2do. Examen Parcial — Sem. B-2004

Mecánica Cuántica

Considere un sistema mecánico cuántico formado por dos osciladores unidimensionales acoplados, con un Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}(P_1^2 + P_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2[(X_1 - a)^2 + (X_2 + a)^2 + 2\lambda(X_1 - X_2)^2]$$

Para encontrar los estados de energía de este sistema, haremos un cambio a las coordenadas y momentos del centro de masa y relativas, de modo que los correspondientes operadores se escriben

$$X_G = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)\,; \quad X_R = X_1 - X_2$$

$$P_G = P_1 + P_2\,; \quad P_R = \frac{1}{2}(P_1 - P_2)$$

1. Encuentre las relaciones de conmutación entre estos nuevos operadores

2. Demuestre que el operador energía cinética puede escribirse

$$T = \frac{1}{2\mu_G}P_G^2 + \frac{1}{2\mu_R}P_R^2$$

y encuentre μ_G y μ_G

3. Demuestre que el Hamiltoniano puede escribirse

$$H = H_G + H_R + m\omega^2 a^2 \frac{4\lambda}{1 + 4\lambda}$$

donde

$$H_G = \frac{P_G^2}{2\mu_G} + \frac{1}{2}\mu_G\omega_G^2 X_G^2$$

$$H_R = \frac{P_R^2}{2\mu_R} + \frac{1}{2}\mu_R\omega_R^2 X_R'^2, \quad X_R' = X_R - \frac{2a}{1 + 4\lambda}$$

y encuentre ω_G, ω_R.

4. Defina los correspondientes operadores de creación y destrucción $a_G, a_G^\dagger, a_R, a_R^\dagger$

5. Considere los vectores de estado del sistema como el producto tensorial de los autovectores correspondientes a dos osciladores desacoplados, uno asociado al centro de masas y otro relativo a él:

$$|\phi\rangle = |\phi_G\rangle \times |\phi_R\rangle$$

Denotando n y p respectivamente a los números cuánticos asociados a estos dos osciladores, escriba los autovalores de la energía del sistema $E_{n,p}$.

6. Encuentre el grado de degeneración de los niveles de energía

7. Demuestre que los elementos de matriz distintos de cero de los operadores posición, $\langle\phi_{n',p'}|X_G|\phi_{n,p}\rangle$ y $\langle\phi_{n',p'}|X_R|\phi_{n,p}\rangle$, son respectivamente aquellos con $n = n' \pm 1, p = p'$ (para X_G) y $n = n', p = p' \pm 1$ (para X_R).

8. Esto quiere decir que las únicas frecuencias de Bohr que pueden aparecer en la evolución temporal de los valores medios $\langle X_G \rangle$ y $\langle X_R \rangle$ son respectivamente

$$\frac{1}{\hbar}(E_{n\pm1,p} - E_{n,p})$$
$$\frac{1}{\hbar}(E_{n,p\pm1} - E_{n,p})$$

Escriba estas frecuencias de Bohr en términos de ω_G y ω_R.