tales que $\nabla \cdot (r^n \mathbf{r}) = 0$.

(d). $\nabla \times \mathbf{r} = \nabla \times (f(r)\mathbf{r}) = 0$;

$$\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{c};$$

$$\nabla \times (\mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})) = \mathbf{a} \times \mathbf{c};$$

$$\nabla \times ((\mathbf{c} \times \mathbf{r})\mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

(e). $(\mathbf{r} \times \nabla) \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) f(r) = r^2 \Delta f(r) - r^2 \frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial f(r)}{\partial r}$ con $\Delta f(r) \equiv (\nabla \cdot \nabla) f(r)$.

12. Encuentre la expresión para la divergencia y el rotacional de la velocidad \mathbf{v} y la aceleración \mathbf{a} de

un cuerpo rígido alrededor de un punto (x, y, z)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \mathbf{a} = \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) ,$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular y $\boldsymbol{\epsilon}$ es un vector constante.

13. Encuentre el rotacional y el flujo para el campo vectorial

$$\mathbf{a} = (x^2 + y - 4) \hat{\mathbf{i}} + 3xy \hat{\mathbf{j}} + (2xz + z^2) \hat{\mathbf{k}}$$

a través del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $z > 0$.

14. Muestre que si el vector $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ es solución a la ecuación $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) - k^2 \mathbf{a} = 0$. Entonces $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ también será solución de la Ecuación vectorial de Helmholtz $(\nabla^2 + k^2) \mathbf{a} = 0$, para cualquier campo vectorial solenoidal, i.e $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$. En particular puede elegir un par de casos: $\mathbf{a}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \nabla \psi$ y $\mathbf{a}_2(\mathbf{r}) = \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \psi)$ con ψ solución de la ecuación escalar de Helmholtz $(\nabla^2 + k^2) \psi = 0$.
15. Pruebe que el campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ de un disco que rota alrededor de su centro con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ cumple con la relación $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$.
16. Considere dos sistemas de coordenadas, uno con y otro sin primas: $B_{j'}^{i'} \leftrightarrow B_j^i$

- (a). Demuestre que

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = \alpha_l^{i'} \alpha_{j'}^m \alpha_{k'}^n \Gamma_{mn}^l + \alpha_n^{i'} \alpha_{k'}^m \frac{\partial \alpha_{j'}^n}{\partial q^m} .$$

- (b). Ahora muestre que

$$a_{i';j'} = \alpha_l^{i'} \alpha_{j'}^m a_{l;m}^l .$$

- (c). Finalmente, demuestre que

$$a_{i';j'} = \alpha_l^{i'} \alpha_{j'}^m a_{l;m}^l .$$

Donde las cantidades $\alpha_{j'}^i$ corresponden a las transformaciones de coordenadas

$$x^i = x^i(x^{j'}) \leftrightarrow x^{n'} = x^{n'}(x^m) ,$$

esto es,

$$\alpha_{j'}^i \equiv \frac{\partial x^i(x^{m'})}{\partial x^{j'}} .$$

5.3 Integrales de campos vectoriales y teoremas integrales

En la sección 1.5.6 vimos algunas de las integrales de campos escalares y vectoriales, en coordenadas cartesianas, que suelen aparecer en los problemas de Física-Matemática. Miremos este asunto de la integración con más detalle.

5.3.1 Integrales de línea

Dentro del grupo de las integrales de línea encontraremos los siguientes tipos de integrales:

$$\int_C \phi \, d\mathbf{r}, \quad \int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{y} \quad \int_C \mathbf{a} \times d\mathbf{r} .$$

Estas integrales requieren que se especifique explícitamente la curva C , la trayectoria, a lo largo de la cual se llevará a cabo la integración. Esas trayectorias serán abiertas o cerradas dependiendo de la curva que se siga en el proceso de integración. En la figura 5.16 ilustramos una trayectoria de integración sobre un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y)$. La curva puede también estar representada en forma paramétrica y el valor de la integral puede depender no sólo de los extremos sino del camino tomado para ir de un

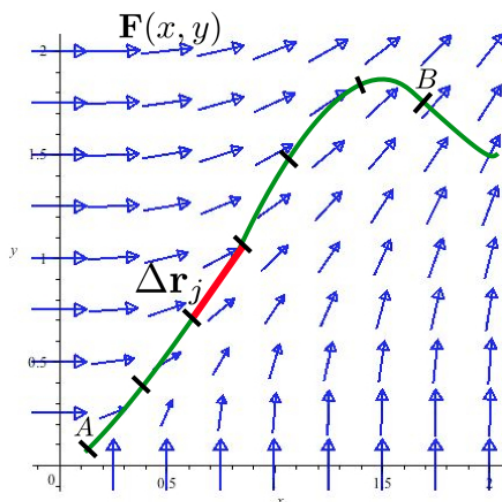


Figura 5.16: Trayectorias de integración y campos vectoriales. Ilustramos un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y)$ y una posible trayectoria de integración representada por su vector tangente $\Delta \mathbf{r}_j$. La curva puede ser parametrizada y el valor de la integral depende del camino tomado para ir de un extremo al otro.

extremo al otro.

- Para las integrales del tipo

$$\int_C \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

vimos que en coordenadas cartesianas, resulta

$$\begin{aligned} \int_C \phi(x, y, z) d\mathbf{r} &= \int_C \phi(x, y, z) (dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}), \\ &= \hat{\mathbf{i}} \int_C \phi(x, y(x), z(x)) dx + \hat{\mathbf{j}} \int_C \phi(x(y), y, z(y)) dy + \hat{\mathbf{k}} \int_C \phi(x(z), y(z), z) dz. \end{aligned}$$

Tal y como indicamos anteriormente, las tres integrales se podrán realizar si conocemos, en cada caso, la expresión del integrando en término de la variable de integración. Esa es la razón por la cual hay que especificar la curva C que define la trayectoria de integración. Es importante señalar también que en coordenadas cartesianas los vectores base, por ser constantes, pueden salir del argumento de la integral.

En coordenadas generalizadas, el elemento diferencial de línea a lo largo de una curva q^i es:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 d\mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i, \quad \text{con} \quad \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}, \quad h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right\|.$$

Notemos que el vector: $d\mathbf{l}_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i$ es lo que hemos denominado el elemento de línea a lo largo de la curva q^i . Esto significa que el elemento de línea siempre lo podremos descomponer en una suma vectorial. Por ejemplo, en coordenadas esféricas es:

$$d\mathbf{l}_r = \hat{\mathbf{e}}_r dr, \quad d\mathbf{l}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta r d\theta, \quad d\mathbf{l}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi r \sin(\theta) d\varphi,$$

y en cilíndricas

$$d\mathbf{l}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\rho d\rho, \quad d\mathbf{l}_\varphi = \hat{\mathbf{e}}_\varphi \rho d\varphi, \quad d\mathbf{l}_z = \hat{\mathbf{e}}_z dz,$$

con lo cual, en coordenadas generalizadas tendremos $\int_C \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_C \phi(\mathbf{r}(q^j)) \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i \right)$

$$\begin{aligned} \int_C \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \hat{\mathbf{e}}_1 \int_C \phi(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1)) h_1 dq^1 + \hat{\mathbf{e}}_2 \int_C \phi(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2)) h_2 dq^2 \\ &+ \hat{\mathbf{e}}_3 \int_C \phi(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3) h_3 dq^3. \end{aligned}$$

- La segunda familia de integrales es

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

también se reduce a integrales escalares. Cuando el campo vectorial está en coordenadas cartesianas se tiene

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C [a_x(x, y, z) \hat{\mathbf{i}} + a_y(x, y, z) \hat{\mathbf{j}} + a_z(x, y, z) \hat{\mathbf{k}}] \cdot [dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}] \\ &= \int_C a_x(x, y(x), z(x)) dx + \int_C a_y(x(y), y, z(y)) dy + \int_C a_z(x(z), y(z), z) dz. \end{aligned}$$

Un caso de particular interés aparece cuando la integral se hace sobre un contorno cerrado, entonces, a la integral

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r},$$

se le denomina la *circulación* del campo vectorial \mathbf{a} a lo largo del contorno C . Anteriormente, cuando discutimos el rotacional, analizamos en la sección 5.2.3.3 la circulación. Con lo cual en coordenadas generalizadas $\int_C \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{a}(\mathbf{r}(q^j)) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 h_i \hat{\mathbf{e}}_i dq^i \right)$, resulta que

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_C a_{q^1}(q^1, q^2(q^1), q^3(q^1)) h_1 dq^1 + \int_C a_{q^2}(q^1(q^2), q^2, q^3(q^2)) h_2 dq^2 \\ &+ \int_C a_{q^3}(q^1(q^3), q^2(q^3), q^3) h_3 dq^3. \end{aligned}$$

- Algo similar ocurre con las integrales que contienen el producto vectorial.

$$\int_C \mathbf{a} \times d\mathbf{r},$$

que en coordenadas cartesianas sería

$$\int_C \mathbf{a} \times d\mathbf{r} = \int_C [a_x(x, y, z) \hat{\mathbf{i}} + a_y(x, y, z) \hat{\mathbf{j}} + a_z(x, y, z) \hat{\mathbf{k}}] \times [dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}].$$

Es decir, formalmente tendremos

$$\int_C \mathbf{a} \times d\mathbf{r} = \left(\int_C a_j dx_k \epsilon^{ijk} \right) |\mathbf{e}_k\rangle \equiv \left(\int_C \tilde{a}_j h_i dq^i \tilde{\epsilon}^{ijk} \right) |\tilde{\mathbf{e}}_k\rangle.$$

La expresión detallada de la integral $\int_C \mathbf{a} \times d\mathbf{r}$ en un sistema de coordenadas generalizadas se la dejamos al lector, quien puede inspirarse en la versión del producto vectorial en coordenadas curvilíneas que presentamos en la sección 5.1.6.2.

Siguiendo con el modelo que desarrollamos en la sección 5.1.5, podemos construir un sistema de coordenadas adaptado a la representación paramétrica de una curva. Entonces, para calcular integrales de línea especificamos esa curva a través de un parámetro. Si el conjunto de coordenadas es el cartesiano

$$x = f(\lambda), \quad y = g(\lambda), \quad z = h(\lambda).$$

Entonces, las componentes de un campo vectorial \mathbf{a} se convertirán en funciones de un único parámetro:

$$\mathbf{a}(x^i) \Rightarrow \begin{cases} a^1(x, y, z) = a_x(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv F(\lambda), \\ a^2(x, y, z) = a_y(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv G(\lambda), \\ a^3(x, y, z) = a_z(f(\lambda), g(\lambda), h(\lambda)) \equiv H(\lambda). \end{cases}$$

Mientras que, para el $d\mathbf{r}$ se tiene

$$dx = f'(\lambda)d\lambda, \quad dy = g'(\lambda)d\lambda, \quad dz = h'(\lambda)d\lambda,$$

por lo tanto:

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [F(\lambda)f'(\lambda) + G(\lambda)g'(\lambda) + H(\lambda)h'(\lambda)] d\lambda.$$

Este método puede utilizarse para cualquier sistema de coordenadas.

La aplicación más común para las integrales de línea aparece en la expresión para el trabajo total realizado por una fuerza cuando desplaza una partícula a través de un camino. Si una fuerza \mathbf{f} mueve una partícula una pequeña distancia $d\mathbf{r}$ a lo largo de una curva C , entonces el trabajo infinitesimal realizado por esta fuerza será $dW = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$. De manera que el trabajo total realizado al completar la trayectoria es

$$W = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

Integrales de camino aparecen también en la ley de Ampere, que asocia el campo magnético \mathbf{b} con la corriente I que circula por una circuito cerrado C :

$$\oint_C \mathbf{b} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I.$$

Ejemplo 5.24 Un problema que suele aparecer en las integrales sobre curvas es que la función con la que se describe la curva C no es univaluada y por lo tanto es necesario dividir la curva en segmentos más pequeños para que la función sea univaluada. A manera de ejemplo vamos a evaluar la integral

$$\oint_C x \, dy,$$

donde C es el círculo: $x^2 + y^2 = a^2$ en el plano $z = 0$. Para evaluar esta integral, debemos expresar x en términos de y . Sin embargo, podemos ver que la función $x = \pm\sqrt{a^2 - y^2}$ no es univaluada en todo el círculo. Por lo tanto, dividimos la curva en dos partes: el semicírculo superior $x = +\sqrt{a^2 - y^2}$ y el semicírculo inferior $x = -\sqrt{a^2 - y^2}$. Así, podemos escribir la integral como:

$$\oint_C x \, dy = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} \, dy + \int_a^{-a} (-\sqrt{a^2 - y^2}) \, dy = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} \, dy = a^2 \pi.$$

También podemos hacer uso de la parametrización: $x = a \cos(\theta)$ y $y = a \sin(\theta)$, donde el parámetro θ varía de 0 a 2π . En este caso la integral se puede evaluar sobre el círculo entero

$$\oint_C x \, dy = a^2 \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \, d\theta = a^2 \pi.$$

Ejemplo 5.25 Calculemos $\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{a} = (2x + y)\hat{\mathbf{i}} + (y - 2x)\hat{\mathbf{j}}$ y C la función $y^2 = 2x$, desde el punto $(0, 0)$ a $(4, 2)$.

La curva y el campo vectorial se encuentran en el plano $x - y$, es decir, $d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}$:

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [(2x + y)\hat{\mathbf{i}} + (y - 2x)\hat{\mathbf{j}}] \cdot [dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}] = \int_C (2x + y)dx + (y - 2x)dy.$$

Por otro lado, $y^2 = 2x \Rightarrow y \, dy = dx$ y

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (2x + y)dx + (y - 2x)dy = \int_0^2 [(y^2 + y)y + (y - y^2)] \, dy = 6.$$

Notemos que pudimos haber escrito la integral en función de la variable x y el resultado sería el mismo.

Si ese mismo camino estuviese definido en términos de un parámetro, digamos $y = \lambda$ y $x = \frac{1}{2}\lambda^2$,

entonces, $dx = \lambda d\lambda$ y, obviamente $dy = d\lambda$. Por lo tanto, tomando los mismos puntos de partida y de llegada, pero ahora expresado en términos del parámetro, se tiene:

$$\int_C (2x + y)dx + (y - 2x)dy = \int_0^2 [(\lambda^2 + \lambda)\lambda + (\lambda - \lambda^2)] d\lambda = 6.$$

Ejemplo 5.26 Dado el siguiente campo vectorial en coordenadas cilíndricas

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = (\kappa_1 z \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\rho + (\kappa_2 z \rho) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + (\kappa_3 \rho \varphi) \hat{\mathbf{e}}_z,$$

donde κ_1 , κ_2 y κ_3 son constantes.

Queremos calcular la integral de línea del campo $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ lo largo de una trayectoria helicoidal, es decir, desde $z = 0$ hasta completar una vuelta, siguiendo la trayectoria de una hélice de radio a y con espiras separadas por una distancia constante b .

Lo que debemos tener entonces es la ecuación paramétrica de una hélice en coordenadas cilíndricas:

$$\rho = f(\lambda) = a, \quad \varphi = g(\lambda) = \lambda, \quad z = h(\lambda) = \frac{b}{2\pi} \lambda.$$

Notemos que a medida que $\varphi = \lambda$ cambia en 2π , la altura cambia en b , es decir, damos una vuelta. Por lo tanto

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \left(\kappa_1 \frac{b}{2\pi} \lambda^2 \right) \hat{\mathbf{e}}_\rho + \left(\kappa_2 \frac{ab}{2\pi} \lambda \right) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + (\kappa_3 a \lambda) \hat{\mathbf{e}}_z,$$

igualmente para $d\mathbf{r} = d\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho d\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi + dz \hat{\mathbf{e}}_z$,

$$d\mathbf{r} = (f'(\lambda)d\lambda) \hat{\mathbf{e}}_\rho + (f(\lambda)g'(\lambda)d\lambda) \hat{\mathbf{e}}_\varphi + (h'(\lambda)d\lambda) \hat{\mathbf{e}}_z = (ad\lambda) \hat{\mathbf{e}}_\rho + \left(\frac{b}{2\pi} d\lambda \right) \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Al sustituir resulta

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [F(\lambda)f'(\lambda) + G(\lambda)f(\lambda)g'(\lambda) + H(\lambda)h'(\lambda)] d\lambda, \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\kappa_2 \frac{a^2 b}{2\pi} \lambda + \kappa_3 \frac{ab}{2\pi} \lambda \right] d\lambda = ab(\kappa_3 + a\kappa_2)\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.27 Consideremos el siguiente campo de fuerza:

$$\mathbf{f} = (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}).$$

1. Calculemos en trabajo $\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de un arco de circunferencia unitaria, colocado en el plano xy : primero girando en sentido antihorario de $0 \rightarrow \pi$ y luego en sentido horario $0 \rightarrow -\pi$. ¿Qué puede concluir del campo de fuerzas?

Lo podemos resolver de varias maneras.

- La forma elegante es expresando el campo de fuerza \mathbf{f} en coordenadas esféricas. Esto es

$$\mathbf{f} = (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) \equiv r^{2n} \mathbf{r} \equiv r^{2n+1} \hat{\mathbf{u}}_r,$$

luego recordamos que $d\mathbf{r}$ es siempre tangente a la trayectoria, y en este caso la trayectoria es una circunferencia unitaria ubicada en el plano xy , entonces

$$d\mathbf{r} \propto \hat{\mathbf{u}}_\phi \Rightarrow \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{en todo punto},$$

con lo cual esta fuerza es conservativa porque

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \forall \quad (x, y) \Rightarrow \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

- La otra forma es con el empleo de la fuerza bruta, cartesiana

$$\int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) \cdot (dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}),$$

como la trayectoria es una circunferencia unitaria ubicada en el plano xy , entonces $y = \sqrt{1-x^2}$, $z = 0$, con x variando entre 1 y -1 , tanto en el caso de circular en sentido antihorario de $0 \rightarrow \pi$ o en sentido horario $0 \rightarrow -\pi$.

$$\begin{aligned} \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^{-1} (x^2 + y^2)^n x dx + \int_0^0 (x^2 + y^2)^n y dy \\ &= \int_1^{-1} (x^2 + (1-x^2))^n x dx = \int_1^{-1} x dx = 0. \end{aligned}$$

No es suficiente, pero podemos sospechar que la fuerza es conservativa, por cuanto dos circulaciones distintas nos dieron el mismo valor de la integral.

2. ¿Ese campo vectorial tendrá un potencial $\varphi(x, y, z)$ asociado, tal que $\mathbf{f} = -\nabla\varphi(x, y, z)$?

Otra vez, planteamos la ecuación $\mathbf{f} = -\nabla\varphi(x, y, z)$ en esféricas. Esto es

$$\mathbf{f} = r^{2n+1}\hat{\mathbf{u}}_r = -\left(\frac{\partial\varphi(r, \theta, \phi)}{\partial r}\hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r, \theta, \phi)}{\partial\theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\varphi(r, \theta, \phi)}{\partial\phi}\hat{\mathbf{u}}_\phi\right),$$

con lo cual tienen que cumplirse las siguientes ecuaciones

$$r^{2n+1} = \frac{\partial\varphi(r, \theta, \phi)}{\partial r}; \quad 0 = \frac{\partial\varphi(r, \theta, \phi)}{\partial\theta}; \quad 0 = \frac{\partial\varphi(r, \theta, \phi)}{\partial\phi}.$$

Las dos últimas ecuaciones, válidas para $r \neq 0$, implican que φ no depende ni de θ , ni de ϕ . La primera puede ser integrada y nos queda como

$$r^{2n+1} = \frac{d\varphi(r)}{dr} \Rightarrow \int r^{2n+1} dr = \varphi(r) \Rightarrow \varphi(r) = \frac{-r^{2n+2}}{2n+2} + C,$$

resultado que claramente diverge para $n = -1$, tanto cuando $r \rightarrow 0$ como cuando $r \rightarrow \infty$.

Obviamente, válida también al hacerlo en cartesianas

$$\mathbf{f} = (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) = -\left(\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right),$$

con lo cual

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^n x &= -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial x}, & (x^2 + y^2 + z^2)^n y &= -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial y} \\ (x^2 + y^2 + z^2)^n z &= -\frac{\partial\varphi(x, y, z)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Integrando la primera de esas ecuaciones

$$\varphi(x, y, z) = -\int (x^2 + y^2 + z^2)^n x dx = -\frac{1}{2} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}(y, z).$$

Donde $\mathcal{C}(y, z)$ es una función que tendremos que ir descubriendo poco a poco. Ahora bien, sustituyendo esa forma de $\varphi(x, y, z)$ en la segunda ecuación, tendremos que

$$(x^2 + y^2 + z^2)^n y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{2} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}(y, z) \right) = (x^2 + y^2 + z^2)^n y - \frac{\partial\mathcal{C}(y, z)}{\partial y},$$

con lo cual concluimos que \mathcal{C} es independiente de y .

$$0 = \frac{\partial(\mathcal{C}(y, z))}{\partial y} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}(z) \Rightarrow \varphi(x, y, z) = -\frac{1}{2} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}(z),$$

y ahora se sustituye esta nueva forma de la función $\varphi(x, y, z)$ en la tercera ecuación

$$(x^2 + y^2 + z^2)^n z = -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{2} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}(z) \right) = (x^2 + y^2 + z^2)^n z - \frac{\partial\mathcal{C}(z)}{\partial z},$$

entonces \mathcal{C} también es independiente de z . Finalmente se determina que

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{2} \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{n+1}}{n+1}.$$

Obviamente es el mismo resultado cuando recordamos que: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y tiene el mismo comportamiento para $n = -1$.

5.3.2 Integrales de superficie

Otros objetos que ya nos hemos encontrado con anterioridad son las integrales de superficie, que pueden ser

$$\int_s \phi \, ds, \quad \int_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{y} \quad \int_s \mathbf{a} \times d\mathbf{s}.$$

Por ejemplo, cuando evaluamos el flujo de un campo vectorial y lo relacionamos con la divergencia interpretamos

$$\iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} \equiv \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \iint_s a_{\hat{\mathbf{n}}} \, dS,$$

como el flujo de las líneas de campo a través del diferencial de superficie ds . Es costumbre que se separen el módulo, dS , de la dirección y el sentido, $\hat{\mathbf{n}}_s$ el cual es el vector normal (sentido positivo) a la superficie. Otra vez, las superficies podrán ser abiertas (cuando disponen de una curva que limita sus fronteras) y cerradas cuando no. Un círculo será una superficie abierta y una esfera cerrada. Por convención supondremos que el vector normal a una superficie cerrada tendrá sentido positivo saliendo.

La utilización de integrales de superficie nos ha permitido definir, de manera invariante (independiente del sistema de coordenadas) las expresiones para los operadores diferenciales. Así hemos podido definir:

$$\text{grad } \phi \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(q^i) \, d\mathbf{s} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \phi(q^i) \, \hat{\mathbf{n}}_s \, dS,$$

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \, dS = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s a_{\hat{\mathbf{n}}} \, dS,$$

$$\text{rot } \mathbf{a} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s d\mathbf{s} \times \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \hat{\mathbf{n}}_s \times \mathbf{a} \, dS.$$

5.3.2.1 Densidad de flujo

Existe una conexión entre el flujo y la intensidad de la fuente de un campo vectorial. La variación en la intensidad de la fuente de un campo vectorial se mide por la densidad de la fuente, por ejemplo, la variación en la intensidad (concentración de las líneas de campo) de la fuente de un campo gravitacional es medido como la densidad de masa.

Al ser las densidades cantidades físicas tratadas de manera local, los flujos locales requiere que se introduzca la noción de densidad de flujo. Podemos hablar entonces de la densidad de flujo, o divergencia, de un campo vectorial en un punto P cuando tomamos un volumen infinitesimal al rededor de P , evaluamos el flujo total del campo vectorial a través de las superficies que conforman el volumen y dividimos el resultado por el volumen. Matemáticamente es

$$\rho_F = \text{div } \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}.$$

Si la superficie se representa por una ecuación del tipo $f(x, y, z) = 0$, entonces un vector unitario perpendicular, en todo punto, a la superficie es

$$\hat{\mathbf{n}}_s = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}.$$

La superficie S puede ser proyectada en una región R del plano xy de manera que un diferencial de superficie de área dS se proyecta como un diferencial de superficie dA en el plano.

$$dS = \frac{dA}{|\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \hat{\mathbf{k}}|} = \frac{|\nabla f| dA}{\nabla f \cdot \hat{\mathbf{k}}} = \frac{|\nabla f| dA}{\partial f / \partial z}.$$

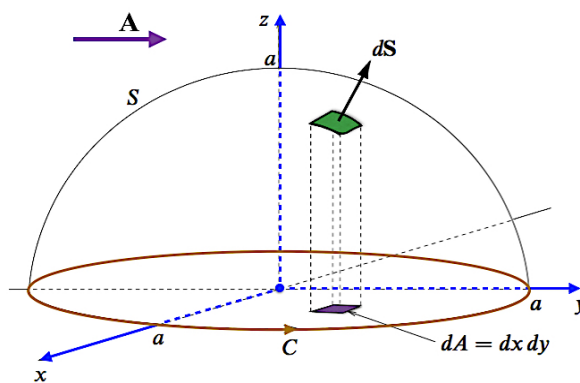


Figura 5.17: La semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

5.3.2.2 Diferencial de área en coordenadas curvilíneas

Para evaluar este tipo de integrales es necesario poder escribir el diferencial de área ds en términos de los diferentes diferenciales coordenados una vez que hemos seleccionado el sistema de coordenadas, pero esto muchas veces puede resultar ser un trabajo arduo. En todo caso, en coordenadas generalizadas, los elementos diferenciales de superficie son vectores perpendiculares al área diferencial y orientados según la regla de la mano derecha, de manera que

$$ds_1 = d\mathbf{u}_2 \times d\mathbf{u}_3, \quad ds_2 = d\mathbf{u}_3 \times d\mathbf{u}_1, \quad ds_3 = d\mathbf{u}_1 \times d\mathbf{u}_2.$$

Esto es:

$$\begin{aligned} ds_1 &= h_2 dq^2 \hat{\mathbf{e}}_2 \times h_3 dq^3 \hat{\mathbf{e}}_3 = h_2 h_3 dq^2 dq^3 \hat{\mathbf{e}}_1 = ds_1 \hat{\mathbf{e}}_1, \\ ds_2 &= h_3 dq^3 \hat{\mathbf{e}}_3 \times h_1 dq^1 \hat{\mathbf{e}}_1 = h_1 h_3 dq^1 dq^3 \hat{\mathbf{e}}_2 = ds_2 \hat{\mathbf{e}}_2, \\ ds_3 &= h_1 dq^1 \hat{\mathbf{e}}_1 \times h_2 dq^2 \hat{\mathbf{e}}_2 = h_1 h_2 dq^1 dq^2 \hat{\mathbf{e}}_3 = ds_3 \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned}$$

Por ejemplo, en coordenadas esféricas sería:

$$\begin{aligned} ds_r &= h_\theta h_\varphi d\theta d\varphi \hat{\mathbf{e}}_r = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{\mathbf{e}}_r, \\ ds_\theta &= h_r h_\varphi dr d\varphi \hat{\mathbf{e}}_\theta = r \sin(\theta) dr d\varphi \hat{\mathbf{e}}_\theta, \\ ds_\varphi &= h_r h_\theta dr d\theta \hat{\mathbf{e}}_\varphi = r dr d\theta \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \end{aligned}$$

Mientras que en cilíndricas:

$$\begin{aligned} ds_\rho &= h_\varphi h_z d\varphi dz \hat{\mathbf{e}}_\rho = \rho d\varphi dz \hat{\mathbf{e}}_\rho, \\ ds_\varphi &= h_\rho h_z d\rho dz \hat{\mathbf{e}}_\varphi = d\rho dz \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \\ ds_z &= h_\rho h_\varphi d\rho d\varphi \hat{\mathbf{e}}_z = \rho d\rho d\varphi \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned}$$

Debido a que muchas veces no es posible representar de manera simple las superficies en determinados sistemas de coordenadas, lo que se hace es trabajar en coordenadas cartesianas y proyectar las superficies en los planos cartesianos.

Ejemplo 5.28 Dado el campo vectorial $\mathbf{a} = y\hat{\mathbf{j}}$ y la semiesfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, con $z \geq 0$, (figura 5.17) y queremos evaluar la integral, es decir, el flujo de \mathbf{a}

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}.$$

Podemos evaluar esta integral de dos maneras. La primera valiéndonos del hecho de tener simetría

esférica, lo que hace que el elemento escalar de superficie se pueda representar de manera sencilla $ds = a^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$ y con el vector unitario a la superficie

$$\hat{\mathbf{n}}_s = \hat{\mathbf{e}}_r = \sin(\theta) \cos(\varphi) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta) \sin(\varphi) \hat{\mathbf{j}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{k}}.$$

. De manera que sobre la superficie $y = a \sin(\theta) \sin(\varphi)$. Así:

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = y [\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r] ds = [a \sin(\theta) \sin(\varphi)] [\sin(\theta) \sin(\varphi)] [a^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi].$$

Integrando

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

La segunda posibilidad es proyectar la semiesfera sobre el plano xy , esta proyección es simplemente una región R compuesta de un círculo de radio a centrado en el origen de coordenadas⁷. La ecuación de este hemisferio superior es $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, por lo tanto

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_S y [\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r] ds = \int_R y [\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r] \frac{|\nabla f| dA}{\partial f / \partial z}.$$

Sobre la superficie se tiene

$$\nabla f = 2x\hat{\mathbf{i}} + 2y\hat{\mathbf{j}} + 2z\hat{\mathbf{k}} = 2\mathbf{r} \Rightarrow |\nabla f| = 2|\mathbf{r}| = 2a,$$

y además

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z = 2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{y}{a}, \quad y \quad dA = dx dy.$$

Con estos ingredientes

$$\int_R y [\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r] \frac{|\nabla f| dA}{\partial f / \partial z} = \iint_R \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

Si lo deseamos, podemos calcular el vector de área \mathbf{s} de la superficie, ya que

$$\mathbf{s} = \int_S d\mathbf{s} = \iint_S a^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{\mathbf{e}}_r,$$

por el hecho de que $\hat{\mathbf{e}}_r$ no es constante, resulta conveniente ir a las coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \iint_S [a^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi] [\sin(\theta) \cos(\varphi) \hat{\mathbf{i}} + \sin(\theta) \sin(\varphi) \hat{\mathbf{j}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{k}}], \\ &= \hat{\mathbf{i}} \iint_S a^2 \sin^2(\theta) \cos(\varphi) d\theta d\varphi + \hat{\mathbf{j}} \iint_S a^2 \sin^2(\theta) \sin(\varphi) d\theta d\varphi + \hat{\mathbf{k}} \iint_S a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta d\varphi, \\ &= a^2 \left[\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta) d\theta \right] \hat{\mathbf{i}} + a^2 \left[\int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta) d\theta \right] \hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + a^2 \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \right] \hat{\mathbf{k}} = a^2 \pi \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Notemos que la magnitud de \mathbf{s} es el valor del área proyectada en el plano xy y no el de la superficie de la semiesfera.

Ejemplo 5.29 Queremos evaluar la integral

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_S [(y + 2x)\hat{\mathbf{i}} + x^2 z \hat{\mathbf{j}} + (z + x^2)\hat{\mathbf{k}}] \cdot d\mathbf{s},$$

donde S es la superficie abierta del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, pero sin resolver la integral de superficie directamente, sino utilizando el teorema de Gauss.

⁷Es importante tener en cuenta que toda línea recta paralela al eje z debe interceptar la superficie S sólo una vez, de no ser así la superficie debe dividirse en superficies más pequeñas para que cumpla con esta condición.

Consideremos la superficie cerrada $\bar{S} = S + S_c$, donde S_c es el área cuando $z = 0$, es decir, el área del círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$. Por lo tanto \bar{S} encierra el volumen V del hemisferio superior de la esfera centrada en el origen de coordenadas. Tenemos entonces que

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\bar{S}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_c} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}.$$

Esto es:

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV - \int_{S_c} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}.$$

Ahora bien, $\nabla \cdot \mathbf{a} = 2 + 0 + 1 = 3$, y para la superficie S_c es bueno recordar que el vector normal es un vector que apunta hacia el exterior, por lo tanto $d\mathbf{s} = -\hat{\mathbf{k}} dx dy$, además, sobre esa superficie el campo toma la forma $\mathbf{a}|_{S_c} = (y + 2x)\hat{\mathbf{i}} + x^2\hat{\mathbf{k}}$. Entonces

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = 3 \int_V dV - \int_{S_c} [(y + 2x)\hat{\mathbf{i}} + x^2\hat{\mathbf{k}}] \cdot [-\hat{\mathbf{k}} dx dy] = 3 \frac{2\pi}{3} + \iint_R x^2 dx dy.$$

Utilizando coordenadas polares

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi + \iint_R \rho^2 \cos^2(\varphi) \rho d\rho d\varphi = 2\pi + \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) d\varphi \int_0^a \rho^3 d\rho = 2\pi + \frac{\pi a^4}{4}.$$

5.3.3 Integrales de volumen

Esta familia de integrales

$$\int_V \phi(\mathbf{r}) dV, \quad \int_V \mathbf{a}(\mathbf{r}) dV,$$

son las más simples de evaluar por el hecho de que el elemento de volumen dV es una cantidad escalar. Hemos manejado estas integrales en los cursos básicos cuando, por ejemplo, calculamos la masa total de un fluido contenido en un volumen

$$M = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV.$$

Mientras que el segundo tipo de integral es simplemente:

$$\int_V \mathbf{a}(x^i) dV = \hat{\mathbf{i}} \int_V a_x(x^j) + \hat{\mathbf{j}} \int_V a_y(x^j) + \hat{\mathbf{k}} \int_V a_z(x^j),$$

en coordenadas cartesianas.

Para coordenadas generalizadas, el diferencial de volumen de un paralelepípedo curvilíneo es:

$$dV = d\mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{u}_2 \times d\mathbf{u}_3 = h_1 h_2 h_3 \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 dq^1 dq^2 dq^3 = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3.$$

En coordenadas cilíndricas y esféricas serían:

$$dV = h_\rho h_\varphi h_z d\rho d\varphi dz = \rho d\rho d\varphi dz,$$

$$dV = h_r h_\theta h_\varphi dr d\theta d\varphi = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi,$$

respectivamente.

5.3.4 Campos vectoriales y teoremas integrales

En esta sección presentaremos un conjunto de teoremas que relacionan las variaciones de un campo vectorial con las fuentes que lo producen. En términos técnicos (matemáticos) resultan fundamentales cuando queremos convertir un tipo de integral (línea, superficie o volumen) en otra.

El primer teorema, el *Teorema de Gauss* permite expresar el valor de una integral de volumen

V encerrado por una determinada superficie S (cerrada) en términos de una integral sobre esa misma superficie. El otro teorema importante es el *Teorema de Stokes*, el cual permite relacionar el valor de una integral de superficie con la integral de línea sobre la curva que delimita esa superficie.

5.3.4.1 Teorema de Gauss

5.3.4.1.1. Presentación y demostración. Cuando discutimos el significado físico de la divergencia, en la sección 5.2.2 de la página 404 presentamos la relación entre la integral de superficie de un campo vectorial, \mathbf{a} , y una de volumen de su derivada. Esta relación constituye el teorema de Gauss (o de la divergencia), el cual se expresa de forma vectorial como

$$\iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} \equiv \iint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV,$$

donde $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x^i)$ es el campo vectorial, $d\mathbf{s} \equiv \hat{\mathbf{n}}_s dS$ es el diferencial de área y dV el diferencial de volumen. podemos convertir una integral de superficie cerrada de un campo vectorial, en una integral de volumen encerrada por esa misma superficie. Debe quedar claro que la superficie cerrada S contiene al volumen V .

Tal y como vimos en su oportunidad (sección 5.2.2) el término $\nabla \cdot \mathbf{a}$ es interpretado como el flujo del campo \mathbf{a} por unidad de volumen, por lo tanto, el lado derecho de la ecuación es la tasa de flujo neto que sale del volumen sobre el cual estamos integrando.

La demostración del teorema de Gauss ya la recorrimos en la sección 5.2.2.1. Aquí haremos un breve recordatorio un poco más general y común en Teorías de Campo. Luego procedemos a centrarnos en sus consecuencias y aplicaciones.

Supongamos un volumen encerrado por una superficie convexa S , como se muestra en la figura 5.18 en los cuadrantes I, II y III. Supongamos además que orientamos el sistema de coordenada de tal forma que una línea paralela a uno de los ejes toca la superficie en dos puntos (figura 5.18, cuadrante I). De este modo podemos trazar una superficie (perpendicular a esa línea) tal que divida la superficie S en dos superficies S_1 y S_2 cada una de las cuales está bordeada por la curva C , (figura 5.18, cuadrante II).

Al evaluar la integral

$$\int_S a_x \hat{\mathbf{i}} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} a_x \hat{\mathbf{i}} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_2} a_x \hat{\mathbf{i}} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S'} [a_x(x_2, y, z) - a_x(x_1, y, z)] dS',$$

ya que las componentes x de los vectores normales a las dos superficies que contribuyen (figura 5.18, cuadrante III) tienen signos opuestos

$$dS_{2x} = \hat{\mathbf{i}} \cdot d\mathbf{s}_2 = -\hat{\mathbf{i}} \cdot d\mathbf{s}_1 = -dS_{1x} = dydz = dS'.$$

Ahora bien, dado que

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{a_x(x_2, y, z) - a_x(x_1, y, z)}{x_2 - x_1} \Rightarrow a_x(x_2, y, z) - a_x(x_1, y, z) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial a_x}{\partial x} dx,$$

con lo cual

$$\int_S a_x \hat{\mathbf{i}} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S'} \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial a_x}{\partial x} dx \right] dydz = \int_V \frac{\partial a_x}{\partial x} dV.$$

Equivalentemente, al hacerlo en las direcciones $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, obtendremos

$$\int_S a_y \hat{\mathbf{j}} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \frac{\partial a_y}{\partial y} dV \quad \text{y} \quad \int_S a_z \hat{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dV.$$

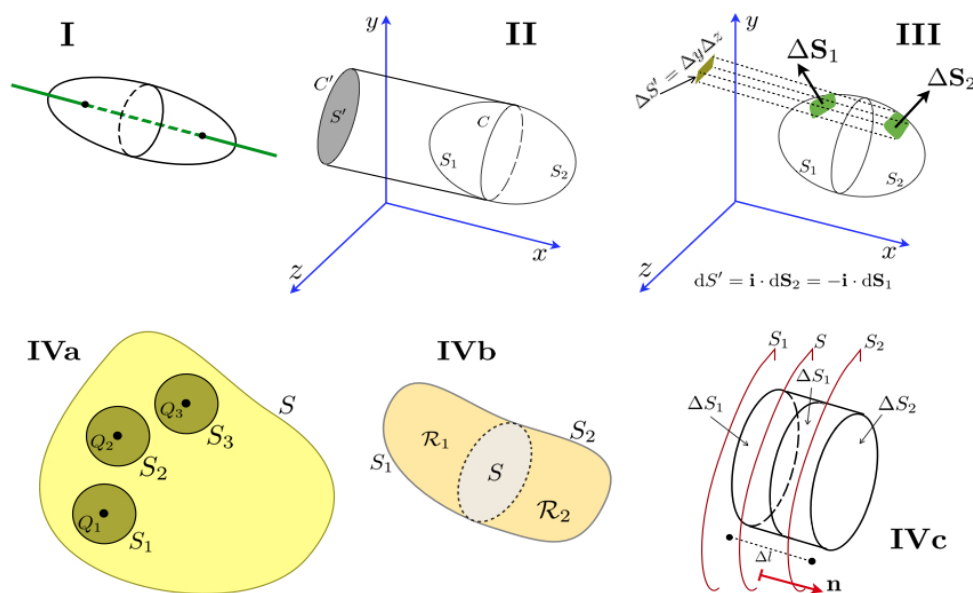


Figura 5.18: Teoremas de Gauss

Finalmente hemos demostrado el teorema de la divergencia o teorema de Gauss

$$\iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} \equiv \iint_s \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS = \int_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV = \int_V (\partial_i a^i) dV = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV.$$

5.3.4.1.2. Expresiones equivalentes para el teorema de Gauss. Si bien la expresión estándar es la que hemos presentado, existen algunas variantes que se derivan de ella. Por ejemplo si consideramos un campo escalar, $\phi(x, y, z)$, el teorema de Gauss nos conduce a

$$\iint_s \phi(x^i) d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV \quad \text{y} \quad \iint_s d\mathbf{s} \times \mathbf{b}(x^i) = \iiint_V \nabla \times \mathbf{b}(x^i) dV,$$

donde $\mathbf{b}(x, y, z)$ es un campo vectorial.

Para comprobar la primera de estas dos relaciones consideramos un vector \mathbf{c} constante y construimos un campo vectorial: $\mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{c} \phi(x, y, z)$, entonces

$$\begin{aligned} \iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} \cdot \iint_s \phi(x^i) d\mathbf{s} = \mathbf{c} \cdot \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV \\ 0 &= \mathbf{c} \cdot \left[\iint_s \phi(x^i) d\mathbf{s} - \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV \right], \end{aligned}$$

es decir, para todo vector \mathbf{c} siempre se cumple que

$$\iint_s \phi(x^i) d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \phi(x^i) dV.$$

Esa misma metodología se puede aplicar para demostrar la segunda relación si consideramos un campo vectorial $\mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{c} \times \mathbf{b}(x, y, z)$, con \mathbf{c} vector constante y se procede de una manera similar.

5.3.4.1.3. Teorema de Gauss y campo eléctrico. La aplicación más emblemática del teorema de Gauss la constituye el cálculo de la divergencia del campo eléctrico \mathbf{e} y su relación con las distribuciones de cargas existentes dentro de un volumen dado. Desde siempre sabemos que el campo eléctrico producido

por una carga Q_i viene dado por

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} \Rightarrow \iint_{S_i} \mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

En definitiva, la “deducción” de una de las ecuaciones de Maxwell.

Si calculamos el flujo del campo eléctrico en una región sin cargas todas las líneas del campo $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ atraviesan el volumen: todas entran y todas salen. Sin embargo si tenemos un conjunto de cargas discretas distribuidas dentro de la región encerrada por la superficie S , (ver figura 5.18, cuadrante IVa) podemos englobar cada una de las cargas con superficies esféricas S_i . Por lo tanto

$$\iint_S \mathbf{e} \cdot d\mathbf{s} + \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{e} \cdot d\mathbf{s}_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{e} dV = 0 \Rightarrow \iint_S \mathbf{e} \cdot d\mathbf{s} = - \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{e} \cdot d\mathbf{s}_i.$$

Con lo cual hemos definido una superficie con “huecos” alrededor de cada una de las cargas y llegamos a la conclusión que lo que entra sale. Por su parte, el campo eléctrico medido para cada superficie esférica interior S_i será

$$\mathbf{e}|_{S_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} + \mathbf{e}',$$

donde \mathbf{e}' es el campo de todas las otras cargas presentes en el volumen encerrado por S . Es claro que este campo \mathbf{e}' tiene flujo cero neto sobre cada esfera de superficie S_i . Por lo tanto

$$\iint_S \mathbf{e} \cdot d\mathbf{s} = - \sum_i \iint_{S_i} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_{r_i} + \mathbf{e}' \right) \cdot \mathbf{n}_{S_i} dS_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \iint_{S_i} dS_i = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

donde hemos utilizado:

$$\int_{v_i} (\nabla \cdot \mathbf{e}') dv_i = 0 = \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{e}' \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_i} dS_i, \quad \mathbf{u}_{r_i} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{S_i} = -1 \quad \text{y} \quad \iint_{S_i} dS_i = S_i = 4\pi r_i^2.$$

Finalmente encontramos una de las leyes de Maxwell si reescribimos la integral de superficie utilizando la ley de Gauss

$$\iint_S \mathbf{e} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \Rightarrow \iint_S \mathbf{e} \cdot d\mathbf{s} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{e}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV,$$

con lo cual

$$\int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{e} - \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \right) dV = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

5.3.4.1.4. Discontinuidades y densidades superficiales de carga. Normalmente, siempre consideramos que los campos vectoriales $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ son campos continuos (y, más aún, con todas sus derivadas continuas). Sin embargo, encontramos en la naturaleza situaciones en la cuales el campo varía mucho en una distancia muy corta (infinitesimal). En estas situaciones podemos simular esta rápida variación como una discontinuidad en el campo. Existe formas de aplicar el teorema de Gauss para algunas situaciones en las cuales tratamos con campos discontinuos. La manera apropiada de tratar (derivadas e integrales de) funciones discontinuas es considerándolas no funciones sino distribuciones. Este tipo de tratamiento está fuera del alcance de este formulario y será considerado en otros cursos.

Supongamos el caso que ilustra la figura 5.18, cuadrante IVb. Una región R delimitada por una superficie S , dentro de la cual, una superficie de discontinuidad, \bar{S} , separa dos subregiones R_1 y R_2 a través de la cual un campo vectorial, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$, es discontinuo. Ahora bien, el campo vectorial es continuo en las subregiones, por lo cual el flujo del campo atraviesa las superficies S_1 y \bar{S} que delimitan el volumen v_1 de la región R_1 . Entonces el teorema de Gauss para cada región queda expresado como

$$\int_{v_1} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \iint_{S_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{\bar{S}} \mathbf{a}_+ \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S} \quad \text{y} \quad \int_{v_2} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \iint_{S_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} - \iint_{\bar{S}} \mathbf{a}_- \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S},$$

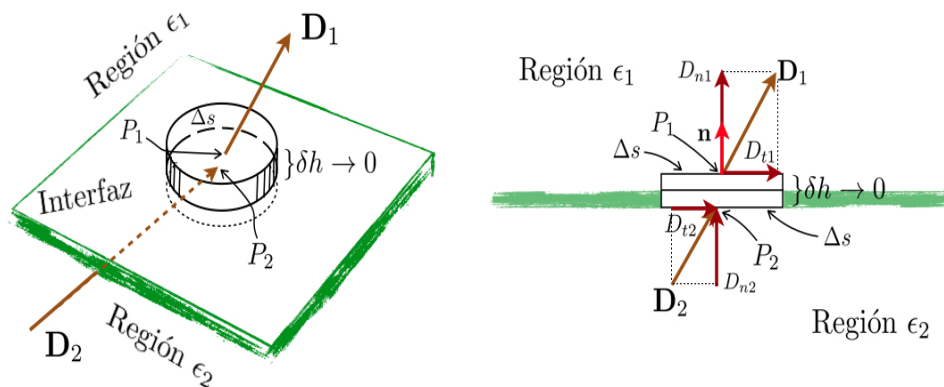


Figura 5.19: Discontinuidad del Vector Desplazamiento. La discontinuidad del vector desplazamiento eléctrico \mathbf{D} , a través de una superficie \bar{S} , que separa dos. Este tipo de discontinuidad en campos irrotacionales es generado por la presencia de fuentes o densidades superficiales de carga.

donde $\hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}$ es el vector normal a la superficie \bar{S} , de separación de las dos regiones. Adicionalmente hemos denotado, \mathbf{a}_+ y \mathbf{a}_- el campo \mathbf{a} evaluado del lado de R_1 y R_2 , respectivamente.

Si ahora consideramos el teorema de Gauss en toda la región

$$\int_{v_1+v_2} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV \equiv \int_{v_1} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV + \int_{v_2} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV.$$

Claramente si el campo es continuo dentro de la región R entonces nos queda la formulación estándar del teorema de Gauss

$$\int_{v_1+v_2} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}.$$

Por el contrario si el campo es discontinuo, entonces debe tomarse en cuenta la discontinuidad del campo y la relación que surge de sumar el flujo a través de las dos regiones es

$$\int_{v_1+v_2} (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} - \iint_{\bar{S}} (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} d\bar{S}$$

con $\hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}$ el vector unitario, normal a la superficie \bar{S} y que apunta de $R_1 \rightarrow R_2$. Es claro que la discontinuidad que cuenta es la de la componente del campo perpendicular a la superficie (ver figura 5.19). Este tipo de discontinuidad en campos irrotacionales es generado por la presencia de fuentes, las cuales, en este caso son densidades superficiales de carga.

Quizá el ejemplo típico para la aplicación de las anteriores consideraciones es la aplicación de las ecuaciones de Maxwell en el caso del vector desplazamiento eléctrico \mathbf{D} , a través de una superficie \bar{S} , que separa dos medios. Este caso se ilustra en la figura 5.18, cuadrante IVc y en la figura 5.19, sólo que en este último caso el vector normal está definido a la inversa: la región 2 corresponde a la región 1 de la figura 5.18, cuadrante IVc. La ecuación de Maxwell correspondiente será

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho(\mathbf{r}) \Rightarrow (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}} = \sigma, \quad \text{con } \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{e},$$

donde $\hat{\mathbf{n}}_{\bar{S}}$ es el vector normal a la superficie (ver figura 5.18, cuadrante IVc) y σ es la densidad superficial de carga en la superficie S . Para comprobar esta relación construimos un volumen cilíndrico infinitesimal que encierra la superficie de discontinuidad, de tal forma que ΔS_2 corresponde con la “tapa” del cilindro y ΔS_1 con su “base” (figura 5.18 cuadrante IVc).

Adicionalmente, como $\delta h \sim 0$, no sólo podremos trabajar sin las integrales, el flujo a través de las

“paredes” del cilindro será despreciable y $\Delta S_2 \approx \Delta S_1$, sino que además, al encerrar la discontinuidad no tomamos en cuenta la contribución de la superficie ΔS_3 (o \bar{S} , en el cuadrante IVb de la figura 5.18). Así

$$(\nabla \cdot \mathbf{D})dV = \mathbf{D}_2 \cdot \Delta \mathbf{s}_2 - \mathbf{D}_1 \cdot \Delta \mathbf{s}_1 \Rightarrow \rho(\mathbf{r})(\Delta S_2 \delta h) = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{s_2} \Delta S_2,$$

con lo cual

$$\rho(\mathbf{r}) \delta h \equiv \sigma = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{s_2}.$$

5.3.4.1.5. Identidades de Green. Cuando consideramos campos vectoriales muy particulares el teorema de Gauss nos lleva a un par de identidades vectoriales conocidas como las *identidades o teoremas de Green*

Supongamos que tenemos dos campos escalares: $\zeta(x, y, z)$ y $\xi(x, y, z)$ y con ellos construimos un campo vectorial

$$\mathbf{a}(x^i) = \zeta(x^i) \nabla \xi(x^i) \Rightarrow \iint_s \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV,$$

es decir

$$\iint_s (\zeta(x^i) \nabla \xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot (\zeta(x^i) \nabla \xi(x^i)) dV,$$

con lo cual arribamos a la *primera identidad de Green, primer teorema de Green o teorema escalar de Green*:

$$\iint_s (\zeta(x^i) \nabla \xi(x^i)) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V [\zeta(x^i) (\nabla \cdot \nabla \xi(x^i)) + \nabla \zeta(x^i) \cdot \nabla \xi(x^i)] dV.$$

Si ahora, consideramos los siguientes campos vectoriales

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\zeta(x^i) \nabla \xi(x^i)) &= \nabla \zeta(x^i) \cdot \nabla \xi(x^i) + \zeta(x^i) \nabla \cdot \nabla \xi(x^i) \\ \nabla \cdot (\xi(x^i) \nabla \zeta(x^i)) &= \nabla \xi(x^i) \cdot \nabla \zeta(x^i) + \xi(x^i) \nabla \cdot \nabla \zeta(x^i). \end{aligned}$$

Restando ambas expresiones tendremos que

$$\nabla \cdot \{\zeta(x^i) \nabla \xi(x^i) - \xi(x^i) \nabla \zeta(x^i)\} = \zeta(x^i) \nabla \cdot \nabla \xi(x^i) - \xi(x^i) \nabla \cdot \nabla \zeta(x^i),$$

y al integrar sobre un volumen V obtendremos la formulación del *teorema simétrico de Green, la segunda identidad*

$$\iiint_V \{\zeta(x^i) \nabla \cdot \nabla \xi(x^i) - \xi(x^i) \nabla \cdot \nabla \zeta(x^i)\} dV = \iint_s \{\zeta(x^i) \nabla \xi(x^i) - \xi(x^i) \nabla \zeta(x^i)\} \cdot d\mathbf{s}.$$

La utilidad de estas relaciones las veremos en el desarrollo de la teoría del Potencial en la sección 5.4 en la página 459.

5.3.4.2 Teorema de Stokes

El teorema de Stokes relaciona una integral de línea escalar de un campo vectorial, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$, a lo largo de una curva cerrada C , con una integral del rotacional del campo sobre la superficie encerrada por la misma curva C . Es decir

$$\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s dS.$$

Tal y como hemos mencionado antes la superficie la define su vector normal, y éste lo define el “sentido” de circulación de la curva que bordea la superficie (ver figura 5.20 cuadrantes I y III). No haremos una demostración formal del teorema de Stokes como lo hicimos para el Gauss. Nos convenceremos de que es correcta la relación a partir de algunas situaciones sencillas.

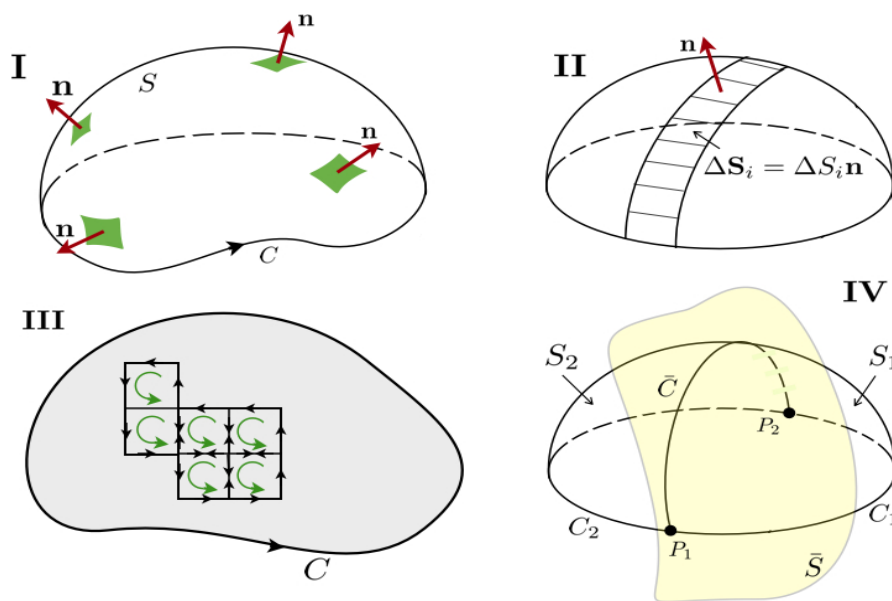


Figura 5.20: Teorema de Stokes. Cualquier superficie la podremos dividir en pequeñas cuadrículas diferenciales, las cuales sumadas constituyen la superficie y la circulación se construye por el borde de una cuadrícula diferencial.

Cualquier superficie la podremos dividir en pequeñas cuadrículas diferenciales, las cuales sumadas constituyen la superficie (ver figura 5.20 cuadrante II). Es fácil convencerse que la circulación⁸ por el borde de una cuadrícula diferencial (por ejemplo en el plano xy) nos lleva a

$$\Gamma_{1234} = \oint_{1234} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_1 a_x(x, y) dx + \int_2 a_y(x, y) dy + \int_3 a_x(x, y) (-dx) + \int_4 a_y(x, y) (-dy),$$

donde hemos denotado la trayectoria a lo largo del perímetro de la cuadrícula por 1234. De la figura 5.21 podemos intuir

$$\Gamma_{1234} = \int a_x(x_0, y_0) dx + \int a_y(x_0 + dx, y_0) dy + \int a_x(x_0, y_0 + dy) (-dx) + \int a_y(x_0, y_0) (-dy),$$

y de allí el desarrollo por Taylor que nos conduce a

$$\begin{aligned} \Gamma_{1234} &= \int a_x(x_0, y_0) dx + \int \left[a_y(x_0, y_0) + \frac{\partial a_y}{\partial x} \Big|_{x_0} dx \right] dy - \int \left[a_x(x_0, y_0) + \frac{\partial a_x}{\partial y} \Big|_{y_0} dy \right] dx \\ &+ \int a_y(x_0, y_0) dy = \int \left[\frac{\partial a_y}{\partial x} \Big|_{x_0} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \Big|_{y_0} \right] dx dy = \iint_S \nabla \times \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Esto vale para todos los puntos (x_0, y_0) y se puede aplicar para las otras superficies, con lo cual es fácil convencerse que esta técnica se puede utilizar para cada cuadrícula en las que hemos dividido la superficie (ver figura 5.20 cuadrante II). Más aún, las circulaciones a lo largo de los perímetros de las cuadrículas interiores se anulan (ver figura 5.20 cuadrante III) y sólo sobrevive la circulación a lo largo del perímetro exterior de la superficie. Con ello

$$\sum_{\text{cuadrícula}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \equiv \sum (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s}.$$

⁸Pueden consultar otro ejemplo de circulación en la sección 5.2.3.3.

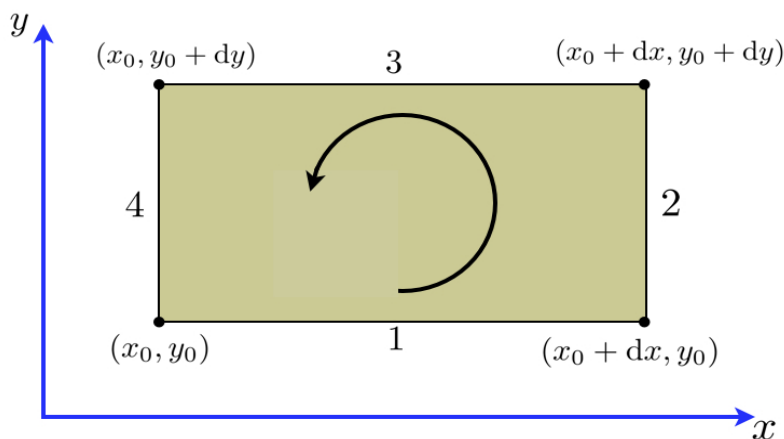


Figura 5.21: Circulación en una cuadrícula del plano x, y

5.3.4.2.1. Version 2D del teorema de Stokes. En el plano xy , si consideramos una región R en el que está definido un campo vectorial $\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}}$, entonces

$$\nabla \times \mathbf{a} = \left[\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right] \hat{\mathbf{k}}.$$

Por el teorema de Stokes

$$\int_R \left[\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right] dx dy = \oint_C [a_x dx + a_y dy].$$

Si ponemos $a_x = P$ y $a_y = Q$ recobramos el teorema de Green en el plano:

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

5.3.4.2.2. Teorema de Stokes y campo magnético. De la ley de Ampere para una densidad de corriente $\hat{\mathbf{j}}$

$$\oint_C \mathbf{b} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \hat{\mathbf{j}} \cdot d\mathbf{s},$$

donde el circuito C es el borde de la superficie S , resulta que al aplicar el teorema de Stokes a la integral de superficie

$$\oint_C \mathbf{b} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla \times \mathbf{b} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \hat{\mathbf{j}} \cdot d\mathbf{s} \Rightarrow \int_S [\nabla \times \mathbf{b} - \mu_0 \hat{\mathbf{j}}] \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

para cualquier superficie S . La ecuación anterior no es más que una de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{b} - \mu_0 \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \hat{\mathbf{j}}.$$

De manera similar, de la ley de inducción electromagnética de Faraday se puede obtener

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}.$$

5.3.4.2.3. Expresiones equivalentes para el teorema de Stokes. Del mismo modo que hicimos en la sección 5.3.4.1.2 con el teorema de Gauss, podemos hacerlo para el teorema de Stokes y tendremos

$$\oint \phi(x, y, z) d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{s} \times \nabla \phi(x, y, z) \quad \text{y} \quad \oint d\mathbf{r} \times \mathbf{b}(x, y, z) = \iint_S (d\mathbf{s} \times \nabla) \times \mathbf{b}(x, y, z),$$

donde $\phi(x, y, z)$ es un campo escalar y $\mathbf{b}(x, y, z)$ un campo vectorial.

Otra vez, la metodología para proceder a la demostración se fundamenta en considerar un par de campos vectoriales, uno de la forma $\mathbf{a}(x, y, z) = \phi(x, y, z)\mathbf{c}$ y el otro de la forma $\mathbf{b}(x, y, z) = \mathbf{c} \times \mathbf{b}(x, y, z)$, luego desarrollar un álgebra vectorial mínima.

5.3.4.2.4. Teorema de Stokes y fuerzas conservativas. El teorema de Stokes nos permite identificar que campos vectoriales irrotacionales generan integrales de línea las cuales son independientes de la trayectoria. Esto es

$$\nabla \times \mathbf{f}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

con lo cual, lo que se está señalando es que toda trayectoria cerrada se puede fraccionar en dos trayectorias abiertas que se unen en los extremos, entonces

$$\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0 = \int_{C_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow \int_M^{M'} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_M^{M'} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r},$$

y lo que nos dice es que vamos de un punto (de corte de la curva cerrada) M a otro punto M' por dos trayectorias distintas y la integral de línea es la misma. Más adelante veremos que a los campos vectoriales irrotacionales les está asociado un potencial tal que

$$\nabla \times \mathbf{f}(x, y, z) = 0 \Rightarrow \mathbf{f}(x, y, z) \propto \nabla \phi(x, y, z).$$

5.3.4.2.5. Teorema de Stokes y discontinuidades del campo vectorial. Al igual que el teorema de Gauss puede ser considerado para manejar funciones discontinuas, el teorema de Stokes también tiene una expresión cuando se consideran campos discontinuos (continuo a trozos o continuos por segmentos).

Consideremos el caso más simple, el de un campo vectorial $\mathbf{a}(x, y, z)$ que es discontinuo sobre una superficie \bar{S} , que divide R en dos subregiones R_1 y R_2 (ver otra vez 5.18, cuadrante IV). En este caso la superficie S , será abierta y estará delimitada por una curva C_2 . La intersección de las superficies S y \bar{S} será una curva \bar{C} , la cual dividirá a S en dos superficies S_1 y S_2 (ver figura 5.20 cuadrante IV). Entonces, aplicando el teorema de Stokes se obtiene:

$$\begin{aligned} \oint_{C_1 + \bar{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s}, \\ \oint_{C_2 + \bar{C}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si las sumamos obtendremos

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s} + \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2}^{P_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r},$$

la cual puede ser reescrito como

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s} - \int_{P_1}^{P_2} (\mathbf{a}|_{S_2} - \mathbf{a}|_{S_1}) \cdot d\mathbf{r},$$

donde hemos denotado $\mathbf{a}|_{S_2}$ como el campo vectorial evaluado sobre la curva \bar{C} “del lado” de la superficie S_2 . Es importante señalar que el término que incorpora la contribución de la discontinuidad del campo sólo encierra componentes tangenciales a la superficie. Esto es claro del producto escalar con el vector $d\mathbf{r}$ tangente a la curva \bar{C} (y también a la superficie S).

Ejemplo 5.30 Dado el siguiente campo vectorial $\mathbf{a} = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + 3z\hat{\mathbf{k}}$ y la superficie $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

Entonces, para evaluar

$$\int_S \nabla \times \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s},$$

sobre ese hemisferio, vemos que $\nabla \times \mathbf{a} = 2\hat{\mathbf{k}}$. Mientras que el elemento de superficie en coordenadas esféricas es $ds = a^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{\mathbf{e}}_r$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} [2a^2 \sin(\theta) \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{k}}] d\theta = 2a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{z}{a} \sin(\theta) d\theta, \\ &= 2a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta = 2a^2 \pi. \end{aligned}$$

Para comprobar la igualdad del teorema de Stokes, vamos a evaluar la integral sobre el círculo $x^2 + y^2 = a^2$, que se encuentra en el plano $z = 0$.

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = [-y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} + 3z\hat{\mathbf{k}}] \cdot [dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}] = \oint_C [-ydx + xdy],$$

en coordenadas polares: $x = a \cos(\varphi)$, $y = a \sin(\varphi)$

$$\begin{aligned} \oint_C [-ydx + xdy] &= \oint_C (-a \sin(\varphi))(-a \sin(\varphi)d\varphi) + (a \cos(\varphi))(a \cos(\varphi)d\varphi), \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} [\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)] d\varphi = a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2a^2 \pi. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.31 La Ley de Ampere se puede derivar de la ecuación de Maxwell $\nabla \times \mathbf{h} = \hat{\mathbf{j}}$ donde \mathbf{h} es el campo magnético y $\hat{\mathbf{j}}$ la densidad de corriente. Si el campo eléctrico es nulo ($\mathbf{e} = 0$), mostremos que

$$\oint \mathbf{h} \cdot d\mathbf{r} = I,$$

con I la corriente neta que atraviesa la circulación del campo magnético.

Podemos ver que

$$\oint \mathbf{h} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{h}) \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \hat{\mathbf{j}} \cdot d\mathbf{s} = I.$$

Ejemplo 5.32 Dado el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{f} = \frac{2A \cos(\theta)}{r^3} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{A \sin(\theta)}{r^3} \hat{\mathbf{u}}_\theta,$$

con $A = \text{constante}$ y $\{\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta\}$ vectores unitarios base en coordenadas esféricas.

1. Calculemos $\nabla \times \mathbf{f}$. El rotacional en coordenadas esféricas viene dado por

$$\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_r & r \hat{\mathbf{u}}_\theta & r \sin(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{2A \cos(\theta)}{r^3} & r \frac{A \sin(\theta)}{r^3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hat{\mathbf{u}}_\phi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{A \sin(\theta)}{r^2} \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{2A \cos(\theta)}{r^3} \right] \right] = 0.$$

2. Calculemos en trabajo $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de una circunferencia unitaria en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$

Por el teorema de Stokes el trabajo en un circuito cerrado se anula

$$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint \nabla \times \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Se puede entonces concluir que la fuerza es conservativa.

3. ¿Ese campo vectorial tendrá un potencial asociado tal que $\mathbf{f} = -\nabla\varphi$? Una vez más

$$\frac{2A \cos(\theta)}{r^3} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{A \sin(\theta)}{r^3} \hat{\mathbf{u}}_\theta = - \left(\frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial r} \hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \hat{\mathbf{u}}_\phi \right),$$

con lo cual

$$\frac{2A \cos(\theta)}{r^3} = -\frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial r}, \quad \frac{A \sin(\theta)}{r^3} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial \theta}, \quad 0 = \frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial \phi}.$$

La última ecuación indica que φ no depende de ϕ . Ahora bien, integrando la primera de estas ecuaciones, tendremos

$$\frac{2A \cos(\theta)}{r^3} = -\frac{\partial \varphi(r, \theta, \phi)}{\partial r} \Rightarrow \varphi(r, \theta) = - \int \frac{2A \cos(\theta)}{r^3} dr + C(\theta) = A \frac{\cos(\theta)}{r^2} + C(\theta),$$

al sustituir la forma del potencial en la segunda ecuación tendremos

$$\frac{A \sin(\theta)}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(A \frac{\cos(\theta)}{r^2} + C(\theta) \right) \Rightarrow \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta} = 0.$$

De esta forma

$$\varphi(r, \theta) = A \frac{\cos(\theta)}{r^2}.$$

Ejemplo 5.33 Para

$$\mathbf{f} = x^2 \hat{\mathbf{i}} + y^2 \hat{\mathbf{j}} + z^2 \hat{\mathbf{k}}$$

evaluemos las siguientes integrales:

1. $\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de una circunferencia unitaria. Por el Teorema de Stokes

$$\oint_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{s}$$

con lo cual

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \oint_c \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

2. $\oint \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ a lo largo de una esfera unitaria. Utilizando el teorema de la divergencia

$$\oint \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dV,$$

por consiguiente

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dV = \iiint_V \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x^2 \hat{\mathbf{i}} + y^2 \hat{\mathbf{j}} + z^2 \hat{\mathbf{k}}) dx dy dz$$

$$= \iiint_V (2x + 2y + 2z) dx dy dz.$$

Si ahora transformamos a coordenadas esféricas tendremos que

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi); \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi); \quad z = r \cos(\theta); \quad \text{con } dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi,$$

con lo cual

$$\iiint_V (2x + 2y + 2z) dx dy dz = \iiint_V (2r \sin(\theta) \cos(\varphi) + 2r \sin(\theta) \sin(\varphi) + 2r \cos(\theta)) dV.$$

Por lo tanto:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dV = -\frac{1}{4}\pi.$$



Practicando con SymPy

Los métodos de integración básicamente consisten en el cálculo de la primitiva: **integrate**(expr,x) y el cálculo de integrales definidas: **integrate**(expr,x,a,b) en el intervalo (a, b) . Veamos algunos ejemplos.

```
[1]: import sympy
      from sympy import *
      from sympy.vector import *
      init_printing()
```

1. Integrales directas

```
[2]: x = symbols('x')
      f=1/(1+x**2)**3
      f
```

[2]:
$$\frac{1}{(x^2 + 1)^3}$$

```
[3]: Eq(Integral(f,x),integrate(f,x))
```

[3]:
$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx = \frac{3x^3 + 5x}{8x^4 + 16x^2 + 8} + \frac{3 \operatorname{atan}(x)}{8}$$

```
[4]: Eq(Integral(f,[x,0,1]),integrate(f,[x,0,1]))
```

[4]:
$$\int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$$

Podemos hacer un cambio de variable

```
[5]: theta = symbols('theta')
      f_s = f.subs(x, tan(theta))
      dx_s = diff(tan(theta), theta)
      f_n = f_s*dx_s
      Eq(Integral(f_n,theta),integrate(f_n,theta).simplify())
```

[5]:
$$\int \frac{1}{(\tan^2(\theta) + 1)^2} d\theta = \frac{3\theta}{8} + \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(4\theta)}{32}$$

Otro ejemplo

```
[6]: f=cos(x)**3
      Eq(Integral(f,x),integrate(f,x).simplify())
```

[6]:
$$\int \cos^3(x) dx = -\frac{\sin^3(x)}{3} + \sin(x)$$

```
[7]: t = symbols('t')
     f_s = f.subs(x, asin(t))
     dx_s = diff(asin(t), t)
     f_n = f_s*dx_s
     Eq(Integral(f_n,t),integrate(f_n,t).simplify())
```

[7]:
$$\int (1 - t^2) dt = -\frac{t^3}{3} + t$$

2. Puede suceder que al integrar una función, por ejemplo

```
[8]: def f(x):
     return exp(x**3+2*x)
     f(x)
```

[8]:
$$e^{x^3+2x}$$

```
[9]: Eq(Integral(f(x), [x,0,1]),integrate(f(x), [x,0,1]))
```

[9]:
$$\int_0^1 e^{x^3+2x} dx = \int_0^1 e^{2x} e^{x^3} dx$$

El programa nos devuelve la integral sin resolver, en este caso SymPy nos está indicando que fue incapaz de realizar el cálculo de manera algebraica.

Ahora bien, podemos disponer de rutinas numéricas que nos mostrará una lista con el valor numérico de la integral, el error absoluto estimado de la aproximación. Pero debemos recurrir a un ambiente de cálculo diferente al SymPy, en este caso “SciPy”, más información en: <https://scipy.github.io/devdocs/index.html>

La función “scipy.integrate.quad” en SciPy se utiliza para realizar integración numérica de una función a lo largo de un intervalo dado. Utiliza un algoritmo de cuadratura adaptativa para aproximar la integral de la función tomado de la biblioteca QUADPACK de Fortran. Una vez que se completa la integración, “quad” devuelve el valor aproximado de la integral, así como una estimación del error asociado con la aproximación.

```
[10]: from scipy.integrate import quad
      result_quad, error_quad = quad(lambda x:f(x), 0, 1)
      result_quad, error_quad
```

[10]:
$$(5.04206315104267, 5.59781460190164 \cdot 10^{-14})$$

La función “scipy.integrate.romberg” implementa el método de Romberg para la integración numérica de una función en un intervalo dado. El método de Romberg es un algoritmo de extrapolación que mejora la convergencia de la regla del trapecio al combinar diferentes aproximaciones de la integral. Una vez que se completa la integración devuelve el valor aproximado de la integral, así como una estimación del error asociado con la aproximación. Ver también https://es.wikipedia.org/wiki/Método_de_Romberg

```
[11]: from scipy.integrate import romberg
      integral_romberg = romberg(lambda x: f(x), 0, 1)
      integral_romberg.evalf()
```

[11]: 5.04206315105925

3. Ahora veamos la manera de calcular integrales del tipo

$$\int_C f(x, y, z) d\mathbf{r},$$

donde la curva C viene dada por medio de algún parámetro τ , es decir que la integral se puede escribir como:

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(\tau)) |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau.$$

Dada la función $f = x^2 + y^2$

```
[12]: y,tau = symbols('y tau')
      def f(x,y):
          return x**2+y**2
      f(x,y)
```

[12]: $x^2 + y^2$

Vamos a integrar siguiendo el camino dado por la curva parametrizada con: $x = \cos(\tau)$, $y = \sin(3\tau)$

```
[13]: x_sub = cos(tau)
      y_sub = sin(3*tau)
      dr = [diff(x_sub, tau), diff(y_sub, tau)]
```

```
[14]: f_sub = f(x,y).subs({x: x_sub, y: y_sub})
      dr_dot = sqrt(dr[0]**2 + dr[1]**2)
      fn = f_sub*dr_dot
      fn
```

[14]: $\sqrt{\sin^2(\tau) + 9\cos^2(3\tau)} (\sin^2(3\tau) + \cos^2(\tau))$

```
[15]: integral_romberg = romberg(lambda t: (fn.subs(tau,t)*dr_dot.subs(tau,t)), 0, 2)
      integral_romberg.evalf()
```

[15]: 6.88250995043015

4. Queremos ahora evaluar la integral

$$\oint_C x dy,$$

C es el círculo: $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$. Con: $x = a \cos(\theta)$, $y = a \sin(\theta)$, y el parámetro θ variando de 0 a 2π .

```
[16]: def f(x):
      return x
```



```
[17]: a = symbols('a')
      x_sub = a*cos(τ)
      y_sub = a*sin(τ)
      dr = [diff(x_sub, τ), diff(y_sub, τ)]
      dr
```

```
[17]: [-a sin(τ), a cos(τ)]
```

```
[18]: f_sub = f(x).subs({x: x_sub})
      fn = f_sub*dr[1]
      fn
```

```
[18]: a2 cos2(τ)
```

```
[19]: Eq(Integral(fn, [τ, 0, 2*pi]), integrate(fn, [τ, 0, 2*pi]))
```

```
[19]: ∫02π a2 cos2(τ) dτ = πa2
```

5. Calculemos la integral

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{a} = (2x + y)\mathbf{i} + (y - 2x)\mathbf{j}$ y C en términos de un parámetro es $x = 2\lambda^2 + 2\lambda$, $y = \lambda + 1$.

```
[20]: x, y, λ = symbols('x, y, λ')
      A = [2*x + y, y - 2*x]
      A
```

```
[20]: [2x + y, -2x + y]
```

```
[21]: x_sub = 2*λ**2 + 2*λ
      y_sub = λ + 1
      dr = [diff(x_sub, λ), diff(y_sub, λ)]
```

```
[22]: A_sub = [A[0].subs({x: x_sub, y: y_sub}), A[1].subs({x: x_sub, y: y_sub})]
```

```
[23]: integrando = A_sub[0]*dr[0] + A_sub[1]*dr[1]
      integrando
```

```
[23]: -4λ2 - 3λ + (4λ + 2)(4λ2 + 5λ + 1) + 1
```

```
[24]: Eq(Integral(integrando, (λ, -1, 1)), integrate(integrando, (λ, -1, 1)).
      ↪ trigsimp())
```

```
[24]: ∫-11 (-4λ2 - 3λ + (4λ + 2)(4λ2 + 5λ + 1) + 1) dλ = 22
```

Para integrales múltiples podemos integrar aplicando varias veces la función “integrate”.

6. Si quisiéramos calcular el área de una elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

podríamos hacer lo siguiente: primero calculamos el área en el primer cuadrante determinado por $0 \leq x \leq X$, donde: $X = (a/b)\sqrt{b^2 - y^2}$ y donde $0 \leq y \leq Y$, con $Y = (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$.

Por lo tanto, el área es

$$A = 4 \int_0^b \left[\int_0^X dx \right] dy.$$

Definimos los símbolos y las expresiones

```
[25]: a, b, x, y = symbols('a b x y', real=True, positive=True)
      X = (a/b)*sqrt(b**2-y**2)
      Y = (b/a)*sqrt(a**2-x**2)
```

Cálculo de la integral doble

```
[26]: Eq(4*Integral(Integral(1, (x, 0, X)), (y, 0, b)), \
      4*integrate(integrate(1, (x, 0, X)), (y, 0, b)))
```

[26]:
$$4 \int_0^b \int_0^{\frac{a\sqrt{b^2-y^2}}{b}} 1 \, dx \, dy = \pi ab$$

5.3.5 Ejercicios

1. Evalúe la integral de línea de

$$\mathbf{a} = x^2 \hat{\mathbf{i}} + y^2 \hat{\mathbf{j}} + z^2 \hat{\mathbf{k}},$$

a lo largo de la curva $C: x = a\lambda^2, y = b\lambda, z = c \sin(\pi\lambda/2)$, desde el origen al punto (a, b, c) .

2. Evalúe la integral de línea de

$$\mathbf{a} = x \hat{\mathbf{i}} + \frac{y^2}{b} \hat{\mathbf{j}} - \frac{z^2}{c} \hat{\mathbf{k}},$$

a lo largo de la curva $C: x = a \cos(\pi\lambda/2), y = b \sin(\pi\lambda/2), z = c\lambda$, desde el punto $(a, 0, 0)$ al punto $(0, b, c)$.

3. Evalúe la siguiente integral $\oint_C y(4x^2 + y^2) dx + x(2x^2 + 3y^2) dy$ alrededor de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
4. Encuentre la circulación alrededor de una circunferencia de radio unidad centrada en el origen para los siguientes campos.
 - (a). $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(-y \hat{\mathbf{i}} + x \hat{\mathbf{j}})$.
 - (b). $\mathbf{a} = (xy + 1) \hat{\mathbf{i}} + (\frac{1}{2}x^2 + x + 2) \hat{\mathbf{j}}$.
5. Encuentre el flujo del campo $\mathbf{a} = \kappa x^2 \hat{\mathbf{k}}$ a través de la porción de una esfera de radio a centrada en el origen y el primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesianas.
6. Encuentre el flujo del campo $\mathbf{a} = y \hat{\mathbf{i}} + 3z \hat{\mathbf{j}} - 2x \hat{\mathbf{k}}$ a través de la porción del plano $x + 2y - 3z = 5$ y el primer cuadrante del sistema de coordenadas cartesianas.
7. Encuentre el vector de área s de la parte de la superficie curva del hiperbolóide de revolución

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

que pertenece a la región: $z \geq 0$ y $a \leq x \leq \lambda a$.

8. Dado el campo vectorial

$$\mathbf{a} = [3x^2(y + z) + y^3 + z^3] \hat{\mathbf{i}} + [3y^2(x + z) + x^3 + z^3] \hat{\mathbf{j}} + [3z^2(x + y) + x^3 + y^3] \hat{\mathbf{k}}$$

- (a). Calcule $\nabla \times \mathbf{a}$.
 (b). Evalúe la integral

$$\int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r},$$

a lo largo de cualquier línea que conecte el punto $(1, -1, 1)$ con el punto $(2, 1, 2)$.

9. A partir de la siguiente parametrización $x = a \cos^n(\theta)$ y $y = a \sin^n(\theta)$, encuentre el área acotada por las curvas

$$x^{2/5} + y^{2/5} = a^{2/5} \quad \text{y} \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

10. Evalúe la siguiente integral

$$\oint_C [y(4x^2 + y^2)dx + x(2x^2 + 3y^2)dy],$$

alrededor de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2$.

11. Evalúe la integral $\int \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}$, donde \mathbf{r} es el vector posición, sobre la superficie $z = a^2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, como se indica a continuación.

- (a). Parametrice la superficie con: $x = a \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $y = a \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $z = a^2 \cos^2(\theta)$, demuestre que:

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = a^4 [2 \sin^3(\theta) \cos(\varphi) + \cos^3(\varphi) \sin(\theta)] d\theta d\varphi.$$

- (b). Aplique el teorema de Gauss al volumen acotado por la superficie y el plano $z = 0$.

12. Demuestre la validez del teorema de Gauss

- (a). Calculando el flujo del campo vectorial

$$\mathbf{a} = \frac{\alpha \mathbf{r}}{(r^2 + a^2)^{(3/2)}},$$

a través de la superficie $|\mathbf{r}| = \sqrt{3}a$.

- (b). Demostrando que

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{3\alpha a^2}{(r^2 + a^2)^{(5/2)}},$$

y evaluando la integral de volumen de $\nabla \cdot \mathbf{a}$ sobre el interior de la esfera $|\mathbf{r}| = \sqrt{3}a$.

13. Un campo vectorial, en coordenadas cilíndricas, viene representado por

$$\mathbf{f} = F_0 \left[\frac{x \cos(\lambda z)}{a} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y \cos(\lambda z)}{a} \hat{\mathbf{j}} + \sin(\lambda z) \hat{\mathbf{k}} \right] \equiv \frac{F_0 \rho}{a} \cos(\lambda z) \hat{\mathbf{e}}_\rho + F_0 \sin(\lambda z) \hat{\mathbf{k}},$$

- (a). Calcule el flujo de \mathbf{f} a través de la superficie acotada por los cilindros $\rho = a$, $\rho = 2a$ y los planos $z = \pm a\pi/2$.
 (b). Evaluando la integral anterior pero utilizando el teorema de la divergencia.

5.4 Teoría de potencial

Los campos vectoriales conservativos resultan ser de gran importancia en diferentes áreas de la Física. Estos campos vectoriales tienen la propiedad de que su integral de línea, alrededor de cualquier trayectoria que encierre una superficie, se anula. Es decir, la integral de línea de un campo vectorial conservativo, entre dos puntos arbitrarios del espacio, es independiente del camino tomado para realizar la integral.

Entre dos puntos P_1 y P_2 del espacio podemos trazar dos trayectorias por dos caminos diferentes C_1 y C_2 y también formar un lazo entre ellos. Si asumimos de entrada que \mathbf{a} es un campo vectorial conservativo, podemos escribir

$$\int_{C_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

como la segunda integral es el negativo de la integral a lo largo de C_2 , entonces

$$\int_{C_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Lo que implica que

$$\int_{C_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r},$$

como lo habíamos afirmado.

Si tomamos un punto arbitrario P_0 y lo conectamos por trayectorias arbitrarias con todos los puntos del espacio, entonces, para cada punto P con coordenadas (x, y, z) podemos definir el campo escalar

$$\phi(x^i) = - \int_{P_0}^P \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r},$$

donde C es cualquier camino que va de P_0 a P . El signo menos es por conveniencia.

El campo escalar $\phi(x, y, z)$ es una función bien definida porque su valor no dependerá de la trayectoria C y se le suele denominar el potencial asociado al campo vectorial \mathbf{a} . Notemos que el potencial en P_0 es cero y se conoce como el punto de referencia potencial.

Consideremos ahora dos puntos arbitrarios $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ conectados por algún camino C . Es claro que también podemos conectar estos dos puntos por un camino diferente que pase por el punto P_0 , es decir, escoger un camino que tome la ruta: $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P_2$. Si \mathbf{a} es un campo conservativo, entonces

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_0} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_0}^{P_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_1, y_1, z_1) - \phi(x_2, y_2, z_2),$$

de manera equivalente

$$\phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}.$$

Lo que se conoce como la diferencia de potencial entre dos puntos.

Si P_1 y P_2 se conectan de manera infinitesimal por $d\mathbf{r}$, entonces el potencial infinitesimal es

$$d\phi(x^i) = -\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow d\phi(x^i) = \partial_i \phi(x^j) dx^i = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r},$$

de manera que

$$\nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{a} = -\nabla \phi.$$

En palabras: un campo vectorial conservativo siempre puede escribirse como el negativo del gradiente del campo escalar potencial definido por la ecuación (5.4).

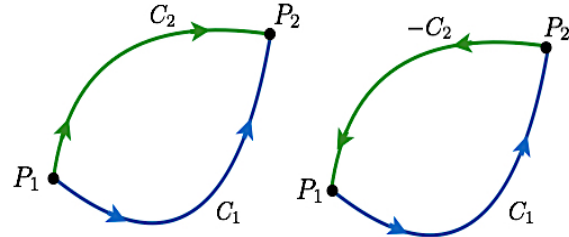


Figura 5.22: Trayectoria de integración para ir de P_1 a P_2 y el lazo formado por los caminos.

5.4.1 Potenciales escalares

Si un campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z)$ en una determinada región R puede asociarse con un gradiente de un potencial $\phi(x, y, z)$ tendremos que

$$\mathbf{f}(x^i) = -\nabla\phi(x^i) \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{f}(x^i) = 0 \Leftrightarrow \oint \mathbf{f}(x^i) \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

La ventaja que un campo derive de un potencial es, por un lado, la simplicidad y la cantidad de información que sobre el campo podemos tener: describimos la interacción por una función y no con tres (las componentes del campo) y sabremos que el campo es irrotacional y conservativo. Pero además, la función que describe el campo es escalar, con lo cual es independiente del sistema de coordenadas.

Cualquiera de las afirmaciones siguientes implica las otras dos, con lo que podremos elegir cualquier de ellas para demostrar las otras dos. Veamos:

- Un campo que derive de un potencial es conservativo e irrotacional

$$\mathbf{f}(x^i) = -\nabla\phi(x^i) \Rightarrow \begin{cases} -\nabla \times (\nabla\phi(x^i)) = 0 \\ -\oint \nabla\phi(x^i) \cdot d\mathbf{r} = -\oint d\phi = \phi(x_0^i) - \phi(x_0^i) = 0 \end{cases}$$

donde hemos utilizado la definición de diferencial total

$$d\phi = \frac{\partial\phi(x^i)}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi(x^i)}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi(x^i)}{\partial z} dz = \nabla\phi(x^i) \cdot d\mathbf{r}.$$

- Un campo conservativo es irrotacional y deriva de un potencial.

Un campo conservativo implica que el trabajo $(\int_M^{M'} \mathbf{f}(x^i) \cdot d\mathbf{r})$ es independiente de la trayectoria entre M y M' . Por eso llamamos a la fuerza conservativa por cuanto se conserva la energía y por lo tanto, ésta depende únicamente de la posición

$$\oint \mathbf{f}(x^i) \cdot d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \int_M^{M'} \mathbf{f}(x^i) \cdot d\mathbf{r} = \phi(x_2^i) - \phi(x_1^i)$$

$$\Downarrow \\ \mathbf{f}(x^i) \cdot d\mathbf{r} = d\phi = -\nabla\phi(x^i) \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{f}(x^i) = -\nabla\phi(x^i),$$

con lo cual hemos demostrado que el campo vectorial deriva de un potencial. El signo menos ($-$) es una convención tradicional del oficio del Físico y proviene de nuestra intuición de flujo de los acontecimientos: “El agua siempre fluye hacia abajo”.

Ahora bien, utilizando el teorema de Stokes tendremos:

$$\mathbf{f}(x^i) = -\nabla\phi(x^i) \Rightarrow \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow \nabla \times \mathbf{f}(x^i) = 0.$$

Es fácil demostrar que el campo también es irrotacional.

- Un campo de fuerzas irrotacional implica que el campo deriva de un potencial y que el campo es conservativo.

Otra vez, por el teorema de Stokes si el campo es irrotacional es conservativo

$$\nabla \times \mathbf{f}(x^i) = 0 \Rightarrow \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

y si es conservativo deriva de un potencial

$$\mathbf{f}(x^i) \cdot d\mathbf{r} = d\phi = -\nabla\phi(x^i) \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{f}(x^i) = -\nabla\phi(x^i).$$

En definitiva, si cualquiera de las condiciones se cumple: conservativo, irrotacional o potencial, las otras también se cumplirán.

Es bueno aclarar que el hecho de que $\nabla \times \mathbf{f} \neq 0$ implica siempre que \mathbf{f} es NO conservativo, pero que $\nabla \times \mathbf{f} = 0$ no necesariamente implica que \mathbf{f} sea conservativo, al menos que la región involucrada en el proceso de integración sea una región simplemente conectada.

Ejemplo 5.34 Consideremos el siguiente campo vectorial en el plano

$$\mathbf{f} = \kappa [xy^2\hat{\mathbf{i}} + x^2y\hat{\mathbf{j}}] ,$$

con κ constante.

Es fácil comprobar que $\nabla \times \mathbf{f} = 0$, de manera que \mathbf{f} es conservativo. Si queremos encontrar el campo potencial asociado al campo vectorial \mathbf{f} podemos tomar un punto P genérico, en este caso del plano xy , y escoger un camino de integración desde el origen al punto $P(x_1, y_1)$. Vamos a tomar la recta parametrizada por: $x = x_1\tau$, $y = y_1\tau$ con $0 \leq \tau \leq 1$. De manera que

$$\begin{aligned} \phi(x_1, y_1) &= -\kappa \int_{(0,0)}^{(x_1, y_1)} [xy^2\hat{\mathbf{i}} + x^2y\hat{\mathbf{j}}] \cdot [dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}] , \\ &= -\kappa \int_0^1 [x_1\tau(y_1\tau)^2\hat{\mathbf{i}} + (x_1\tau)^2y_1\tau\hat{\mathbf{j}}] \cdot [x_1d\tau\hat{\mathbf{i}} + y_1d\tau\hat{\mathbf{j}}] , \\ &= -2\kappa x_1^2y_1^2 \int_0^1 \tau^3 d\tau = -\frac{\kappa x_1^2y_1^2}{2} . \end{aligned}$$

Por lo tanto, el potencial será

$$\phi(x, y) = -\frac{\kappa}{2} x^2 y^2 .$$

Se deja como ejercicio comprobar que $\mathbf{f} = -\nabla\phi$.

Ejemplo 5.35 Consideremos el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{f} = \frac{\kappa y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{i}} - \frac{\kappa x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{j}} ,$$

con κ constante.

De nuevo, es fácil ver que

$$\nabla \times \mathbf{f} = [\partial_x F_y - \partial_y F_x] \hat{\mathbf{k}} = 0 .$$

La integral de línea de $\mathbf{f}(x, y)$ la llevaremos a cabo sobre un círculo C de radio a centrado en el origen, curva parametrizada por: $x = a \cos(\tau)$, $y = a \sin(\tau)$, con $0 \leq \tau \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x^i) \cdot d\mathbf{r} &= f_x dx + f_y dy = \frac{\kappa y}{x^2 + y^2} dx - \frac{\kappa x}{x^2 + y^2} dy , \\ &= \frac{\kappa(a \sin(\tau))(-a \sin(\tau)d\tau)}{(a \cos(\tau))^2 + (a \sin(\tau))^2} - \frac{\kappa(a \cos(\tau))(a \cos(\tau)d\tau)}{(a \cos(\tau))^2 + (a \sin(\tau))^2} , \\ &= -\frac{\kappa a^2 \sin^2(\tau)d\tau}{a^2(\cos^2(\tau) + \sin^2(\tau))} - \frac{\kappa a^2 \cos^2(\tau)d\tau}{a^2(\cos^2(\tau) + \sin^2(\tau))} = -\kappa d\tau , \end{aligned}$$

para la integral

$$\oint_C \mathbf{f}(x^i) \cdot d\mathbf{r} = -\kappa \int_0^{2\pi} d\tau = -2\pi\kappa \neq 0 .$$

Como podemos ver, el rotacional del campo se anula pero la integral de línea cerrada, alrededor del círculo que contiene el origen de coordenadas, es diferente de cero. En el origen el campo vectorial \mathbf{f} contiene una singularidad.

Ejemplo 5.36 Demostremos que

- Si un campo de velocidades es potencial, el campo de aceleraciones también lo será.

Esto es: Si

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) = \nabla \varphi \quad \text{entonces} \quad \mathbf{a}(\mathbf{r}(t), t) = \nabla \Phi$$

con

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}(t), t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t).$$

Adaptando la relación vectorial del primer problema obtenemos

$$\nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \Rightarrow \nabla (v^2) = 2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

con lo cual

$$\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \frac{1}{2} \nabla ((\nabla \varphi)^2) = \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right) \Rightarrow \mathbf{a} = \nabla \Phi.$$

- Encontremos la forma del potencial del campo de aceleraciones en términos del campo de velocidades y su potencial. Arriba notamos claramente que

$$\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2.$$

5.4.2 Potenciales vectoriales y calibres

Al igual que derivamos un campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z)$ a partir de un potencial escalar $\phi(x, y, z)$ y asociamos su existencia a su condición de irrotacionalidad, $\nabla \times \mathbf{f}(x, y, z) = 0$, podemos pensar que un campo sin divergencia (*solenoidal* o *transverso*) conlleva a la existencia de un potencial *vectorial*. Esto es

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(x^i) = 0 \Rightarrow \mathbf{f}(x^i) = \nabla \times \mathbf{a}(x^i).$$

Claramente

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(x^i) = \partial_i F^i = \partial_i (\varepsilon^{ijk} \partial_j a_k) = 0.$$

El campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ se conoce con el nombre de *potencial vectorial* del campo \mathbf{f} . Ahora bien, el campo solenoidal, \mathbf{f} , no queda unívocamente determinado a partir de su potencial vectorial. Existe una arbitrariedad de un campo escalar, llamado *de calibre* $\chi = \chi(x, y, z)$ (*gauge* en inglés) de forma tal que

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \nabla \chi(x^i) \Rightarrow \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{a}' = \nabla \times (\mathbf{a} + \nabla \chi) = \nabla \times \mathbf{a} + \nabla \times (\nabla \chi) = \nabla \times \mathbf{a},$$

de manera que varios potenciales vectoriales \mathbf{a}' y \mathbf{a} generan el mismo campo vectorial \mathbf{f} . Esta arbitrariedad nos permite particularizar el calibre según nos convenga. Existen varios calibres en el mercado, los cuales son utilizados según el problema físico al cual tratemos. Entre ellos podemos mencionar un par de ellos:

- **El calibre de Lorentz:** Esta selección proviene de requerir que el campo de calibre $\chi = \chi(x, y, z, t)$ satisfaga la ecuación de onda

$$\nabla^2 \chi(x^i) - a \frac{\partial^2 \chi(x^i)}{\partial t^2} = 0$$

donde a es una constante. Nótese que hemos supuesto que el campo de calibre puede depender del tiempo. El calibre del Lorentz se escoge porque (entre otras cosas) permite que la solución a

la ecuación de onda para el potencial vectorial $\mathbf{a}(x, y, z, t)$

$$\nabla^2 \mathbf{a}(x^i) - a \frac{\partial^2 \mathbf{a}(x^i)}{\partial t^2} = 0,$$

quede unívocamente determinada.

- **El calibre de Coulomb, de radiación o transverso:** La selección de este calibre $\chi(x, y, z, t)$ impone que el potencial vectorial $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ satisfaga la ecuación

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{a}'(x^i) = \nabla \cdot (\mathbf{a}(x^i) + \nabla \chi(x^i)) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \chi(x^i) = 0.$$

El nombre de calibre de Coulomb, de radiación o transverso proviene de las consecuencias de su utilización en las ecuaciones de Maxwell. Nótese que si el campo (y el calibre) es independiente del tiempo, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$, ambos calibres coinciden.

5.4.3 Teorema de Green y potenciales

Si el rotacional y la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z)$, decente (continuamente diferenciable) están especificados en una región del espacio delimitada por una superficie cerrada S , y las componentes del campo normales a esa superficie $\hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{f}$, también se conocen, entonces el teorema de Green nos garantiza que ese campo $\mathbf{f}(x, y, z)$ que cumple con esas condiciones es único⁹.

Esa demostración procede así. Supongamos que existe otro campo vectorial que cumple con las mismas condiciones que el campo $\mathbf{f}(x, y, z)$. Esto es

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{G} \\ \nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{G} \\ \hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{f} = \hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{G} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{G} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{h} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{h} = 0, \\ \hat{\mathbf{n}}_s \cdot \mathbf{h} = 0. \end{array} \right.$$

Como \mathbf{h} es irrotacional entonces

$$\nabla \times \mathbf{h} = 0 \Rightarrow \mathbf{h} = \nabla \phi(x^i) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{h} = \nabla \cdot \nabla \phi(x^i) = 0,$$

y el teorema de Green nos garantiza que

$$\oint \phi \nabla \phi \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\bar{S}} \phi (\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}) d\bar{S} = \iiint_V [\phi (\nabla \cdot \nabla \phi) + \nabla \phi \cdot \nabla \phi] dV,$$

con lo cual

$$\iint_{\bar{S}} \phi (\nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}) d\bar{S} = \iint_{\bar{S}} \phi (\mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\bar{s}}) d\bar{S} = \iiint_V [\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}] dV \Rightarrow \mathbf{h} = 0,$$

de donde se deduce que $\mathbf{f} = \mathbf{G}$, es decir, que el campo \mathbf{f} es único.

5.4.4 Teorema de Helmholtz

El teorema de Helmholtz¹⁰ afirma que todo campo vectorial \mathbf{f} , continuo, continuamente diferenciable (al menos a trozos), y regular en infinito se puede expresar como una suma de dos “componentes”: una *longitudinal* o *irrotacional* \mathbf{f}_l y otra *transversa* o *solenoidal* \mathbf{f}_t . Esto es

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_t, \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{f}_l = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{f}_t = 0. \end{array} \right.$$

⁹Esta afirmación también se conoce como *primer teorema de Helmholtz*.

¹⁰*Segundo teorema de Helmholtz*.

En general dado que el campo \mathbf{f} puede ser discontinuo, tendremos que suponer que

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{f} = \rho(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{f} = \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \text{ y como } \mathbf{f} = \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_t \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot (\mathbf{f}_l + \mathbf{f}_t) = \nabla \cdot \mathbf{f}_l = \rho(\mathbf{r}) , \\ \nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times (\mathbf{f}_l + \mathbf{f}_t) = \nabla \times \mathbf{f}_t = \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) , \end{array} \right.$$

dado que $\nabla \cdot (\circ)$ y $\nabla \times (\circ)$ son lineales. Esta separación del campo vectorial $\mathbf{f} = \mathbf{f}_l + \mathbf{f}_t$ es completamente general y siempre puede hacerse para cualquier campo vectorial.

Supondremos además, que la solución a la ecuación de Poisson $\nabla^2 \phi(x, y, z) = -\rho(x, y, z)$ existe y es única¹¹. Tendremos que

$$\nabla \times \mathbf{f}_l = 0 \Rightarrow \mathbf{f}_l = -\nabla \phi(x^i) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f}_l = -\nabla^2 \phi(x^i) = \rho(\mathbf{r}) ,$$

y la solución existe y es única. Es decir, podemos expresar de manera unívoca al campo vectorial \mathbf{f} (a través de su “componente” longitudinal \mathbf{f}_l) en términos de un campo escalar (función potencial) $\phi(x^i)$.

Por otra parte

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_t = 0 \Rightarrow \mathbf{f}_t = \nabla \times \mathbf{a} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f}_t = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} = \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) .$$

Al seleccionar el calibre de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ se convierte en

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla^2 \mathbf{a} = \partial^i \partial_i \mathbf{a} = -\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \Rightarrow \partial^i \partial_i a^k = -j^k(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 a_x = -j_x(\mathbf{r}) , \\ \nabla^2 a_y = -j_y(\mathbf{r}) , \\ \nabla^2 a_z = -j_z(\mathbf{r}) . \end{array} \right.$$

Una vez más nos encontramos con la solución a la ecuación de Poisson, esta vez para cada componente. Esto se cumple siempre, porque hemos supuesto que la solución para la ecuación de Poisson existe y es única. Resolver la ecuación de Poisson para cada una de las componentes del campo vectorial queda fuera de los alcances de estas notas. En los ejemplos 5.37 y 5.37 haremos varias hipótesis simplificadoras para no integrar las tres ecuaciones de Poisson.

Un corolario del teorema de Helmholtz nos indica que un campo vectorial queda unívocamente determinado si conocemos su rotacional y su divergencia. Vale decir que cualquier campo vectorial puede expresarse como

$$\mathbf{f} = -\nabla \phi + \nabla \times \mathbf{a} .$$

Ejemplo 5.37 Si $\mathbf{f} = \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r$. Encontremos algún posible campo vectorial \mathbf{a} tal que $\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{f}$.

Tenemos

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{u}}_r & r \hat{\mathbf{u}}_\theta & r \sin(\theta) \hat{\mathbf{u}}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ a_r(r, \theta, \phi) & r a_\theta(r, \theta, \phi) & r \sin(\theta) a_\phi(r, \theta, \phi) \end{vmatrix} = -\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r$$

¹¹Esta suposición es indispensable. Las condiciones sobre el potencial $\phi(x, y, z)$ que la implican serán consideradas en otros cursos de métodos matemáticos. En este curso, supondremos que existe y es única.

con lo cual

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left(\frac{\partial (r \sin(\theta) a_\phi(r, \theta, \phi))}{\partial \theta} - \frac{\partial (r a_\theta(r, \theta, \phi))}{\partial \phi} \right),$$

$$0 = \left(\frac{\partial (r \sin(\theta) a_\phi(r, \theta))}{\partial r} - \frac{\partial a_r(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} \right), \quad 0 = \left(\frac{\partial (r a_\theta(r, \theta, \phi))}{\partial r} - \frac{\partial a_r(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} \right).$$

Ahora hay que hacer algún tipo de suposición para que podamos encontrar, fácilmente algún potencial vectorial. Supongamos pues que

$$\left. \begin{aligned} a_r(r, \theta, \phi) &= cte \\ a_\phi(r, \theta, \phi) & \\ a_\theta(r, \theta, \phi) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta) = \frac{\partial (r \sin(\theta) a_\phi(r, \theta, \phi))}{\partial \theta}, \\ 0 = \frac{\partial a_r(r, \theta, \phi)}{\partial \phi}, \\ 0 = a_\theta(r, \theta, \phi) + r \frac{\partial a_\theta(r, \theta, \phi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r(r, \theta, \phi)}{\partial \theta}. \end{cases}$$

Integrando la primera obtendremos

$$\sin(\theta) = \frac{\partial (r \sin(\theta) a_\phi(r, \theta, \phi))}{\partial \theta} \Rightarrow a_\phi(r, \theta, \phi) = -\frac{\cos(\theta)}{r \sin(\theta)} + C_1(r, \theta).$$

De la segunda concluimos que $a_r = a_r(r, \theta)$, es decir, a_r es independiente de ϕ . Finalmente, de la tercera ecuación concluimos que podemos hacer adicionalmente $a_r = a_r(r)$ y $C_1(r, \theta) = 0$. Resumiendo:

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r \quad \wedge \quad \nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{a} = a_r(r) \hat{\mathbf{u}}_r - \frac{\cos(\theta)}{r \sin(\theta)} \hat{\mathbf{u}}_\phi.$$

Ejemplo 5.38 Dado el siguiente campo vectorial $\mathbf{a} = 4xy \hat{\mathbf{i}} - y^2 \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}$.

1. Calculemos el flujo de \mathbf{a} a través de un cubo unitario: $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$.

Tenemos que el flujo del campo vectorial es

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \int (2y + 1) dV = \int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_0^1 (2y + 1) dy = 2.$$

2. Calculemos el flujo del rotacional de ese campo a través de una semi esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $z \geq 0$.

El flujo del rotacional será

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint (4xy \hat{\mathbf{i}} - y^2 \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}) \cdot (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}}) = \int 4xy dx - \int y^2 dy,$$

como el circuito será una circunferencia de radio $r = 4$ en el plano $z = 0$ entonces al pasar a polares nos queda

$$x = 4 \cos(\theta) \Rightarrow dx = -4 \sin(\theta) d\theta; \quad y = 4 \sin(\theta) \Rightarrow dy = 4 \cos(\theta) d\theta,$$

con lo cual

$$\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = -5 \int_0^{2\pi} 4^2 \cos(\theta) \sin^2(\theta) d\theta = 0.$$

3. Consideremos ahora un cilindro $x^2 + y^2 = 16$ con $-1 \leq z \leq 1$.

- (a). Calculemos el flujo del campo a través de esa superficie. Como siempre, para encontrar el flujo del campo podemos hacerlo directamente por $\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}$, o a través de su divergencia $\int (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV$.

El flujo de este campo a través de la superficie que encierra el cilindro sería

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_+} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_c} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_-} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}.$$

Con ds_{\pm} las dos tapas del cilindro ($z = 1$ y $z = -1$), mientras que ds_c representa la superficie del cilindro. Una forma de resolverlo sería: se transforma el campo a cilíndricas, ya que $d\vec{S} = dS_c \hat{u}_r + dS_{\pm} \hat{u}_z$.

Esto es:

$$\mathbf{a} = 4(4 \cos(\theta))(4 \sin(\theta))(\cos(\theta) \hat{u}_r - \sin(\theta) \hat{u}_{\theta}) + (4 \sin(\theta))^2 (\sin(\theta) \hat{u}_r + \cos(\theta) \hat{u}_{\theta}) + z \hat{k},$$

y acomodando $\mathbf{a} = 16 \sin(\theta) (\cos(2\theta) \hat{u}_r - \sin(2\theta) \hat{u}_{\theta}) + z \hat{k}$. Entonces, el flujo en las “tapas” es

$$\int_{S_+} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_-} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = 16\pi.$$

mientras que en la superficie cilíndrica será:

$$\int_{S_c} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_d} 4d\theta dz (16 \sin(\theta) \cos(2\theta)) = 64 \int_{-1}^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta (\sin(\theta) \cos(2\theta)) = 0.$$

Finalmente

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = 32\pi.$$

Hubiera sido inmediato si hubiéramos utilizado el teorema de la divergencia y reutilizado los resultados del volumen anterior. Así

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \int (2y + 1) dV = \int (2(\rho \sin(\theta)) + 1) \rho d\theta d\rho dz$$

con $y = \rho \sin(\theta)$ y el diferencial de volumen $dV = \rho d\theta d\rho dz$.

Entonces, finalmente,

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{a}) dV = \int_{-1}^1 dz \int_0^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \sin(\theta) + \int_{-1}^1 dz \int_0^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

para que, otra vez

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = 32\pi,$$

porque el primer término de la suma se anula.

- (b). Encontremos el flujo del rotacional de ese campo para el caso $z \geq 0$.

El flujo del rotacional será exactamente el mismo que en caso de la semiesfera. Esto es

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

4. Calculemos alguna de las componentes longitudinales y transversales del campo.

Todo campo vectorial \mathbf{a} se puede separar en una componente longitudinal \mathbf{a}^l , y otra transversal \mathbf{a}^t .

Esto es:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^l + \mathbf{a}^t \quad \text{con} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{a}^l = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{a}^t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{a}^l = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{a}^l = \nabla \cdot \mathbf{a} = 2y + 1, \end{cases}$$

con lo cual tenemos

$$\partial_y a_z^l - \partial_z a_y^l = 0, \quad \partial_z a_x^l - \partial_x a_z^l = 0, \quad \partial_x a_y^l - \partial_y a_x^l = 0,$$

y $\partial_x a_x^l + \partial_y a_y^l + \partial_z a_z^l = 2y + 1$. Para empezar a acotar la solución, supongamos que $a_z^l = a_z^l(x, y, z) = 0$,

$$\partial_z a_y^l = 0 \quad \text{y} \quad \partial_z a_x^l = 0 \Rightarrow a_x^l = a_x^l(x, y) \quad \text{y} \quad a_y^l = a_y^l(x, y),$$

$$\partial_x a_y^l - \partial_y a_x^l = 0 \quad \text{y} \quad \partial_x a_x^l + \partial_y a_y^l = 2y + 1.$$

Otro par de suposiciones salvadoras son: $a_x^l = a_x^l(x, y) = f(x)$ y $a_y^l = a_y^l(x, y) = g(x)$. Estas nos garantizan que se cumple la ecuación $\partial_x a_y^l - \partial_y a_x^l = 0$. Es claro entonces que podemos encontrar una solución de la forma $a_x^l = f(x) = x$ y $a_y^l = g(y) = y^2$, que satisfaga $\partial_x a_x^l + \partial_y a_y^l = 2y + 1$. Con lo cual

$$\mathbf{a}^l = x\hat{\mathbf{i}} + y^2\hat{\mathbf{j}} \Rightarrow \mathbf{a}^t = \mathbf{a} - \mathbf{a}^l = x(4y - 1)\hat{\mathbf{i}} - 2y^2\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}.$$

Claramente, las suposiciones

$$a_z^l = a_z^l(x, y, z) = 0, \quad a_x^l = a_x^l(x, y) = f(x) \quad \text{y} \quad a_y^l = a_y^l(x, y) = g(x),$$

son arbitrarias y otras suposiciones pueden ser hechas y, tendremos resultados distintos.

5. Encontremos los potenciales escalar y vectorial asociados a este campo vectorial \mathbf{a} , a través de las componentes longitudinal \mathbf{a}^l y transversal \mathbf{a}^t .

El potencial escalar, $\phi = \phi(x, y, z)$, está asociado a la componente longitudinal, \mathbf{a}^l , del campo. Esto es

$$\nabla \times \mathbf{a}^l = 0 \Rightarrow \mathbf{a}^l = -\nabla\phi \Rightarrow \begin{cases} x = -\partial_x\phi(x, y, z) \Rightarrow \phi(x, y, z) = -\frac{x}{2} + \chi(y, z), \\ y^2 = -\partial_y\phi(x, y, z) \Rightarrow y^2 = -\partial_y\chi(y, z). \end{cases}$$

Con lo cual

$$\phi(x, y, z) = \frac{x}{2} + \frac{y^3}{3} + \varphi(z).$$

El potencial vectorial para un campo vectorial, $\Psi = \Psi(x, y, z)$, está asociado a la componente transversa \mathbf{a}^t del campo. Esto es

$$\nabla \cdot \mathbf{a}^t = 0 \Rightarrow \mathbf{a}^t = \nabla \times \Psi \Rightarrow \begin{cases} x(4y - 1) = \partial_y\Psi_z - \partial_z\Psi_y, \\ -2y^2 = \partial_z\Psi_x - \partial_x\Psi_z, \\ z = \partial_x\Psi_y - \partial_y\Psi_x. \end{cases}$$

Una vez más, y de forma arbitraria, suponemos $\Psi_z = 0$. Entonces las ecuaciones anteriores se convierten en

$$x(4y - 1) = -\partial_z\Psi_y; \quad -2y^2 = \partial_z\Psi_x; \quad \text{y} \quad z = \partial_x\Psi_y - \partial_y\Psi_x,$$

con lo cual

$$x(4y - 1) = -\partial_z\Psi_y \Rightarrow \Psi_y = -x(4y - 1)z + f(x, y)$$

y

$$-2y^2 = \partial_z\Psi_x \Rightarrow \Psi_x = -2y^2z + g(x, y).$$

Con estos resultados debemos satisfacer

$$z = \partial_x\Psi_y - \partial_y\Psi_x \Rightarrow z = -(4y - 1)z + \partial_x f(x, y) + 4yz - \partial_y g(x, y),$$

con lo cual es inmediato que una posible solución surge de $f(x, y) = g(x, y) = 0$, para que finalmente el potencial vectorial lo podamos expresar como

$$\Psi = -x(4y - 1)z\hat{\mathbf{i}} - 2y^2z\hat{\mathbf{j}}.$$

5.4.5 Teoremas integrales para campos tensoriales

A este nivel del texto, es perfectamente válido preguntarse si los teoremas integrales anteriormente aplicados a campos escalares y vectoriales pueden aplicarse a campos tensoriales en general. La respuesta a esta pregunta es si. Recordemos, nuevamente, que los escalares son cantidades que quedan

completamente determinados por un sólo número en el espacio tridimensional, es decir, no contienen direcciones. Mientras que los vectores son formas lineales en sus vectores bases $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$, es decir, se especifica por las tres cantidades a^i en \mathbb{R}^3 .

En la sección 3.3 estudiamos los tensores de esfuerzos y de inercia como ejemplos de cantidades físicas que deben especificarse por más de tres números. En el caso del tensor de esfuerzos, vimos, por ejemplo, que si consideramos el plano xy , el vector de superficie es: $ds_3 = ds_z$, y si sobre la dirección z (dirección 3) ejercemos algún tipo de presión, aparecerán esfuerzos en las direcciones x (dirección 1) y y (dirección 2). Las cantidades que usamos para describir los esfuerzos lo denotamos por σ_{ij} , donde el primer índice indica la dirección de la fuerza y el segundo la dirección de la normal de la superficie donde está aplicada. Hablamos entonces de nueve cantidades involucradas para especificar al tensor.

Ya discutimos que el teorema de Gauss para un campo vectorial \mathbf{a} es:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

Si nos vamos directamente a la notación de índices, podemos ver que el teorema de Gauss para campos vectoriales se escribe como

$$\int_V \partial_i a^i dV = \oint_S a^i \hat{n}_i dS,$$

con lo que nos podemos tomar la libertad de extendernos, sin probarlo de manera rigurosa, a tensores de rango superior.

$$\int_V \partial_k T^{ij\dots k\dots s} dV = \oint_S T^{ij\dots k\dots s} \hat{n}_k dS.$$

En cuanto al teorema de Stokes para un campo vectorial

$$\int_S \varepsilon^{ijk} (\partial_j a_k) \hat{n}_i dS = \oint_C a_k dx^k.$$

por lo tanto, para un campo tensorial sería:

$$\int_S \varepsilon^{ijk} (\partial_j T_{ij\dots k\dots s}) \hat{n}_i dS = \oint_C T_{ij\dots k\dots s} dx^k.$$

Por completitud, hemos enunciado estas dos formas para los teoremas integrales haciendo la extensión de la versión vectorial, pero la deducción rigurosa excede al alcance de este capítulo¹²

Practicando con SymPy

1. Como sabemos, una partícula que se mueve en un campo de fuerzas estará sujeta en cada punto a esta fuerza $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ de manera que el cambio de energía potencial es

$$U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Sea el siguiente campo de fuerzas

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{r}) = 3xy^3 \hat{\mathbf{i}} + 3x^2y^2 \hat{\mathbf{j}}.$$

En primer lugar, consideremos que la partícula se mueve desde el punto $(0,0)$ al punto (a,b) siguiendo las líneas rectas: $(0,0) \rightarrow (a,0) \rightarrow (a,b)$. Calculemos el trabajo realizado sobre la partícula

¹²Quienes estén interesados pueden consultar uno de los libros que nos inspiraron Thorne, K. S., Misner, C. W., y Wheeler, J. A. (2000). "Gravitation". (Freeman, San Francisco).

```
[1]: import sympy
      from sympy import *
      from sympy.vector import *
      init_printing()
```

```
[2]: # Definimos la función
      x, y, z = symbols('x y z', real=True)
      f1= [3*x*y**3, 3*x**2*y**2, 0]
      f1
```

[2]: $[3xy^3, 3x^2y^2, 0]$

```
[3]: r= [x,y,z]
      dr= [diff(x, x), diff(y, y), diff(z, z)]
      dr
```

[3]: $[1, 1, 1]$

Evaluamos la función para la trayectoria $(0, 0) \rightarrow (a, 0) \rightarrow (a, b)$.

```
[4]: a,b = symbols('a b', real=True)
      f1x=f1[0].subs({y:0})
      f1y=f1[1].subs({x:a})
      f1a=[f1x,f1y,0]
      f1a
```

[4]: $[0, 3a^2y^2, 0]$

```
[5]: integrate(f1x,(x,0,a)) + integrate(f1y,(y,0,b))
```

[5]: a^2b^3
Supongamos ahora que la partícula se mueve siguiendo la trayectoria $y = bx^3/a^3$.

```
[6]: y2=b*x**3/a**3
```

```
[7]: f1x=f1[0].subs({y:y2})
      f1y=f1[1].subs({y:y2})
      f1b=[f1x,f1y,0]
      f1b
```

[7]: $\left[\frac{3b^3x^{10}}{a^9}, \frac{3b^2x^8}{a^6}, 0 \right]$

```
[8]: dr= [diff(x, x), diff(y2, x), 0]
      dr
```

[8]: $\left[1, \frac{3bx^2}{a^3}, 0 \right]$

Hacemos el producto $f_1 \cdot dr$

```
[9]: f1bdr=sum([m*n for m,n in zip(f1b,dr)])
      f1bdr
```

[9]:
$$\frac{12b^3x^{10}}{a^9}$$

[10]: `integrate(f1bdr,(x,0,a))`

[10]:
$$\frac{12a^2b^3}{11}$$

El resultado es diferente, el campo de fuerzas no es conservativo

[11]: `R = CoordSys3D('R')`
`curl(3*R.x*R.y**3*R.i + 3*R.x**2*R.y**2*R.j+0*R.k)`

[11]:
$$(-3x_R y_R^2) \hat{k}_R$$

2. Consideremos ahora el siguiente campo

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{r}) = 2xy^3\hat{i} + 3x^2y^2\hat{j},$$

ligeramente diferente al anterior y repitamos los cálculos.

[12]: `x, y, z = symbols('x y z', real=True)`
`f2= [2*x*y**3,3*x**2*y**2,0]`
`f2`

[12]:
$$[2xy^3, 3x^2y^2, 0]$$

 Trayectoria $(0,0) \rightarrow (a,0) \rightarrow (a,b)$

[13]: `a,b = symbols('a b', real=True)`
`f2x=f2[0].subs({y:0})`
`f2y=f2[1].subs({x:a})`
`f2a=[f2x,f2y,0]`
`f2a`

[13]:
$$[0, 3a^2y^2, 0]$$

[14]: `r= [x,y,z]`
`dr= [diff(x, x), diff(y, y), diff(z, z)]`

[15]: `integrate(f2x,(x,0,a)) + integrate(f2y,(y,0,b))`

[15]:
$$a^2b^3$$

 Trayectoria $y = bx^3/a^3$.

[16]: `y2=b*x**3/a**3`
`f2xb=f2[0].subs({y:y2})`
`f2yb=f2[1].subs({y:y2})`
`f2b=[f2xb,f2yb,0]`
`dr= [1,diff(y2,x),0]`

[17]: `f2bdr=sum([m*n for m,n in zip(f2b,dr)])`
`f2bdr`
`integrate(f2bdr,(x,0,a))`

[17]:
$$a^2b^3$$

El trabajo es el mismo ya que el campo vectorial es conservativo

```
[18]: curl(2*R.x*R.y**3*R.i + 3*R.x**2*R.y**2*R.j+0*R.k)
```

[18]: $\hat{0}$

El potencial asociado a campo se puede calcular ahora

```
[19]: U=-(integrate(f2[0].subs(x,0),x) + integrate(f2[1],y))
U
```

[19]: $-x^2y^3$

3. Consideremos el siguiente campo vectorial en el plano

$$\mathbf{f} = \kappa \left[xy^2 \hat{i} + x^2y \hat{j} \right],$$

con k constante.

```
[20]: k, x, y = symbols('k x y', real=True)
f= [k*x*y**2,k*x**2*y,0]
f
```

[20]: $[kxy^2, kx^2y, 0]$

Es fácil comprobar que $\nabla \times \mathbf{f} = 0$, de manera que \mathbf{f} es conservativo.

```
[21]: curl(k*R.x*R.y**2*R.i + k*R.x**2*R.y*R.j)
```

[21]: $\hat{0}$

```
[22]: x1,y2,tau = symbols('x1 y2 tau')
x_sub = x1*tau
y_sub = y2*tau
dr = [diff(x_sub, tau), diff(y_sub, tau)]
dr
```

[22]: $[x_1, y_2]$

```
[23]: Fdr=sum([a*b for a,b in zip(f,dr)])
Fdr=Fdr.subs({x:x_sub,y:y_sub})
Fdr
```

[23]: $2kx_1^2y_2^2\tau^3$

```
[24]: Eq(Integral(Fdr,(tau,0,1)),integrate(Fdr,(tau,0,1)).simplify())
```

[24]: $\int_0^1 2kx_1^2y_2^2\tau^3 d\tau = \frac{kx_1^2y_2^2}{2}$

Para el potencial:

```
[25]: U=-(integrate(f[0].subs(x,0),x) + integrate(f[1],y))
U
```

[25]: $-\frac{kx^2y^2}{2}$

[26]: `gradient(-k*R.x**2*R.y**2/2)`

[26]: $(-x_R y_R^2 k) \hat{\mathbf{i}}_R + (-x_R^2 y_R k) \hat{\mathbf{j}}_R$

4. Consideremos el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{f} = \frac{\kappa y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{i}} - \frac{\kappa x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{j}},$$

con k constante.

De nuevo, es fácil ver que

$$\nabla \times \mathbf{f} = [\partial_x F_y - \partial_y F_x] \hat{\mathbf{k}} = 0.$$

[27]: `k, a, x, y, tau = symbols('k a x y tau', real=True)
f = [k*y/(x**2+y**2), -k*x/(x**2+y**2), 0]
f`

[27]: $\left[\frac{ky}{x^2 + y^2}, -\frac{kx}{x^2 + y^2}, 0 \right]$

Si calculamos el rotor, resulta

[28]: `curl(k*R.y/(R.x**2+R.y**2)*R.i - k*R.x/(R.x**2+R.y**2)*R.j).simplify()`

[28]: $\hat{\mathbf{0}}$

[29]: `x_sub = a*cos(tau)
y_sub = a*sin(tau)
dr = [diff(x_sub, tau), diff(y_sub, tau)]
dr`

[29]: $[-a \sin(\tau), a \cos(\tau)]$

[30]: `Fdr=sum([a*b for a,b in zip(f,dr)])
Fdr=Fdr.subs({x:x_sub,y:y_sub}).simplify()
Fdr`

[30]: $-k$

[31]: `Eq(Integral(Fdr,(tau,0,2*pi)), integrate(Fdr,(tau,0,2*pi)).simplify())`

[31]: $\int_0^{2\pi} (-k) d\tau = -2\pi k$

5.4.6 Ejercicios

1. Evalúe la integral $\mathbf{a} = x^2 \hat{\mathbf{i}} + y^2 \hat{\mathbf{j}} - z^2 \hat{\mathbf{k}}$, a lo largo del camino: $x = a\tau^2, y = b\tau, z = c \sin(\pi\tau/2)$.
2. Calcule la integral de línea $\mathbf{a} = (x^2 + 3y) \hat{\mathbf{i}} + (y^2 + 2x) \hat{\mathbf{j}}$, desde el origen al punto $P = (1, 2)$:
 - (a). a lo largo de la línea recta que une los dos puntos.
 - (b). a lo largo de la parábola que pasa por los dos puntos y por el punto $Q = (-1, 2)$.
 - (c). Diga si \mathbf{a} es conservativo o no.
3. Muestre si el campo vectorial $\mathbf{a} = xe^{x^2} \cos(y) \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}e^{x^2} \sin(y) \hat{\mathbf{j}}$, es un campo vectorial conservativo y, de serlo encuentre el campo potencial asociado.

4. Un campo vectorial es dado por

$$\mathbf{a} = \frac{\phi_0}{b^2} \left[y \left(1 + \frac{x}{b} \right) \hat{\mathbf{i}} + x \hat{\mathbf{j}} + \frac{xy}{b} \hat{\mathbf{k}} \right] e^{(x+z)/b},$$

donde ϕ_0 y b son constantes. Muestre si \mathbf{a} es o no conservativo y, de serlo encuentre el campo potencial.

5. El siguiente campo vectorial

$$\mathbf{f} = -GMm \frac{x}{a^3} \hat{\mathbf{i}} - GMm \frac{y}{a^3} \hat{\mathbf{j}} + 2GMm \frac{z}{a^3} \hat{\mathbf{k}},$$

es la fuerza de marea ejercida por la Luna sobre una partícula que se encuentra en la superficie de la Tierra. Consideremos para este problema el origen de coordenadas cartesianas en el centro de la Tierra, la Luna sobre el eje z y la distancia a es la distancia entre los centros de la Tierra y la luna. M y m las masas de la Tierra y Luna respectivamente, G la constante de gravitación universal. Encuentre el potencial para esta fuerza de marea.

6. Dado el campo de fuerzas $\mathbf{f} = r^n \mathbf{r}$. Verifique si existe una función escalar $\varphi(x, y, z)$ tal que $\mathbf{f} = -\nabla \varphi(x, y, z)$. En el caso de que sea posible, encuentre esa función $\varphi(x, y, z)$.

7. El campo magnético generado por una corriente I es

$$\mathbf{b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{j}} \right).$$

Encuentre un vector potencial magnético, \mathbf{a} , tal que $\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$.

8. Si un campo vectorial tiene la forma $\mathbf{b} = \nabla \phi \times \nabla \varphi$, entonces \mathbf{b} es solenoidal y su potencial vectorial es: $\mathbf{a} = \frac{1}{2} (\phi \nabla \varphi - \varphi \nabla \phi)$.

9. Dados el potencial vectorial del momento magnético dipolar \mathbf{m}

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \right) \mathbf{m} \times \mathbf{r} \quad \text{y} \quad \mathbf{f}_{1 \rightarrow 2} = \nabla (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{b}_1)$$

y la fuerza que registra un momento magnético dipolar \mathbf{m}_2 , sometido a un campo magnético externo, \mathbf{b}_1 producido por el otro momento \mathbf{m}_2 . Ambos dipolos están separados por una distancia \mathbf{r} . Muestre que esa fuerza ejercida por un dipolo magnético sobre otro también se puede escribir como :

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \frac{3\mu_0}{4\pi r^5} \left[(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{m}_2 + (\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{m}_1 + (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2) \mathbf{r} - \frac{5(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} \mathbf{r} \right],$$

con $\mathbf{m} = m_r \hat{\mathbf{u}}_r + m_\varphi \hat{\mathbf{u}}_\varphi + m_z \hat{\mathbf{u}}_z$ ¹³.

10. Desarrolle el teorema de Gauss para el caso bidimensional. Esto es, suponga una línea de carga orientada en la dirección del eje z genera un potencial

$$\varphi(\rho) = -q \frac{\ln(\rho)}{2\pi\epsilon_0}; \quad \mathbf{e} = -\nabla \varphi \quad \text{con} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

11. Pruebe la generalización de la segunda identidad de Green

$$\iiint_V \{ \zeta(\mathbf{r}) \mathbb{L} \xi(\mathbf{r}) - \xi(\mathbf{r}) \mathbb{L} \zeta(\mathbf{r}) \} dV = \iint_S p(\mathbf{r}) \{ \zeta(\mathbf{r}) \nabla \xi(\mathbf{r}) - \xi(\mathbf{r}) \nabla \zeta(\mathbf{r}) \} \cdot d\mathbf{s},$$

donde \mathbb{L} es el operador autoadjunto definido por $\mathbb{L} = \nabla \cdot (p(\mathbf{r}) \nabla) + q(\mathbf{r})$. Para la demostración pueden seguir los pasos de la sección 5.3.4.1.5, pero en este caso puede suponer que el campo vectorial es

$$\mathbf{a}(x^i) = \zeta(x^i) p(\mathbf{r}) \nabla \xi(x^i) - \xi(x^i) p(\mathbf{r}) \nabla \zeta(x^i) + \xi(x^i) q(\mathbf{r}) \zeta(x^i)$$

y aplicar el teorema de la divergencia.

¹³Yung, K. W., Landecker, P. B., y Villani, D. D. (1970). "An analytic solution for the force between two magnetic dipoles". Magnetic and electrical Separation, 9, p.39-59.

12. Considere una esfera de radio $r = a$ y carga Q . Construya una gráfica de su potencial electrostático para $0 < r < \infty$.
13. Considere una esfera de densidad uniforme ρ_0 , radio $r = a$ y masa M .
- (a). Muestre que la fuerza gravitacional por unidad de masa es

$$\mathbf{f} = - \left(\frac{4\pi G \rho_0}{3r} \right) \hat{\mathbf{u}}_r,$$

para $0 < r \leq a$.

- (b). Encuentre el potencial gravitacional asociado a esta fuerza.
- (c). Imagine un túnel que atraviesa la esfera pasando por su centro. Encuentre la ecuación de movimiento y la expresión del período para una partícula de masa m , que se deja caer por ese túnel.
14. Dado un vector potencial magnético \mathbf{a} tal que $\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$. Muestre que
- $$\iint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{es invariante de calibre: } \mathbf{a}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \nabla \chi(\mathbf{r}).$$
15. La fuerza de Lorentz para una partícula con carga q que se mueve con una velocidad \mathbf{v} en un campo eléctrico \mathbf{e} y magnético \mathbf{b} es: $\mathbf{f} = q(\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b})$. Muestre que

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f} &= q(\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}) \\ \mathbf{e} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{a} &= \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{f} = \left[-\nabla\phi - \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \right].$$

Bibliografía

- [1] Arfken, G. B., Weber, H., y Weber, H.J. (2000) *Mathematical Methods for Physicists* 5ta Edición (Academic Press, Nueva York)
- [2] Borisenko, A.I. y Tarapov I.E. (1968) *Vector and Tensor Analysis* (Dover Publications Inc, Nueva York)
- [3] Dennery, P. y Krzywicki, A. (1995) *Mathematics for Physicists* (Dover Publications Inc, Nueva York)
- [4] Harper, C. (1971) *Introduction to Mathematical Physics* (Prentice Hall, Englewood Cliff, N.J.)
- [5] Hassani, S. (1991) *Foundations of Mathematical Physics* (Prentice Hall, International Edition, London)
- [6] Hauser, W (1971) *Introduction to Principles of Electromagnetism* (Addison-Wesley Pub Co Reading)
- [7] Nguyen-Schäfer, H. y Schmidt, J.-P. (2017) *Tensor Analysis and Elementary Differential Geometry for Physicists and Engineers*, (Springer-Verlag Berlin) [doi:10.1007/978-3-662-48497-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-48497-5).
- [8] Riley, K.F., Hobson, M.P. y Bence, S.J. (2002) *Mathematical Methods for Physics and Engineering* (Cambridge University Press)
- [9] Santaló, L.A (1969) *Vectores y Tensores* (Editorial Universitaria, Buenos Aires)
- [10] Schutz, B. (1980) *Geometrical Methods in Mathematical Physics* (Cambridge University Press, Londres)
- [11] Spiegel, M. (1959) *Vector Analysis* (Schaums Outline Series, McGraw Hill New York)