1er. Parcial— (recuperativo)

Mecánica Cuántica

Una partícula de espín $\frac{1}{2}$ bajo la acción de campos magnéticos externos: resonancia magnética

Una partícula de espín $\frac{1}{2}$ se encuentra bajo la acción de dos campos magnéticos, uno constante que define al eje Z y otro perpendicular al anterior que depende del tiempo. Considere el espacio de estados expandido por la base ortonormal constituida por los autovectores de $S_z = \hbar\sigma_z/2$, que denotaremos como $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. Sea $H(t)$ el operador hamiltoniano del sistema, el cual viene dado por

$$H(t) \equiv \frac{\hbar}{2}(\omega_0\,\sigma_z + \omega_1\,\sigma_x \cos\omega t + \omega_1\,\sigma_y \sin\omega t), \tag{1}$$

donde ω_0, ω_1 y ω son constantes. Defina el operador unitario

$$R(t) \equiv \exp(i\omega t S_z/\hbar)$$

1. Sea $\tilde{H}$ el operador definido por $\tilde{H} \equiv R(H - \omega\, S_z)R^\dagger$, ¿es $\tilde{H}$ un operador hermítico? Demuestre que el mismo puede ser reescrito como

   $$\tilde{H} = -\frac{\hbar}{2}(\Delta\sigma_z + \omega_1\sigma_x), \tag{2}$$

   donde $\Delta \equiv \omega - \omega_0$. **(4 ptos.)**

2. Encuentre los autovalores y autovectores de $\tilde{H}$. **(4 ptos.)**

3. Sea $|\tilde{\psi}_t\rangle \equiv R(t)|\psi_t\rangle$. Muestre que $|\tilde{\psi}_t\rangle$ satisface

   $$i\hbar\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}_t\rangle = \tilde{H}|\tilde{\psi}_t\rangle, \tag{3}$$

   si $|\psi_t\rangle$ satisface

   $$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_t\rangle = H|\psi_t\rangle. \tag{4}$$

   (4 ptos.)

4. Integre (3) con la condición inicial $|\tilde{\psi}_0\rangle \equiv R(0)|+\rangle$ y obtenga $|\tilde{\psi}_t\rangle$. (Note que $\tilde{H}$ no depende del tiempo) **(3 ptos.)**

5. A partir de $|\tilde{\psi}_t\rangle$ obtenga $|\psi_t\rangle$. **(2 ptos.)**

6. Halle $|\langle -|\psi(t)\rangle|^2$, la probabilidad de que a $t > 0$ obtengamos como resultado de la medición de S_z el resultado $-\hbar/2$. Muestre que dicha probabilidad viene dada por

   $$\mathcal{P}(t) = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \Delta^2}\sin^2\left(\sqrt{\omega_1^2 + \Delta^2}\, t/2\right).$$

   (3 ptos.)

Ayuda:

$$e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}} = \mathbf{1}\cos|\alpha| + i\,\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}}{|\alpha|}\sin|\alpha|$$