1er. Examen Parcial — Sem. A-2004
Mecánica Cuántica

1. En una cierta base ortonormal, dos operadores están dados por las matrices

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3i & 0 \\ -3i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) Encuentre sus autovalores y autovectores
   (b) Determine si A y/o B son observables
   (c) Determine si los siguientes conjuntos $\{A, B\}$ y $\{A^2, B\}$ forman un conjunto completo de observables que conmutan y en caso afirmativo de una base común de autovectores.

   8 ptos.

2. **Operador Paridad:** Sea Π el operador paridad, definido por

$$\Pi|\mathbf{r} >= | -\mathbf{r} >$$

   Puede demostrarse que, dado un estado $|\psi >$:

$$< \mathbf{r}|\Pi|\psi >= \psi(-\mathbf{r}) =< -\mathbf{r}|\psi >$$

   (a) Demuestre que esto implica $< \mathbf{r}|\Pi =< -\mathbf{r}|$ y de allí que Π es hermítico.
   (b) Encuentre la acción de Π^n, con n entero, sobre los estados $|\psi >$.
   (c) Denotando p_Π los autovalores de Π, calcule $\Pi^2|\psi >$, y demuestre que los valores posibles de p_Π son 1 y -1.
   (d) Defina los operadores

$$P_+ = \frac{1+\Pi}{2} \qquad P_- = \frac{1-\Pi}{2}$$

   Demuestre que son hermíticos y que son proyectores.
   (e) Defina los kets

$$|\psi_+ >= P_+|\psi >, \quad |\psi_- >= P_-|\psi >$$

   y demuestre que son autoestados de Π con autovalores 1 y -1. $P_\pm$ son entonces los proyectores sobre los autosubespacios de Π.
   (f) Demuestre que $|\psi_+ >$ y $|\psi_- >$ son ortogonales
   (g) Demuestre que forman una base completa, usando los proyectores.

   8 ptos.

3. Sean las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Demuestre que, para todas ellas:

$$e^{i\sigma\theta} = \cos(\theta) + i\sigma\sin(\theta)$$

4 ptos.