3er. Examen Parcial — Sem. A-2004

Mecánica Cuántica

Consideraremos un sistema de partículas con spin 1/2, y el operador de spin

$$\vec{S} = S_x\hat{\imath} + S_y\hat{\jmath} + S_z\hat{k}$$

Los estados de cada partícula se escriben en términos de los autoestados de S^2 y S_z, que denotaremos:

$$\begin{aligned} |+\rangle_a &: \text{ tal que } S_z|+\rangle_a = \frac{1}{2}|+\rangle_a \\ |-\rangle_a &: \text{ tal que } S_z|-\rangle_a = -\frac{1}{2}|-\rangle_a \end{aligned} \tag{1}$$

1. La partícula **1** está en el estado

$$|p\rangle_1 = \alpha|+\rangle_1 + \beta|-\rangle_1 \tag{2}$$

   (a) Encuentre la condición de normalización y la probabilidad de que una medición del spin de la partícula **1** dé como resultado $+1/2$

   (b) Encuentre $S_{x,1}|+\rangle_1$ y $S_{x,1}|-\rangle_1$

(2 ptos.)

2. Considere otras dos partículas, **2** y **3**, y los operadores de spin $\vec{S}_2$ y $\vec{S}_3$ actuando sobre los respectivos espacios de Hilbert H_2 y H_3. En el sistema que consiste de estas dos partículas tendremos el operador de spin total $\vec{S} = \vec{S}_2 \otimes 1 + 1 \otimes \vec{S}_3$ actuando en el espacio $H_{23} = H_2 \otimes H_3$.

   (a) Cuáles son los posibles autovalores de los operadores S^2 y S_z?

   (b) Escriba los vectores que representan el estado del sistema en la base de producto directo

$$|m_2, m_3\rangle = |m_2\rangle_2 \otimes |m_3\rangle_3$$

   en términos de la notación de (1)

   (c) Escriba estos vectores en la base de autoestados de S^2 y S_z.

(3 ptos.)

3. Considere ahora el sistema de tres partículas **1**, **2** y **3**.

   (a) Cuáles son los posibles autovalores de los operadores asociados al spin total, S^2 y S_z?

   (b) Cuántos autovectores de estos operadores existen en el espacio producto?

(2 ptos.)

4. Para dos partículas cualesquiera **a** y **b**, considere el conjunto de estados

$$\begin{aligned} |\psi_\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_a|+\rangle_b \pm |-\rangle_a|-\rangle_b\right) \\ |\phi_\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_a|-\rangle_b \pm |-\rangle_a|+\rangle_b\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Ésta es la llamada *base de Bell*

(a) Siendo $\vec{S}$ el operador de spin total, son estos vectores autovectores de S^2? Y de S_z?

(b) Defina los operadores

$$P = S_{z,a} \otimes S_{z,b}\ ; \quad Q = S_{x,a} \otimes S_{x,b} \tag{4}$$

y demuestre que los vectores de la base de Bell son autovectores de P y Q, hallando sus autovalores.

(5 ptos.)

5. Considere de nuevo la partícula **1**, en el estado (2), y que las partículas **2** y **3** están en el estado definido por

$$|p\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_2|+\rangle_3 + |-\rangle_2|-\rangle_3\right) \tag{5}$$

(a) Encuentre el estado del sistema de las tres partículas, $|\chi\rangle = |p\rangle_1 \otimes |p\rangle_{23}$

(b) Escriba $|\chi\rangle$ en términos de la base de Bell para el sistema **1-2** y de los estados de la partícula **3**, es decir, en términos de $|\phi_\pm\rangle_{12}, |\psi_\pm\rangle_{12}$,y combinaciones lineales de $|+\rangle_3$ y $|-\rangle_3$

(5 ptos.)

6. (a) Se mide el operador P sobre el sistema formado por las partículas **1** y **2**, y se encuentra que el resultado es positivo. Qué puede decirse sobre el estado de la partícula **3**, usando $|\chi\rangle$ calculado arriba ?

(b) Se mide a continuación el autovalor del operador Q y es negativo. P y Q conmutan. Qué puede decirse sobre el estado de la partícula **3** ?

Note que una medición de P o Q sobre las partículas **1** y **2** arroja información sobre la partícula **3**.

(3 ptos.)