

1er. Examen Parcial — Sem. B-2004
Mecánica Cuántica

1. Sean las matrices de Pauli en una cierta base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Encuentre las relaciones de conmutación entre estas tres matrices
(b) Considere un sistema con el Hamiltoniano

$$H = \hbar(w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2)$$

donde w_1, w_2 son constantes positivas, y los observables

$$A = a\sigma_3, \quad B = b\sigma_2$$

Indique si $\{H, A\}$ o $\{H, B\}$ forman un C.C.O.C.

- (c) El sistema está en el estado $|\psi\rangle = |u_2\rangle$, se mide su energía. Cuáles son los posibles resultados y cuál es la probabilidad de medir cada uno?
(d) Encontrar el valor medio y la desviación cuadrática media de la energía en este sistema.
(e) Si en vez de la energía se mide la variable asociada al operador A , cuáles son los posibles resultados y con qué probabilidades?

10 ptos.

2. Considere un Universo donde existen dos tipos de neutrinos (en el nuestro son tres), denominados neutrinos de electrón (ν_e) y neutrinos de muón (ν_μ); y en el un sistema con Hamiltoniano estacionario H tal que

$$H|\nu_i\rangle = E_i|\nu_i\rangle, \quad i = 1, 2$$

Una fuente emite un haz de neutrinos de electrón a $t = 0$, representados por el estado

$$|\nu_e\rangle = \cos(\theta)|\nu_1\rangle + \sin(\theta)|\nu_2\rangle$$

- (a) Determine si este estado está normalizado y de ser necesario normalícelo.
(b) Los neutrinos de muón se describen con el estado

$$|\nu_\mu\rangle = -\sin(\theta)|\nu_1\rangle + \cos(\theta)|\nu_2\rangle$$

Determine si este estado está normalizado y de ser necesario normalícelo.

- (c) Encuentre $|\langle\nu_\mu|\nu_e\rangle|^2$. Esta es la probabilidad de encontrar un ν_μ en el haz de ν_e
(d) Encuentre el estado del haz, $|\nu_e(t)\rangle$ en un tiempo t posterior

- (e) Demuestre que la probabilidad de encontrar un ν_μ en el haz de ν_e en el tiempo t , es decir $|\langle \nu_\mu | \nu_e(t) \rangle|^2$, puede escribirse como

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = 1 - A[1 - \cos((E_1 - E_2)t/\hbar)]$$

y determine la constante A .

10 ptos.

Si los neutrinos son relativistas, las energías se pueden aproximar por

$$E_i \simeq p + \frac{m_i^2}{2p}$$

Y el momentum p es igual para los dos autoestados en el haz. La probabilidad encontrada, que es la probabilidad de que un ν_e se convierta en un ν_μ , viene entonces dada por la diferencia de masas $\Delta m = m_1 - m_2$. En nuestro universo, los neutrinos de electrón producidos en el Sol se convierten en neutrinos de muón, y es gracias a estas así llamadas oscilaciones que se ha podido determinar que los neutrinos tienen masa.