

2do. Examen Parcial — Sem. A-05

Mecánica Cuántica

Un CCOC para el oscilador armónico isótropo 2-dimensional.

Sean a_x y a_y los operadores de aniquilación de un oscilador armónico isótropo 2-dimensional con Hamiltoniano H :

$$H = \hbar\omega(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1), \quad (1)$$

$$[a_x, a_x^\dagger] = 1, \quad [a_y, a_y^\dagger] = 1 \quad (2)$$

$$[a_x, a_y] = [a_x, a_y^\dagger] = [a_x^\dagger, a_y] = [a_x^\dagger, a_y^\dagger] = 0. \quad (3)$$

1. Pruebe

$$[a_x^\dagger a_x, (a_x^\dagger)^p] = p(a_x^\dagger)^p, \quad (4)$$

$$[a_y^\dagger a_y, (a_y^\dagger)^q] = q(a_y^\dagger)^q, \quad (5)$$

con p y q enteros positivos.

2. Definiendo los operadores

$$J_1 \equiv \frac{1}{2}(a_x^\dagger a_y + a_y^\dagger a_x), \quad (6)$$

$$J_2 \equiv \frac{i}{2}(a_y^\dagger a_x - a_x^\dagger a_y), \quad (7)$$

$$J_3 \equiv \frac{1}{2}(a_x^\dagger a_x - a_y^\dagger a_y), \quad (8)$$

$$T \equiv \frac{1}{2}(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y), \quad (9)$$

demuestre

$$a) [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k,$$

$$b) \vec{J}^2 = T(T+1),$$

$$c) [\vec{J}^2, T] = 0,$$

$$d) [\vec{J}^2, J_3] = 0.$$

De (??) se sigue que podemos utilizar todos los resultados de la teoría general del momentum angular. En particular, denotando por $j(j+1)$ y m los autovalores de $\vec{J}^2$ y J_3 respectivamente, tenemos que

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, \infty; \quad m = -j, -j+1, \dots, j. \quad (10)$$

3. Demuestre que los vectores

$$|n_x = j+m, n_y = j-m\rangle = \sqrt{\frac{1}{(j+m)!}} \sqrt{\frac{1}{(j-m)!}} (a_x^\dagger)^{j+m} (a_y^\dagger)^{j-m} |n_x = 0, n_y = 0\rangle, \quad (11)$$

donde $|n_x = 0, n_y = 0\rangle$ es el estado base del oscilador, son autovectores de $\vec{J}^2$ y J_3 con autovalores $j(j+1)$ y m respectivamente.

4. El espectro de energías del oscilador armónico isótropo 2-dimensional es degenerado: el grado de degeneración del autovalor $E_n = \hbar\omega(n+1)$ del Hamiltoniano (??) es $g_n = n+1$ donde $n = n_x + n_y$. Se desprende de lo anterior que H por si solo no constituye un CCOC. ¿Constituye el conjunto $\{H, \vec{J}^2\}$ un CCOC?. ¿Constituye el conjunto $\{H, \vec{J}^2, J_3\}$ un CCOC?. Dé argumentos que soporten su respuesta.