Ejercicios propuestos 4
Matemáticas de la Física 3

1. Encuentre la solución a los problemas de contorno y valores iniciales siguientes:

   a)

$$\partial_t\partial_t u - \partial_x\partial_x u = A\sinh x, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0$$

$$u(o,t) = h, \qquad u(l,t) = k, \qquad t \geq 0$$
$$u(x,o) = \partial_t u(x,o) = 0, \qquad 0 \leq x \leq l,$$

   donde A, h y k son constantes.

   b)

$$\partial_t\partial_t u + a\partial_t u - \partial_x\partial_x u = 0, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0$$

$$u(o,t) = u(l,t) = 0, \qquad t \geq 0$$
$$u(x,o) = 0, \qquad \partial_t u(x,o) = f_2(x), \qquad 0 \leq x \leq l.$$

   c)

$$\partial_t u - \partial_x\partial_x u = q(x,t), \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0$$

$$u(o,t) = h_1(t), \qquad \partial_x u(l,t) = h_2(t), \qquad t \geq 0$$
$$u(x,o) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq l.$$

   Indicaciones: lleve primero el problema a uno con condiciones de contorno homogeneas y luego proponga la solución a este ultimo como una expansión en serie de Fourier de $\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$.

2. Considere el problema de la propagación hiperbólica del calor,

$$T\partial_t\partial_t u + \partial_t u - X\partial_x\partial_x u = q(x,t) \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0$$
$$u \to 0 \quad \text{para} \quad |x| \to \infty$$

Demuestre que la función de Green apropiada viene dada por

$$G(x,t) = -\Theta(t)e^{-t/2T}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}\frac{\sin\Omega t}{\Omega}$$

donde $\Omega = \sqrt{(4X\omega^2T-1)/2T}$. Ayuda: tome transformadas de Fourier en la variable x y transformadas de Laplace en la variable t en la ecuación para la función de Green, y luego invierta.

3. Considere el problema de valores iniciales

$$\partial_t\partial_t u - \partial_x\partial_x u - c^2 u = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = f_1(x), \qquad \partial_t u(x,0) = f_2(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Empleando transformadas de Fourier en la variable x, demuestre que la solución viene dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, f_1(\xi)\cos(\sqrt{\omega^2-c^2}t)e^{-i\omega\xi} \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega x}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, f_2(\xi)\frac{\sin(\sqrt{\omega^2-c^2}t)}{\sqrt{\omega^2-c^2}}e^{-i\omega\xi} \end{aligned}$$

4. Encuentre la función de Green causal solución al problema

$$\partial_t\partial_t G(x,t) - \partial_x\partial_x G(x,t) = \delta(t)\delta(x), \qquad G \equiv 0, \qquad t < 0$$

utilizando transformada de Fourier en la variable x y transformada de Laplace en la variable t.