Ejercicios propuestos 1
Matemáticas de la Física 3

1. Pruebe la identidad
$$x\delta_{(0)}^{(m)} = -m\delta_{(0)}^{(m-1)}.$$

2. En $\mathcal{R}^1$, calcule en el sentido de las distribuciones:

   (a)
   $$\frac{d^2}{dx^2}|\cos x|.$$

   (b)
   $$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)\Theta(x)e^{\lambda x},\ \lambda \text{ } \textit{constante}.$$

   (c)
   $$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2\right)\Theta(t)\frac{\sin \omega t}{\omega},\ \omega \text{ } \textit{constante}.$$

   (d)
   $$\frac{d^3}{dx^3}\Theta(x)\frac{x^2}{2!}$$

3. Demuestre que

   (a)
   $$\Theta(x)e^{-ix} * \Theta(x)e^{ix} = \Theta(x)\sin x.$$

   (b)
   $$\Theta(x)e^{-\sqrt{2}x} * \Theta(x)e^{\sqrt{2}x} = \Theta(x)\frac{\sinh \sqrt{2}x}{\sqrt{2}}.$$

4. Efecte el producto de convolución $P_a * P_b$, donde
$$P_a = \frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2 + a^2},$$
con a una constante positiva.

5. Puebe que el conjunto $\{f_\epsilon(x)\}$ para $\epsilon \to 0^+$ es una familia delta en $\mathcal{R}^1$ con $f_\epsilon(x)$ dado por
$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}.$$

6. Demuestre que en $\mathcal{R}^2$, $\frac{1}{2\pi}\log|\vec{x}|^{-1}$ satisface en el sentido de las distribuciones
$$\Delta\frac{1}{2\pi}\log|\vec{x}|^{-1} = -\delta(\vec{x}),$$
donde Δ es el operador laplaciano.